Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jan Hoffmann

Izoperimetrická nerovnost

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.,
Katedra matematické analýzy
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika
Zaměření: Pravděpodobnost, matematická statistika a
ekonometrie
2009

Rád bych poděkoval panu doc. RNDr. Daliboru Pražákovi, Ph.D., který byl mým vedoucím bakalářské práce, za nabídnutí zajímavého tématu, tipy na podnětnou literaturu, cenné rady při tvorbě práce a velkou vstřícnost při konzultacích. Dále chci poděkovat všem, kteří mi potřebnou literaturu zapůjčili, a také všem, kteří mi při práci s programem TeX pomohli dobrými radami.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 28. 5. 2009 Jan Hoffmann

Obsah

Název práce: Izoperimetrická nerovnost
Autor: Jan Hoffmann
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D., Katedra matematické analýzy
e-mail vedoucího: prazak@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci se zabýváme izoperimetrickou nerovností, která je analytickým vyjádřením známé izoperimetrické úlohy. V práci se soustředíme na izoperimetrickou nerovnost v $\mathbb{R}^2$ a snažíme se na ní ukázat různé přístupy k této matematické úloze. V první kapitole představíme izoperimetrickou úlohu v jejích historických souvislostech a ukážeme úzkou souvislost izoperimetrické úlohy s izoperimetrickou nerovností. V další kapitole potom uvedeme několik základních poznatků o izoperimetrické nerovnosti. Ve třetí kapitole ukážeme geometrický důkaz izoperimetrické nerovnosti v rovině. V předposlední kapitole zúžíme tutéž nerovnost na Bonnesenovu nerovnost, kterou následně dokazujeme pomocí aproximace oblastí mnohoúhelníky. V poslední kapitole poté předvedeme, jak se izoperimetrická nerovnost dokazuje užitím Brunn-Minkowského nerovnosti a pojmů Minkowského součtu množin a Minkowského délky hranice.

Klíčová slova: Symetrizace, Bonnesenova nerovnost, Izoperimetrická porucha, Brunn-Minkowského nerovnost, Minkowského délka hranice

Title: Isoperimetric inequality
Author: Jan Hoffmann
Department: Department of Analysis
Supervisor: Doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D., Department of Analysis
Supervisor's e-mail address: prazak@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study the isoperimetric inequality as a description of well-known isoperimetric problem. In this work we are contentrating upon the isoperimetric inequality in $\mathbb{R}^2$. Our goal is to show different approaches to this mathematical problem. In the Chapter 1, we will introduce the isoperimetric problem in its historical context and we will show close connection between the isoperimetric problem and the isoperimetric inequality. In next chapter, we will show some basic findings about the isoperimetric inequality. In the Chapter 3, we will show geometrical proof of the isoperimetric inequality in plane. In next chapter we will restrict the isoperimetric inequality to the Bonnesen inequality and we will prove this new inequality by aproximation of domains by polygons. In the last chapter, we will show how to prove the isoperimetric inequality using the Brunn-Minkowski inequality and using terms of the Minkowski sum of sets and the Minkowski length of boundary.

Keywords: Symmetrization, Bonnesen inequality, Isoperimetric defect, Brunn-Minkowski inequality, Minkowski length of boundary

Kapitola 1

Pár slov úvodem o izoperimetrické úloze

Izoperimetrickou úlohou se lidstvo zabývalo od nepaměti. Samotné slovo izoperimetrický nám ukazuje, že se zabýváme otázkou, jak při zachování stejného (izo) obvodu (perimetr) maximalizovat obsah. Nejjednodušší formulací byla otázka: ,,Mezi všemi možnými obrazci se stejným obvodem, existuje nějaký, který má větší obsah než všechny ostatní obrazce?" Tato úvaha měla praktickou motivaci, neboť ve starověku se často jako výměra používal obvod. Protože se takto evidovaly i pozemky, všimli si lidé brzy, že dlouhý tenký obdélník má výrazně menší obsah než čtverec o stejném obvodu. Odtud přirozeně vyplynula otázka na tvar maximalizující obsah. Vcelku se dalo vytušit, že největší obsah má kruh, a tak se snažili staří Řekové najít důkaz, že mezi všemi obrazci stejného obvodu má právě kruh největší obsah. Snahy o důkaz, že kruh řeší izoperimetrickou úlohu se tak staly součástí řeckého zlatého věku geometrie. Řecký matematik Zenodorus dokázal, že obsah kruhu je větší než obsah jakéhokoli mnohoúhelníku o stejném obvodu.
S izoperimetrickou úlohou také úzce souvisela ,,Úloha královny Dídó": ,,Máme dánu přímku a délku další křivky. Jaký tvar má mít tato křivka, aby byl vymezený obsah nejvyšší?" Odpověď je pochopitelně taková, že křivka má mít tvar půlkružnice. Královna Dídó byla podle legend zakladatelkou a první panovnicí Kartága.
Protože Zenodorův důkaz optimality kružnice ve srovnání s mnohoúhelníkem byl, podobně jako úvahy dalších Řeků nad tímto problémem, čistě geometrický, nešlo o korektní důkaz s přesně precizovanými pojmy obsahu a ob-

vodu. A tak byl první matematicky korektní důkaz, že kruh řeší izoperimetrickou úlohu, podán až v 19. století. První krok směrem k řešení tehdy učinil švýcarský geometr Jacob Steiner (1796 - 1863) v roce 1838. Ten použil geometrickou metodu, která je dnes známa jako Steinerova symetrizace. Steiner dokázal následující: ,,Pokud řešení izoperimetrické úlohy existuje, pak je tímto řešením kružnice." Důkaz, že řešení izoperimetrického problému opravdu existuje, dodalo později různými cestami několik matematiků. Od té doby byla podána řada dalších alternativních důkazů různé obecnosti a složitosti.

Přechod od izoperimetrické úlohy k izoperimetrické nerovnosti je zřejmý. Jestliže platí, že křivka o délce L vymezí oblast s největším obsahem, je-li to kružnice, pak obsah maximální oblasti je

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \pi \frac{L^2}{4\pi^2} = \frac{L^2}{4\pi}.$$

Potom tedy každá uzavřená křivka délky L ohraničuje plochu $S \leq \frac{L^2}{4\pi}$, tedy platí nerovnost $\frac{L^2}{4\pi} - S \geq 0$, což přenásobením dostane podobu $L^2 - 4\pi S \geq 0$. Pro kružnici a jí vymezený kruh pak nastává rovnost. Jelikož kružnice je jediným řešením, nastává rovnost tehdy a jen tehdy, jde-li o kružnici. Tím jsme se tedy dostali od izoperimetrické úlohy k jejímu jádru - k izoperimetrické nerovnosti.

Nyní tedy víme, že izoperimetrická nerovnost porovnává druhou mocninu obvodu uzavřené křivky v rovině s obsahem vnitřní oblasti, kterou tato křivka vymezuje. Smysl pojmu izoperimetrická nerovnost je však širší, existují totiž četná zobecnění izoperimetrické nerovnosti z $\mathbb{R}^2$ do vícerozměrných prostorů, do zakřivených oblastí na površích těles, vztahem Lebesgueových měr vyšší a nižší dimenze pro nejrůznější množiny, atp.

S výjimkou Kapitoly 2, kde se krátce zmíním také o izoperimetrické úloze v obecném $\mathbb{R}^n$, se budu ve své práci zabývat výhradně izoperimetrickou nerovností v $\mathbb{R}^2$.

Pro úvodní konkrétní ilustraci v rovině $\mathbb{R}^2$ si uvědomme, že i poměrně pravidelný útvar, jakým je čtverec, není ani zdaleka řešením izoperimetrické úlohy. Čtverec o straně $\frac{L}{4}$ totiž má vnitřní obsah $\frac{L^2}{16}$, což je zřetelně méně než obsah kruhu vymezeného stejně dlouhou kružnicí $\frac{L^2}{4\pi}$.

Nyní lehce naznačíme, jakým způsobem řešil úlohu Jacob Steiner, později se k jeho postupu vrátíme podrobněji.

Steiner ve svých úvahách vyšel od jednoduchých geometrických tvarů, na nichž bylo problém snadné ilustrovat. Křivky vymezující nekonvexní plochy šlo snadno pozměnit, aby se neprodloužily a přitom plocha narostla. Nesymetrické křivky šlo symetrizovat, elipsy správným způsobem stlačit, apod. Jediný tvar, který je dokonale konvexní a symetrický, je kružnice. To však stále ještě nebyl korektní důkaz.

V roce 1902 publikoval německý matematik Adolf Hurwitz (1859 - 1919) poměrně krátký důkaz využívající Fourierových řad. Roku 1938 podal E. Schmidt důkaz založený na porovnání hladké uzavřené křivky s kružnicí. V tomto důkazu využil Schmidt vzorec pro délku oblouku, vyjádření pro obsah rovinné plochy a Cauchy-Schwarzovy nerovnosti.

My se v naší práci zaměříme na podrobné provedení steinerovského důkazu a poté na dva další přístupy. Jeden je založen na aproximaci oblastí mnohoúhelníky a nalezení souvislosti mezi tzv. izoperimetrickou poruchou (velikostí rozdílu $L^2 - 4\pi S$) a velikostí opsané a vepsané kružnice - tuto souvislost popisuje tzv. Bonnesenova nerovnost. Druhý přístup je založen na formalizaci intuitivní představy, že obvod oblasti úzce souvisí s rychlostí růstu objemu při rozpínání této oblasti.

Shrňme si ještě jednou, k čemu jsme v této úvodní kapitole došli.
Řešení izoperimetrického problému obvykle formalizujeme pomocí nerovnosti vyjadřující vztah mezi délkou L uzavřené křivky a obsahem S plošné oblasti, kterou tato křivka uzavírá. Izoperimetrická nerovnost říká, že

$$4\pi S \leq L^2, \tag{1.1}$$

přičemž rovnost nastává, právě když křivka je kružnice. Zřejmě oblast kruhu s poloměrem r je πr^2 a obvod tohoto kruhu je $2\pi r$, takže obě strany nerovnosti jsou v tomto případě rovny $4\pi^2 r^2$.
Při analytickém přístupu většinou nerovnost (1.1) uvádíme v podobě

$$L^2 - 4\pi S \geq 0. \tag{1.2}$$

S těmito nerovnostmi budeme v dalším pracovat.

Kapitola 2

Základní poznatky o izoperimetrii

V této kapitole si preciznĕji představíme předmět naší práce a vybudujeme si potřebné teoretické základy a pojmosloví pro další zkoumání úlohy. Nejprve popíšeme klasickou izoperimetrickou nerovnost v euklidovském prostoru všech dimenzí a vyslovíme základní tvrzení, která platí v rovině. Nejjednodušším případem je izoperimetrie na přímce, tj. v $\mathbb{R}^1$.
Buď A nějaká omezená oblast na reálné přímce, tj. otevřený interval. Diskrétní míra jejího obvodu, tj. počet jejích hraničních bodů, je 2.
Buď B nějaká omezená podmnožina reálné přímky. Potom je zřejmě diskrétní míra jejího obvodu větší nebo rovna 2, kde rovnost nastává pouze v případě, že celá B je jedním otevřeným intervalem. Celkově tedy můžeme říci, že řešením izoperimetrického problému na přímce je otevřený interval, který není ničím jiným než otevřenou koulí v tomto speciálním prostoru.

Nyní se přesuneme s izoperimetrickou nerovností do roviny, kde se setkáme s jejími třemi různými formulacemi. Nejprve se zmíníme o prvních dvou:
(A) Uvažujeme všechny omezené oblasti v $\mathbb{R}^2$ s pevně daným obvodem, tj. délkou jejich hranice, a hledáme oblast o největším obsahu. Odpovědí na naši otázku je pochopitelně kruh. Je důležité si povšimnout, že samotná hodnota obvodu pro naši otázku nehraje žádnou roli, neboť všechny oblasti obvodu L_1 jsou zobrazitelné díky podobnosti v $\mathbb{R}^2$ na oblasti obvodu L_2 pro jakékoliv dané hodnoty L_1, L_2 a optimální řešení obou úloh se zobrazují na sebe.
(B) Můžeme uvažovat i naopak. Vezmeme všechny omezené oblasti s pevně

daným obsahem a hledáme cestu k minimalizaci obvodu.
Jak už bylo naznačeno v předchozí kapitole, třetí a nejpreciznější cestou je popsat izoperimetrickou úlohu jako analytickou nerovnost. Proto je dobré převádět izoperimetrický úlohu na dokázání izoperimetrické nerovnosti v podobě (1.1) nebo (1.2). (Pro obecné n pak v podobě, kterou za chvíli uvedeme.) Naším úkolem po převedení na jednu z těchto nerovností je potom dokázat, že příslušná nerovnost platí pro všechny oblasti v rovině a rovnost nastává tehdy a jen tehdy, když je oblastí kruh, jde-li o $n = 2$. Pro obecné n se pak dokazuje nerovnost a rovnost nastávající, právě když jde o n-rozměrnou kouli.
Nyní se krátce podíváme na slíbené zobecnění do vyšších prostorů, tedy obecně pro $\mathbb{R}^n, n \geq 2$.
Úmluva: Při zkoumání izoperimetrie pro $\mathbb{R}^n$ budeme n-rozměrnou míru nazývat objemem V a $(n-1)$-rozměrnou míru budeme nazývat obsahem A, tak jak jsme byli dosud zvyklí pro $n = 3$.
Výše formulovaná analytická izoperimetrická nerovnost (1.1) dostává pro obecný případ $n \geq 2$ podobu

$$\frac{A(\partial\Omega)}{[V(\Omega)]^{1-\frac{1}{n}}} \geq \frac{A(S^{n-1})}{[V(B^n)]^{1-\frac{1}{n}}}, \tag{2.1}$$

kde Ω je nějaká omezená oblast v $\mathbb{R}^n$ a $\partial\Omega$ je její hranice, V označuje n-rozměrnou míru a A označuje $(n-1)$-rozměrnou míru, B^n je jednotková koule v $\mathbb{R}^n$ a S^{n-1} je její hranice, tedy jednotková sféra v $\mathbb{R}^n$. Tato nerovnost neříká nic jiného, než že poměr obsahu hranice a objemu (vhodně umocněného) množiny touto hranicí vymezené je nejpříznivější (nejmenší) pro sféru a jí vymezenou kouli.
Označme ω_n n-rozměrný objem B^n a označme c_{n-1} $(n-1)$ - rozměrný obsah sféry S^{n-1}. Je známo, že platí vzorce

$$c_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \qquad \omega_n = \frac{c_{n-1}}{n}, \tag{2.2}$$

kde $\Gamma(x)$ je gama funkce.
(Z těchto vzorečků snadno plynou vzorce pro jednotkové koule a jednotkové sféry různých dimenzí, které se dají snadno zobecnit pro libovolný poloměr. Takto dostáváme mimo jiné i známé vzorce pro objem V (standardní třírozměrné) koule a pro obsah S jejího povrchu $V = \frac{4}{3}\pi r^3, S = 4\pi r^2$).
Odtud po úpravách $\frac{A(S^{n-1})}{[V(B^n)]^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{c_{n-1}}{\omega_n^{1-\frac{1}{n}}} = c_{n-1}(\frac{n}{c_{n-1}})^{1-\frac{1}{n}} = c_{n-1} \cdot c_{n-1}^{\frac{1}{n}-1} \cdot n^{1-\frac{1}{n}} =$

$c_{n-1}^{\frac{1}{n}} \cdot n^{1-\frac{1}{n}} = n(\frac{c_{n-1}}{n})^{\frac{1}{n}} = n\omega_n^{\frac{1}{n}}$ dostáváme nový tvar nerovnosti (2.1)

$$\frac{A(\partial\Omega)}{[V(\Omega)]^{1-\frac{1}{n}}} \geq n\omega_n^{\frac{1}{n}}. \tag{2.3}$$

V následující poznámce ověříme, že izoperimetrická nerovnost v $\mathbb{R}^2$ je opravdu pouze speciálním případem obecné izoperimetrické nerovnosti v $\mathbb{R}^n$. V další poznámce ukážeme, jak se dá izoperimetrická nerovnost pro oblasti v $\mathbb{R}^n$ zobecnit na sjednocení oblastí.
Poznámka 2.1: Podívejme se, jak vypadá nerovnost (2.3) pro $n = 2$:

$$A(\partial\Omega) = L,$$

$$V(\Omega)^{1-\frac{1}{n}} = \sqrt{S},$$

$$n\omega_{\mathbf{n}}^{\frac{1}{n}} = 2\sqrt{\frac{c_1}{2}} = \sqrt{2}\sqrt{c_1} = 2\sqrt{\pi}\frac{1}{\sqrt{\Gamma(1)}} = 2\sqrt{\pi}.$$

Dostáváme tedy

$$\frac{L}{\sqrt{S}} \geq 2\sqrt{\pi},$$

což je to samé jako

$$L \geq 2\sqrt{\pi S},$$

odkud již umocněním dostáváme nerovnost (1.1).
Poznámka 2.2: V těchto úvahách jsme zúžili izoperimetrickou nerovnost na oblasti v $\mathbb{R}^n$, ale tuto nerovnost lze zobecnit i na otevřené množiny sestávající z konečného množství omezených oblastí. Předpokládejme, že nerovnost (2.1) je splněna pro oblasti v $\mathbb{R}^n$. Jestliže

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup ...,$$

kde Ω_j, $j \in \mathbb{N}$, jsou kompaktní oblasti s po dvou disjunktními uzávěry, tj.

$$\overline{\Omega_j} \cap \overline{\Omega_k} = \emptyset, \qquad \forall j \neq k,$$

potom můžeme přejít k odvození dalších nerovností.
Označme si $s := 1 - \frac{1}{n}$, pak platí $s \in (0, 1)$, tudíž funkce f určená předpisem $f(x) = x^s, x \in [0, +\infty)$ je konkávní. Jelikož pro $x, y \geq 0$ plyne z konkávnosti funkce f nerovnost $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$, dostáváme z rovnosti

$$V(\Omega) = \sum_{j\in\mathbb{N}} V(\Omega_j)$$

nerovnost

$$[V(\Omega)]^{1-\frac{1}{n}} \leq \sum_{j\in\mathbb{N}}[V(\Omega_j)]^{1-\frac{1}{n}}.$$

Z nerovnosti (2.3) plyne snadnou aplikací

$$\frac{A(\partial\Omega_j)}{n\omega_n^{\frac{1}{n}}} \geq [V(\Omega_j)]^{1-\frac{1}{n}},$$

odkud sečtením dostáváme

$$\frac{1}{n\omega_n^{\frac{1}{n}}}\sum_{j\in\mathbb{N}} A(\partial\Omega_j) \geq \sum_{j\in\mathbb{N}}[V(\Omega_j)]^{1-\frac{1}{n}}.$$

Z disjunktnosti uzávěrů Ω_j vyplývá disjunktnost hranice, takže dostáváme

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} A(\partial\Omega_j) = A(\partial\Omega).$$

Dohromady potom máme

$$[V(\Omega)]^{1-\frac{1}{n}} \leq \sum_{j\in\mathbb{N}}[V(\Omega_j)]^{1-\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n\omega_{\mathbf{n}}{}^{\frac{1}{n}}}\sum_{j\in\mathbb{N}} A(\partial\Omega_j) = \frac{A(\partial\Omega)}{n\omega_{\mathbf{n}}{}^{\frac{1}{n}}}. \tag{2.4}$$

Tím jsme zobecnili izoperimetrickou nerovnost i na sjednocení oblastí.
Jak ale bylo řečeno, hlouběji se izoperimetrickou nerovností v obecném $\mathbb{R}^n$ zabývat nebudeme. Při dokazování izoperimetrické nerovnosti v $\mathbb{R}^n$ lze postupovat mnoha způsoby, jeden z nich je zobecněním postupu, který na případu $\mathbb{R}^2$ ukazujeme v 5. kapitole této práce. Zájemce se s touto problematikou může seznámit hlouběji v knize [2], str. 68 - 77, 83 - 86.

Kapitola 3

Geometrický důkaz izoperimetrie

V této kapitole si podrobněji ukážeme, jakým způsobem řešil izoperimetrickou úlohu v $\mathbb{R}^2$ Jacob Steiner. Jelikož jde o důkaz geometrický a my se omezíme na oblasti ohraničené po částech hladkými křivkami, bude definice obsahu oblasti a délky její hranice intuitivně zřejmá. Obsahem oblasti tedy rozumíme její dvojrozměrnou Lebesgueovu míru a délku po částech hladké hranice (tj. délku vymezující křivky) chápeme jako součet délek jejích jednotlivých hladkých částí.

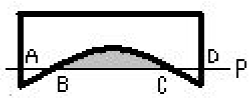
Věta 3.1 *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast vymezená uzavřenou křivkou $\Gamma = \partial\Omega$. Označme $L := L(\Gamma)$ délku této vymezující křivky (obvod oblasti). Dále značme pro každou oblast $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ její hranici $\Gamma' := \partial\Omega'$ a $L' := L(\Gamma')$. (Toto značení budeme používat v celé této kapitole.) Jestliže pro každou oblast Ω' splňující $L' = L$ platí $S(\Omega') \leq S(\Omega)$, potom Ω je kruh.*

Nyní ukážeme Steinerův geometrický důkaz tohoto tvrzení. Nejprve vyslovíme a dokážeme pomocná tvrzení, ze kterých vlastní věta 3.1 vyplývá.

Nejprve si ukážeme, že řešením izoperimetrické úlohy může být jedině konvexní oblast.

Lemma 3.1 *Pokud pro oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ platí, že $S(\Omega) \geq S(\Omega')$ pro jakoukoliv oblast $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ se stejným obvodem (tj. takovou, že platí $L' = L$) (dále budeme pro takovou Ω používat obratu, že má maximalizační vlastnost), potom Ω je konvexní.*

Důkaz: Toto lemma dokážeme sporem. Předpokládejme, že Ω není konvexní a má maximalizační vlastnost. Pak využijeme toho, že existuje taková přímka P protínající Γ v bodech A, B, C, D, že úsečky AB a CD leží v Ω, zatímco úsečka BC leží naopak mimo Ω (viz Obr. 1).



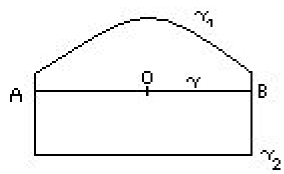
Obrázek 1: Množina Ω je vyznačena bíle, množina Ω'' vznikne z množiny Ω přidáním šedě vyznačené plochy.

Nahradíme-li obvodový oblouk BC úsečkou BC, získáme tak oblast Ω'' s menším obvodem (jelikož úsečka je vždy nejkratší spojnicí dvou bodů) a větším obsahem (jelikož plocha ohraničená úsečkou BC a obloukem CB je nyní zahrnuta navíc oproti původní situaci). Položíme-li si $L'' := L(\Omega'')$ a $\Omega' := (1+\varepsilon)\Omega''$, kde $\varepsilon = \frac{L}{L''} - 1 > 0$, pak $L' = L$ a zároveň $S(\Omega') = (1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2)S(\Omega'') > (1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2)S(\Omega) > S(\Omega)$. To je ovšem spor s maximalizační vlastností oblasti Ω, čímž je lemma dokázáno.

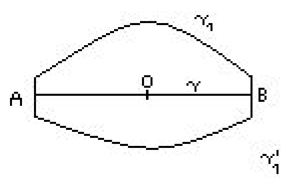
$\square$

Při řešení izoperimetrické úlohy se tedy v dalším zaměříme na konvexní oblasti.
Ukážeme, že oblast splňující maximalizační podmínku musí být symetrická. K tomu stačí ukázat, že symetrizací oblasti s maximalizační vlastností už nezměníme její obvod ani obsah.
Označme si pro libovolné body $x, y \in \Gamma$ jejich vzdálenost po křivce Γ symbolem $d_\Gamma(x, y)$. Nechť tedy $A, B \in \Gamma$ jsou takové body, že $d_\Gamma(A, B) = \frac{L}{2}$. Pak platí $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ (spojení křivek), kde γ_1, γ_2 jsou takové křivky spojující body A a B, že platí $L(\gamma_1) = L(\gamma_2) = \frac{L}{2}$. Z konvexity Γ vyplývá, že γ_1, γ_2 protínají úsečku AB pouze v bodech A, B. Označme střed úsečky A, B jako

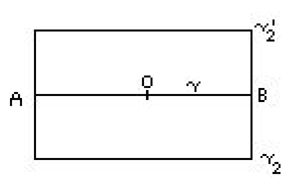
O. Dále si definujme γ_j' jako středovou symetrii γ_j podle O ($j = 1, 2$). Nyní si označíme Ω_j oblast ohraničenou oblouky γ_j, γ_j' ($j = 1, 2$). Tomuto procesu říkáme symetrizace oblasti Ω. (Viz Obr. 2a, 2b, 2c)



Obrázek 2a: Oblast Ω ohraničená křivkou Γ.



Obrázek 2b: Symetrizovaná oblast Ω_1 ohraničená křivkou $\Gamma_1 = \gamma_1 + \gamma_1'$.



Obrázek 2c: Symetrizovaná oblast Ω_2 ohraničená křivkou $\Gamma_2 = \gamma_2 + \gamma_2'$.

Lemma 3.2 *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vymezená křivkou Γ je oblast s maximalizační vlastností. Nechť γ je úsečka spojující nějaké dva body $A, B \in \Gamma$. Pokud úsečka γ dělí napůl obvod, potom dělí napůl také obsah.*

Důkaz: Zavedeme si nejprve značení. Ω_j = oblast vymezená křivkami γ_j a γ_j', $j = 1, 2$. β_j = oblast vymezená úsečkou γ a křivkou γ_j, $j = 1, 2$.
Jelikož úsečka γ dělí obvod napůl, platí rovnost

$$L(\Gamma_j) = L(\gamma_j) + L(\gamma_j^{'}) = 2L(\gamma_j) = L(\Gamma), j = 1, 2.$$

Z maximalizační vlastnosti plyne

$$S(\Omega) \geq S(\Omega_j), j = 1, 2.$$

A ze symetrie plyne

$$S(\Omega_j) = 2S(\beta_j), j = 1, 2.$$

Proto platí

$$S(\Omega_1) + S(\Omega_2) = 2S(\beta_1) + 2S(\beta_2) = 2S(\Omega), j = 1, 2.$$

Dohromady tedy dostáváme, že musí platit

$$S(\Omega_1) = S(\Omega_2) = S(\Omega).$$

Podle rovnosti $S(\Omega_1) = S(\Omega_2)$ tedy platí $2S(\beta_1) = 2S(\beta_2)$, čili $S(\beta_1) = S(\beta_2)$, čímž je dokázáno, že úsečka γ dělí napůl také obsah.

$\square$

Lemma 3.3 *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vymezená křivkou Γ je oblast s maximalizační vlastností. Nechť γ je úsečka spojující nějaké dva body $A, B \in \Gamma$. Pokud úsečka γ dělí napůl obsah, potom dělí napůl také obvod.*

Důkaz: Pokud úsečka γ dělí napůl obsah, znamená to, že $S(\beta_1) = S(\beta_2) = \frac{S(\Omega)}{2}$, takže podle symetrie $S(\Omega_1) = S(\Omega_2) = S(\Omega)$. Dále postupujeme sporem. Předpokládejme, že úsečka γ nedělí obvod oblasti napůl, tedy $L(\gamma_1) \neq L(\gamma_2)$, tj. jedna z křivek γ_1, γ_2 je kratší než druhá. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $L(\gamma_1) < L(\gamma_2)$. To logicky znamená, že $L(\gamma_1) < \frac{L(\Gamma)}{2}$, takže pro oblast Ω_1 vzniklou symetrizací β_1 a její hranici Γ_1 musí platit $L(\Gamma_1) < L(\Gamma)$. Tato oblast má přitom podle symetrie stejný obsah jako Ω, takže její menší obvod vede ke sporu s maximalizační vlastností oblasti Ω. Proto musí γ dělit obvod oblasti Ω.

$\square$

Lemma 3.4 *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vymezená křivkou Γ je oblast s maximalizační vlastností. Nechť γ je úsečka spojující nějaké dva body $A, B \in \Gamma$. Pak úsečka γ dělí napůl obvod, právě když dělí napůl obsah.*

Důkaz: Lemma je zřejmým důsledkem předchozích dvou lemmat.

$\square$

Lemma 3.5 *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast s maximalizační vlastností, γ je úsečka, která dělí napůl její obsah a obvod, $\Omega_j \subset \mathbb{R}^2$, $j = 1, 2$, jsou oblasti vzniklé symetrizací β_j, $j = 1, 2$. Pak Ω_j, $j = 1, 2$, mají také maximalizační vlastnost.*

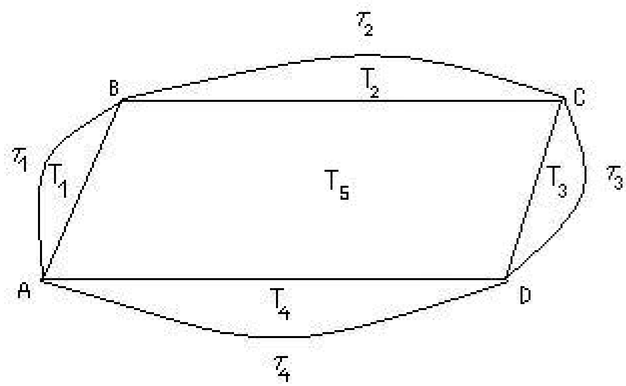
Důkaz: Jelikož γ dělí napůl obsah i obvod Ω , musí mít Ω_j stejný obvod i stejný obsah jako Ω. Odtud je zřejmé, že také Ω_j má maximalizační vlastnost.

$\square$

Lemma 3.6 *Ω_1 a Ω_2 vzniklé výše popsanou symetrizací konvexní oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s maximalizační vlastností jsou kruhy.*

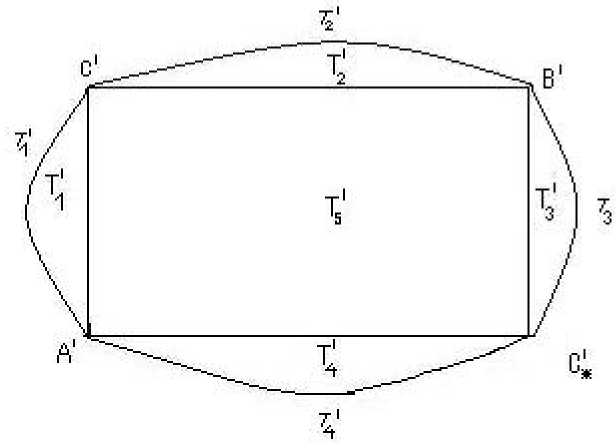
Důkaz: Je-li ξ uzavřená křivka a jsou-li A, B takové body, že úhel $A\hat{C}B$ je pravý pro každé $C \in \xi$, potom podle Thaletovy věty je ξ kružnice s poloměrem AB.
Nám proto stačí dokázat (nezávisle na volbě $\gamma = AB$), že pro každé $C \in \Gamma_j$, $j = 1, 2$ je $A\hat{C}B$ pravý úhel.

Buď C_* obraz C podle O. Ze symetrie Ω_j plyne, že C_* leží také v Γ_j. Dále si rozdělme Ω_j do disjunktních částí T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, kde T_5 je rovnoběžník $ACBC_*$, T_1 je oblast vymezená úsečkou AC a obloukem CA, T_2 je oblast vymezená úsečkou CB a obloukem BC, T_3 je oblast vymezená úsečkou BC_* a obloukem C_*B, T_4 je oblast vymezená úsečkou C_*A a obloukem AC_*. (Viz obrázek 3a.)



Obrázek 3a

Nyní postupujme sporem. Předpokládejme, že $A\hat{C}B$ není pravý úhel. Potom si původní oblast Ω_j modifikujme na novou oblast Ω'_j. Jako Ω'_j budeme uvažovat oblast sestávající z obdélníku $T'_5 = A'C'B'C'_*$ (s délkou strany $A'C'$ shodnou s délkou AC, délkou $C'B'$ shodnou s CB, atd.) a následujících 4 oblastí: T'_1 je oblast vymezená úsečkou $A'C'$ a obloukem $C'A'$, T'_2 je oblast vymezená úsečkou $C'B'$ a obloukem $B'C'$, T'_3 je oblast vymezená úsečkou $B'C'_*$ a obloukem C'_*B', T'_4 je oblast vymezená úsečkou C'_*A' a obloukem $A'C'_*$. (Čárkované oblouky přitom budou odpovídat obloukům původním. Viz obrázek 3b.)



Obrázek 3b

Jelikož oblouky T_1 z A do C, T_1' z A' do C' mají stejné délky a stejně tak T_2 a T_2', T_3 a T_3', T_4 a T_4' mají stejné délky, mají také Ω_j a Ω_j' stejný obvod.
Jelikož obsah obdélníka je roven součinu jeho podstavy a výšky, musí platit

$$S(T_5') > S(T_5),$$

neboť výška se změnou nepravoúhlého rovnoběžníku na obdélník nutně zvýšila.
Proto ze zřejmé rovnosti $S(T_k) = S(T_k'), k = 1, 2, 3, 4$, dostáváme

$$S(\Omega_j') = \sum_{k=1}^{5} S(T_k') = \sum_{k=1}^{4} S(T_k) + S(T_5') > \sum_{k=1}^{5} S(T_k) = S(\Omega_j).$$

To je ale spor s maximalizační vlastností Ω_j, takže $A\hat{C}B$ musí být pravý úhel, čímž je důkaz hotov.

$\square$

Důkaz věty 3.1: Jelikož Ω_1 a Ω_2 jsou kruhy, musí být γ_1 a γ_1' půlkružnice, tudíž Ω je kruh.

$\square$

Kapitola 4

Aproximace oblastí mnohoúhelníky a Bonnesenova nerovnost

V této kapitole si ukážeme, jak řešit izoperimetrickou úlohu přístupem, který chápe tuto úlohu jako dokázání izoperimetrické nerovnosti v podobě (1.1) nebo (1.2) a nalezení podmínek, za kterých tato nerovnost přechází v rovnost. Jádrem tohoto přístupu je zúžení izoperimetrické nerovnosti na tzv. Bonnesenovu nerovnost, hlavní metodou je aproximace konvexní oblasti mnohoúhelníky.
Jak v této kapitole ukážeme, Bonnesenova nerovnost nám dává dolní odhad rozdílu $L^2 - 4\pi S$ pomocí rozdílu poloměrů kružnice opsané a vepsané.
Stejně jako v předchozí kapitole se zaměříme na oblasti s po částech hladkou hranicí. Takové oblasti lze dobře aproximovat mnohoúhelníky. Zadefinujeme si tedy aproximaci zevnitř.

Definice 4.1 *Pod pojmem mnohoúhelník budeme pro jednoduchost chápat oblast vymezenou křivkou v tomto tvaru. O oblasti* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *řekneme, že je aproximovatelná zevnitř, jestliže existuje posloupnost mnohoúhelníků* $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ *taková, že každý mnoúhelník* M_k *je podmnožinou* Ω *a* $max\{d(\mathbf{x}, M_k), \mathbf{x} \in \partial\Omega\} \to 0$ *pro* $k \to \infty$*, přičemž pro* $k \to \infty$ *jsou splněny také podmínky* $S(M_k) \to S(\Omega)$*,* $L(\partial M_k) \to L(\partial\Omega)$*. Aproximace zevnitř tedy spočívá v tom, že existuje posloupnost mnohoúhelníků obsažených v* Ω*, která k této oblasti stejnoměrně konverguje, přičemž obsahy a obvody těchto mnohoúhelníků konvergují k obsahu a obvodu aproximované množiny.*

Definice 4.1 nám naznačuje základní myšlenku celé kapitoly, která vychází právě z aproximovatelnosti množin s po částech hladkou hranicí pomocí mnohoúhelníků.
Podstatnou vlastností aproximace zevnitř je skutečnost, že při označení poloměru kružnice vepsané mnohoúhelníku M_k symbolem r_k a poloměru kružnice opsané mnohoúhelníku M_k symbolem R_k, platí pro $k \to \infty$ vztahy $r_k \to r$ a $R_k \to R$, kde r a R jsou poloměry kružnice vepsané a opsané oblasti Ω. Tato vlastnost je pro ideu důkazu výhodná.

Věta 4.1 *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast v rovině s obsahem S a délkou hranice L. Potom platí nerovnost*

$$L^2 - 4\pi S \geq 0. \tag{4.1}$$

Rovnost nastává v (4.1) právě tehdy, když Ω je kruh.

Tuto formulaci izoperimetrické nerovnosti budeme nyní dokazovat. K tomu si připravíme několik důležitých tvrzení, bez kterých se při důkazu Věty 4.1 neobejdeme.

Věta 4.2 *Nechť Ω je oblast v rovině $\mathbb{R}^2$ ohraničená křivkou k. Nechť Ω má obsah S a k má délku L. Buďte $R > 0$ a $r > 0$ poloměry kružnice opsané (nejmenší kružnice obsahující $\overline{\Omega}$) a kružnice vepsané (největší kružnice obsažené v $\overline{\Omega}$). Potom platí následující nerovnosti*

$$L^2 - 4\pi S \geq \pi^2 (R - r)^2 \tag{4.2}$$

$$L^2 - 4\pi S \geq S^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)^2 \tag{4.3}$$

$$L^2 - 4\pi S \geq L^2 \left(\frac{R - r}{R + r} \right)^2 \tag{4.4}$$

$$\frac{L - \sqrt{L^2 - 4\pi S}}{2\pi} \leq r \leq R \leq \frac{L + \sqrt{L^2 - 4\pi S}}{2\pi} \tag{4.5}$$

Nerovnost (4.2) se nazývá Bonnesenova nerovnost. Zadefinujeme-li si, že pod pojmem izoperimetrická porucha budeme chápat rozdíl $L^2 - 4\pi S$, pak máme v nerovnostech (4.2), (4.3) a (4.4) dolní odhady této izoperimetrické poruchy. Z těchto odhadů také vyplývá, že izoperimetrická porucha je

nezáporná a přitom platí, že nulová je právě v případě, že popisovaná oblast je kruhem.
Poznámka 4.1: Povšimněme si, že zlomky $\frac{L-\sqrt{L^2-4\pi S}}{2\pi}$ a $\frac{L+\sqrt{L^2-4\pi S}}{2\pi}$, které se vyskytují v nerovnosti (4.5), tvoří kořeny kvadratické rovnice $\pi t^2 - Lt + S = 0$. Proto platí $\pi t^2 - Lt + S \leq 0$ pro $t \in \left[\frac{L-\sqrt{L^2-4\pi S}}{2\pi}, \frac{L+\sqrt{L^2-4\pi S}}{2\pi}\right]$, což můžeme zapisovat několika ekvivalentními způsoby

$$Lt \geq S + \pi t^2 \tag{4.6}$$

$$L^2 - 4\pi S \geq (L - 2\pi t)^2 \tag{4.7}$$

$$L^2 - 4\pi S \geq \left(L - \frac{2S}{t}\right)^2 \tag{4.8}$$

Nerovnosti (4.7) a (4.8) jsou opět dolním odhadem izoperimetrické poruchy.
Poznámka 4.2: Podívejme se na odvození nerovností. K původní nerovnosti

$$\pi t^2 - Lt + S \leq 0$$

přičteme Lt.
Dále odvozujeme

$$Lt \geq S + \pi t^2$$

$$-S \geq \pi t^2 - Lt$$

$$-4\pi S \geq 4\pi^2 t^2 - 4\pi Lt$$

$$L^2 - 4\pi S \geq L^2 + 4\pi^2 t^2 - 4\pi Lt = (L - 2\pi t)^2.$$

Nerovnost (4.8) má odvození složitější a nebudeme se jím v této práci zabývat.

Důsledek 4.1 *Nerovnosti* (4.6), (4.7) *platí také ve speciálních případech* $t = r$ *a* $t = R$. *V případě* $r \leq R$ *platí jako ostré nerovnosti pro jakékoli* t *z intervalu* (r, R).

Důkaz nerovností z Věty 4.2: Abychom si důkaz zjednodušili na dokazování jedné nerovnosti, ukážeme, že k dokázání všech nerovností z Věty 4.2 nám stačí dokázat nerovnost (4.5).
Nejprve si ukážeme, jak nerovnost (4.2) vyplývá z nerovnosti (4.5). Nerovnost (4.5) rozdělíme na tři nerovnosti

$$r \leq R \tag{4.9}$$

$$\pi R \leq \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - 4\pi S} \tag{4.10}$$

$$-\pi r \leq -\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - 4\pi S} \tag{4.11}$$

Sečtením nerovností (4.10) a (4.11) dostáváme nerovnost

$$\pi(R - r) \leq \sqrt{L^2 - 4\pi S},$$

kterou můžeme na základě platnosti (4.9) umocnit na dokazovanou nerovnost (4.2).
Dále si uvědomíme, že z nerovnosti (4.8) plyne

$$\sqrt{L^2 - 4\pi S} \geq \frac{2S}{r} - L \tag{4.12}$$

a

$$\sqrt{L^2 - 4\pi S} \geq L - \frac{2S}{R} \tag{4.13}$$

Sečtením těchto nerovností dostáváme (4.3), po přenásobení nerovností čísly r a R dostáváme také (4.4). Tím jsme ukázali, že opravdu stačí pouze dokázat nerovnost (4.5), k jejímuž důkazu nyní přikročíme.

První z nerovností tvořících (4.5), tj. $\frac{L-\sqrt{L^2-4\pi S}}{2\pi} \leq r$, má velmi složitý důkaz, kterým se v této práci nebudeme zabývat. Zájemci se s ním mohou seznámit v knize [2], str. 11-14.

Ukážeme však důkaz poslední nerovnosti v rámci (4.5), tj. $R \leq \frac{L+\sqrt{L^2-4\pi S}}{2\pi}$.
Jelikož oblast Ω z věty 4.2 lze stejnoměrně aproximovat konvexními mnohoúhelníky, bude nám stačit důkaz pro případ, kdy Ω je konvexní mnohoúhelník.
Nyní si přichystáme přípravná tvrzení pro důkaz zkoumané nerovnosti:

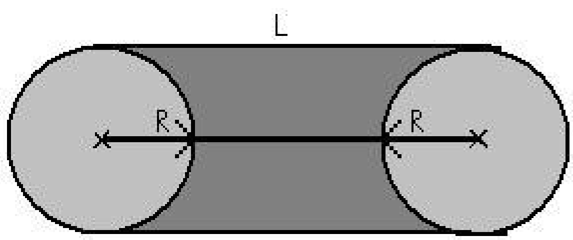
Lemma 4.1 *Nechť γ je jednoduchá lomená čára délky $L(\gamma)$ v rovině $\mathbb{R}^2$. Nechť E je množina všech bodů v rovině, jejichž vzdálenost od γ je nejvýše rovna R. Nechť lomená čára má N vrcholů a $E_k, k = 0, 1, 2, ..., 2N + 2$ jsou množiny bodů $x \in \mathbb{R}^2$, pro které kružnice $k(x, R)$ protíná γ právě v k bodech.*

Označme $S_k := S(E_k)$. Pak platí rovnost

$$\sum_{i=1}^{2N+2} kS_k = 4RL(\gamma). \tag{4.14}$$

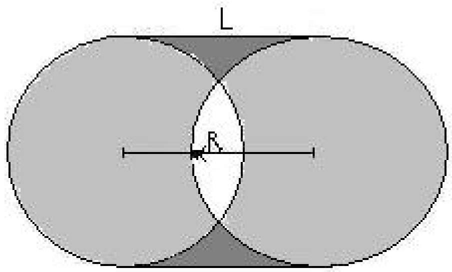
Důkaz: Provedeme jej indukcí přes počet vrcholů N lomené čáry γ. Nejprve tedy dokážeme, že rovnost platí pro případ, kdy $N = 0$, tj. pro úsečku γ.

Začneme jednodušším případem, kdy γ je taková úsečka, že platí $L(\gamma) \geq 2R$. (Viz obrázek 4.) Potom platí $E = \{x \in \mathbb{R}^2 : dist(x,\gamma) \leq R\} = P \cup K \cup L$, kde P je vnitřní plocha vymezená 4 přímkami: 2 rovnoběžnými s úsečkou γ, každou ve vzdálenosti R a 2 kolmicemi na γ spuštěnými v koncových bodech γ. Kruhy K, L mají poloměr R a každý má střed v jednom koncovém bodě úsečky γ. V takovém případě platí $E_1 = K \cup L, E_2 = E \setminus E_1$. Odtud již dostáváme příslušné obsahy $S_1 = 2\pi R^2, S_2 = 2RL(\gamma) - \pi R^2$. Platí tedy $\sum_{i=1}^{2N+2} kS_k = 2\pi R^2 + 4RL(\gamma) - 2\pi R^2 = 4RL(\gamma)$, což jsme chtěli dokázat.



Obrázek 4: Množiny pro případ, kdy $L(\gamma) \geq 2R$, světlé šedá barva značí plochy spadající pod E_1, tmavě šedá pod E_2

Nyní se podíváme na případ, kdy $L(\gamma) < 2R$. (Viz obrázek 5.) Pro snazší práci s výrazy si označme $L := L(\gamma)$. Ve zkoumaném případě platí $E = (P \cup Q) \cup (S \cup T)$, kde P, Q jsou kruhy o poloměru R, každá se středem v jednom koncovém bodě úsečky γ a S, T jsou dvě množiny (navzájem symetrické podle γ), z nichž každá je vymezená příslušnou rovnoběžkou ke γ běžící ve vzdálenosti R a oběma kružnicemi vymezujícími kruhy P, Q. Potom platí $E_1 = (P \cup Q) \setminus (P \cap Q), E_2 = S \cup T$. V tomto případě se výpočet obsahů jeví jako složitější záležitost.



Obrázek 5: Množiny pro případ, kdy $L(\gamma) \leq 2R$, světle šedá barva značí plochy spadající pod E_1, tmavě šedá pod E_2

My však spočteme součet $S_1 + 2S_2$ jednoduchou úvahou. Nejprve nasčítáme obsah obou kruhů, tedy $2\pi R^2$, jako kdyby oba kruhy ležely celé v E_1 a neprotínaly se. Protože však je to právě průsečík obou kruhů, který leží v E_0, začneme odečítat příslušný obsah. Do S_1 se z prvního kruhu vůbec nezapočítá kruhová úseč určená úsečkou půlící průnik kruhů a také se nezapočte množina k ní symetrická podle této úsečky. Analogické množiny v rámci druhého kruhu se do S_1 taktéž nezapočtou. Proto dostáváme průběžný součet $2\pi R^2 - 4S(M_1)$, kde M_1 je označení příslušné kruhové úseče.
Nyní přejdeme k přidání $2S_2$. Nejprve připočteme dvojnásobek obsahu obdélníku o šířce L a výšce $2R$, jako kdyby celý tento obdélník ležel v E_2, takže se dostáváme k průběžnému součtu $2\pi R^2 - 4S(M_1) + 4RL$. Následně si uvědomíme, jaké podmnožiny tohoto obdélníku do E_2 nespadají. Jsou jimi dva množinové rozdíly půlkruhů a příslušných kruhových úsečí obou kruhů. Nezapomeneme, že se vše musí přenásobit dvakrát a odečítáme $4S(M_2)$, kde M_2 je množinový rozdíl půlkruhu a příslušné kruhové úseče. Tak se dostáváme k rovnici $S_1 + 2S_2 = 2\pi R^2 - 4S(M_1) + 4RL - 4S(M_2)$. Nyní

si dobře povšimněme, že odečítáme čtyřikrát obsah kruhové úseče a také čtyřikrát odečítáme obsah půlkružnice bez této kruhové úseče, takže můžeme jednoduše odečítat 4 obsahy půlkružnice, tedy odečítat $2\pi R^2$. Tím se ale vykrátí člen na začátku pravé strany a my tak snadnou cestou získáváme dokazovaný vzoreček $S_1 + 2S_2 = 4RL$.

Nežli přistoupíme k indukčnímu kroku, uvažujme následovně: S_k je dvojrozměrná Lebesgueova míra množiny E_k. Přitom počet průniků kružnice se středem v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ a poloměrem R s křivkou γ lze chápat jako funkci K_γ dvojrozměrné proměnné $\mathbf{x}$ definovanou na $\mathbb{R}^2$. To ale neznamená nic jiného než, že můžeme psát $\sum_{k=1}^{\infty} = \int_{\mathbb{R}^2} K_\gamma(\mathbf{x})d\mathbf{x}$.
Pak ale z aditivity integrálu plyne, že pro křivku γ, která vznikne spojením křivek γ_1, γ_2 platí rovnost $K_\gamma(x) = K_{\gamma_1}(x) + K_{\gamma_2}(x)$. Odtud je zřejmé, že pokud rovnosti $\sum_{k=1}^{\infty} kS_k = 4RL(\gamma_j)$ platí pro křivky γ_j, $j = 1, 2$, potom platí analogická rovnost $\sum_{k=1}^{\infty} kS_k = 4RL(\gamma)$ také pro křivku γ vzniklou jejich spojením.
Pak už je ale indukční krok snadný. Platí-li dokazovaná nerovnost pro všechny křivky o $0, 1, 2, 3, ..., N-1$ vrcholech, pak libovolnou křivku o N vrcholech můžeme složit ze dvou vhodných křivek o méně než N vrcholech, typicky z vhodné křivky o $N-1$ vrcholech a vhodné úsečky (tj. křivky o 0 vrcholech). A dokazovaná nerovnost přitom zůstane zachována, čímž je důkaz hotov.

$\square$

Lemma 4.2 *Pro uzavřenou lomenou čáru γ je $S_{2m-1} = 0, m \in \mathbf{N}$. Jinak řečeno, při formulaci podmínky (P): ,,Bod $x \in \mathbb{R}^2$ splňuje podmínku (P), jestliže kružnice o středu x a poloměru R protíná lomenou čáru γ v lichém počtu bodů." platí toto: Množina bodů, splňujících podmínku (P), má dvojrozměrnou Lebesgueovu míru (obsah) 0.*

Důkaz: Rozlišíme dva typy protnutí: ostré protnutí a dotek. Při ostrém protnutí kružnice vstupuje do oblasti vymezené lomenou čarou nebo ji naopak opouští. Při doteku k takové změně nedochází. Pro body, jejichž kružnice vytvářejí pouze ostrá protnutí je zřejmé, že počet celkových protnutí musí být sudý. (Při běhu po obvodu kružnice skončíme vždy tam, kde jsme jej začali.) Lichý počet protnutí pro nějaký bod nastává, právě když tento bod generuje lichý počet doteků. K tomu však může (i nemusí) dojít jedině v situaci, kdy tento bod generuje alespoň jeden dotek své kružnice s lomenou čarou. Obsah (dvojrozměrnou Lebesgueovu míru) množiny bodů s takovouto

vlastností však odvodíme snadno. Uvažujme lomenou čáru γ o 0 vrcholech, tj. o jediném úseku, tedy úsečku. Dotek s úsečkou γ v takovém případě nastává jen pro kružnice, jejichž střed leží ve vzdálenosti R od této úsečky. Množina takových bodů sestává ze dvou úseček, které jsou rovnoběžné a běží ve vzdálenosti R od úsečky γ. Takováto množina má ale obsah 0. Uvažujme dále lomenou čáru γ o kladném počtu vrcholů, tj. nějaké konečné sjednocení úseček. Pak ale z aditivity dostáváme opět obsah 0.
A tak dostáváme, že množina bodů, které takovou vlastnost mají, má obsah 0. Množina, kde se realizuje lichý počet doteků je podmnožinou této množiny, pročež má také obsah 0. Proto platí dokazované tvrzení.

□

Nyní připravených lemmat použijeme k vlastnímu důkazu.

Důkaz poslední nerovnosti v rámci (4.5)*:* Uvědomme si, co vlastně chceme při dokazování nerovnosti dokázat. Postupujeme úpravami

$$
\begin{gathered}
R \leq \frac{L+\sqrt{L^2-4\pi S}}{2\pi}, \\
2\pi R \leq L+\sqrt{L^2-4\pi S}, \\
2\pi R - L \leq \sqrt{L^2-4\pi S}, \\
4\pi^2 R^2 + L^2 - 4\pi RL \leq L^2 - 4\pi S, \\
4\pi^2 R^2 + 4\pi S - 4\pi RL \leq 0, \\
\pi R^2 + S - RL \leq 0.
\end{gathered}
$$

Nyní se tedy zaměříme na dokázání poslední nerovnosti. V něm využijeme aproximovatelnosti zkoumaných oblastí (s po částech hladkou hranicí) pomocí mnohoúhelníků.
Předpokládejme, že Ω je konvexní mnohoúhelník o ploše S ohraničený uzavřenou lomenou čarou Γ o délce L, kde poloměr opsané kružnice je R. Stačí nám dokázat, že $\pi R^2 - LR + S \leq 0$.
Značme $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in R^2$ a uvažujme obsah S_R množiny všech bodů v rovině R^2, jejichž vzdálenost od Ω není větší než R. Pro takovou množinu $M_R = \{\mathbf{x} \in R^2 : (\mathbf{x}, \Omega) \leq R\}$ zřejmě platí $S_R = S(M_R) = S + LR + \pi R^2$, neboť měřená množina je jakýsi ,,zvětšený n-úhelník se zaoblenými rohy". Srovnejme to s jinou metodou výpočtu S_R.

Předpokládejme, že γ je libovolná (nemusí být nutně konvexní ani uzavřená) jednoduchá lomená čára délky $L(\gamma)$ a E je množina všech bodů v rovině, jejichž vzdálenost od γ není větší než R.

Množinu E rozdělme do částí E_k, z nichž každá sestává ze všech bodů x, pro které kružnice s poloměrem R a středem x protíná γ právě v k bodech. Předpokládejme, že S_k je plocha E_k. Podle Lemmatu 5.6 dostáváme $\sum kS_k = 4RL(\gamma)$.
Pokud aplikujeme tento vztah na uzavřenou lomenou čáru Γ a vezmeme v úvahu, že podle Lemmatu 5.7 platí $S_{2m-1} = 0, m \in \mathbf{N}$, dostáváme nerovnost $S(R) = S_2 + S_4 + ... \leq \frac{1}{2}(2S_2 + 4S_4 + ...) = 2RL$, která dohromady s $S(R) = S + LR + \pi R^2$ dává kýženou nerovnost $\pi R^2 - LR + S \leq 0$.

$\square$

Důkaz Věty 4.1: Nerovnost (4.1) plyne triviálně z dokázané nerovnosti (4.2).
Zbývá dokázat tvrzení o případu rovnosti. Nejprve dokážeme, že pro kruh nastává v nerovnosti (4.1) rovnost. To vychází z přímého výpočtu, který jsme ukázali již v počátcích naší práce. Uvědomíme-li si, že pro nekruhové oblasti je rozdíl poloměrů opsané a vepsané kružnice $R-r$ kladný, docházíme podle (4.2) k závěru, že izoperimetrická porucha je pro nekruhové oblasti zdola omezená kladným číslem. Proto z rovnosti vyplývá, že jde o kruh. Tyto dvě implikace dávají dohromady důkaz Věty 4.1.

$\square$

Kapitola 5

Použití Brunn-Minkowského nerovnosti v $\mathbb{R}^2$

V této kapitole budeme vycházet z myšlenky, že délka hranice oblasti v $\mathbb{R}^2$ úzce souvisí s růstem obsahu při rozpínání množiny. Této myšlenky lze také dobře využít k důkazu izoperimetrické nerovnosti.
Úvodem učiníme dvě důležité definice.

Definice 5.1 *Buďte $P, Q \subset \mathbb{R}^2$ neprázdné množiny. Body v $\mathbb{R}^2$ budeme značit notací $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Množinu $P+Q = \{p+q : p \in P, q \in Q\}$ pak nazýváme Minkowského součtem množin P a Q. Místo pojmu Minkowského součet se někdy používá pojem vektorový součet.*

Poznámka 5.1: Pokud P, Q jsou kompaktní (např. uzavřené a omezené) množiny, potom $P + Q$ je také kompaktní množina. V takovém případě má každá z množin $P, Q, P + Q$ svůj obsah (Lebesgueovu míru). Označme tyto obsahy $S(P), S(Q), S(P + Q)$. Dále značíme P^h součet množiny P s koulí o poloměru h a středu 0, tj. jakési ,,přifouknutí množiny P o h´´. My budeme používat termínu ,,expanze množiny P o h". Platí tedy $P^h = \{z \in \mathbb{R}^2 : dist(z, P) \leq h\}$.

Definice 5.2 *Pod pojmem konvexní těleso rozumíme množinu, která má nenulový objem, je kompaktní a konvexní.*

Definice 5.3 *Limitu podílu*

$$Ł_{+}(P) = \liminf_{h \to 0} \frac{S(P^h) - S(P)}{h}$$

nazveme vnější Minkowského délkou hranice ∂P množiny P, zkráceně budeme říkat, že $Ł_{+}(P)$ je Minkowského obvod množiny P. Pokud $P \subset \mathbb{R}^2$ je množina s po částech hladkým obvodem nebo jde o konvexní těleso, potom je Minkowského obvod množiny P stejný jako obvod množiny P.

Poznámka 5.2: Vnější Minkowského délka hranice je speciálním případem vnějšího Minkowského obsahu hranice pro $n = 2$. Vnější Minkowského obsah se hranice se definuje v obecném $\mathbb{R}^n$ analogicky a podobné je i využití tohoto pojmu při důkazu izoperimetrické nerovnosti v obecném $\mathbb{R}^n$.

Nyní uvedeme a dokážeme Brunn-Minkowského nerovnost v $\mathbb{R}^2$.

Věta 5.1 *Pro neprázdné kompaktní množiny $P, Q \subset \mathbb{R}^2$ platí Brunn-Minkowského nerovnost*

$$\sqrt{S(P+Q)} \geq \sqrt{S(P)} + \sqrt{S(Q)}. \tag{5.1}$$

Většina důkazů Brunn-Minkowského nerovnosti vychází z jednoho ze dvou základních přístupů. První přístup spočívá v dělení obsahů množin P, Q pomocí rovnoběžných přímek a vysčítání částí ležících v jednotlivých pásech. Druhý přístup spočívá ve vzájemné symetrizaci množin P, Q. My ukážeme důkaz založený na prvním přístupu. Samotnému důkazu ale bude předcházet několik úvah a pomocných tvrzení.
Nejprve ukážeme, proč stačí dokázat Brunn-Minkowského nerovnost pro speciální elementárních případ (případ tzv. jednoduchých množin), abychom odtud následně dokázali Brunn-Minkowského nerovnost v plné obecnosti.

Definice 5.4 *Nechť P, Q jsou kompaktní množiny v $\mathbb{R}^2$. Potom metriku $\rho(P, Q) = \{\inf h : P \subset Q^h, Q \subset P^h\}$ nazveme Hausdorffova vzdálenost množin P, Q.*

To znamená, že Hausdorffova vzdálenost odpovídá na otázku: ,,O jaké h musím množiny P, Q expandovat, aby se navzájem pohltily?" Pokud $\rho(P_i, P) \to 0$, potom říkáme, že posloupnost kompaktních množin P_i konverguje k P v Hausdorffově smyslu. Pro takovou konvergenci platí $S(P) \geq \limsup_{i \to \infty} S(P_i)$.

Definice 5.5 *Nechť množina* $N \subset \mathbb{R}^2$ *je kartézským součinem dvou nedegenerovaných uzavřených intervalů v* $\mathbb{R}$*, tedy* $N = [p_1, q_1] \times [p_2, q_2], p_1 < q_1, p_2 < q_2$*. Potom řekneme, že množina* N *je standardní obdélník.*

Definice 5.6 *Nechť množina* $M \subset \mathbb{R}^2$ *sestává z konečného množství standardních obdélníků tak, že jednotlivé standardní obdélníky mají navzájem disjunktní vnitřky. Pak řekneme, že* M *je jednoduchá množina.*

Tyto definice jsme si zavedli z toho důvodu, že každá kompaktní množina je aproximovatelná jednoduchými množinami, tj. pro každou kompaktní množinu $A \subset \mathbb{R}^2$ existuje posloupnost $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ jednoduchých množin v $\mathbb{R}^2$, že $A_i \to A$ v Hausdorffově smyslu.

Aproximujeme-li množiny $P, Q \subset \mathbb{R}^2$ pomocí jednoduchých množin, dostáváme z nerovnosti $\sqrt{S(P_i + Q_i)} \geq \sqrt{S(P_i)} + \sqrt{S(Q_i)}$ limitním přechodem

$$\begin{aligned}\sqrt{S(P+Q)} &\geq \limsup_{i \to \infty} \sqrt{S(P_i + Q_i)} \\ &\geq \limsup_{i \to \infty} [\sqrt{S(P_i)} + \sqrt{S(Q_i)}] = \sqrt{S(P)} + \sqrt{S(Q)}.\end{aligned}$$

To ale znamená, že k důkazu Brunn-Minkowského nerovnosti pro všechny množiny v rovině nám stačí dokázat tuto nerovnost pro jednoduché množiny.

Věta 5.2 *Buďte* F, G *přímky rovnoběžné se stejnou řídící osou, a* P, Q *buďte neprázdné jednoduché množiny, které jsou po řadě děleny přímkami* F, G *a nechť* $\lambda \in (0, 1)$*. Nechť přitom* F *dělí* P *na množiny* P', P'' *v poměru* $\lambda : (1 - \lambda)$*, zatímco* G *dělí ve stejném poměru* Q *na množiny* Q', Q''*. Potom platí nerovnost*

$$S(P + Q) \geq S(P' + Q') + S(P'' + Q'').$$

Důkaz: Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že F, G jsou rovnoběžné s osou x, tj. jsou kolmé na osu y. Pak pro všechna $p' \in X', p'' \in P''$ platí pro jejich y-ové souřadnice $p'_y \geq p''_y$ a pro všechna $q' \in Q', q'' \in Q''$ platí pro jejich y-ové souřadnice $q'_y \geq q''_y$. Proto platí $(P' + Q') \cap (P'' + Q'') = \emptyset$ (velikost y-ové souřadnice pro body z množiny $P' + Q'$ je omezená zdola, zatímco velikost y-ové souřadnice pro body z množiny $P'' + Q''$ je omezená shora). Jelikož $P' + Q' \subset P + Q, P'' + Q'' \subset P + Q$, máme díky disjunktnosti dokazovanou nerovnost $S(P + Q) \geq S(P' + Q') + S(P'' + Q'')$.

$\square$

Důkaz Věty 5.1: Při důkazu Brunn-Minkowského nerovnosti chceme tuto nerovnost dokázat pro 2 jednoduché množiny, které mají dohromady $k \geq 2$ vytvořujících standardních obdélníků. Budeme tedy postupovat indukcí podle k.

Při důkazu Brunn-Minkowského nerovnosti pro jednoduché množiny P, Q začneme případem, kdy $k = 2$. Jde tedy o nejtriviálnější možný případ - každá z těchto množin je standardním obdélníkem.

V takovém případě je výpočet obsahů snadný, neboť $P = [p_1, p_2] \times [p_3, p_4], Q = [q_1, q_2] \times [q_3, q_4], P + Q = [p_1 + q_1, p_2 + q_2] \times [p_3 + q_3, p_4 + q_4]$, kde platí $p_1 < p_2, p_3 < p_4, q_1 < q_2, q_3 < q_4, p_i \in \mathbb{R}, q_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, 4$. Pokud si pro zjednodušení zavedeme značení $a := p_2 - p_1, b := p_4 - p_3, c := q_2 - q_1, d := q_4 - q_3$, potom se vše redukuje na dokázání nerovnosti $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$, kde $a, b, c, d > 0$.

Důkaz této nerovnosti vychází z aritmeticko-geometrické nerovnosti (zkráceně AG - nerovnost), která říká, že geometrický průměr několika (v našem případě dvou) nezáporných čísel je menší nebo roven aritmetickému průměru těchto čísel. Pokud AG - nerovnost aplikujeme na dvojice čísel $\{\frac{a}{a+c}, \frac{b}{b+d}\}$ a $\{\frac{c}{a+c}, \frac{d}{b+d}\}$, dostáváme nerovnosti

$$\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+d)}} \leq \frac{1}{2}(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+d}),$$

$$\sqrt{\frac{cd}{(a+c)(b+d)}} \leq \frac{1}{2}(\frac{c}{a+c} + \frac{d}{b+d}),$$

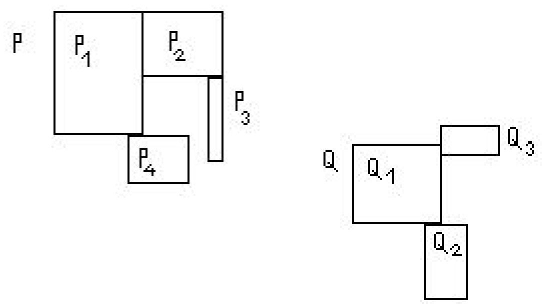
jejichž sečtením dostáváme nerovnost

$$\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+d)}} + \sqrt{\frac{cd}{(a+c)(b+d)}} \leq \frac{1}{2}(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+d}) + \frac{1}{2}(\frac{c}{a+c} + \frac{d}{b+d}) = 1.$$

Přenásobením této nerovnosti činitelem $\sqrt{(a+c)(b+d)}$ pak dostáváme dokazovanou nerovnost.

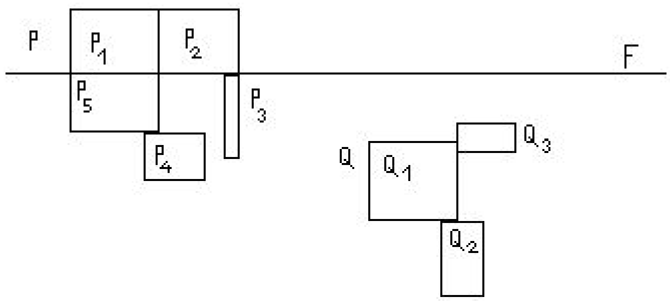
Platnost Brunn-Minkowského nerovnosti jsme tedy dokázali pro takové jednoduché množiny P, Q, kde P i Q byly standardním obdélníkem, tj. pro $k = 2$.

Nyní zbývá dokázat Brunn-Minkowského nerovnost pro případ, kdy $k \geq 3$. Již víme, že BM-nerovnost platí, když celkový počet standardních obdélníků je nejvýše roven $k - 1$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je to množina P, ke které jsme přidali jeden standardní obdélník a chceme dokázat, že BM-nerovnost bude i nadále platit. (Viz obrázek 6a.)



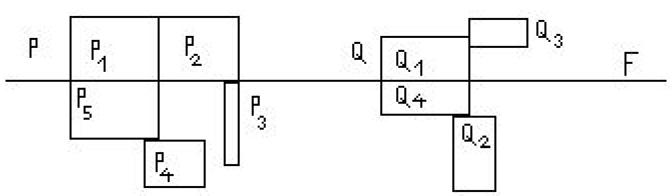
Obr. 6a: Množiny P a Q, přidávaným obdélníkem je P_4 složka množiny P

Nyní uvažujeme přímku F rovnoběžnou s osou x (psáno bez újmy na obecnosti, může být rovnoběžná i s osou y, podle potřeby), která protíná množinu P, takže ji dělí na dvě neprázdné jednoduché množiny P' a P'', které jsou umístěné v rozdílných poloprostorech. Přímku F uvažujme takovou, že počet standardních obdélníků v každé z množin P', P'' bude menší než počet těchto obdélníků v P, tj. do každé poloroviny vytvořené přímkou P spadne alespoň jeden celý obdélník z původní množiny P. (Viz obrázek 6b.)



Obrázek 6b: Přímka F dělí P na $P' = P_1 \cup P_2$ a $P'' = P_3 \cup P_4 \cup P_5$, přičemž dolní část P_1 jsme museli přeznačit na P_5

Jelikož jsou obdélníky nedegenerované, dostáváme pro nějakou $\lambda \in (0,1)$ rovnost $S(P') = \lambda S(P)$.
Nyní si na přímce F vyberme počátek nové soustavy souřadnic, označme ho O. Poté posunutím rovnoběžným s libovolně zvolenou kolmicí na přímku F (tato kolmice je v nové soustavě souřadnic zároveň osou y) přemístíme množinu Q tak, aby přímka F (zároveň osa x) dělila množinu Q na množiny Q', Q'', přičemž $S(Q') = \lambda S(Q)$. (Viz obrázek 6c.)



Obrázek 6c: Stav po posunutí množiny Q

Důležité je, že tyto posuny nijak nezmění obsahy $S(P), S(Q), S(P+Q)$. Části Q', Q'' jsou také neprázdné jednoduché množiny, z nichž ani jedna neobsahuje větší počet obdélníků než Q.
Dvojice množin P', Q' a P'', Q'' tedy každá leží ve svém vlastním poloprostoru vzhledem k F a v žádné dvojici není více než $k-1$ obdélníků. Proto platí $S(P+Q) \geq S(P'+Q') + S(P''+Q'') \geq [\sqrt{S(P')} + \sqrt{S(Q')}]^2 + [\sqrt{S(P'')} + \sqrt{S(Q'')}]^2 = \lambda[\sqrt{S(P)} + \sqrt{S(Q)}]^2 + (1-\lambda)[\sqrt{S(P)} + \sqrt{S(Q)}]^2 = [\sqrt{S(P)} + \sqrt{S(Q)}]^2$. Tím je Brunn-Minkowského nerovnost dokázána.

$\square$

Nyní již můžeme přejít k úvahám, které povedou k snadnému důkazu izoperimetrické nerovnosti v $\mathbb{R}^2$.
Kruh o poloměru h se středem v počátku budeme značit hD. Jestliže k množině $P \subset \mathbb{R}^2$ přičteme kruh hD, potom $P + hD$ je množina $P^h = \{x \in \mathbb{R}^2 : \rho(x, P) \leq h\}$. Brunn-Minkowského nerovnost tedy můžeme přepsat do tvaru

$$\sqrt{S(P^h)} \geq \sqrt{S(P)} + h\sqrt{\pi}. \tag{5.2}$$

Navíc pro obsah $S(K)$ kruhu s poloměrem r platí dobře známý vzorec

$$S(D) = \pi r^2 \tag{5.3}$$

Značme $r(P)$ poloměr kruhu o obsahu $S(P)$. Potom platí $S(P) = \pi r^2(P)$ a nerovnost 5.2 dostane podobu

$$r(P^h) \geq r(P) + h. \tag{5.4}$$

Navíc můžeme nerovnost (5.2) přepsat jako

$$\frac{\sqrt{S(P^h)} - \sqrt{S(P)}}{h} \geq \sqrt{\pi}. \tag{5.5}$$

Podívejme se, jak vypadá pro $h \to 0+$ limita zlomku z levé strany (5.5). Máme

$$\liminf_{h \to 0+} \frac{\sqrt{S(P^h)} - \sqrt{S(P)}}{h} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{S(P)}} \liminf_{h \to 0+} \frac{S(P^h) - S(P)}{h} \geq \sqrt{\pi} \tag{5.6}$$

Pokud přejdeme k vyjádření pomocí Minkowského obvodu, máme tedy nerovnost

$$\frac{1}{2\sqrt{S(P)}} L_+(P) \geq \sqrt{\pi}. \tag{5.7}$$

Z toho už dokážeme izoperimetrickou nerovnost snadno.

Věta 5.3 *Nechť $P \subset \mathbb{R}^2$ je množina s po částech hladkou hranicí a obsahem $S(P)$. Jestliže $r(P)$ je poloměr kruhu, který má také obsah $S(P)$, potom je obvod tohoto kruhu menší nebo roven obvodu množiny P.*

Důkaz: Z výše uvedených úvah vyplývá, že $L_+(P) = L(P)$ a podobně $L_+(c+rD) = L(c+rD)$, kde $c + rD, c \in \mathbb{R}^2, r > 0$, značí libovolný kruh (lze ho získat posunutím středu a volbou vhodného poloměru). Chceme tedy dokázat, že $L_+(P) \geq L_+(D_P) = 2\pi r(P)$, kde D_P je kruh charakterizovaný obsahem $S(P)$. Pokud $r(P)$ splňuje předpoklady vyřčené ve větě, potom platí $S(P) = \pi r^2(P)$. Z nerovnosti (5.7) dostáváme přenásobením

$$L_+(P) \geq 2\sqrt{\pi}\sqrt{S(P)} = 2\sqrt{\pi}\sqrt{\pi r^2(P)} = 2\pi r(P), \tag{5.8}$$

čímž jsme dokázali větu.

$\square$

A jelikož Věta 5.3 říká, že kruh v rámci oblastí o stejném obsahu minimalizuje obvod, čímž věta popisuje izoperimetrickou nerovnost v $\mathbb{R}^2$, je tím dokázána právě tato zkoumaná nerovnost.

Závěrem připomeňme, že existuje analogický důkaz pro $\mathbb{R}^n$, se kterým se zájemce může seznámit v knize [2], str. 68 - 77, 83 - 86.

Literatura

[1] Chavel, I.: *Isoperimetric Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[2] Burago, Yu. D., Zalgaller, V. A.: *Geometric inequalities*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1988.

[3] Zajíček, L.: *Vybrané partie z matematické analýzy pro 1. a 2. ročník*, MATFYZPRESS, Praha, 2003.

[4] Lukeš, J., Malý, J.: *Míra a integrál*, Karolinum, Praha, 2002.

[5] Körner, T. W.: *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.