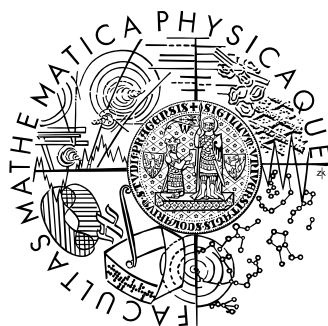


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta
BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Zuzana Jamáriková

Metody výpočtu veličiny VaR pro tržní riziko

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petr Myška
Studijní program: Matematika, Finanční matematika

2009

Na tomto místě bych chtěla poděkovat především svému vedoucímu bakalářské práce RNDr. Petrovi Myškovi, za čas, trpělivost a ochotu, se kterou se mi věnoval. Dále za cenné rady a připomínky, které mi poskytoval. Také bych chtěla poděkovat Jakubovi Černému za pomoc při tvorbě obrázků a Karlovi Scheibovi za pomoc při tisku bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 29.5.2009

Zuzana Jamáriková

Obsah

1. Úvod	4
2. Teoretická část	5
2.1. Definice statistických pojmů	5
2.2. Riziko	6
2.2.1. Definice jednotlivých rizik	6
2.2.2. Klasifikace rizik	7
3. Value at Risk jako nástroj pro měření rizik	8
3.1. Definice veličiny Value at Risk	8
3.2. Jednoduchá ukázka interpretace VaR	11
3.3. Klíčové problémy metody VaR	11
3.4. Výhody a nevýhody metody Value at Risk a alternativních metod k měření rizik	12
3.5. Použití výsledků výpočtu Value at Risk	13
3.6. Metody výpočtu Value at Risk	14
3.6.1. Metoda historické simulace	14
3.6.2. Delta-normální metoda neboli metoda rozptylů a kovariancí	18
3.6.3. Strukturovaná metoda Monte Carlo	22
3.6.4. Srovnání jednotlivých metod	27
4. Aplikační část	28
4.1. Výpočet VaR metodou historické simulace	28
4.1.1. Výpočet jednotlivých typů VaR pro různé cenné papíry	28
4.1.2. Výpočet jednotlivých VaR pro celé portfolio	32
4.1.3. Výsledné hodnoty VaR u historické simulace	34
4.2. Výpočet VaR metodou rozptylů a kovariancí	36
4.2.1. Výpočet jednotlivých typů VaR pro různé cenné papíry	37
4.2.2. Výpočet jednotlivých VaR pro celé portfolio	41
4.2.3. Výsledné hodnoty VaR u metody rozptylů a kovariancí	43
4.2.4. Test normality	44
5. Závěr	50
Literatura	51

Název práce: Metody výpočtu veličiny VaR pro tržní riziko

Autor: Zuzana Jamáriková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petr Myška

e-mail vedoucího: pmyska@csas.cz

Abstrakt: Tato práce se zabývá jedním z přístupů k měření tržních rizik, metodou Value at Risk (VaR). Představujeme VaR jako metodu, která udává maximální ztrátu na dané hladině spolehlivosti. Studujeme přednosti metody jako celku a poukazujeme na některé nedostatky. Dále představujeme konkrétní přístupy k výpočtům, tedy metodu historické simulace, metodu rozptylů a kovariancí a metodu Monte-Carlo. Jednotlivé přístupy srovnáváme a ukazujeme na jejich výhody a nevýhody. Teoretické poznatky jsme pak využili na konkrétních příkladech v aplikační části.

Klíčová slova: Riziko, Volatilita, Value at Risk

Title: Calculation methods of market risk VaR

Author: Zuzana Jamáriková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Petr Myška

Supervisor's e-mail address: pmyska@csas.cz

Abstract: Presented thesis deals with one of the possible approaches to the market risk quantification known as Value at Risk (VaR). VaR is introduced as a method determining maximum loss on a defined level of credibility. Method preferences in its complexity and some deficiencies are studied. Further some particular approaches to calculations are presented, namely the historical simulation method, the variance and covariance method and the Monte Carlo simulation method. Individual approaches are compared and its advantages and disadvantages pointed out. In the application part the theoretical findings are utilised to demonstrate calculations on concrete examples.

Keywords: Risk, Volatility, Value at Risk

1. Úvod

Řízení rizik je jedním z nejdůležitějších úkolů pro správné fungování bank a ostatních finančních institucí. V dnešní době, kdy svět postihla finanční krize a na trzích vládne stále větší nejistota, se potřeba řízení rizik ještě zvyšuje. V práci se budeme zabývat konkrétně měřením tržních rizik jako jednoho typu finančního rizika. V poslední době se stále více využívá metoda výpočtu Value at Risk (VaR), která udává maximální ztrátu na určité hladině spolehlivosti. Pro vedení institucí je tato metoda velmi výhodná především díky tomu, že nám dává jedno souhrnné číslo, k jehož interpretaci nejsou potřeba rozsáhlé matematické ani statistické znalosti. Na druhé straně nám metoda nic neříká o ztrátách, které vzniknou na hladině vyšší, než je námi zvolená. VaR skrývá ještě některé další nevýhody, které zdůrazníme v práci.

Práce je rozdělena na dvě části, teoretickou a aplikační. V první části si uvedeme některé základní definice statistických pojmů, rizik a také hodnoty VaR. Dále si popíšeme různé přístupy k výpočtu VaR, jejich přednosti a nevýhody.

V druhé, aplikační části, si naše teoretické poznatky ukážeme na konkrétním příkladě se zadaným portfoliem. VaR budeme počítat metodou historické simulace a metodou rozptylů a kovariancí. Na závěr si porovnáme výsledky a ukážeme ještě další charakteristiky VaR.

K výpočtům budeme používat program MS Excel a k testování normality statistický program R.

2. Teoretická část

2.1. Definice statistických pojmů

Na začátku je nutné si připomenout některé základní pojmy, které se tohoto tématu týkají, protože je budeme v textu mnohokrát používat.

Definice 2.1. (Rozdělení náhodné veličiny) Nechť je dán pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{A}, P) a náhodná veličina $X: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Rozdělením náhodné veličiny X rozumíme míru

$$P_x(B) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = P[X \in B], \text{ pro všechna } B \in \mathcal{B}.$$

Definice 2.2. (Distribuční funkce) Nechť $F_X(x) = P[X \leq x]$ pro $x \in \mathbb{R}$ se nazývá distribuční funkce F_X .

Definice 2.3. (Kvantilová funkce) Kvantilová funkce $F_X^{-1}(x)$ je definována jako

$$F_X^{-1}(x) = \inf \{x: F_X(x) \geq u\}, \text{ kde } 0 \leq u \leq 1.$$

Definice 2.4. (Kvantil) Pro $\alpha \in (0,1)$, α -kvantil u_α rozdělení F_X je libovolné reálné číslo, pro které platí

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} F_X(u_\alpha - h) &\leq \alpha \\ F_X(u_\alpha) &\geq \alpha. \end{aligned}$$

Definice 2.5. (Střední hodnota) Střední hodnotou náhodné veličiny X rozumíme číslo

$$EX = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega),$$

pokud existuje.

Definice 2.6. (Rozptyl a směrodatná odchylka) Rozptyl náhodné veličiny X je druhý centrální moment

$$\text{var } X = E(X-EX)^2 = \sigma_x^2.$$

Směrodatná odchylka je definovaná jako

$$\sigma_x = \sqrt{\text{var } X}.$$

Definice 2.7. (Kovariance a kovarianční matice) Nechť X, Y jsou náhodné veličiny. Kovariance mezi nimi je pak definována jako

$$\text{COV}(X,Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\} = E(XY)-E(X)E(Y).$$

Nechť máme n -rozměrný náhodný vektor. Definujme kovarianční matici Σ jako čtvercovou, symetrickou matici, která má na diagonále rozptyl, tedy $\Sigma_{ii} = \text{var}X_i$, a mimo diagonálu kovariance, tedy $\Sigma_{ij} = \text{COV}(X_i, X_j)$ pro $i \neq j$, kde $i, j = 1, \dots, n$.

Definice 2.8. (Korelace) Nechť X, Y jsou náhodné veličiny. Korelace mezi nimi je pak definována jako

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{COV}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)},$$

kde $\sigma(X)$ a $\sigma(Y)$ jsou směrodatné odchylky náhodných veličin X, Y .

Nechť máme n -rozměrný náhodný vektor. Definujme korelační matici ρ jako čtvercovou, symetrickou matici, která má na hlavní diagonále jedničky, tzn. $\rho_{ii} = 1$, a mimo hlavní diagonálu koeficienty korelace mezi veličinami X_i a X_j , tedy $\rho_{ij} = \rho(X_i, X_j)$, pro $i, j = 1, \dots, n$.

2.2. Riziko

Riziko

Pojem riziko se dá definovat jako nejistota spojená s budoucími čistými výnosy. Základním nástrojem pro měření rizika je volatilita, tedy standardní odchylka vývoje cen určitého pokladového aktiva.

2.2.1. Definice jednotlivých rizik

Tržní riziko

Tržní riziko je riziko ztráty banky vyplývající ze změny cen, kurzů a sazeb na finančních trzích. Je to potenciální ztráta portfolia, aktiv nebo derivátů v důsledku změny tržních podmínek. Potenciální změna v hodnotě aktiva nebo derivátů v důsledku změny v některém ze základních zdrojů tržní nejistoty, jinak řečeno, nejistota budoucích zisků vyplývající ze změny tržních podmínek.

Kreditní riziko

Riziko ztráty vyplývající z úplného či částečného selhání smluvní strany tím, že nedostojí svým závazkům podle podmínek smlouvy, na základě které se banka stala věřitelem smluvní strany. Potenciální ztráta vyplývající z částečného selhání protistrany. Někdy se toto riziko označuje jako „default risk“.

Operační riziko

Riziko ztráty vlivem nedostatků či selhání vnitřních procesů, lidského faktoru nebo systémů či riziko ztráty banky vlivem vnějších událostí, včetně rizika ztráty v důsledku porušení či nenaplnění právní normy. Operační riziko zahrnuje také právní riziko, ale ne strategické či reputační riziko.

2.2.2. Klasifikace rizik

Rizika můžeme dělit na:

- finanční
 - kreditní riziko (úvěrové riziko)
 - tržní riziko (úrokové, měnové, akciové a komoditní)
 - riziko likvidity

- nefinanční
 - operační riziko
 - riziko modelu
 - právní
 - daňové apod.

3. Value at Risk jako nástroj pro měření rizik

Value at risk, hodnota v riziku je v dnešní době jeden z nejpoužívanějších nástrojů pro měření rizik. Tato metoda se v poslední době velmi často aplikuje nejen na měření tržních rizik, ale také rizik operačních a kreditních.

Kromě veličiny VaR se na měření rizik tržních, kreditních i operačních používají i jiné přístupy, například parametry citlivosti nebo tzv. stresové testování, resp. zátěžové testy.

My se budeme zabývat přístupy k měření pouze tržních rizik.

3.1. Definice veličiny Value at Risk

Jedna z definic uvádí, že Value at Risk (VaR), česky překládané jako hodnota v riziku, udává, jaká je maximální možná ztráta na určité hladině spolehlivosti α (např. 99%, 95%) za dané časové období (např. 1 den, 1 rok).

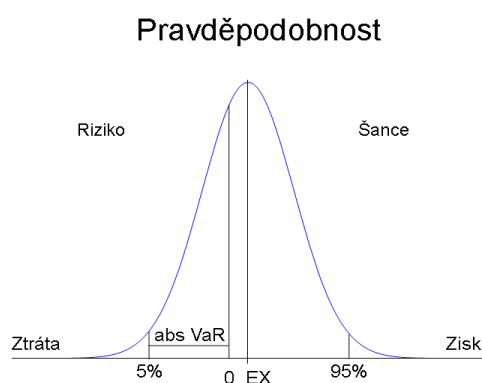
Definice 3.1. (Value at Risk) Necht' $\alpha \in (0,1)$ je hladina spolehlivosti a X je ztráta, potom

$$\text{VaR}_\alpha = - \inf \{x \in \mathbb{R}: F(x) \geq 1 - \alpha \}$$

nazveme absolutní VaR.

Z definice si uvědomme, že s pravděpodobností α bude ztráta nižší než X , a s pravděpodobností $1 - \alpha$ bude ztráta větší než X .

Jinými slovy je VaR kvantil rozdělení ztráty.



Obrázek 3.1: Absolutní VaR

Nechť X je náhodná veličina zisku nebo ztráty v daném portfoliu během daného časového horizontu t . Zisk znamená, že hodnota X je kladná; ztráta potom, že hodnota X je záporná. Budeme uvažovat například denní časový horizont a požadovaná hladina spolehlivosti bude α .

Příslušná denní hodnota v riziku VaR^{abs} je dané vztahem

$$P(X \geq -\text{VaR}^{\text{abs}}) = \alpha.$$

Jinak řečeno, $-\text{VaR}^{\text{abs}}$ je $100 \cdot (1 - \alpha)$ - procentní kvantil náhodné veličiny X , protože

$$P(X \leq -\text{VaR}^{\text{abs}}) = 1 - \alpha.$$

VaR píšeme se znaménkem minus, aby VaR jako ztráta byla v praxi kladná. Takto definovaná hodnota je tzv. absolutní hodnota v riziku VaR^{abs} . VaR^{abs} můžeme chápat jako vzdálenost absolutní hodnoty v riziku od nulového zisku.

Absolutní VaR můžeme také vyjádřit jinak. Nechť portfolio má hodnotou P_0 , míra zisku je náhodná veličina V v čase t a střední hodnotou μ . Označme V^* jako $(1-\alpha)$ -kvantil náhodné veličiny V . Potom se absolutní hodnota v riziku dá vyjádřit jako

$$\text{VaR}^{\text{abs}} = - P_0 V^*.$$

Relativní VaR

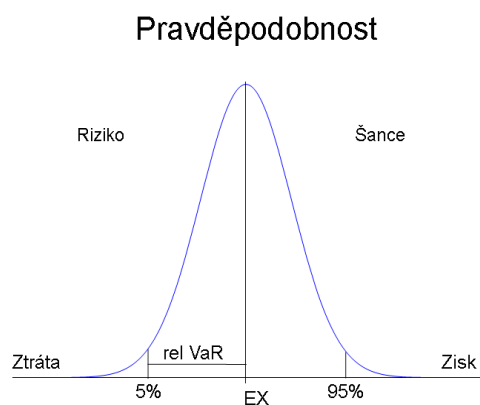
V praxi se používá ještě tzv. relativní hodnota v riziku VaR^{rel} .

Definice 3.2. (Relativní Value at Risk) Nechť $E(X)$ je střední hodnota náhodné veličiny X , potom

$$\text{VaR}^{\text{rel}} = \text{VaR}^{\text{abs}} + E(X).$$

Relativní hodnotu v riziku můžeme chápat jako vzdálenost absolutní hodnoty v riziku od střední hodnoty (zisku).¹

¹ Čerpáno z [1] str. 103



Obrázek 3.2: Relativní VaR

V praxi se můžeme setkat i s jinými přístupy k výpočtu relativní hodnoty v riziku. Uvedme si na ukázkou jeden z nich:

$$\text{VaR}^{\text{rel}} = \frac{\text{VaR}^{\text{abs}}}{\text{MV}},$$

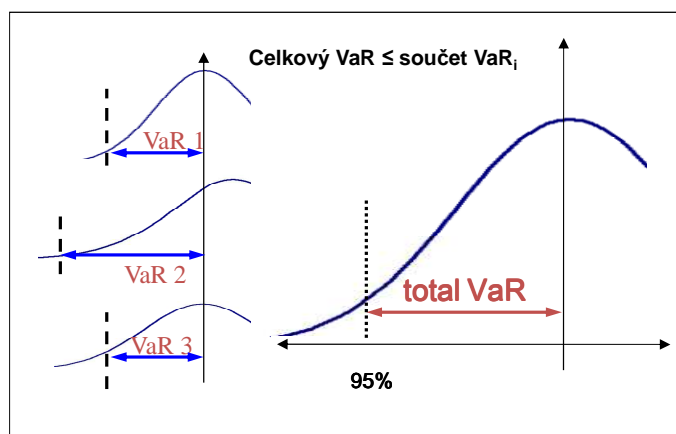
kde MV je tržní hodnota.

Relativní hodnota v riziku VaR^{rel} zde indikuje, kolik procent z aktuálního majetku můžeme ztratit.

Celkový VaR

Obrázek 3 ukazuje na celkové riziko. A také upozorňuje, že v praxi ve většině případů, platí, že celkový VaR portfolia je menší nebo roven součtu VaR subportfolií. Některé teorie tento praktický výsledek vyvrací. Dle teorie totiž není VaR subaditivní, tedy neměla by tato nerovnost platit. V praxi je tomu ale často jinak.

Celkové riziko



Obrázek 3.3: Celkové riziko

3.2. Jednoduchá ukázka interpretace VaR

Na konkrétním příkladě si pro lepší pochopení problému ukážeme možné interpretace metody Value at Risk.

Pro VaR=1 milion Kč na hladině spolehlivosti $\alpha = 99\%$ za časové období 1 den.

- V 99% případech, jinak řečeno v průměru ze 100 dnů v 99 dnech, nebude ztráta vyšší než 1 milion Kč.
- Druhá nejvyšší ztráta, která nastane ve 100 dnech, je 1 milion Kč.
- Minimální ztráta, kterou realizujeme alespoň v jednom dni ze 100 (tzn. v 1% případů) je 1 milion Kč.

3.3. Klíčové problémy metody VaR

VaR závisí na pravděpodobnostním rozdělení (distribuci) změn hodnoty portfolia v důsledku tržních změn, kreditních událostí nebo četnosti výskytu a velikosti dopadu operačních rizik. Distribuce charakterizuje možné realizace náhodné veličiny jako je zisk nebo ztráta.

Klíčové pro tuto metodu je stanovení časového horizontu a spolehlivosti. Volba těchto faktorů je převážně subjektivní, ale někdy může být jejich velikost pevně stanovena.

Časový horizont- konkretizuje, přes jaké období se možná ztráta uvažuje (den, týden, 10 dní).

Tuto volbu ovlivňuje například:

- likvidita trhu (s klesající likviditou se prodlužuje časový horizont)
- změna portfolia (pokud se nám portfolio často mění, má smysl krátký VaR, pro málo se měnící portfolia má pak smysl dlouhý VaR)

Příkladem pevně zvoleného časového horizontu je doporučení Basilejského výboru pro bankovní dohled, který upřednostňuje 10denní VaR.

Spolehlivost- ukazuje s jakou pravděpodobností nepřevyší skutečná ztráta hodnotu v riziku, během časového horizontu. Basilejský výbor pro bankovní dohled doporučuje spolehlivost $\alpha = 99\%$.²

² Čerpáno z [1] str. 102-103

3.4. Výhody a nevýhody metody Value at Risk a alternativních metod k měření rizik

Výhody:

Předností této metody je agregace různých druhů rizik a výhodnost pro reporting.

„Velkou výhodou Value at Risk je fakt, že dává k dispozici jedno souhrnné číslo popisující míru vystavení portfolia tržním rizikům, což umožňuje velmi jednoduchou komunikaci podstupovaných rizik, jak vůči akcionářům, tak vůči managementu.“³

Nevýhody:

Mezi jednu hlavní nevýhodu patří, že VaR nepředstavuje maximální potenciální ztrátu, ani neurčuje velikost ztrát, které mohou nastat na vyšší hladině spolehlivosti, než máme zvolenou. To se po VaR ani nepožaduje, protože bychom dostali vysoké číslo, které by nám moc nepomohlo.

Je vhodné a doporučuje se tedy sledovat VaR na více hladinách spolehlivosti a ne jen na jedné. Dále by se měly stanovovat některé další ukazatele, jinak by se nemusely vyloučit velmi rizikové a nebezpečné obchodní strategie.

Jak jsme uvedli výše, VaR nic neříká o málo pravděpodobných ztrátách, které mohou vést k obrovským ztrátám, ale také o těch, které mohou s velkou pravděpodobností vést k malým ziskům. Je důležité toto hlídat, protože se často jedná o ztráty, které by mohly ohrozit existenci firmy.

VaR nesplňuje vlastnost subaditivity, která v principu říká, že riziko portfolia lze omezit součtem rizik jeho subportfolií. VaR se tedy považuje obecně za nekoherentní rizikový ukazatel.

Při využití určitých metod, má ukazatel VaR řadu předpokladů, které nemusí být často realistické. VaR například předpokládá, že přírůstky tržních faktorů v budoucnosti se budou chovat podobně jako v nedávné minulosti. Toto je celkem silný předpoklad.

VaR, který je často založen na vývoji historických dat, není schopen včas odhalit a odhadnout náhlé závažné změny na finančních trzích a zachytit tak například příchod finanční krize.

³ [6]

VaR nezohledňuje náklady na případnou likvidaci. Kdyby bylo potřeba likvidovat pozice za zvýšeného tržního rozpětí, může subjekt utrpět větší ztráty, než jsou odhadované pomocí VaR. Doporučuje se při větších pozicích vytvořit vhodnou likvidační strategii. Často se na to zapomíná a může to činit problémy.

VaR je statickou metodou, která nebere v úvahu změny portfolia, což může být problematické.

VaR je jen statistickým odhadem a podléhá chybám odhadu, jestliže rozsah výběru je příliš malý.

Alternativní metody

Stresové testování

VaR má jako každá metoda některé nedostatky, proto se v praxi doplňuje testováním hypotetických stresových scénářů, které mohou být buď sestavené skupinou odborníků na základě jejich osobních zkušeností, nebo mohou být mechanicky generované.

Výhodou stresové testování je doplnění metody Value at Risk kvantifikací dopadů extrémních událostí. Nevýhoda je obtížné stanovení scénářů.

Parametry citlivosti

Další alternativou je metoda parametrů citlivosti. Z předností metody lze uvést snadnější srozumitelnost a použití při hledání a hodnocení zajištění a omezení rizik.

Nevýhodou je individuální měření rizika a špatná agregace rizik.

3.5. Použití výsledků výpočtu Value at Risk

Metoda Value at Risk poskytuje řadu informací. Výsledky se využívají nejrůznějším způsobem:

- pro stanovení kapitálových požadavků → pasivní použití;
- pro alokaci investičních prostředků;
- pro ohodnocení jednotlivých obchodníků na základě zohlednění rizikovosti jejich investičních aktivit;
- pro názornější a operativnější informovanost jak vrcholného managementu, tak akcionářů o rizikovosti prováděných investičních aktivit;
- pro stanovování VaR limitů pro obchodníky, což je jeden ze způsobů, jak omezovat riziko z operací na finančních trzích → rizikový kontroling;

- pro řízení finančních rizik (risk management), nejen v bankách, ale i jiných finančních institucích → aktivní použití;
- pro diverzifikaci rizika- tedy pro rozložení rizika do více cenných papírů, tím se někdy dají efektivně kompenzovat nepříznivé vývoje

3.6. Metody výpočtu Value at Risk

Existuje několik metod, jak stanovit hodnotu VaR, přičemž pro jedno portfolio tyto metody mohou dávat významně různé výsledky.

Metody dělíme na:

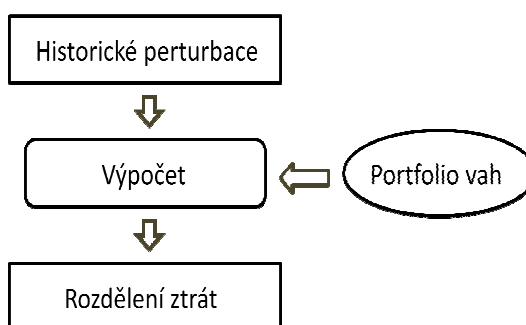
- parametrické- předpokládají určité rozdělení pro rizikové faktory
- neparametrické- historická simulace.

Jinak se dají dělit na:

- analytické- metoda rozptylů a kovariancí
- simulační- historická simulace, Monte- Carlo simulace.⁴

3.6.1. Metoda historické simulace

Metoda historické simulace je neparametrický přístup k výpočtu veličiny VaR, který je jedním z nejpoužívanějších, ačkoliv má některé své nevýhody (viz dále).



Obrázek 3.4: Schéma historické simulace

„Metoda historické simulace používá minulé hodnoty měř zisku jednotlivých nástrojů v analyzovaném portfoliu k simulování VaR tohoto portfolia za hypotetického předpokladu, že zastoupení jednotlivých nástrojů v portfoliu během všech uvažovaných minulých období by bylo stejné jako jeho současné složení.“⁵

⁴ Čerpáno z [5]

⁵ [1] str. 131-132

Dá se tedy říci, že tato metoda využívá změny, které se staly v minulosti, k tomu aby se mohly odhadnout případné ztráty, které by hrozily v budoucnosti.

Algoritmus výpočtu VaR metodou historické simulace

Metoda historické simulace používá dostatečně velké množství historických dat k výpočtu VaR. K výpočtu jsou potřeba nejen minulé hodnoty měř zisku, ale také současné váhy instrumentů v portfoliu. Z takových údajů se pak odhaduje VaR jako kvantil hustoty rozdělení.

Definujme relativní míru zisku (výnos).

Definice 3.3. (Relativní míra zisku) Relativní míra zisku $R(t)$ v čase t je definována jako

$$R(t) = \frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)},$$

kde $P(t)$ je cena (hodnota) instrumentu v čase t , pro $t = 1, 2, \dots$

Nechť t jsou pozorované historické časy, kde $t = 1, \dots, T$, a T je současný čas, resp. čas, ke kterému vztahujeme výpočet, N je počet instrumentů v portfoliu vstupujících do výpočtu.

Definice 3.4. (Perturbace) Nechť $P(t)$ je hodnota instrumentu v čase t . Pak perturbace máme definované jako

$$\text{pert } P = \frac{P(t+1)}{P(t)},$$

kde $t=1, \dots, T$.

Při výpočtu VaR modelujme míru zisku portfolia $V_{p,t}$ v čase t pomocí napozorovaných měř zisku $V_{i,t}$ pro $i = 1, \dots, N$.

Portfolio je v současném čase T tvořeno N nástroji, které jsou v portfoliu zastoupeny s vahami $w_{i,T}$ (pro $i = 1, \dots, N$), $V_{i,T}$ je míra zisku (výnos) i -tého instrumentu v čase T a $V_{p,t}$ je míra zisku celého portfolia v čase t . Toto shrnuje vzorec

$$V_{p,t} = \sum_{i=1}^N w_{i,T} * V_{i,t}$$

pro $t = 1, \dots, T$.

Tento vzorec naznačuje, že metoda ukazuje jednak na aktuální portfolio prostřednictvím aktuálních vah $w_{i,T}$, a rekonstruuje historii hypotetického portfolia.

Ze získaného výběru měř zisku portfolia a pro dostatečný rozsah výběru t odhadneme charakteristiky jejich pravděpodobnostního rozdělení, především příslušný kvantil.

Definice 3.5. (Empirický kvantil) ⁶ Empirický $1-\alpha$ - kvantil, kde $0 < \alpha < 1$ a R je relativní míra zisku, definujeme jako

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{1-\alpha} &= R_{(T(1-\alpha)+1)}, & \text{pro } T(1-\alpha) \neq Z \\ &= \frac{1}{2} [R_{(T(1-\alpha))} + R_{(T(1-\alpha)+1)}], & \text{pro } T(1-\alpha) = Z. \end{aligned}$$

Získané hodnoty se seřadí dle velikosti a určí se empirický $(1-\alpha)$ -kvantil $\ddot{u}_{1-\alpha}$.

Absolutní VaR pak dostaneme z

$$\text{VaR}^{\text{abs}} = - P_0 * \ddot{u}_{1-\alpha}$$

a relativní VaR jako

$$\text{VaR}^{\text{rel}} = - P_0 * (\ddot{u}_{1-\alpha} - \mu),$$

kde P_0 ...hodnota portfolia,

V ...výnosy,

μ ...střední hodnota výnosů V .

Poznámka

Naznačme si rozdíl mezi přístupy k lineárnímu a nelineárnímu portfoliu při výpočtu VaR metodou historické simulace. Rozdíl spočívá ve vytvoření scénářů, jak se bude veličina chovat (vyvíjet) v následujícím dni dle vývoje historické časové řady. Ze scénářů dopočteme celkovou hodnotu portfolia pro každý z nich. Z celkové hodnoty portfolia se vypočte relativní změna a pak se postupuje jako u lineárního portfolia.

V praktickém příkladě, který si uvedeme později, nebudeme s nelineárními instrumenty v portfoliu pracovat.

⁶ Čerpáno z [2] str. 45

Výhody a nevýhody metody historické simulace

Výhody:

- Metoda vychází ze skutečných cen, dovoluje nelinearitu a nepožaduje normální rozdělení.
- Odhad se získává nejjednodušším způsobem, tedy z historických dat.
- Konceptně jednoduchá a velmi snadno získatelná data pro účely výpočtu.
- Předpokládá se pouze neměnnost složení portfolia, nepředpokládá se konkrétní typ rozdělení měř zisku (je tedy nezávislé na předpokladech o statistickém rozdělení).
- Není nutné odhadovat volatility a korelace nebo jiné parametry, protože se jedná o neparametrickou metodu, která žádné parametry ke svému výpočtu nepotřebuje. Zmíněné volatility a korelace jsou zohledněny přímo v použitých datech. To je velmi výhodné, protože se nemusí vytvářet odhady rozsáhlých kovariančních matic, jak je tomu naopak u metody rozptylů a kovariancí.
- Stejně tak není nutné tvořit postupy pro modelování nelinearit. Opce a další nelineární nástroje se modifikují a pak se k nim přistupuje jako k lineárním.

Nevýhody:

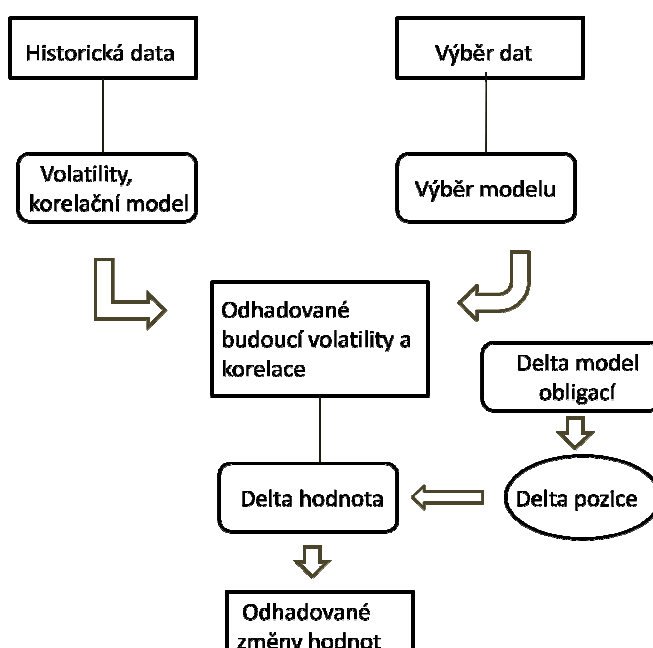
- Metoda se nespolehá na specifické předpoklady o modelech odhadů nebo na stochastické struktury trhu.
- Náš předpoklad o vývoji situace nemusí být vždy správný, například u závažných a nečekaných událostí. Tím může docházet k významnému podhodnocení rizika.
- Metoda pomíjí situace, kdy je volatilita dočasně zvýšená.
- Výsledek závisí podstatně na tom, jaká historická data byla použita. Tato závislost na jedné pozorované trajektorii historických dat může být velmi problematická, např. když se v jejich rámci objevuje neobvyklý jev (např. měnová krize nebo pád burzy) nebo naopak k takovému jevu dojde v předvídané budoucnosti po relativně klidném minulém období.
- Je nutné vhodně zvolit délku historického období. Většinou je nutné přistoupit na určitý kompromis, tedy příliš krátká délka tohoto období nemusí sofistikovaně zohlednit strukturu těžkých chvostů (např. při spolehlivosti 99% nastane ztráta příslušné velikosti v průměru jen v jednom ze 100 dní). Naopak při zbytečně dlouhém historickém období se mohou negativně projevit některé časové změny (např. volatility a korelací) a starší informace z počátku takového období mají potom spíš zkreslující vliv.
- Metoda může skrývat problémy u velkých portfolií s komplikovanou strukturou, protože v něm nemusí být odhaleny pozice, které způsobují velké riziko.

3.6.2. Delta-normální metoda neboli metoda rozptylů a kovariancí

„Metoda rozptylů a kovariancí se využívá pro výpočet VaR portfolia nebo i jednotlivého nástroje, jehož pozice je mapováním rozložitelná na jednotlivé finanční toky; metoda přitom vychází z rozptylů a kovariancí (či ekvivalentně volatilit a korelací), které byly pro jednotlivé finanční toky odhadnuty z minulých dat.,⁷

Pro příslušné základní toky jsou u řady finančních nástrojů k dispozici přímo odpovídající úrokové míry bezkupónových dluhopisů IR_t včetně jejich volatilit a vzájemných korelací, takže ocenění těchto toků, z kterého metoda rozptylů a kovariancí vychází, nedělá obvykle problémy. Základními nebo primitivními toky označujeme ty finanční toky, na které jsou portfolio nebo nástroj rozloženy, a pro něž máme k dispozici volatilitu a korelační strukturu.

Velmi často se také pomocí předpovědí volatilit a korelací (např. pomocí klouzavých průměrů, modelů GARCH, exponenciálního vyrovnávání) v rámci metody rozptylů a kovariancí předpovídá budoucí VaR, a tak se oceňují potenciální budoucí ztráty.



Obrázek 3.5: Schéma parametrické metody

⁷ [1] str. 119

Předpoklady metody rozptylů a kovariance

„Metoda rozptylů a kovariancí se poměrně snadno aplikuje při splnění následujících dvou předpokladů:

1. Příslušné zisky a ztráty mají normální rozdělení (či modifikace tohoto rozdělení (t-rozdělení, směs normálních rozdělení)).
2. Rozklad analyzované pozice na základní finanční toky je lineární, takže současná hodnota oceňující tuto pozici je lineární funkcí současných hodnot základních finančních toků. Za předpokladu normality má navíc taková lineární funkce také normální rozdělení. Tím se výpočet VaR převede na jednoduchý parametrický výpočet.“⁸

Algoritmus pro výpočet

Pokud je výpočet VaR použitý pro samostatné aktivum, problém bude poměrně jednoduchý. Nevýhodou se zdá být, že při výpočtu VaR touto metodou musí být použita velká a komplexní portfolia, která se vyvíjí v čase. Míru výnosu portfolia můžeme definovat jako

$$V_{p,t+1} = \sum_{i=1}^N w_{i,t} V_{i,t+1},$$

kde N je počet instrumentů, t je čas, pro $t=1, \dots, T$, $w_{i,t}$ jsou váhy indexované časem, $V_{p,t+1}$ je výnos portfolia, $V_{i,t+1}$ jsou výnosy jednotlivých instrumentů

Váhy $w_{i,t}$ jsou indexovány časem, abychom zjistili dynamickou povahu obchodovaného portfolia. Uvědomme si ještě jednou, že delta-normální metoda předpokládá normální rozdělení všech aktiv. Normální rozdělení má také portfolio, které je lineární kombinací normálních proměnných.

V maticovém zápisu můžeme rozptyl portfolia zapsat jako:

$$\text{var}(V_{p,t+1}) = w_t^T \Sigma_{t+1} w_t,$$

kde $\text{var}(V_{p,t+1})$ je rozptyl portfolia, w_t jsou váhy, w_t^T jsou transponované váhy a Σ_{t+1} je kovarianční matice.

⁸ [1] str. 119

Předpokládejme normální rozdělení, $V \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde V je míra zisku. Výše jsme $(1-\alpha)$ -kvantil veličiny V označili jako V^* . Pro V^* platí

$$V^* = \mu - \sigma * u_\alpha,$$

kde σ je směrodatná odchylka a u_α je α -kvantil normálního rozdělení.

Odtud dostaneme absolutní VaR ze vztahu

$$\text{VaR}^{\text{abs}} = -P_0(\mu - \sigma * u_\alpha),$$

kde P_0 je hodnota portfolia.

A odtud dostaneme relativní VaR pro jednodenní instrument z rovnice

$$\text{VaR}^{\text{rel}} = P_0 * \sigma * u_\alpha = P_0(\mu - (\mu - \sigma * u_\alpha)).$$

Riziko je generováno kombinací lineárního stupně rizika mnoha faktorů, u kterých se předpokládá, že mají normální rozdělení, a pomocí prognózy kovarianční matice \sum_{t+1} . Tato metoda poskytuje lokální aproximaci cenových pohybů.

Uvnitř této třídy modelů můžeme použít dva přístupy pro získání matice rozptylů a kovariancí Σ .

- Jedna možnost je vycházet výhradně z historických dat například v modelu, který počítá s časovou změnou rizika.
- Druhá možnost je pak zahrnutí odvozených předpokládaných měř rizik opcí. Tato možnost je často upřednostňovaná před historickými daty z první varianty, ale není vhodná pro každé aktivum nebo portfolio.

Tyto dva přístupy je také možné kombinovat.

Poznámky k metodě rozptylů a kovariancí

Relativní VaR je dán vzorcem

$$\text{VaR}^{\text{rel}} = P_0 * \sigma * u_\alpha,$$

kde u_α je hodnota normálního rozdělení na určité hladině spolehlivosti α , σ je směrodatná odchylka a P_0 je hodnota portfolia.

Hodnota jednodenního VaR na hladině spolehlivosti 99% se vypočítá

$$\text{VaR} = 2,326 * P_0 * \sigma_{1\text{-den}}.$$

Častěji nás ale zajímá maximální ztráta na určité hladině spolehlivosti během t -dní. Vzorec pro přepočítání je potom

$$\sigma_{t\text{-dní}} = \sqrt{t} * \sigma_{1\text{-den}} \text{ nebo jinak } \text{VaR}_{t/\text{dní}} = \sqrt{t} * \text{VaR}_{1\text{-den}}.$$

Nemáme-li k dispozici jednodenní směrodatnou odchylku, ale máme odchylky v časech t_1, t_2 platí vztah

$$\sigma_{t_2} = \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} * \sigma_{t_1}.$$

Pro relativní VaR dostaneme vztah

$$\text{VaR}_{t_2}^{\text{rel}} = \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} * \text{VaR}_{t_1}^{\text{rel}}$$

na hladině α .

Pro portfolio jsou základním vstupem kovariance mezi jednotlivými faktory (např. mezi pohybem směnného kurzu a akciového trhu) a zároveň kovariance mezi výnosy tržních faktorů navzájem (kovariance mezi pohybem akcií A a akcií B).

Obecně pro více pozic a rizikových faktorů platí rovnice pro hodnotu VaR portfolio

$$\text{VaR}_{\text{Portfolio}} = u_\alpha * \sqrt{V * \Sigma * V^T}, \quad (3.6.1.)$$

kde V je vektor pozic jednotlivých instrumentů, Σ je kovarianční matice a u_α je α -kvantil normálního rozdělení.

Stanovení vektorů V je specifické pro každý typ instrumentu. Podrobně si ukážeme výpočet na praktickém příkladě ve 3. kapitole.

Výhody a nevýhody metody rozptylů a kovariancí

Výhodou delta-normální metody je výpočtová nenáročnost a fakt, že metoda velmi často poskytuje postačující míru tržního rizika.

Delta- normální metoda má řadu nevýhod, za které je kritizovaná.

Velmi špatně zachycuje riziko nepředvídaných událostí. Mezi takové nepředvídatelné události patří možnost neobvyklých nebo extrémních okolností, jako krach na burze nebo zhroucení kursů měn. Problém je, že toto riziko se nevyskytuje natolik často, aby bylo adekvátně reprezentováno rozdělením pravděpodobností založených na nedávných historických datech. Toto je hlavní nedostatek nejen metody rozptylů a kovariancí, ale všech metodik při používání historických řad.

Druhým problémem je existence těžkých chvostů v rozdělení výnosů u většiny finančních aktiv. Model založený na normální aproximaci podceňuje poměr dat v oblasti těžkých chvostů a tím i skutečné hodnoty rizika. Některé z těchto chvostů mohou být zmírněny v rámci změny časového horizontu.

Metoda nedostatečně měří riziko nelineárních prostředků, jako opcí nebo hypoték. V delta-normální metodě je volba pozic reprezentovaná deltami (změnami) vztahenými k podkladovému aktivu.

My používáme k výpočtu delty, ale existuje i riziko γ (2. derivace), a riziko vyšších derivací.

3.6.3. *Strukturovaná metoda Monte Carlo*

„Strukturovaná metoda Monte Carlo používá k výpočtu VaR velké množství simulací vývoje ceny portfolia. Pro tento účel se na základě matematicko-statistických modelů simulují náhodné procesy, kterými se řídí cenový vývoj jednotlivých nástrojů vytvářejících portfolio.“⁹

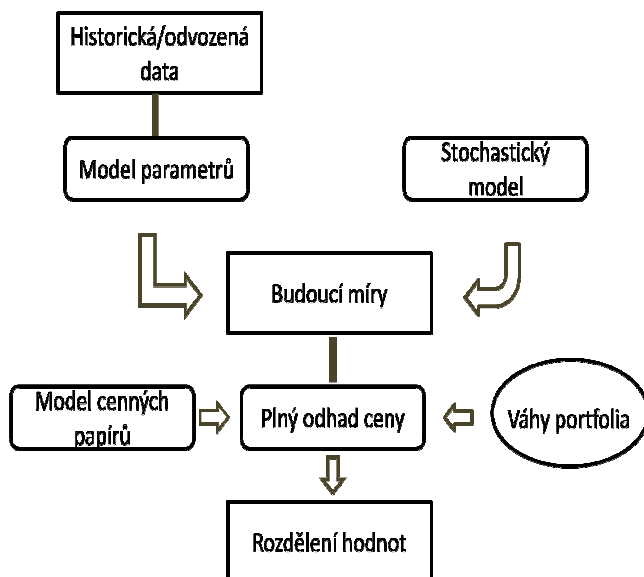
Tato metoda je velmi flexibilní a proto je schopná zohlednit různé typy rizik, včetně úvěrového. Z tohoto důvodu také patří k nejučinnějším postupům pro výpočet veličiny VaR.

Metoda Monte Carlo je jedna z nejučinnějších metod výpočtu VaR, především díky širokému okruhu rizik, včetně nelineární ceny rizika, volatility rizika

⁹ [1] str. 133

a kreditního rizika. To může zahrnout časovou změnu volatility, „těžké chvosty“ a extrémní scénáře. Jde o nejkompexnější metodu pro výpočet finančních rizik.

Metoda je shrnutá v obrázku.



Obrázek 3.6: Schéma metody Monte-Carlo

Metoda Monte Carlo aproximuje chování cen s použitím počítačových simulací ke generování náhodných cenových trajektorií.

Strukturovaná metoda Monte Carlo se používá k simulaci odlišných scénářů pro portfolio hodnot k cílovému datu.

Principy metody Monte-Carlo

Metoda se dá dělit na dvě fáze:

- *První fáze:* Rizikový manažer specifikuje náhodný proces pro tržní proměnné a zpracuje parametry jako riziko a korelace, které mohou být odvozeny z historických nebo zvolených dat.

- *Druhá fáze:* Fiktivní cenové trajektorie jsou simulovány pro všechny proměnné, které nás zajímají. Každá z těchto pseudo realizací je pak používána pro sestavení rozdělení výnosů, ze kterých může být VaR měřeno.

Základní koncept metody Monte Carlo simuluje opakovaně náhodný proces pro finanční hodnoty úroku, navíc zahrnuje široký rámec možných situací.

První a nejtěžší krok v simulaci je výběr specifického stochastického modelu pro chování cen jednotlivých nástrojů v portfoliu. Odhadneme jejich parametry, buď na základě vlastních historických dat, nebo veřejně dostupných tržních dat.

Běžně užívaným modelem je geometrický Brownův pohyb (Wienerův proces) nebo model náhodné procházky.

Model Brownova pohybu předpokládá, že vývoje cen aktiva jsou nekorelované v průběhu času, a že malé změny v cenách mohou být popsány rovnicí

$$dS_t = \mu_t * S_t dt + \sigma_t * S_t dz, \quad (3.6.2.)$$

kde dz je náhodná veličina s normálním rozdělením $N(0,dt)$, S_t je cena akcie, μ_t je bezriziková míra zisku tržní ceny akcie, σ_t je volatilita tržní ceny akcie a t je čas.

Volatility i míry zisku se v průběhu času mohou vyvíjet.

Veličina dz řídí náhodné změny v ceně a nezávisí na minulosti.

Budeme pro zjednodušení předpokládat, že parametry μ_t a σ_t , jsou konstantní v čase. Pokud by μ_t a σ_t byly funkcemi minulých proměnných, mohla by se simulovat časová změna změn jako v modelu GARCH.

V praxi je proces s nekonečně malým přírůstkem dt aproximován diskrétními pohyby velikosti Δt . Definujme si t jako nynější čas, T jako cílový čas a $\tau = T-t$ jako horizont nebo dobu splatnosti. Pro generování série náhodných proměnných ($i=1,..N$) S_{t+i} přes interval τ , nejprve rozdělíme τ do n částí, tedy $\Delta t = \tau/n$.

Z rovnice (3.6.2.) lze odvodit obecný tvar

$$\Delta S_t = S_{t-1} * \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) * \Delta t + \sigma * \varepsilon * \sqrt{\Delta t} \right) - S_{t-1}.$$

Nebo můžeme využít aproximace a dostaneme

$$\Delta S_t = S_{t-1} (\mu \Delta t + \sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}),$$

kde S_t je cena akcie, ε_t je náhodná veličina v čase t s normálním rozdělením, resp. $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, a Δt je přírůstek času.

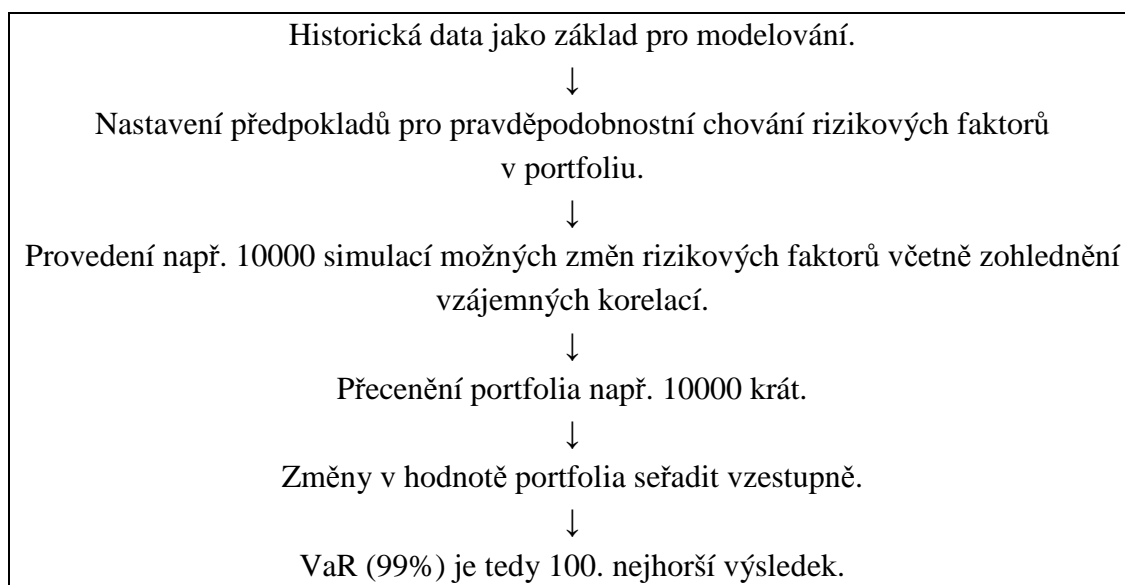
Pro simulaci cenové trajektorie pro S , začneme od S_t generovat posloupnost epsilon (ε) pro $i = 1, 2, \dots, n$. Pak S_{t+1} dostaneme z

$$S_{t+1} = S_t + S_t (\mu \Delta t + \sigma \varepsilon_1 \sqrt{\Delta t}).$$

Nechť speciálně $\Delta t = 1$, pak $S_{t+1} = S_t + S_t (\mu + \sigma \varepsilon_1)$

S_{t+2} se podobně vypočítá z $S_{t+2} = S_{t+1} + S_{t+1} (\mu \Delta t + \sigma \varepsilon_2 \sqrt{\Delta t})$ a tak dále pro budoucí hodnoty, až do dosažení cílového horizontu, pro který je cena $S_{t+n} = S_T$.¹⁰

Mnohonásobně opakovaným a navzájem nezávislým použitím vhodného generátoru náhodných čísel a zvoleného modelu simulujeme pravděpodobnostní rozdělení ceny portfolia (simulace jednotlivých cen portfolia obvykle považujeme za stejně pravděpodobné) a pomocí vzniklého histogramu najdeme hledaný VaR.



Obrázek 3.7: Shrnutí algoritmu metody

¹⁰ Čerpáno z [3] str. 231-235.

Výhody a nevýhody

Výhody:

V případě, že je modelování provedeno správně, je tato metoda celkově nejkompaktnějším přístupem k měření tržního rizika. Do jisté míry může metoda Monte Carlo dokonce ovládat úvěrová rizika. Proto je téma implementace metody Monte Carlo velmi rozsáhlé.

Nevýhody:

Největší nevýhoda této metody je její výpočtová náročnost. Jestliže 1,000 je vzorová trajektorie vygenerovaná z portfolia z 1,000 aktiv, celkový počet hodnocení jde v množství k 1 miliónu. Proto se tato metoda často stává velmi obtížně realizovatelná.

Další potenciální slabost metody je spoléhání se na specifický stochastický model rizikových faktorů, stejně jako tvorby modelů cen pro cenné papíry jako opce nebo hypotéky. V tomto případě může dojít k chybě v modelu.

Model je nutné parametrizovat. Správná parametrizace je velmi důležitá a může způsobovat problémy.

3.6.4. Srovnání jednotlivých metod

	Metoda rozptylů a kovariancí	Historická simulace	Scénář	
			Stress testing	Monte Carlo
Pozice				
Ocenění	Lineární	Obecné	Obecné	Obecné
Nelineární aktiva	Ne	Ano	Ano	Ano
Rozdělení				
Historické	Normální	Aktuální	Subjektivní	Plné
Měnicí se v čase	Ano	Ne	subjektivní	Ano
Odvozené	Možné	Ne	Možné	Ano
Trh				
Normální rozdělení	Ano	Ne	Ne	Ne
Míra extrémních událostí	Částečně	Částečně	Ano	Je to možné
Užití korelace	Ano	Ano	Ne	Ano
Provedení				
Vyhnutí se modelu rizik	Někdy	Ano	Ne	Ano
Jednoduché na výpočet	Ano	Částečně	Částečně	Ne
Sdělitelnost	Jednoduchá	Jednoduchá	Dobrá	Těžká
Největší úskalí	Nelinearita	Časová odchylka	Špatný odhad	Model rizika
	Extrémní události	Extrémní události	Korelace	

Tabulka 3.1: Srovnání metod¹¹

¹¹ Čerpáno z [3] str. 202

4. Aplikační část

Úplné zobecnění výpočtu VaR by bylo velmi složité a nepřehledné, proto si ho ukážeme na konkrétním příkladě. Rozšíření na obecnější případ by ale bylo samozřejmě možné.

Nechť máme portfolio českých akcií (Erste Bank, ČEZ, Komerční banka, O2, ECM), zahraničních (euro) akcií (fond vázaný na DAX, fond vázaný na Dow Jones), českých úrokových sazeb-jednoleté a desetileté (CZK1Y, CZK10Y) a zahraničních (euro) úrokových sazeb- šestiměsíční a osmileté (EU6M, EU8Y). Každý cenný papír máme v portfoliu v množství (N_1, \dots, N_{11}) .

K dispozici jsme dostali údaje o historickém vývoji těchto cenných papírů během 2 let (520 hodnot), tedy v čase $t=1, \dots, T$, kde pro nás je $T = 520$. Dále známe dvouletý vývoj měnového kurzu CZK/EUR, označme si ho fx .¹²

K výpočtům budeme používat program MS Excel a statistický program R.

4.1. Výpočet VaR metodou historické simulace

Ukážeme si, jak se počítá VaR metodou historické simulace pro jednotlivé cenné papíry a pro jednotlivá rizika, která se k nim vztahují.

Označme si výnosy jednotlivých instrumentů jako V_f , kde f jsou jednotlivé faktory.

Předpokládejme, že proměnné (výnosy (V), měnový kurz (fx), perturbace měnového kurzu (pert fx), sazby (i) a součty (S)) se vyvíjejí v čase t , kde $t=1, \dots, T$. Uvádíme to nyní a nebudeme na to, pro větší přehlednost, v textu již pokaždé upozorňovat. Dále uveďme, že j jako index bude počet instrumentů, které budou do jednotlivých výpočtů vstupovat.

Nechť dále T je současné datum, tedy datum, ke kterému vztahujeme výpočet. Opět na to v dalším textu nebudeme vždy upozorňovat.

4.1.1. Výpočet jednotlivých typů VaR pro různé cenné papíry

Akcie

Nechť N je počet akcií, $t = 1, \dots, T$, je čas. Nechť dále $P(t)$ je cena akcie a $fx(t)$ měnový kurz.

V prvním kroku si vypočítáme denní změny mezi cenami akcií, $\text{pert}P(t)$. Tyto změny se nazývají perturbace, viz definice 3.4.

¹² Hodnoty čerpány z [7], [8], [9]

Perturbace musíme vypočítat i pro měnové kurzy, $\text{pert } f_x(t)$. Budeme je později potřebovat k výpočtu měnového rizika.

U akcií nás bude zajímat cenový, měnový a celkový VaR.

Riziko cenové

Cenovému riziku jsou vystaveny všechny naše akcie. Budeme tedy muset rozlišovat české a zahraniční (euro) akcie.

Pro české akcie budeme používat vzorec

$$V_{\text{cenCZK}}(t) = N * (P(T) * \text{pert}P(t) - P(T)). \quad (4.1.1.)$$

Pro zahraniční akcie (euro) máme vzorec

$$V_{\text{cenEUR}}(t) = N * (P(T) * \text{pert}P(t) * f_x(T) - P(T) * f_x(T)), \quad (4.1.2.)$$

kde $t = 1, \dots, T$, je čas, $\text{pert}P(t)$ je perturbace cen v čase t , N je počet akcií, $f_x(T)$ je hodnota kurzu v čase T a $P(T)$ je cena akcie v čase T .

Riziko měnové

České akcie (obecně české cenné papíry) mají nulové měnové riziko. Měnový výnos z české pozice je $V_{\text{měnCZK}} = 0$.

U zahraničních (euro) akcií budeme tento výnos, který budeme využívat k výpočtu měnového rizika, počítat ze vzorce

$$V_{\text{měnEUR}}(t) = N * (P(T) * f_x(T) * \text{pert } f_x(t) - P(T) * f_x(T)), \quad (4.1.3.)$$

kde $\text{pert } f_x$ je perturbace měnového kurzu.

Riziko celkové

Pro české akcie je celkové riziko jen riziko cenové, tedy $V_{\text{celkCZK}} = V_{\text{cenCZK}}$.
Pro zahraniční (euro) akcie je celkové riziko dané vzorcem

$$V_{\text{celkEUR}}(t) = N * (P(T) * f_x(T) * \text{pert } f_x(t) * \text{pert}P(t) - P(T) * f_x(T)). \quad (4.1.4.)$$

České dluhopisy

V portfoliu máme 2 české dluhopisy jednoletý a desetiletý. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že jde o dluhopisy s nulovým kupónem.

I zde budeme pracovat s pojmem perturbace, viz definice 3.4.

České dluhopisy jsou vystaveny úrokovému riziku, které je v případě těchto dluhopisů rovno celkovému riziku, tedy $V_{\text{úr}} = V_{\text{celk}}$.

U dluhopisů máme k dispozici úrokovou míru ($i_1(t)$, $i_2(t)$), pro $t=1, \dots, T$. Toto musíme zohlednit při výpočtech.

Riziko úrokové resp. celkové

Nechť n je durace.

Vypočteme nejprve současnou hodnotu ke dni T

$$PV(T) = \left(\frac{1}{1+i(T)/100} \right)^n .$$

Dále potřebujeme perturbovanou současnou hodnotu, $\text{pert } PV(t)$, ze vzorce

$$\text{pert } PV(t) = \left(\frac{1}{1+\text{pert } i(t) * i(T)/100} \right)^n ,$$

kde $\text{pert } i(t)$ je perturbace sazeb $i(t)$. Hodnoty $\text{pert } PV(t)$ jsou hypotetické hodnoty $PV(t)$ založené na perturbovaných úrokových sazbách.

Samotný výnos z rizika potom dostaneme jako

$$V_{\text{úrCZK}} = N * (\text{pert } PV(t) - PV(T)). \quad (4.1.5.)$$

Zahraniční dluhopisy

V našem portfoliu máme 2 zahraniční (euro) dluhopisy šestiměsíční a osmiletý. Jejich sazby jsou $i_1(t)$, $i_2(t)$, kde $t=1, \dots, T$ je čas. Tyto dluhopisy jsou vystaveny úrokovému, měnovému a celkovému riziku. Vzorce uvádíme pro roční úročení. Pro úročení např. šestiměsíční se vzorec jednoduše upraví.

Riziko úrokové

K výpočtu potřebujeme znát současnou hodnotu v čase T

$$PV(T) = \left(\frac{1}{1+i(T)/100} \right)^n * N * f_x(T),$$

kde n je stále durace, N počet dluhopisů, $fx(T)$ měnový kurz v čase T .

Vypočítejme si ještě perturbovanou současnou hodnotu

$$\text{pert PV}(t) = \left(\frac{1}{1 + \text{pert } i(t) * i(T)/100} \right)^n,$$

kde $\text{pert } i(t)$ je opět perturbace úrokových sazeb i v čase $t=1, \dots, T$.

Úrokové riziko pak dostaneme z rovnice

$$V_{\text{úrEUR}}(t) = N * \text{pert PV}(t) * fx(T) - PV(T). \quad (4.1.6.)$$

Riziko měnové

Současná hodnota PV pro nás bude stejné jako u úrokového rizika.

Měnové riziko pak dostaneme ze vztahu

$$V_{\text{měnEUR}} = N * \left(\frac{1}{1 + i(T)/100} \right)^n * fx(T) * \text{pert } fx(t) - PV(T). \quad (4.1.7.)$$

Riziko celkové

Pro celkové riziko použijeme tento vzorec

$$V_{\text{celkEUR}} = N * \text{pert PV}(t) * fx(T) * \text{pert } fx(t) - PV(T). \quad (4.1.8.)$$

Máme-li vypočítané všechny tyto hodnoty je nutné výnosy z jednotlivých typů rizik sečíst po datech (t), tedy např. S cen u akcií dostaneme jako

$$S \text{ cen}(t) = \sum_{j=1}^k V_{\text{cenCZKj}}(t),$$

kde k je počet akcií, které máme a $t=1, \dots, T$ je čas.

V dalším kroku hodnoty součtů S setřídíme dle velikosti a náš požadovaný VaR, pro 95% pravděpodobnost a pro 520 hodnot, bude něco mezi 26. a 27. hodnotou.

Pro přesný výsledek použijeme k výpočtu zabudovanou funkci v Excelu, PERCENTIL. Výsledky jsou uvedené níže v tabulce 1.

Víme, že hodnoty výsledných VaR budou menší nebo rovny než je hodnota celkového VaR. Tedy např. součet měnového a cenového rizika u akcií bude menší

nebo roven než celkový VaR. Zda bude hodnota menší nebo rovna závisí na jejich korelaci.

4.1.2. Výpočet jednotlivých VaR pro celé portfolio

V kapitole 4.1.1. jsme počítali hodnoty VaR zvlášť pro každý typ cenného papíru. V tomto odstavci bychom se měli zaměřit na výpočet VaR pro jednotlivé typy rizik u všech cenných papírů současně.

Měnové riziko

Měnovému riziku jsou vystaveny zahraniční akcie a zahraniční dluhopisy

Vyjdeme ze vztahu

$$S_{\text{měnEUA+EUD}} = S_{\text{měnEUA}} + S_{\text{měnEUD}}, \quad (4.1.9.)$$

kde EUA je označení pro euro akcie (obecně zahraniční), EUD pro euro dluhopisy. Dále $S_{\text{měnEUA+EUD}}$ je celkový měnový výnos odpovídající celkovému měnovému riziku pro zahraniční akcie a dluhopisy, $S_{\text{měnEUA}}$ jsou hodnoty vypočítané v předchozím odstavci ze vztahu (4.1.3.) pro $V_{\text{měn}}$ u akcií sečtené po datech, $S_{\text{měnEUD}}$ jsou hodnoty vypočítané v předchozím odstavci ze vztahu (4.1.7.) pro $V_{\text{měn}}$ u dluhopisů sečtené po datech.

Úrokové riziko

Úrokovému riziku jsou vystaveny české a zahraniční dluhopisy. Hodnotu VaR pro úrokové riziko získáme analogicky (viz výše) ze vztahu:

$$S_{\text{úrcZD+EUD}} = S_{\text{úrcZD}} + S_{\text{úrcEUD}}, \quad (4.1.10.)$$

kde $S_{\text{úrcZD+EUD}}$ je celkový úrokový výnos odpovídající celkovému úrokovému riziku pro české a zahraniční dluhopisy, $S_{\text{úrcZD}}$ jsou hodnoty vypočítané v předchozím odstavci ze vztahu (4.1.5.) pro $V_{\text{úr}}$ u českých dluhopisů sečtené po datech a $S_{\text{úrcEUD}}$ jsou hodnoty vypočítané v předchozím odstavci ze vztahu (4.1.6.) pro $V_{\text{úr}}$ u zahraničních dluhopisů sečtené po datech.

Cenové riziko

Cenovému riziku jsou vystaveny české a zahraniční akcie. Vzorec pro VaR je

$$S_{\text{cenA}} = S_{\text{cen}}, \quad (4.1.11.)$$

kde S_{cenA} je celkový cenový výnos odpovídající celkovému cenovému riziku pro české a zahraniční akcie.

V tomto případě se to rovná přímo výnosu u cenového rizika u akcií, které jsme si počítali výše.

Celkové riziko

Celkové riziko se vypočítává pro všechny cenné papíry. Tedy

$$S_{\text{celkA} + \text{CZD} + \text{EUD}} = S_{\text{celkA}} + S_{\text{celkCZD}} + S_{\text{celkEUD}}, \quad (4.1.12.)$$

kde $S_{\text{celkA} + \text{CZD} + \text{EUD}}$ je celkový výnos odpovídající celkovému riziku pro české a zahraniční dluhopisy i akcie.

Dále S_{celkA} jsou hodnoty vypočítané v předchozím odstavci ze vztahu (4.1.4.) pro V_{celk} u akcií sečtené po datech,

S_{celkCZD} jsou hodnoty vypočítané v předchozím odstavci ze vztahu (4.1.5.) pro V_{celk} u českých dluhopisů sečtené po datech a

S_{celkEUD} jsou hodnoty vypočítané v předchozím odstavci ze vztahu (4.1.8.) pro V_{celk} u zahraničních dluhopisů sečtené po datech.

I zde je potřeba získané hodnoty S seřadit podle velikosti a požadovaný VaR pro jednotlivá rizika bude pro našich 520 hodnot a 95% pravděpodobnost opět hodnota mezi 26. a 27. nejnižší hodnotou. My k přesnějšímu výpočtu ale opět použijeme funkci Percentil v programu MS Excel.

4.1.3. Výsledné hodnoty VaR u historické simulace

Výsledky si uspořádáme do přehledné tabulky.

VaR- pomocí funkce percentil	měnový	cenový	úrokový	celkový	suma-ověření
AKCIE	1 018,13	5 514,58	0,00	5 676,98	6 532,71
ČESKÉ DLUHOPISY	0,00	0,00	2 051,56	2 051,56	2 051,56
EURO DLUHOPISY	2 255,16	0,00	798,48	2 395,20	3 053,64
VaR portfolia	3 273,28	5 514,58	2 618,31	6 535,83	11 406,17
suma-ověření	3 273,28	5 514,58	2 850,05	10 123,74	

Tabulka 4.1: Výsledky historické simulace- pomocí funkce PERCENTIL (v CZK)

Z tabulky vidíme, jakým rizikům jsou různé cenné papíry vystaveny a v jakém rozsahu. Tedy hodnoty nám uvádí, že ztráta z daného typu rizika či z daného instrumentu nebude vyšší, na hladině spolehlivosti 95%, než je uvedeno. A dále jak velkému riziku je vystaveno celé portfolio, resp. že ztráta portfolia nepřekročí na dané hladině spolehlivosti tuto hodnotu.

Jako poslední řádek a sloupec jsme uvedli součet pro jednotlivé cenné papíry a jednotlivá rizika.

V další tabulce si uvedeme tržní hodnoty k času T, které budeme potřebovat k výpočtu relativního VaR.

Tržní hodnoty v čase T	měnový	cenový	úrokový	celkový
AKCIE	306 645	389 753	0	389 753
ČESKÉ DLUHOPISY	0	0	805 854	805 854
EURO DLUHOPISY	440 257	0	440 257	440 257
Tržní hodnota portfolia v čase T	746 902	389 753	1 246 110	1 635 864

Tabulka 4.2: Tržní hodnoty v čase T (v CZK)

K výpočtu relativního VaR budeme potřebovat střední hodnoty jednotlivých výnosů, které v tomto případě budeme brát jako aritmetické průměry z výnosů.

Průměry	měnový	cenový	úrokový	celkový
AKCIE	-38,86	208,20	0,00	147,94
ČESKÉ DLUHOPISY	0,00	0,00	-88,43	-88,43
EURO DLUHOPISY	-86,09	0,00	-44,29	-130,38
Průměry portfolia	-124,95	208,20	-132,73	-70,88

Tabulka 4.3: Průměry výnosů (v CZK)

Z definice 3.2. víme, že relativní VaR můžeme vypočítat jako

$$\text{relVaR} = \text{absVaR} + \text{EX},$$

což máme zachyceno v tabulce 4. Relativní hodnotu v riziku můžeme chápat jako vzdálenost absolutní hodnoty v riziku od střední hodnoty (zisku).

K výpočtu budeme používat tabulku 4.1. a tabulku 4.3.

Relativní VaR	měnový	cenový	úrokový	celkový	suma-ověření
AKCIE	979,26	5 722,78	0,00	5 824,92	6 702,04
ČESKÉ DLUHOPISY	0,00	0,00	1 963,13	1 963,13	1 963,13
EURO DLUHOPISY	2 169,07	0,00	754,19	2 264,82	2 923,26
Relat. VaR portfolia	3 148,33	5 722,78	2 485,58	6 464,95	11 356,70
suma-ověření	3 148,33	5 722,78	2 717,32	10 052,86	

Tabulka 4.4: Relativní VaR (v CZK)

Jiná možnost výpočtu relativního VaR se dostane jako podíl VaR a tržní hodnoty. Je to jeden z praktických přístupů k výpočtu.

Relativní VaR zde indikuje, kolik procent z aktuálního majetku můžeme ztratit.

K výpočtu budeme používat tabulku 4.1. a tabulku 4.2.

Podíl VaR / Tržní hodnoty	měnový	cenový	úrokový	celkový
AKCIE	0,33%	1,41%	0,00%	1,46%
ČESKÉ DLUHOPISY	0,00%	0,00%	0,25%	0,25%
EURO DLUHOPISY	0,51%	0,00%	0,18%	0,54%
Podíl VaR/tržní hodnoty portfolia	0,44%	1,41%	0,21%	0,40%

Tabulka 4.5: Jiný přístup k výpočtu relativního VaR

Uveďme si pro názornost diverzifikace jednotlivých rizik pro jednotlivé instrumenty a pro celé portfolio, které dostaneme jako podíl celkového VaR a součtu dílčích VaR.

Diverzifikace rizika v %	
AKCIE	86,90%
ČESKÉ DLUHOPISY	100,00%
EURO DLUHOPISY	78,44%
VaR portfolia	57,30%

Tabulka 4.6: Diverzifikace rizik

Diverzifikace znamená rozložení rizika, resp. se snaží snižovat rizika tím, že se nespolehá na jediný produkt, nýbrž rozděluje své aktivity do různých oblastí, svá aktiva do různých firem, měn a podobně. Vhodná diverzifikace portfolia snižuje riziko ztráty.

Z tabulky vidíme, že z pohledu různých instrumentů jsou nejlépe diverzifikované eurové dluhopisy (78,44%), na rozdíl od českých, které mají 100%, protože jsou vystaveny jen úrokovému riziku. Akcie mají diverzifikaci 89,60%, což není moc příznivé číslo. Celkovou diverzifikaci portfolia (57,30%) můžeme považovat za poměrně dobrou.

4.2. Výpočet VaR metodou rozptylů a kovariancí

Máme stále stejné portfolio českých akcií, zahraničních (euro) akcií, sazeb českých dluhopisů a sazeb zahraničních (euro) dluhopisů. Každý cenný papír máme v portfoliu v libovolném množství (N_1, \dots, N_{11}).

K dispozici jsme dostali údaje o historickém vývoji těchto cenných papírů během 2 let, obecně v čase $t=1, \dots, T$, kde pro nás je $T=520$.

Dále známe dvouletý vývoj měnového kurzu CZK/EUR označený v tabulce jako fx . Obecně bychom ale mohli mít více měnových kurzů.

Ukážeme si, jak se počítá VaR metodou rozptylů a kovariancí pro jednotlivé cenné papíry a pro jednotlivá rizika, která se k nim vztahují.

Řekněme, že budeme náš příklad počítat na hladině spolehlivosti $\alpha = 95\%$, tedy $u_\alpha = 1,645$. Tento fakt budeme používat ve všech částech příkladu.

Předpokládejme, že proměnné P_j (cena j -té akcie), $Rel V_j$ (relativní výnosy j -té akcie), fx (měnový kurz), $Rel fx$ (relativní změny měnových kurzů), i (sazby), PV (současné hodnoty), se vyvíjejí v čase t , kde $t=1, \dots, T$. Nechť dále T je současné datum, resp. datum, ke kterému vztahujeme výpočet, pro nás $T=520$. Dále uveďme, že k bude počet instrumentů, které budou do jednotlivých výpočtů vstupovat. Uvádíme to nyní a nebudeme na to, pro větší přehlednost, v textu pokaždé upozorňovat.

Metoda rozptylů a kovariancí předpokládá normální rozdělení zisků a ztrát. Budeme ji tedy testovat v programu R a výsledky testů si uvedeme na konci příkladu.

4.2.1. Výpočet jednotlivých typů VaR pro různé cenné papíry

Akcie

Máme zadané ceny akcií P_1, \dots, P_j , kde $j=1, \dots, k$, kde v našem případě je $k=7$, a jejich vývoj v čase $t=1, \dots, T$, dále počet kusů N_1, \dots, N_j a vývoj měnového kurzu označený jako f_x .

Nejprve si vypočteme příslušné relativní výnosy $\text{Rel } V_j$ akcií z definice 3.3., tj. ze vztahu

$$\text{Rel } V_j = \frac{P_j(t+1) - P_j(t)}{P_j(t)}, \text{ pro } j = 1, \dots, k \text{ a } t = 1, \dots, T.$$

Dále budeme potřebovat relativní výnosy měnového kurzu $\text{Rel } f_x$

$$\text{Rel } f_x = \frac{f_x(t+1) - f_x(t)}{f_x(t)}, \text{ pro } t = 1, \dots, T.$$

Akcie jsou vystaveny riziku měnovému a cenovému. Ukažme si tedy výpočet pro každé z těchto rizik.

Riziko cenové

Cenovému riziku jsou vystaveny všechny naše akcie.

Vypočteme si vektor tržních hodnot v čase T , kde jednotlivé složky vektoru $V(T)$ dostaneme pro české akcie ze vztahu

$$V_j(T) = P_j(T) * N_j,$$

a pro zahraniční z

$$V_j(T) = P_j(T) * N_j * f_x(T),$$

kde $P_j(T)$ je cena j -té akcie v čase T , N_j je počet kusů j -té akcie a $f_x(T)$ je hodnota měnového kurzu v čase T .

K výpočtu potřebujeme korelační matici ρ a směrodatné odchylky σ_j z $\text{Rel } V_j$, pro $j=1, \dots, k$. Z nich si vypočteme kovarianční matici Σ .

Pak hodnotu VaR u cenového rizika, kterému jsou akcie vystaveny, dostaneme ze vztahu (viz definice 3.6.1.)

$$\text{VaR}_{\text{cen}} = u_\alpha * \sqrt{V(T) * \Sigma * V(T)'}, \quad (4.2.1.)$$

kde u_α je α -kvantil normálního rozdělení, $V(T)$ vektor tržních hodnot v čase T a $V(T)'$ je transponovaný vektor $V(T)$.

Riziko měnové

Měnovému riziku jsou vystaveny akcie vázané na 1 z fondů DAX a Dow Jones .

Nejprve si spočítáme současnou tržní hodnotu, tedy hodnotu v čase T, z

$$V(T) = \sum_{j=1}^k P_j(T) * N_j * f_x(T),$$

kde k je počet zahraničních akcií, které vstupují do výpočtu (pro nás k=2), a ostatní proměnné jsme si již definovali u cenového rizika.

Dále potřebujeme korelační matici ρ a směrodatnou odchylku σ z Rel f_x . Z nich si vypočteme kovarianční matici Σ .

Hodnotu VaR u měnového rizika pak dostaneme ze vztahu

$$\text{VaR}_{\text{měn}} = u_{\alpha} * \sqrt{V(T) * \Sigma * V(T)'} \quad (4.2.2.)$$

Riziko celkové

Potřebujeme korelační matici ρ a směrodatné odchylky σ_j z Rel V_j , pro $j=1, \dots, k$ a Rel f_x . Z nich si vypočteme kovarianční matici Σ .

Odpovídající tržní hodnoty budou stejné jako u předchozích rizik. A hodnotu v riziku dostaneme ze stejného vzorce jako výše.

České dluhopisy

V portfoliu máme sazby (i_1, i_2) dvou českých dluhopisů, jednoletého a desetiletého. Necht' je tedy $j=1,2$ (obecně $j=1, \dots, k$).

České dluhopisy jsou vystaveny úrokovému riziku, které je v případě těchto dluhopisů rovno celkovému riziku, tedy $\text{VaR}_{\text{úř}} = \text{VaR}_{\text{celk}}$. U dluhopisů máme k dispozici úrokové míry, což musíme zohlednit při výpočtech.

Riziko úrokové resp. celkové

Vypočteme nejprve současnou hodnotu ke dni T, kterou budeme potřebovat pro výpočet tržní hodnoty v čase T

$$PV(T) = \left(\frac{1}{1+i(T)/100} \right)^n .$$

Tržní hodnota v čase T je vektor $V(T) = (V_j(T))$, kde $V_j(T) = PV_j(T) * N_j$, kde N_j je počet kusů j -tého dluhopisu a $PV_j(T)$ je současná hodnota j -tého dluhopisu.

K výpočtu potřebujeme také modifikovanou duraci v čase T , pro kterou máme vzorec

$$D_{\text{mod}}(T) = \frac{n}{1 + i(T)/100},$$

kde n je durace.

Vypočteme si korelační matici ρ a směrodatné odchylky σ_j z relativních změn sazeb $Rel_j i(t)$, pro $t=1, \dots, T$ a $j=1, 2$, které dostaneme z definice 3.3.

Vyjádříme si ještě vektor M , jehož složky budou pomocné hodnoty M_j , které dostaneme jako

$$M_j = \sigma_j * D_{\text{mod}_j}(T) * i_j(T)/100.$$

A kovarianční matici Σ dostaneme jako $\Sigma = M * \rho * M'$.

Pak hodnotu VaR u úrokového rizika, resp. celkového, kterému jsou dluhopisy vystaveny, dostaneme ze vztahu

$$VaR_{\text{úř}} = VaR_{\text{celk}} = u_{\alpha} * \sqrt{V(T) * \Sigma * V(T)}. \quad (4.2.3.)$$

Zahraniční dluhopisy

V našem portfoliu máme sazby (i_1, i_2) dvou zahraničních dluhopisů, šestiměsíčního a osmiletého. Necht' je tedy $j=1, 2$ (obecně $j=1, \dots, k$). Těmto dluhopisům hrozí úrokové a měnové riziko.

Riziko úrokové

Výpočet hodnoty úrokového rizika u zahraničních dluhopisů se nebude lišit od výpočtu u českých dluhopisů, až na vektor tržních hodnot $V(T)$. Vektor $V(T) = (V_j(T))$, kde $V_j(T) = PV_j(T) * N_j * fx(T)$, kde N_j je počet kusů j -tého dluhopisu a $PV_j(T)$ je současná hodnota j -tého dluhopisu a $fx(T)$ je měnový kurz v čase T .

Riziko měnové

Korelační matice ρ a směrodatná odchylka σ bude stejná jako u měnového rizika u akcií, tedy i kovarianční matice Σ bude stejná.

Hodnotu VaR u měnového rizika dostaneme ze vztahu

$$\text{VaR}_{\text{měn}} = u_{\alpha} \cdot \sqrt{V(T) \cdot \Sigma \cdot V(T)'}, \quad (4.2.4.)$$

kde tržní hodnotu dluhopisů, které do výpočtu vstupují, dostaneme jako

$$V(T) = \sum_{j=1}^k PV_j(T) \cdot N_j \cdot fx(T),$$

kde N_j je počet kusů j -tého dluhopisu a $PV_j(T)$ je současná hodnota j -tého dluhopisu a $fx(T)$ je měnový kurz v čase T .

Riziko celkové

Potřebujeme korelační matici ρ z Rel $V_j(t)$, pro $j=1,2$ a Rel $fx(t)$. Dále si spočteme směrodatné odchylky σ z Rel $V_j(t)$ a z Rel $fx(t)$.

Vyjádríme si ještě vektor M , jehož složky budou pomocné hodnoty M_j a směrodatná odchylka σ z Rel $fx(t)$. Hodnoty M_j dostaneme jako $M_j = \sigma_j \cdot D_{\text{mod}_j}(T) \cdot i_j(T)/100$, pro $j=1,2$. Z nich si vypočteme kovarianční matici Σ , jako $\Sigma = M \cdot \rho \cdot M'$.

Pro celkový VaR pak použijeme tento vzorec

$$\text{VaR}_{\text{celk}} = u_{\alpha} \cdot \sqrt{V(T) \cdot \Sigma \cdot V(T)'}, \quad (4.2.5.)$$

Vektor $V(T)$ má složky, které odpovídají těm výše vypočítaným, resp. 2 složky odpovídají vektoru tržních hodnot u úrokového rizika a 1 složka tržní hodnotě u měnového rizika.

4.2.2. Výpočet jednotlivých VaR pro celé portfolio

V kapitole 4.2.1. jsme počítali hodnoty VaR zvlášť pro každý typ cenného papíru. V tomto odstavci bychom se měli zaměřit na výpočet VaR pro jednotlivé typy rizik u všech cenných papírů současně.

Měnové riziko

Měnovému riziku jsou vystaveny zahraniční akcie a zahraniční dluhopisy.

Korelační matice ρ a směrodatná odchylka σ bude stejná jako u měnového rizika u akcií i u zahraničních dluhopisů, tedy i kovarianční matice Σ bude stejná.

Hodnotu celkového měnového VaR dostaneme ze vztahu

$$\text{VaR}_{\text{měn/celk}} = u_{\alpha} * \sqrt{V(T) * \Sigma * V(T)'}, \quad (4.2.6.)$$

kde $V(T)$ je tržní hodnota instrumentů, které jsou vystaveny měnovému riziku, tedy

$$V(T) = \sum_{j=1}^7 P_j(T) * N_j * fx(T) + \sum_{j=1}^2 PV_j(T) * N_j * fx(T),$$

kde $P_j(T)$ je cena j -té akcie v čase T , N_j je počet j -té akcie či dluhopisu a $fx(T)$ je hodnota měnového kurzu v čase T .

Úrokové riziko

Úrokovému riziku jsou vystaveny české a zahraniční dluhopisy.

K výpočtu potřebujeme korelační matici ρ z relativních změn sazeb $\text{Rel } i_j(t)$, kde $j=1, \dots, 4$ a $t=1, \dots, T$. Směrodatné odchylky σ_j , z relativních změn sazeb $\text{Rel } i_j(t)$, jsme si již vypočítali výše u jednotlivých dluhopisů.

Hodnoty modifikovaných durací $D_{\text{mod}_j}(T)$ také již známe.

Vyjádříme si ještě vektor M , jehož složky budou pomocné hodnoty M_j , které dostaneme jako

$$M_j = \sigma_j * D_{\text{mod}_j}(T) * i_j(T)/100, \text{ pro } j=1, \dots, 4.$$

Kovarianční matici Σ pak dostaneme jako $\Sigma = M * \rho * M'$.

A hodnotu celkového úrokového VaR dostaneme ze vztahu

$$\text{VaR}_{\text{úř/celk}} = u_{\alpha} * \sqrt{V(T) * \Sigma * V(T)'}, \quad (4.2.7.)$$

kde $V(T)$ je vektor tržních hodnot o čtyřech složkách, kde první dvě složky odpovídají tržním hodnotám u jednotlivých českých dluhopisů a další dvě jednotlivým tržním hodnotám zahraničních dluhopisů.

Cenové riziko

Cenovému riziku jsou vystaveny české a zahraniční akcie. Celková hodnota cenového rizika je rovna právě cenovému riziku a akcií.

Celkové riziko

Celkový VaR se vypočítává pro všechny cenné papíry.

K výpočtu potřebujeme korelační matici ρ a směrodatné odchyly ($\sigma_j, \sigma_k, \sigma$) z Rel $V_j(t)$, Rel $i_k(t)$ a Rel $fx(t)$, což jsou relativní změny tak, jak jsme si je již definovali výše. Necht' pro nás je $j=1, \dots, 7$ a $k=1, \dots, 4$. Hodnoty modifikovaných durací $D_{mod_k}(T)$ také již známe.

Vyjádříme si ještě vektor M , jehož složky budou směrodatné odchyly σ_j , pomocné hodnoty M_k a směrodatná odchylna σ z Rel $fx(t)$.

Hodnoty M_k dostaneme jako $M_k = \sigma_k * D_{mod_k}(T) * i_k(T)/100$.

Z nich si vypočteme kovarianční matici Σ , jako $\Sigma = M * \rho * M'$.

Celkovou hodnotu v riziku dostaneme z

$$VaR_{Total} = u_\alpha * \sqrt{V(T) * \Sigma * V(T)'} \quad (4.2.8.)$$

kde vektor $V(T)$ má 12 složek. Prvních 7 složek odpovídá tržní hodnotě akcií, tak jak jsme ji počítali výše. Další 4 složky jsou tržní hodnoty dluhopisů a poslední složka je tržní hodnota instrumentů vystavených měnovému riziku. Poslední hodnota je stejná jako tržní hodnota u celkového měnového rizika.

4.2.3. Výsledné hodnoty VaR u metody rozptylů a kovariancí

Výsledky si uspořádáme do tabulky.

VaR	měnový	cenový	úrokový	celkový	suma-ověření
AKCIE	1 416,69	8 243,82	0,00	8 379,57	9 660,51
ČESKÉ DLUHOPISY	0,00	0,00	1 905,21	1 905,21	1 905,21
EURO DLUHOPISY	2 035,64	0,00	809,65	2 195,85	2 845,29
VaR portfolia	2 785,52	8 243,82	2 367,17	9 397,30	13 396,51
suma-ověření	3 452,33	8 243,82	2 714,86	12 480,63	

Tabulka 4.7: Výsledky metody rozptylů a kovariancí (v CZK)

Z tabulky vidíme, jakým rizikům jsou různé cenné papíry vystaveny a v jakém rozsahu. Tedy hodnoty nám uvádí, že ztráta z daného typu rizika či z daného instrumentu nebude vyšší, na hladině spolehlivosti 95%, než je uvedeno. A dále jak velkému riziku je vystaveno celé portfolio, resp. že ztráta portfolia nepřekročí na dané hladině spolehlivosti tuto hodnotu.

Jako poslední řádek a sloupec jsme uvedli součet pro jednotlivé cenné papíry a jednotlivá rizika.

V další tabulce si uvedeme tržní hodnoty v čase T, které budeme potřebovat k výpočtu relativního VaR.

Tržní hodnoty v čase T	měnový	cenový	úrokový	celkový
AKCIE	306 645	389 753	0	389 753
ČESKÉ DLUHOPISY	0	0	805 854	805 854
EURO DLUHOPISY	440 617	0	440 617	440 617
Tržní hodnota portfolia v čase T	747 263	389 753	1 246 471	1 636 224

Tabulka 4.8: Tržní hodnoty (v CZK)

Relativní VaR dostaneme jako podíl VaR a tržní hodnoty. Je to jeden z praktických přístupů k výpočtu. Relativní VaR zde indikuje, kolik procent z aktuálního majetku můžeme ztratit. K výpočtu tedy budeme používat tabulky 4.7. a 4.8.

Podíl VaR/tržní hodnoty	měnový	cenový	úrokový	celkový
AKCIE	0,46%	2,12%	0,00%	2,15%
ČESKÉ DLUHOPISY	0,00%	0,00%	0,24%	0,24%
EURO DLUHOPISY	0,46%	0,00%	0,18%	0,50%
Podíl VaR/tržní hodnoty portfolia	0,37%	2,12%	0,19%	0,57%

Tabulka 4.9: Relativní VaR

I u této metody si uvedeme tabulku s procentním vyjádřením diverzifikace rizik.

Diverzifikace rizika v %	
AKCIE	86,74%
ČESKÉ DLUHOPISY	100,00%
EURO DLUHOPISY	77,17%
VaR portfolia	70,15%

Tabulka 4.10: Diverzifikace rizik v %

Diverzifikace rizik není příliš dobrá. Nejlepší je u zahraničních dluhopisů (77,17%), nejhorší potom u českých dluhopisů (100%), to je dáno tím, že nejsou vystaveny jinému riziku. Celková diverzifikace rizik celého portfolia není příliš dobrá (70,15%).

4.2.4. Test normality

Metoda rozptylů a kovariancí předpokládá normální rozdělení zisků a ztrát. Proto data otestujeme ve statistickém programu R. K testování použijeme zabudovaný test Shapiro-Wilk. Vykreslíme si histogramy a v tabulce 4.11. si uvedeme výsledky testů.

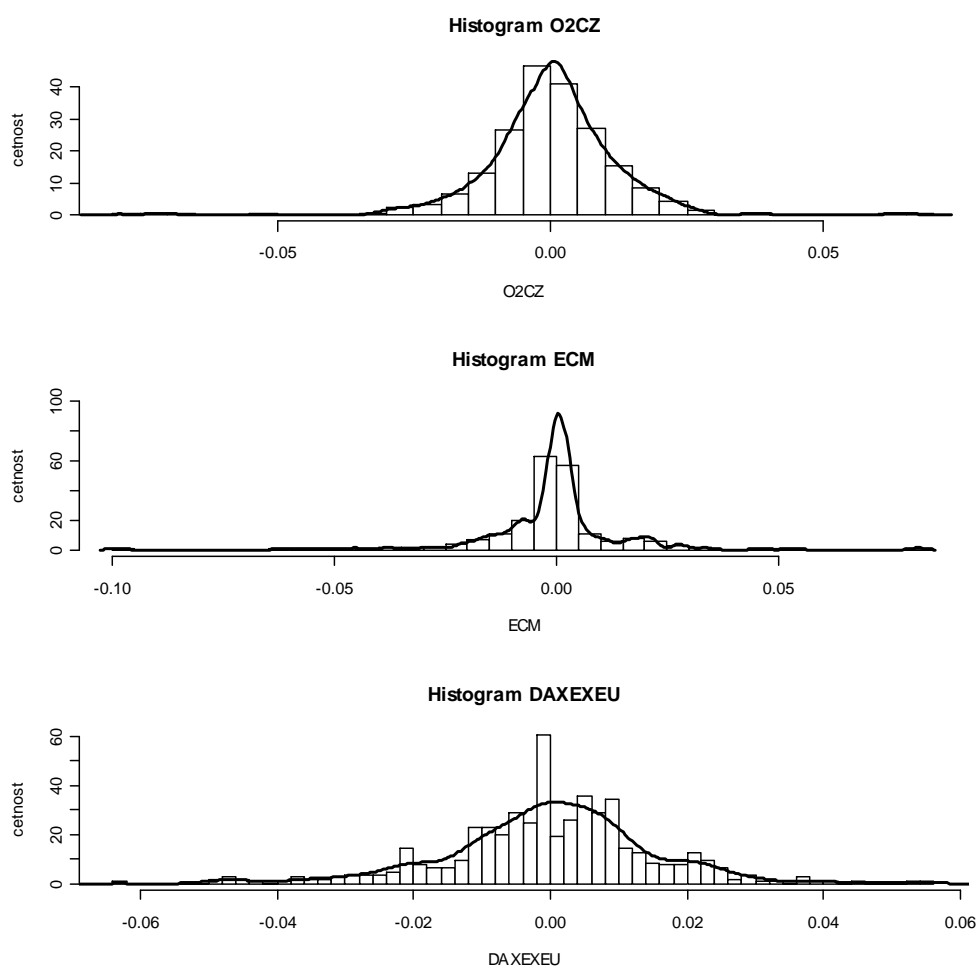
Shapiro-Wilk normality test

Výnosy	W	p- hodnota
EB_CZK- Erste Bank	0.9741	5.78e-08
CEZCZ- ČEZ	0.9666	1.690e-09
KOBACZ- Komerční banka	0.9364	4.106e-14
O2CZ- O2	0.8926	< 2.2e-16
ECM	0.8144	< 2.2e-16
DAXEXEU- fondy DAX	0.9741	5.78e-08
EUN2GY- fond Dow Jones	0.9666	1.690e-09
FX- měnový kurz	0.9756	1.220e-07
CZK_1Y- české sazby	0.9511	4.216e-12
CZK_10Y	0.9512	4.313e-12
EUR_6M- euro sazby	0.952	5.704e-12
EUR_8Y	0.9809	2.385e-06

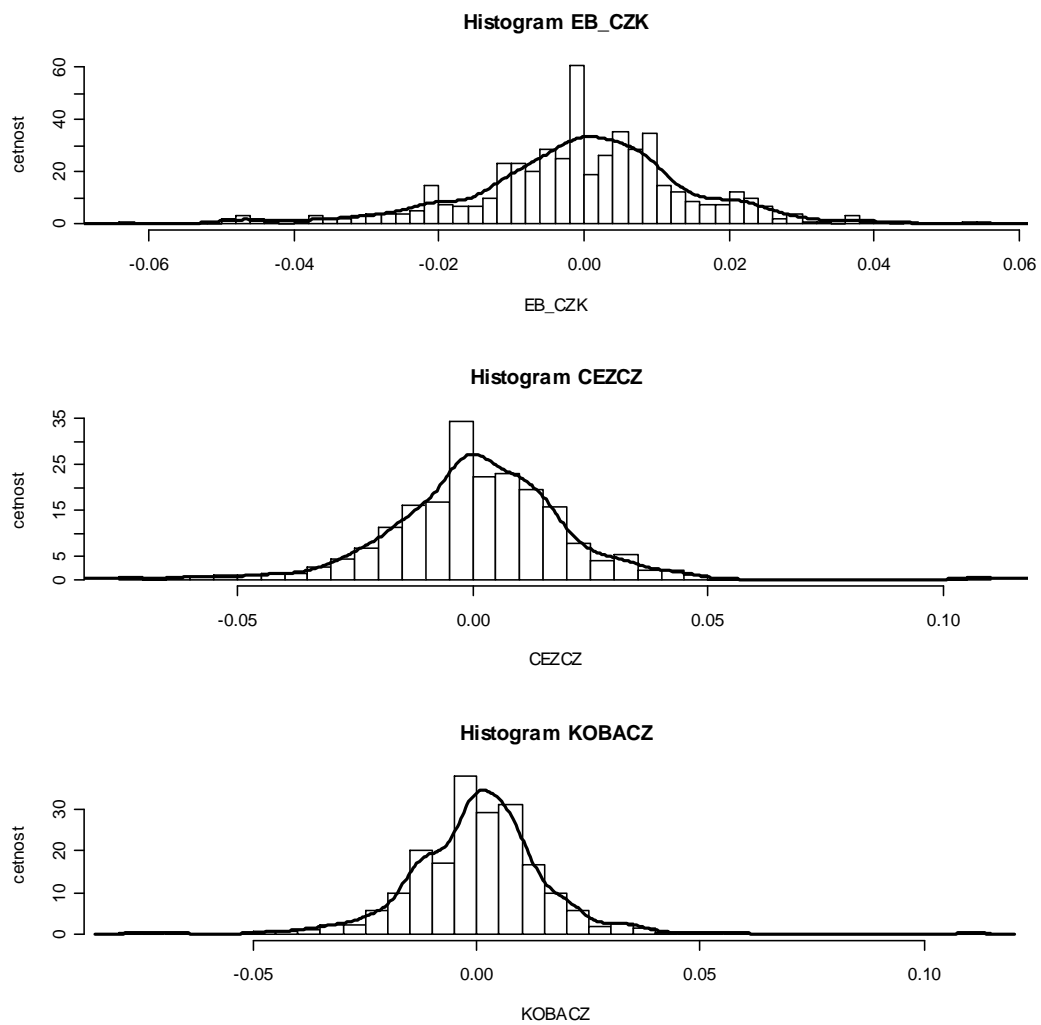
Tabulka 4.11: Výsledky testu normality

Výsledná tabulka 4.11. obsahuje název výnosů, které testujeme, testovou statistiku (W) a p - hodnotu.

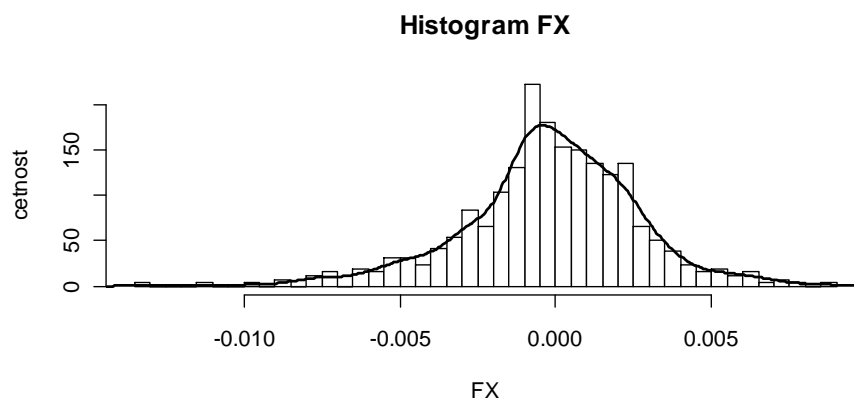
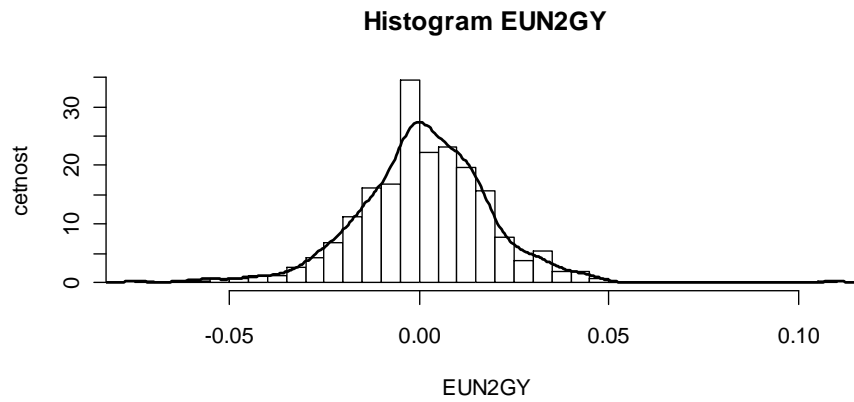
Vidíme, že ve všech případech normalitu zamítáme. Je sice pravda, že metoda rozptylů a kovariancí předpokládá normální rozdělení zisků a ztrát, ale jak názorně vidíme, tento předpoklad v praxi neplatí. I přesto se metoda používá.



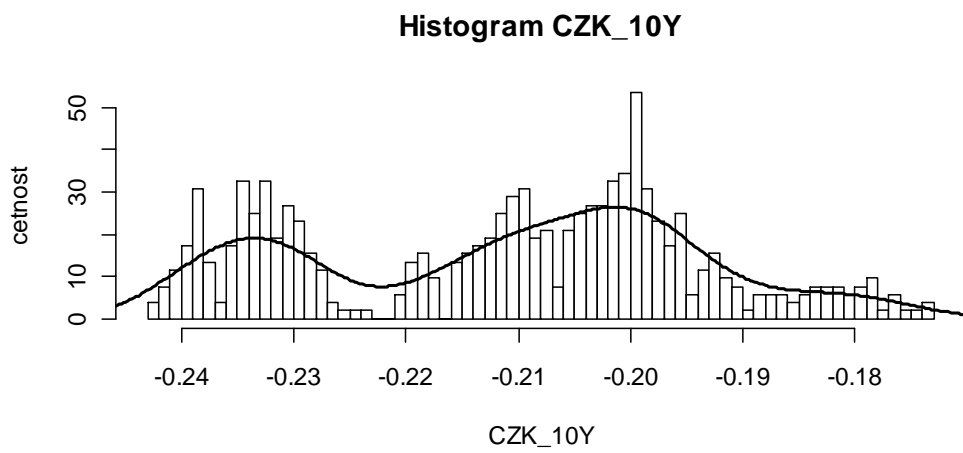
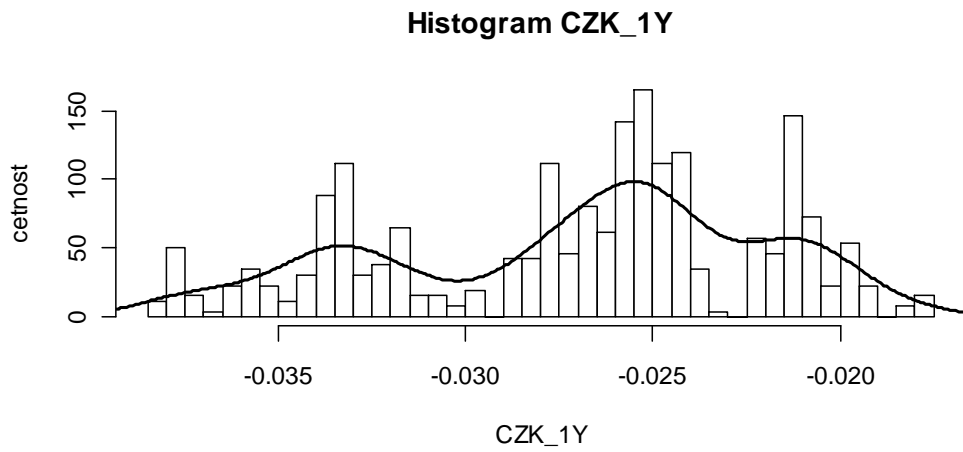
Obrázek 4.1: Akcie (O2, ECM, fond DAX)



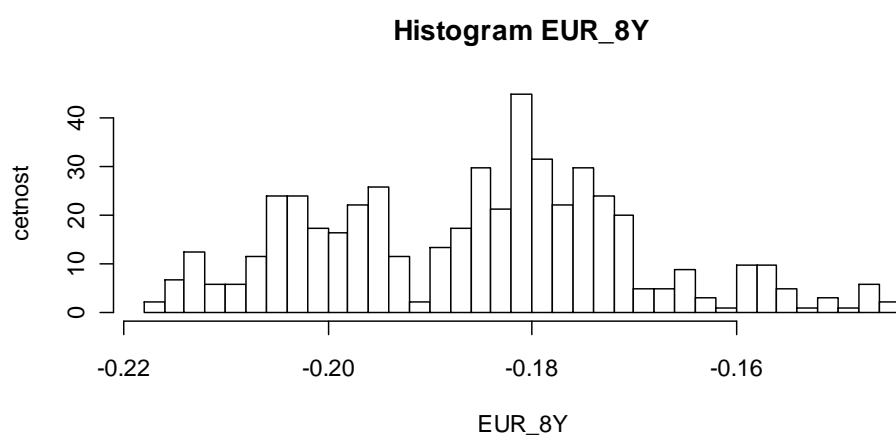
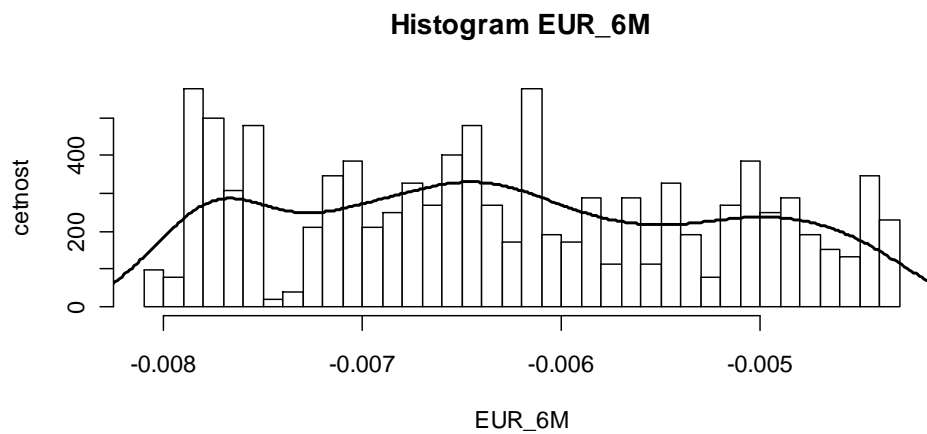
Obrázek 4.2: Akcie (Erste Bank, ČEZ, Komerční banka)



Obrázek 4.3: Akcie (fond Dow Jones) a měnový kurz



Obrázek 4.4: Sazby českých dluhopisů



Obrázek 4.5: Sazby zahraničních dluhopisů

5. Závěr

Cílem této práce bylo seznámení se s metodou Value at Risk, jako nástroje pro měření tržních rizik. Popsali jsme metodu jako komplexní přístup k měření tržních rizik, představili její předpoklady a zhodnotili její výhody a nevýhody. Dále jsme si rozebrali jednotlivé přístupy k metodě, jak se od sebe liší, co předpokládají, a v čem jsou jejich silné a slabé stránky. Na konkrétním příkladě jsme ukázali výpočet metodou historické simulace a metodou rozptylů a kovariancí. Ukázali jsme si tedy, v čem se metody liší, a jak se liší výsledky. Vypočítali jsme si ještě některé další charakteristiky jako hodnoty relativního VaR nebo diverzifikace jednotlivých rizik. Uvedli jsme si, že metoda rozptylů a kovariancí předpokládá normální rozdělení výnosů. V aplikační části jsme otestovali normalitu pomocí statistického programu R. Výsledky testů ukázaly, že normalitu ve všech případech zamítáme. To jen potvrzuje, že některé teoretické předpoklady modelů, nejsou v praxi vždy splněny. I přesto se tato metoda velmi často používá.

Literatura

[1] Cipra, T.: Kapitálová přiměřenost ve financích a solventnost v pojišťovnictví, Praha Ekopress, 2002.

[2] Dupačová J., Hurt J., Štěpán J.: Stochastic Modeling in Economics and Finance, Kluwer Academic Publisher, 2002.

[3] Jorion, P.: Value at Risk. The New Benchmark for Controlling Market Risk, The McGraw-Hill Companies, Inc., 1997.

[4] Mejstřík, M.: Banking (přednáška), Praha- FSV Univerzita Karlova, 2007.

[5] Myška, P.: Seminář z aktuárských věd: Vybrané poznámky k řízení rizik v bankách (přednáška), Praha: MFF Univerzita Karlova, 2008.

[6] Strnad, P.: Řízení tržních rizik pomocí Value at Risk- úskalí a problémy (prezentace), Praha, 2005.

[7] www.finance.yahoo.com

[8] www.akcie.cz

[9] www.ecb.com.