Oponentský posudek na bakalářskou práci:

Filip Dohnálek: Náhodné mozaiky

Filip Dohnálek se ve své bakalářské práci zabývá pravděpodobnostními modely pro náhodné mozaiky. Po definici pojmu mozaika v $\mathbb{R}^d$ a náhodná mozaika v $\mathbb{R}^d$, uvádí seznam několika modelů náhodných mozaik. Pro mozaiky v $\mathbb{R}^2$ zavede tři množiny význačných bodů – množinu uzlů (vrcholů), množinu středů hran a množinu středů buněk náhodné mozaiky. Tyto množiny bodů, nahlížené jako funkce náhodné mozaiky, tvoří náhodné bodové procesy a je možno zadefinovat Palmovu míru náhodné mozaiky vzhledem k těmto bodovým procesům. Tuto Palmovu míru je pak možné využít k výpočtu středních hodnot různých geometrických charakteristik náhodných mozaik. Je formulováno a dokázáno tvrzení o dekompozici střední hodnoty funkce náhodné mozaiky pomocí Palmovy míry vzhledem ke středům buněk a intenzity bodového procesu středů buněk. Toto je použito k získání střední hodnoty objemu typické buňky. Vzorce pro střední hodnoty dalších geometrických charakteristik jsou doplněny podle literatury. Práce končí diskusí dvou modelů – Croftonovy a Dirichletovy mozaiky konstruovaných z Poissonova procesu. Geometrické charakteristiky těchto náhodných mozaik jsou spočteny dle vzorců z předchozí kapitoly a je ukázána ilustrační realizace modelu.

Grafická i formální úroveň práce je velmi dobrá. Dojem bohužel kazí čeština, často ovlivněná anglickými konstrukcemi – například:
- "polytop" se česky řekne mnohostěn,
- "superposition" lze označit prostě jako sjednocení,
- "Vzniklá mozaika založena ... nazýváme silové pole." – ignoruje shodu podmětu s přísudkem,
- "Rozdíl mezi předcházející mozaikou spočívá v obecném pojetí množiny ϕ."

Matematická úroveň je také velmi dobrá, výhrady lze mít snad jen k nevhodně zvolené notaci na stranách 9 a 13, kde na straně 9 je ω používáno jako označení lokálně konečné množiny na součinu Eukleidovského prostoru s prostorem kót a na straně 13 jako označení náhodného jevu.

Práce představuje stručný úvod do modelů náhodných mozaik, autor v ní přehledně soustředil fakta ze širokého spektra literatury, zdroje výsledků jsou dobře citovány. Téma je dost pokročilé, rozhodně přesahuje látku běžně vyučovanou na bakalářském stupni studia. Bohužel ale práce působí hlavně jako seznam definic a faktů, chybí příklady, souvislosti, odvození (s výjimkou důkazu Tvrzení 3 na straně 21, ten je pěkně sepsán). I v závěrečných příkladech Croftonovy a Dirichletovy mozaiky dostaneme pouze seznam vzorců. Některých navíc zřejmě nesprávných – variační matice na straně 27 zcela jistě nejsou správně, a lze to poznat pomocí znalostí z druhého ročníku.

Celkově lze říci, že práce splňuje požadavky kladené na bakalářskou práci a doporučuji ji jako takovou uznat. Její hodnocení by ale zajisté zlepšily odpovědi na níže uvedené otázky.

Otázky:

– Proč nemohou matice $Var(A, U, N)$ být variačními maticemi?

– Pokud by nás zajímaly pouze korelace mezi veličinami A, U, N pro Croftonovu mozaiku, nikoli kovariance – závisely by na hodnotách parametru ρ (resp. L_A)? Uměl byste zdůvodnit proč?

– Buď $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bijekce definovaná předpisem $G(x_1, x_2) = (x_1/2, x_2/2)$. Mějme Dirichletovu mozaiku Θ a Poissonův proces Φ, který ji generuje. A uvažujme (bodově) transformovaný Poissonův proces $\Phi' = G(\Phi)$ a transformovanou mozaiku $\Theta' = G(\Theta)$. Pak Φ' je opět Poissonův proces, ovšem se čtyřikrát větší intenzitou a Θ' je opět Dirichletova mozaika. Jak se změní střední hodnoty a rozptyly veličin A, U, N? A kdybychom uvažovali obecné kladné k a transformaci $G_k(x_1, x_2) = (x_1/k, x_2/k)$? V jakém řádu se tedy musí vyskytovat konstanta τ v jednotlivých členech obecného tvaru variační matice $Var(A, U, N)$?

[redacted]

RNDr. Michaela Prokešová, Ph.D.