

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Pavol Stanek

### Bodové procesy v čase

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc.

Studijní program: matematika, Obecná matematika

2009

Rád by som na tomto mieste poďakoval prof. RNDr. Viktorovi Benešovi, DrSc. za cenné rady, čas a ochotu, ktorú mi venoval pri tvorbe tejto práce. Ďalej by som rád poďakoval Dr. D. Klementovi za poskytnutie dát z neurofyziologického experimentu.

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu napísal samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičaním práce a jej zverejňovaním.

V Praze dne

Pavol Stanek

# Obsah

<b>Abstrakt</b>	<b>2</b>
<b>Značenie</b>	<b>4</b>
<b>1 Bodové procesy</b>	<b>5</b>
1.1 Poissonov proces . . . . .	5
1.2 Jánossyho miera . . . . .	7
1.3 Bodové procesy v čase . . . . .	9
<b>2 Problém filtrovania</b>	<b>13</b>
2.1 Rekurentné rovnice . . . . .	13
2.2 Filtrovanie bodových procesov . . . . .	17
2.3 Algoritmus SSPPF . . . . .	18
<b>3 Numerické výsledky</b>	<b>21</b>
<b>Dodatok A: Program v Matematike</b>	<b>23</b>
<b>Dodatok B: Podmieňovanie</b>	<b>26</b>
<b>Literatúra</b>	<b>28</b>

Název práce: Bodové procesy v čase

Autor: Pavol Stanek

Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc.

e-mail vedoucího: benesv@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Bakalářská práce se zabývá náhodnými bodovými procesy v čase. Skúmané bodové procesy majú teda evolučný charakter. Intenzita procesu v danom čase preto môže byť vyjadrená pomocou histórie procesu.

V prvej kapitole je zavedený pojem Janossyho mier, pomocou ktorého môžeme popísať rozdelenie bodového procesu, bez toho, aby sme brali do úvahy poradie jednotlivých bodov. Znalosť Janossyho mier nám umožňuje vyjadriť intenzitu procesu pri danej histórii procesu.

V druhej kapitole sa zaoberáme situáciou, keď podmienená intenzita procesu závisí na parametroch meniacich sa v čase. Úloha spočítať podmienenú intenzitu procesu je problém filtrovania. Tento problém vedie na rekurentné rovnice, pre ktoré sme odvodili numerickú metódu ich výpočtu (algorithmus SSPPF). Algoritmus sme aplikovali na reálne dáta. Výsledky sú prezentované v tretej kapitole.

Kľúčové slová: bodový proces, Janossyho miera, podmienená intenzita, problém filtrovania

Title: Point processes in time

Author: Pavol Stanek

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc.

Supervisor's e-mail address: benesv@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: This bachelor's thesis concerns with random point processes in time. Examined point processes have an evolutionary character. Intensity of such process in given time can be expressible in terms of the past of the process.

In the first chapter the Janossy measures concept is introduced. With its help we can describe the distribution of the point process without taking into account the order of separate points. Knowledge of the Janossy measures helps us to derive the intensity of the process with the past of the process.

In the second chapter the situation, when the conditional intensity of the process depends on the parameters varying in time is described. Our task to calculate conditional intensity of the process is a filtration problem. This problem leads to the recurrent equations, for which we have derived the numerical method of the calculation (algorithmus SSPPF). The algorithmus was applied on the real data. The third chapter represents the results we achieved.

Keywords: point process, Janossy measure, conditional intensity, filtration problem

# Značenie

Symbol	Popis
$\mathcal{L}(X)$	rozdelenie náhodnej veličiny $X$
$\mathcal{S}_n$	množina permutácií čísel $1, \dots, n$
$J_n$	Jánossyho miera
$\dot{j}_n$	hustota Jánossyho miery voči Lebesgueovej miere
$S_n$	podmienená funkcia prežitia
$h_n$	funkcia hazardu
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$	Borelovské podmnožiny $\mathbb{R}^n$
$1 : n$	diskrétny interval, množina $\{1, 2, \dots, n\}$
$u \in \mathbb{R}^+$	čas pozorovanej udalosti
$T$	doba trvania pokusu
$N(t)$	počet udalostí $u$ v intervale $[0, t]$
$\mathbf{N}_{0:t} = \{u, u < t\}$	vektor pozorovaných udalostí do času $t$
$\Delta$	veľkosť delenia intervalu $[0, T]$
$N_k = I_{[u \in [(k-1)\Delta, k\Delta]]}$	výskyt udalosti v intrevale $[(k-1)\Delta, k\Delta]$
$\mathbf{N}_{1:k} = \{N_1, \dots, N_k\}$	vektor núl a jednotiek podľa výskytov udalostí
$\psi_k$	hodnota vektoru parametrov v čase $k\Delta$
$\lambda_k$	podmienená intenzita bodového procesu v čase $k\Delta$
$\mathbf{F}$	evolučná matica
$\boldsymbol{\eta}_k$	Gaussov šum

# Kapitola 1

## Bodové procesy

### 1.1 Poissonov proces

Poissonov proces modeluje výskyt náhodných udalostí v čase.

**Definícia 1.1.1.** Nech je  $t \geq 0$  a nech náhodná veličina  $N(t)$  označuje počet udalostí, ktoré sa vyskytnú v časovom intervale  $[0, t]$ . Náhodný proces  $\{N(t), t \geq 0\}$  nazývame *Poissonov proces*, ak splňuje nasledujúce podmienky.

- i) Počty udalostí, ktoré sa vyskytnú v disjunktných časových intervaloch, sú navzájom nezávislé náhodné veličiny.
- ii) Počet udalostí, ktoré sa vyskytnú do času  $t$  sa riadi Poissonovým rozdelením s parametrom  $\lambda t$ , tj.

$$P(N(t) = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Parameter  $\lambda > 0$  nazývame *intenzitou Poissonovho procesu*.

Jednotlivé body Poissonovho procesu môžeme chápať ako náhodné veličiny. O ich rozdelení vypovedá nasledujúca veta.

**Veta 1.1.2.** Nech  $\{N(t), t \geq 0\}$  je *Poissonov proces*. Nech  $U_i, i = 1, \dots, n$  sú *nezávislé rovnako rozdelené náhodné veličiny* a nech  $U_1$  má *rovnomerné rozdelenie na intervale  $[0, T]$ , kde  $T > 0$* . Označme  $t_i, i$ -tý bod procesu  $\{N(t), t \geq 0\}$ . Potom platí,

$$\mathcal{L}(t_1, \dots, t_{N_T} | N_T = n) = \mathcal{L}(U_{(1)}, \dots, U_{(n)}), \quad (1.1)$$

kde  $U_{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$  sú poradové štatistiky veličín  $U_i$ .

**Dôkaz.** Pretože veličiny  $U_i$  majú rovnomerné rozdelenie a sú navzájom nezávislé, platí pre združenú hustotu vektora  $U = (U_1, \dots, U_n)$ ,

$$f_U(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} 1/T^n & 0 < u_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Uvažujme transformáciu  $S : [0, T]^n \rightarrow [0, T]^n$  definovanú predpisom

$$S(u_1, \dots, u_n) = (u_{(1)}, \dots, u_{(n)}).$$

Na množine  $[0, T]^n$  definujeme reláciu ekvivalencie  $(u_1, \dots, u_n) \sim (v_1, \dots, v_n)$ , ak existuje permutácia  $\pi$  taká, že  $\pi(u_i) = v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Množina  $[0, T]^n$  sa rozpadá na triedy ekvivalencie  $E_j$ ,  $j = 1, \dots, n!$ .

Evidentne  $S|_{E_j}$  je prosté zobrazenie a pretože sa jedná o permutáciu, je jacobíán tohto zobrazenia rovný  $\pm 1$ . Teda, podľa Vety o transformácii náhodného vektora dostávame, že pre hustotu náhodného vektora  $\bar{U} = (U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$  platí

$$f_{\bar{U}}(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} n!/T^n & u_1 < \dots < u_n \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Z vlastností Poissonovho procesu vyplýva, že pre po dvoch disjunktné intervaly  $[a_i, b_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$  platí

$$\begin{aligned} P(N(a_i, b_i) = n_i, i = 1, \dots, n) &:= P(N(b_i) - N(a_i) = n_i, i = 1, \dots, n) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{[\lambda(b_i - a_i)]^{n_i}}{n_i!} e^{-\lambda(b_i - a_i)}. \end{aligned}$$

Teraz ľahko spočítame pravdepodobnosť, že sa v intervale  $[0, T]$  vyskytne  $n$  udalostí a každá z nich práve v intervale  $[t_i - \delta, t_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

$$P(N(0, T) = n, N(t_i - \delta, t_i) = 1, i = 1, \dots, n) = e^{-\lambda T} (\lambda \delta)^n$$

Rovnosť platí pre  $\delta > 0$  dostatočne malé na to, aby boli intervaly  $[t_i - \delta, t_i]$  disjunktné. Limitným prechodom prejdeme k podmienenej hustote náhod-



ného vektoru  $\tau = (t_1, \dots, t_n)$ . Teda

$$\begin{aligned} f_{\tau|N_T}(t_1, \dots, t_n|n) &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta^n} P(N(t_i - \delta, t_i) = 1, i = 1, \dots, n | N(T) = n) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta^n} \frac{P(N(T) = n, N(t_i - \delta, t_i) = 1, i = 1, \dots, n)}{P(N(T) = n)} \\ &= \frac{n!}{T^n} \end{aligned}$$

■

Vidíme, že Poissonov proces na intervale  $[0, T]$  je určený rozdelením počtu bodov na  $[0, T]$ , tj. rozdelením veličiny  $N_T$  a všetkými podmienenými rozdeleniami  $\mathcal{L}(t_1, \dots, t_{N_T} | N_T = n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Práve týmto spôsobom budeme definovať obecný bodový proces.

Realizovať takto definovaný proces je jednoduché. Stačí vygenerovať veličinu  $N_T$  a následne vygenerovať vektor  $(t_1, \dots, t_{N_T})$  za podmienky  $N_T$ .

## 1.2 Jánossyho miera

Tento paragraf vychádza z práce [2], kapitola 5.

**Definícia 1.2.1.** *Bodový proces* je určený nasledujúcimi podmienkami.

- i) Nech  $\mathbb{R}^d$  je stavovým priestorom procesu, kde  $d \in \mathbb{N}$ .
- ii) Nech je dané diskkrétne rozdelenie  $\{p_n\}$ ,  $n = 0, 1, \dots$  náhodnej veličiny  $N$ , ktorá určuje počet bodov procesu.
- iii) Pre každé  $n \in \mathbb{N}$  nech je dané spojité rozdelenie  $\Pi_n(\cdot)$  na borelovských množinách  $(\mathbb{R}^d)^n = \mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d$ , ktoré určuje združené rozdelenie bodov procesu za predpokladu, že ich je  $n$ .

Predpokladajme, že proces má  $n$  bodov. Potom v definícii bodového procesu v podmienke iii) chápeme body procesu ako náhodný vektor s rozdelením  $\Pi_n$ . Označme tento vektor  $(X_1, \dots, X_n)$ . Veličina  $X_i$  udáva polohu "i-tého" bodu. To, že je bod "i-tý", nemá nič spoločné s poradím ani s jeho polohou voči ostatným bodom. Preto sme použili úvodzovky.

Uvažujme  $A_1, \dots, A_n$  rozklad množiny  $\mathbb{R}^d$ . Množiny  $A_i$  sú teda neprázdne po dvoch disjunktné a platí  $A_1 \cup \dots \cup A_n = \mathbb{R}^d$ . Potom číslo  $\Pi_n(A_1 \times \dots \times A_n)$

určuje pravdepodobnosť, že  $\{X_1 \in A_1\} \wedge \dots \wedge \{X_n \in A_n\}$ . Teda, že "i-tý bod" padne do množiny  $A_i$ , pre  $i = 1, \dots, n$ .

Nás by ale skôr zaujímalo, aká je pravdepodobnosť, že práve jeden bod padne do každej z množín  $A_i$  bez ohľadu na to, do ktorej množiny padne ktorý. Túto pravdepodobnosť môžeme vyjadriť ako

$$\Pi_n^{sym}(A_1 \times \dots \times A_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \Pi_n(A_{\pi(1)} \times \dots \times A_{\pi(n)}),$$

kde sumácia prebieha cez všetky permutácie  $\pi$  indexovej množiny  $\{1, \dots, n\}$ . Výsledná množinová funkcia  $\Pi_n^{sym}$  je invariantná voči permutácii zložiek kartézkeho súčinu v argumente, čo je naznačené indexom *sym*. Takto symetriзованú formu miery  $\Pi_n^{sym}$  využijeme k zavedeniu nasledujúceho dôležitého pojmu.

**Definícia 1.2.2.** Nech  $A_1, \dots, A_n$  je rozklad množiny  $\mathbb{R}^d$  a nech  $n \in \mathbb{N}$ , potom definujeme

$$\begin{aligned} J_n(A_1 \times \dots \times A_n) &= p_n \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \Pi_n(A_{\pi(1)} \times \dots \times A_{\pi(n)}) \\ &= n! p_n \Pi_n^{sym}(A_1 \times \dots \times A_n). \end{aligned}$$

Mieru  $J_n$  budeme nazývať *Jánossyho miera*.

Jánossyho miera nie je pravdepodobnostnou mierou. Jej užitočnosť ukazuje nasledujúca interpretácia. Uvažujme body  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$  také, že  $x_i \neq x_j$ , pre  $i \neq j$ . Ak existuje  $j_n$  hustota Jánossyho miery voči Lebesguovej miere na  $(\mathbb{R}^d)^n$ , potom hodnota  $j_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$  udáva pravdepodobnosť, že proces obsahuje práve  $n$  bodov a každý z nich sa nachádza v infintezimálnej oblasti  $(x_i, x_i + dx_i)$ . Hodnota  $j_n(x_1, \dots, x_n)$  je teda vierohodnosťou realizácie  $x_1, \dots, x_n$  bodového procesu.

Pre ďalší výklad potrebujeme zaviesť Jánossyho miery lokalizované na istú množinu  $A \subset \mathbb{R}^d$ . Pri konštrukcii miery  $J_n(\cdot)$  sme predpokladali, že proces pozostáva práve z  $n$  bodov. Pri konštrukcii lokalizovanej miery  $J_n(\cdot | A)$ , budeme pracovať s prepokladom, že práve  $n$  bodov padne do množiny  $A$ . Uvažujme rozklad  $A_1, \dots, A_n$  množiny  $A \subset \mathbb{R}^d$ . Definujeme

$$\Pi_n^{sym}(A_1 \times \dots \times A_n | A) = p_n \sum_{m=n}^{\infty} \Pi_m^{sym}(A_1 \times \dots \times A_n \times \underbrace{A^c \times \dots \times A^c}_{m-n}).$$

Toto číslo určuje pravdepodobnosť, že do množiny  $A$  padne práve  $n$  bodov, každý z nich do jednej z množín  $A_i$ . Konštrukcia lokalizovaných Jánossyho mier je už teraz úplne analogická ako v prípade obyčajných Jánossyho mier.

**Definícia 1.2.3.** Nech  $A_1, \dots, A_n$  je rozklad množiny  $A$  a nech  $n \in \mathbb{N}$ , potom definujeme

$$J_n(A_1 \times \dots \times A_n | A) = n! p_n \Pi_n^{sym}(A_1 \times \dots \times A_n | A).$$

Mieru  $J_n$  budeme nazývať *Jánossyho miera lokalizovaná na množinu  $A$* .

Pokiaľ existuje hustota  $j_n(\cdot | A)$  lokalizovanej Jánossyho miery  $J_n(\cdot | A)$  voči Lebesguovej miere, opäť platí obdobná interpretácia ako v prípade obyčajnej Jánossyho miery.

**Definícia 1.2.4.** Nech  $A \subset \mathbb{R}^d$  je uzavretá borelovská množina. Hovoríme, že bodový proces na  $\mathbb{R}^d$  je *regulárny na  $A$* , ak je pre každé  $n \in \mathbb{N}$  lokalizovaná Jánossyho miera  $J_n(\cdot | A)$  absolútne spojitá voči Lebesgueovej miere na  $(\mathbb{R}^d)^n$ .

Regularita procesu na množine  $A$  nám teda zaručuje existenciu Jánossyho hustôt  $j_n(\cdot | A)$ .

**Definícia 1.2.5.** Nech je daný regulárny bodový proces so stavovou množinou  $\mathbb{R}^d$  a nech je daná jeho realizácia  $x_1, \dots, x_n \in A \subset \mathbb{R}^d$ . Potom *vierohodnosť* tejto realizácie definujeme ako

$$L_A(x_1, \dots, x_n) = j_n(x_1, \dots, x_n | A).$$

### 1.3 Bodové procesy v čase

Tento paragraf vychádza z práce [2], kapitola 7.

V ďalšom texte sa budeme venovať situácii, keď je stavovou množinou procesu interval  $[0, \infty)$ . Interval  $[0, \infty)$  bude pre nás, podobne ako pri Poissonovom procese, reprezentovať čas.

Body procesu budeme označovať  $t_i$ . Presnejšie  $t_i$  bude značiť  $i$ -tý bod v poradí na polpriamke  $[0, \infty)$ . Doby čakania medzi jednotlivými bodmi budeme označovať  $\tau_i$ , t.j.  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ .

**Definícia 1.3.1.** Nech je daný regulárny bodový proces na intervale  $[0, \infty)$  a  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Podmienenú funkciu prežitia  $S_k$  definujeme ako

$$S_k(u|t_1, \dots, t_{k-1}) = P(\tau_k > u|t_1, \dots, t_{k-1}).$$

Podmienená funkcia prežitia  $S_k$  je definovaná pre  $t_1 < \dots < t_{k-1}$  a pre  $u \in \mathbb{R}^+$ .

Označme hustotu rozdelenia  $n$ -tého bodu pri znalosti umiestnenia predchádzajúcich bodov ako  $p_n(t|t_1, \dots, t_{n-1})$ . Potom platí

$$S_n(t - t_{n-1}|t_1, \dots, t_{n-1}) = 1 - \int_{t_{n-1}}^t p(u|t_1, \dots, t_{n-1}) du. \quad (1.2)$$

Derivovaním tejto rovnosti dostaneme vzťah

$$\frac{dS_n(t - t_{n-1}|t_1, \dots, t_{n-1})}{dt} = -p(t|t_1, \dots, t_{n-1}). \quad (1.3)$$

Pre jednoduchosť zápisu budeme značiť  $j_n(t_1, \dots, t_n|u)$  Janossyho hustotu lokalizovanú na  $[0, u]$ . Z existencie Janossyho hustôt vyplýva existencia podmienených funkcií prežitia.

**Veta 1.3.2.** Pre regulárny bodový proces na intervale  $[0, \infty)$  a  $n \in \mathbb{N}_0$ , existuje podmienená hustota  $p_n(t|t_1, \dots, t_{n-1})$  a príslušná podmienená funkcia prežitia  $S_n(t|t_1, \dots, t_{n-1})$ . Navyiac pre každé  $n \in \mathbb{N}$  a  $T > 0$  platí

$$\begin{aligned} j_n(t_1, \dots, t_n|t_n + t) \\ = p_1(t_1) p_2(t_2|t_1) \dots p_n(t_n|t_1, \dots, t_{n-1}) S_{n+1}(t|t_1, \dots, t_n), \end{aligned} \quad (1.4)$$

kde  $0 < t_1 < \dots < t_n < t_n + t < T$ .

Dôkaz tohto tvrdenia je možné nájsť v [2].

**Definícia 1.3.3.** Pre regulárny bodový proces na intervale  $[0, \infty)$  a  $n \in \mathbb{N}$  definujeme funkciu hazardu ako

$$h_n(t|t_1, \dots, t_{n-1}) = \frac{p_n(t|t_1, \dots, t_{n-1})}{S_n(t - t_{n-1}|t_1, \dots, t_{n-1})}.$$

Funkcia  $h_n(\cdot)$  je definovaná pre  $t > t_{n-1}$ .

Z rovnosti (1.3) vyplýva, že

$$h_n(t|t_1, \dots, t_{n-1}) = -\frac{d}{dt} \log[S_n(t - t_{n-1}|t_1, \dots, t_{n-1})] \quad (1.5)$$

a odtiaľ

$$S_n(t - t_{n-1}|t_1, \dots, t_{n-1}) = \exp\left(-\int_{t_{n-1}}^t h_n(u|t_1, \dots, t_{n-1}) du\right) \quad (1.6)$$

**Definícia 1.3.4.** Nech  $T > 0$ . Nech je daná realizácia  $t_1 < \dots < t_n < T$  regulárneho bodového procesu na  $[0, T]$ . Potom *podmienenu intenzitu* bodového procesu pri realizácii  $\{t_i\}$  definujeme ako

$$\lambda(t|t_{0:n}) = \begin{cases} h_1(t) & 0 < t \leq t_1, \\ h_k(t|t_1, \dots, t_{k-1}) & t_{k-1} < t \leq t_k, \quad 2 \leq k \leq n, \\ h_{n+1}(t|t_1, \dots, t_n) & t_n < t \leq T. \end{cases}$$

**Veta 1.3.5.** Nech je daná realizácia  $t_1, \dots, t_{N(T)}$  bodového procesu na intervale  $[0, T]$ , kde  $T > 0$  a  $N(T) < \infty$ . Potom pre vierohodnosť  $L$  tejto realizácie platí

$$L = \left[ \prod_{i=1}^{N(T)} \lambda(t_i) \right] \exp\left(-\int_0^T \lambda(u) du\right). \quad (1.7)$$

**Dôkaz.** Chceme ukázať, že pravá strana 1.7 je rovná  $j_n(t_1, \dots, t_{N(T)}|T)$ . Podľa Vety 1.3.2 platí

$$j_n(t_1, \dots, t_{N(T)}|T) = p_1(t_1) p_2(t_2|t_1) \dots p_{N(T)}(t_{N(T)}|t_1, \dots, t_{N(T)-1}) \\ \times S_{N(T)+1}(T - t_{N(T)}|t_1, \dots, t_{N(T)}).$$

Použitím definície funkcie hazardu dostávame

$$j_n(t_1, \dots, t_{N(T)}|T) = h_1(t_1) \dots h_{N(T)}(t_{N(T)}|t_1, \dots, t_{N(T)-1}) \\ \times S_1(t_1) \dots S_{N(T)+1}(T - t_{N(T)}|t_1, \dots, t_{N(T)}) \quad (1.8)$$

Pre jednoduchosť zápisu položíme  $t_0 = 0$  a  $t_{N(T)+1} = T$ . Využitím definície podmienenej intenzity a vzťahu (1.6) dostávame, že pravá strana rovnosti(1.8) je rovná

$$\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^{N(T)} \lambda(t_i) \prod_{i=1}^{N(T)+1} \exp\left(-\int_{t_{i-1}}^{t_i} h_i(u|t_1, \dots, t_{i-1}) \mathbf{d}u\right) \\
&= \left[ \prod_{i=1}^{N(T)} \lambda(t_i) \right] \exp\left(-\int_0^T \lambda(u) \mathbf{d}u\right)
\end{aligned}$$

■

**Poznámka 1.3.6.** Podmienená intenzita charakterizuje bodový proces jednoznačne, vid' [3], kapitola 14.

# Kapitola 2

## Problém filtrovania

### 2.1 Rekurentné rovnice

Táto kapitola vychádza z článku [1].

**Definícia 2.1.1.** Nech  $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$  je náhodný proces definovaný na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  s hodnotami v  $\mathbb{R}^{n_x}$ , kde  $n_x \in \mathbb{N}$ . Označme  $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{N}\}$  prirodzenú filtráciu procesu  $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ , tj.  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s = 1 \dots t)$ . Hovoríme, že proces  $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$  je *Markovov reťazec*, ak pre všetky  $t \in \mathbb{N}$  a  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_x})$  platí

$$P[X_{t+1} \in A | \mathcal{F}_t] = P[X_{t+1} \in A | X_t]. \quad (2.1)$$

Vlastnosť (2.1) nazývame *markovská vlastnosť*.

**Definícia 2.1.2.** Nech  $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$  je Markovov reťazec. Funkciu  $K_t : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_x}) \rightarrow [0, 1]$  definovanú predpisom

$$K_t(x, A) = P[X_{t+1} \in A | X_t = x]$$

nazývame *jadrom prechodu v čase t*.

Označme absolútne rozdelenie Markovovho reťazca  $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$  v čase  $t$  ako  $p_t$ . Teda

$$p_t(A) = P[X_t \in A], \quad A \in \mathcal{A}.$$

Absolútne rozdelenie Markovovho reťazca v ľubovoľnom čase je určené počiatočným rozdelením  $p_0$  a jadrom prechodu  $K_t$ . Platí totiž rekurentný vzťah  $p_{t+1} = K_t p_t$ , kde

$$K_t p_t(A) := \int_{\mathbb{R}^{n_x}} K_t(s, A) dp_t(s).$$

Nech  $n_x, n_y \in \mathbb{N}$ . Nech  $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$  je Markovov reťazec s hodnotami v  $\mathbb{R}^{n_x}$  a jadrom prechodu  $K_t$ . Nech  $h : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$  je Borelovsky merateľná funkcia taká, že  $h(t, \cdot)$  je spojitá na  $\mathbb{R}^{n_x}$ . Nech  $\{W_t, t \in \mathbb{N}_0\}$  je postupnosť nezávislých náhodných vektorov s hodnotami v  $\mathbb{R}^{n_y}$  a hustotou  $g_t$  voči Lebesguovej miere. Nech je navyše  $g_t$  spojitá a obmedzená pre všetky  $t$ . Definujme proces  $\{Y_t, t \in \mathbb{N}\}$  ako

$$Y_t = h(t, X_t) + W_t \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Problém filtrovania spočíva v odhade hodnoty  $X_t$  pri danom vektore  $Y_{0:t}$ . Optimálny odhad v zmysle strednej kvadratickej chyby je podmienená stredná hodnota  $E[X_t|Y_{0:t}]$ . Jej postupný výpočet v čase je založený na spočítaní podmieneného rozdelenia vektora  $X_t$  pri danom vektore  $Y_{0:t}$ . Hľadáme teda pravdepodobnostnú mieru  $P_{X_t|Y_{0:t}}$  definovanú vzťahom

$$P_{X_t|Y_{0:t}}(A|y_{0:t}) = P[X_t \in A|Y_{0:t} = y_{0:t}], \quad A \in \mathcal{A}.$$

**Veta 2.1.3.** *Pre podmienené rozdelenie  $P_{X_t|Y_{0:t}}$  platí nasledujúci rekurentný vzťah. Pre  $y_{0:t} \in (\mathbb{R}^{n_y})^t$  platí*

$$\frac{dP_{X_t|Y_{0:t}}(\cdot|y_{0:t})}{dP_{X_t|Y_{0:t-1}}(\cdot|y_{0:t-1})}(x) = \frac{g_t^{y_t}(x)}{\int_{\mathbb{R}^{n_x}} g_t^{y_t}(s) dP_{X_t|Y_{0:t-1}}(s|y_{0:t-1})} \quad (2.2)$$

$$P_{X_{t+1}|Y_{0:t}}(A, y_{0:t}) = K_t P_{X_t|Y_{0:t}}(A, y_{0:t}), \quad (2.3)$$

kde  $g_t^{y_t}(\cdot) = g(y_t - h(t, \cdot))$ . Rovnosť (2.2) platí pre skoro všetky  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ . Rovnosť (2.3) platí pre všetky  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_x})$ .

**Dôkaz.** Najprv ukážeme rovnosť (2.3). Zvoľme  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_x})$ . Označme  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s = 1 \dots t)$ . Použitím markovskej vlastnosti (2.1) dostaneme

$$E[\mathbb{I}_{[X_{t+1} \in A]}|\mathcal{F}_t] = E[\mathbb{I}_{[X_{t+1} \in A]}|X_t]. \quad (2.4)$$

Pretože  $\sigma(W_{0:t})$  je nezávislé s  $\mathcal{F}_t$ , platí podľa Vety 3.0.1 *iii*)

$$E[\mathbb{I}_{[X_{t+1} \in A]}|\mathcal{F}_t] = E[\mathbb{I}_{[X_{t+1} \in A]}|\sigma(\mathcal{F}_t, \sigma(W_{0:t}))]. \quad (2.5)$$

Pretože hodnoty  $Y_{0:t}$  sú určené hodnotami  $X_{0:t}$  a  $W_{0:t}$ , musí platiť  $\sigma(Y_{0:t}) \subset \sigma(\mathcal{F}_t, \sigma(W_{0:t}))$ . Použitím Vety 3.0.1 *ii*) a vzťahov (2.4) a (2.5) dostaneme

$$\begin{aligned} P(X_{t+1} \in A|Y_{0:t}) &= E[\mathbb{I}_{[X_{t+1} \in A]}|Y_{0:t}] \\ &= E[E[\mathbb{I}_{[X_{t+1} \in A]}|\sigma(\mathcal{F}_t, \sigma(W_{0:t}))]|Y_{0:t}] \\ &= E[E[\mathbb{I}_{[X_{t+1} \in A]}|X_t]|Y_{0:t}] \\ &= E[P(X_{t+1} \in A|X_t)|Y_{0:t}] \\ &= E[K_t(X_t, A)|Y_{0:t}]. \end{aligned}$$



Zvoľme  $y_{0:t} \in (\mathbb{R}^{n_y})^t$ . Potom

$$\begin{aligned} P_{X_{t+1}|Y_{0:t}}(A, y_{0:t}) &= P(X_{t+1} \in A | Y_{0:t} = y_{0:t}) \\ &= \mathbb{E}[K_t(X_t, A) | Y_{0:t} = y_{0:t}] \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} K_t(s, A) dP_{X_t|Y_{0:t}}(s, y_{0:t}) \\ &= K_t P_{X_t|Y_{0:t}}(A, y_{0:t}). \end{aligned}$$

Teraz ukážeme rovnosť (2.2). Zvoľme  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_x})$ . Máme ukázať, že pre všetky  $y_{0:t} \in (\mathbb{R}^{n_y})^t$  platí

$$P_{X_t|Y_{0:t}}(A|y_{0:t}) = \frac{\int_A g_t^{y_t}(s) dP_{X_t|Y_{0:t-1}}(s|y_{0:t-1})}{\int_{\mathbb{R}^{n_x}} g_t^{y_t}(s) dP_{X_t|Y_{0:t-1}}(s|y_{0:t-1})}.$$

Zvoľme  $C_{0:t} = C_1 \times \dots \times C_t$ , kde  $C_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_y})$ . Stačí ukázať, že

$$\begin{aligned} \int_{C_{0:t}} P_{X_t|Y_{0:t}}(A|y_{0:t}) dP_{Y_{0:t}}(y_{0:t}) \\ = \int_{C_{0:t}} \frac{\int_A g_t^{y_t}(s) dP_{X_t|Y_{0:t-1}}(s|y_{0:t-1})}{\int_{\mathbb{R}^{n_x}} g_t^{y_t}(s) dP_{X_t|Y_{0:t-1}}(s|y_{0:t-1})} dP_{Y_{0:t}}(y_{0:t}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Podľa (3.0.3) je ľavá strana rovnice (2.6) rovná  $P([X \in A] \cap [Y_{0:t} \in C_{0:t}])$ . Využitím nezávislosti veličín  $X_i$  a  $W_i$ , nezávislosti veličín  $W_0, \dots, W_t$  a použitím Vety(3.0.2) dostaneme

$$\begin{aligned} P(Y_{0:t} \in C_{0:t} | X_{0:t} = x_{0:t}) &= \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^t \mathbb{I}_{[Y_i \in C_i]} | X_{0:t} = x_{0:t} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^t \mathbb{I}_{[(h(i, X_i) + W_i) \in C_i]} | X_{0:t} = x_{0:t} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^t \mathbb{I}_{[(h(i, x_i) + W_i) \in C_i]} \right] \\ &= \prod_{i=1}^t \mathbb{E}[\mathbb{I}_{[(h(i, x_i) + W_i) \in C_i]}] \\ &= \prod_{i=1}^t \int_{C_i} g_i(y_i - h(i, x_i)) dy_i. \end{aligned}$$

Špeciálne platí

$$\begin{aligned} P(Y_t \in A_t | X_{0:t}) &= P(Y_{0:t} \in (\mathbb{R}^{n_y})^t \times A_t | X_{0:t}) \\ &= \int_{A_t} g_t^{y_t}(X_t) \mathbf{d}y_t. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Z faktu  $\sigma(X_{0:t}, W_{0:t-1}) \supset \sigma(X_t, Y_{0:t-1})$  použitím Vety 3.0.1 *ii*) dostávame

$$P(Y_t \in A | X_t, Y_{0:t-1}) = P(P(Y_t \in A | X_{0:t}, W_{0:t-1}) | X_t, Y_{0:t-1}). \quad (2.8)$$

Spojením (2.7) a (2.8) máme

$$P(Y_t \in A_t | X_t = x_t, Y_{0:t-1} = y_{0:t-1}) = \int_{A_t} g_t^{y_t}(x_t) \mathbf{d}y_t \quad (2.9)$$

Preto

$$\begin{aligned} P_{Y_{0:t}}(A_{0:t}) &= P([Y_{0:t} \in A_{0:t}] \cap [X_t \in \mathbb{R}^{n_x}]) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n_x} \times A_{0:t-1}} P(Y_t \in A_t | X_t = x_t, Y_{0:t-1} = y_{0:t-1}) \mathbf{d}P_{X_t, Y_{0:t-1}}(x_t, y_{0:t-1}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n_x} \times A_{0:t-1}} \int_{A_t} g_t^{y_t}(x_t) \mathbf{d}y_t \mathbf{d}P_{X_t, Y_{0:t-1}}(x_t, y_{0:t-1}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n_x} \times A_{0:t-1}} \int_{A_t} g_t^{y_t}(x_t) \mathbf{d}y_t \mathbf{d}P_{X_t | Y_{0:t-1}}(x_t | y_{0:t-1}) \mathbf{d}P_{Y_{0:t-1}}(y_{0:t-1}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pretože pre všetky  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_x})$  máme

$$\begin{aligned} P((X_t, Y_{0:t-1}) \in A \times C_{0:t-1}) &= \int_{C_{0:t-1}} P(X_t \in A | Y_{0:t-1} = y_{0:t-1}) \mathbf{d}P_{Y_{0:t-1}}(y_{0:t-1}) \\ &= \int_{A \times C_{0:t-1}} \mathbf{d}P_{X_t | Y_{0:t-1}}(x_t | y_{0:t-1}) \mathbf{d}P_{Y_{0:t-1}}(y_{0:t-1}), \end{aligned}$$

platí podľa (2.10)

$$\mathbf{d}P_{Y_{0:t}}(y_{0:t}) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} g_t^{y_t}(x_t) \mathbf{d}y_t \mathbf{d}P_{X_t | Y_{0:t-1}}(x_t | y_{0:t-1}) \mathbf{d}P_{Y_{0:t-1}}(y_{0:t-1}).$$

Použitím (2.9) dostávame, že pravá strana rovnice (2.6) je rovná

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \int_{C_{0:t} \times A} g_t^{y_t}(x_t) dP_{X_t|Y_{0:t-1}}(x_t|y_{0:t-1}) dy_t dP_{Y_{0:t-1}}(y_{0:t-1}) \\
&= \int_{C_{0:t-1} \times A} \left( \int_{C_t} g_t^{y_t}(x_t) dy_t \right) dP_{X_t|Y_{0:t-1}}(x_t|y_{0:t-1}) dP_{Y_{0:t-1}}(y_{0:t-1}) \\
&= \int_{C_{0:t-1} \times A} P(Y_t \in C_t | X_t = x_t, Y_{0:t-1} = y_{0:t-1}) dP_{X_t, Y_{0:t-1}}(x_t, y_{0:t-1}) \\
&= P([X_t \in A] \cap [Y_{0:t} \in C_{0:t}]).
\end{aligned}$$

■

## 2.2 Filtrovanie bodových procesov

Pre prehľadnosť budeme v tejto kapitole značiť vektory a matice hrubým fontom.

Uvažujme realizáciu  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, N(T)$  regulárneho bodového procesu na intervale  $[0, T]$ , pričom  $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_{N(T)} < T$ . Pre účely numerického postupu urobme diskretizáciu tejto realizácie. Zvoľme  $K \in \mathbb{N}$  a označme  $\Delta = T/K$ . Pritom  $K$  volíme dostatočne veľké tak, aby sa v intervale  $[\Delta(k-1), \Delta k]$  vyskytoval maximálne jeden bod pre  $k = 1, \dots, K$ . Zaveďme veličinu  $N_k$  indikujúcu výskyt bodu v intervale  $[\Delta(k-1), \Delta k]$ . To znamená, že veličina  $N_k$  nadobúda iba hodnoty 0 a 1 v závislosti na tom, či sa v danom intervale vyskytuje bod.

Podmienenu intenzitu procesu v čase  $\Delta k$  budeme značiť  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Ďalej predpokladajme, že  $\lambda_k$  závisí okrem histórie  $N_1, \dots, N_k$  aj na vektore parametrov  $\boldsymbol{\psi}_k$ , ktorý sa v čase mení. Môžeme teda písať

$$\lambda_k = \lambda(\Delta k | \boldsymbol{\psi}_k, N_{1:k-1}) \quad k = 1, \dots, K.$$

Vývoj vektora parametrov  $\boldsymbol{\psi}_k$  v čase budeme modelovať rovnicou

$$\boldsymbol{\psi}_k = \mathbf{F} \boldsymbol{\psi}_{k-1} + \boldsymbol{\eta}_{k-1}, \quad (2.11)$$

kde  $\mathbf{F}$  je deterministická matica a  $\boldsymbol{\eta}_k$  je striktný biely šum. Vektory  $\boldsymbol{\eta}_i$ ,  $i = 1, \dots, K$  sú teda po dvoch nezávislé a rovnako rozdelené. Zároveň sú nezávislé vektory  $\boldsymbol{\eta}_i$  a  $\boldsymbol{\psi}_j$ , pre  $j, i = 1, \dots, K$ . Navyiac budeme predpokladať, že vektor  $\boldsymbol{\eta}_1$  má združené normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a variančnou maticou  $\mathbf{Q}$ .

Pravdepodobnosť, že sa v intervale  $[\Delta(k-1), \Delta k]$  vyskytne udalosť môžeme vyjadriť približne ako

$$p(N_k | \boldsymbol{\psi}_k, \mathbf{N}_{1:k-1}) = (\lambda_k \Delta)^{1-N_k} (1 - \lambda_k \Delta)^{N_k} + o(\Delta).$$

Pre malé  $\Delta$  je možné túto pravdepodobnosť dobre aproximovať ako

$$p(N_k | \boldsymbol{\psi}_k, \mathbf{N}_{1:k-1}) = \exp(N_k \log(\lambda_k \Delta) - \lambda_k \Delta). \quad (2.12)$$

Problém filtrovania definovaný rovnicami (2.12) a (2.11) spočíva v odhade vektora parametrov  $\boldsymbol{\psi}_k$  pri znalosti histórie  $\mathbf{N}_{1:k}$ . Najlepším odhadom v zmysle strednej kvadratickej chyby je podmienená stredná hodnota. Potrebovali by sme teda spočítať rozdelenie vektora  $\boldsymbol{\psi}_k$  pri znalosti  $\mathbf{N}_{1:k}$ . Problém vedie na nasledujúce rekurentné rovnice.

$$p(\boldsymbol{\psi}_k | \mathbf{N}_{1:k}) = \frac{p(\boldsymbol{\psi}_k | \mathbf{N}_{1:k-1}) p(N_k | \boldsymbol{\psi}_k, \mathbf{N}_{1:k-1})}{p(N_k | \mathbf{N}_{1:k-1})} \quad (2.13)$$

$$p(\boldsymbol{\psi}_k | \mathbf{N}_{1:k-1}) = \int p(\boldsymbol{\psi}_k | \boldsymbol{\psi}_{k-1}) p(\boldsymbol{\psi}_{k-1} | \mathbf{N}_{1:k-1}) d\boldsymbol{\psi}_{k-1} \quad (2.14)$$

Rovnica (2.13) plynie z Bayesovej vety a rovnica (2.14) je analogická s rovnicou (2.3).

Numericky spočítať pre danú realizáciu bodového procesu podmienené hustoty  $p(\boldsymbol{\psi}_k | \mathbf{N}_{1:k})$  nie je zvládnuteľné. Dôvodom je najmä viacrozmerný integrál v rovnici (2.14). V nasledujúcom odstavci odvodíme algoritmus, v ktorom nebudeme počítat aposteriórnu hustotu  $p(\boldsymbol{\psi}_k | \mathbf{N}_{1:k})$  a apriórnu hustotu  $p(\boldsymbol{\psi}_k | \mathbf{N}_{1:k-1})$ , ale obmedzíme sa na priamy výpočet podmienenej strednej hodnoty  $E[\boldsymbol{\psi}_k | \mathbf{N}_{1:k}]$ . Algoritmus je zložený na aproximácii apriórnych aposteriórnych hustôt.

## 2.3 Algoritmus SSPPF

Odvodenie algoritmu vychádza z článku [4]. Označme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_{k|k-1} &= E[\boldsymbol{\psi}_k | \mathbf{N}_{1:k-1}] & \boldsymbol{\psi}_{k|k} &= E[\boldsymbol{\psi}_k | \mathbf{N}_{1:k}] \\ \mathbf{W}_{k|k-1} &= var[\boldsymbol{\psi}_k | \mathbf{N}_{1:k-1}] & \mathbf{W}_{k|k} &= var[\boldsymbol{\psi}_k | \mathbf{N}_{1:k}]. \end{aligned}$$

Odvodenie algoritmu SSPPF (The stochastic state point process filter) je založené na Gaussovej aproximácii aposteriórnej hustoty  $p(\boldsymbol{\psi}_k | \mathbf{N}_{1:k})$ . Algoritmus SSPPF je vyjadrený nasledujúcimi rovnicami.

$$\boldsymbol{\psi}_{k|k-1} = \mathbf{F} \boldsymbol{\psi}_{k-1|k-1} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{W}_{k|k-1} = \mathbf{F} \mathbf{W}_{k-1|k-1} \mathbf{F}' + \mathbf{Q} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{W}_{k|k})^{-1} &= (\mathbf{W}_{k|k-1})^{-1} + \left[ \left( \frac{\partial \log \lambda_k}{\partial \boldsymbol{\psi}_k} \right)' [\lambda_k \Delta] \left( \frac{\partial \log \lambda_k}{\partial \boldsymbol{\psi}_k} \right) \right. \\ &\quad \left. - (N_k - \lambda_k \Delta) \frac{\partial^2 \log \lambda_k}{\partial \boldsymbol{\psi}_k \partial \boldsymbol{\psi}_k'} \right] \Bigg|_{\boldsymbol{\psi}_{k|k-1}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{k|k} = \boldsymbol{\psi}_{k|k-1} + \mathbf{W}_{k|k} \left[ \left( \frac{\partial \log \lambda_k}{\partial \boldsymbol{\psi}_k} \right)' (N_k - \lambda_k \Delta) \right] \Bigg|_{\boldsymbol{\psi}_{k|k-1}}. \quad (2.18)$$

**Odvozenie.** Rovnice (2.15) a (2.16) vyplývajú priamo zo vzťahu (2.11). Dosadením (2.12) do (2.13) dostávame

$$p(\boldsymbol{\psi}_k | \mathbf{N}_{1:k}) = (\lambda_k \Delta)^{N_k} \exp(-\lambda_k \Delta) \frac{p(N_k | \boldsymbol{\psi}_k, \mathbf{N}_{1:k-1})}{p(N_k | \mathbf{N}_{1:k-1})}. \quad (2.19)$$

Menovateľ v rovnici (2.19) je iba normalizačná konštanta. Použitím Gaussovej aproximácie na apriórnu hustotu  $p(N_k | \boldsymbol{\psi}_k, \mathbf{N}_{1:k-1})$  preto dostávame

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\psi}_k | \mathbf{N}_{1:k}) &\propto (\lambda_k \Delta)^{N_k} \exp \left( -\lambda_k \Delta - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\psi}_k - \boldsymbol{\psi}_{k|k-1})' \right. \\ &\quad \left. \times \mathbf{W}_{k|k-1}^{-1} (\boldsymbol{\psi}_k - \boldsymbol{\psi}_{k|k-1}) \right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

a použitím Gaussovej aproximácie priamo na aposteriórnu hustotu  $p(N_k | \boldsymbol{\psi}_k, \mathbf{N}_{1:k})$  dostávame

$$p(\boldsymbol{\psi}_k | \mathbf{N}_{1:k}) \propto \exp \left( -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\psi}_k - \boldsymbol{\psi}_{k|k})' \mathbf{W}_{k|k}^{-1} (\boldsymbol{\psi}_k - \boldsymbol{\psi}_{k|k}) \right). \quad (2.21)$$

Zlogaritmovaním pravých strán v rovniciach (2.20) a (2.21) máme

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\psi}_k - \boldsymbol{\psi}_{k|k})' \mathbf{W}_{k|k}^{-1} (\boldsymbol{\psi}_k - \boldsymbol{\psi}_{k|k}) &\propto N_k \log \lambda_k - \lambda_k \Delta - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\psi}_k - \boldsymbol{\psi}_{k|k-1})' \\ &\quad \mathbf{W}_{k|k-1}^{-1} (\boldsymbol{\psi}_k - \boldsymbol{\psi}_{k|k-1}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Postupným derivovaním rovnosti (2.22) podľa každej zložky vektoru  $\boldsymbol{\psi}_k$  dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{k|k}^{-1} (\boldsymbol{\psi}_k - \boldsymbol{\psi}_{k|k}) &= \mathbf{W}_{k|k-1}^{-1} (\boldsymbol{\psi}_k - \boldsymbol{\psi}_{k|k-1}) \\ &\quad - \left( \frac{\partial \log \lambda_k}{\partial \boldsymbol{\psi}_k} \right) (N_k - \lambda_k \Delta). \end{aligned}$$

Pretože Gaussova aproximácia je platná pre všetky hodnoty  $\boldsymbol{\psi}_k$ , môžeme predchádzajúcu rovnosť vyčíslieť v bode  $\boldsymbol{\psi}_k = \boldsymbol{\psi}_{k|k-1}$ :

$$-(\mathbf{W}_{k|k})^{-1} (\boldsymbol{\psi}_{k|k-1} - \boldsymbol{\psi}_{k|k}) = \left[ \left( \frac{\partial \log \lambda_k}{\partial \boldsymbol{\psi}_k} \right)' (N_k - \lambda_k \Delta) \right] \Big|_{\boldsymbol{\psi}_{k|k-1}}. \quad (2.23)$$

Odtiaľ plynie (2.18). Ak budeme derivovať rovnicu (2.23) podľa  $\boldsymbol{\psi}_k$  ešte raz a výslednú rovnosť vyčíslime v bode  $\boldsymbol{\psi}_k = \boldsymbol{\psi}_{k|k-1}$ , dostaneme (2.17).

# Kapitola 3

## Numerické výsledky

Algoritmus SSPPF sme aplikovali na dáta prevzaté z práce [6]. Experiment bol zameraný na výskum mozgovej činnosti potkana. Po dobu 3 minút bol sledovaný potkan pri tom, ako hľadal potravu v kruhovej aréne. Približne každých 5 milisekúnd bola zaznamenaná poloha potkana  $(r_k, \varphi_k)$ , kde  $r_k$  značí vzdialenosť potkana od stredu kruhovej arény (jednotkový kruh) a  $\varphi_k$  značí uhol. Ďalej boli zazmenávané časy výbojov neurónu v mozgu potkana. Podmienenú intenzitu sme modelovali ako exponenciálu z lineárnej kombinácie Zernikeho polynómov.

$$\lambda_k = \lambda(\Delta k | (r_k, \varphi_k), \psi_k) = \exp \left\{ \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l \psi_k^{l,m} z_l^m(r_k, \varphi_k) \right\} \quad (3.1)$$

Tabulka 3.1: Zernikeho polynómy

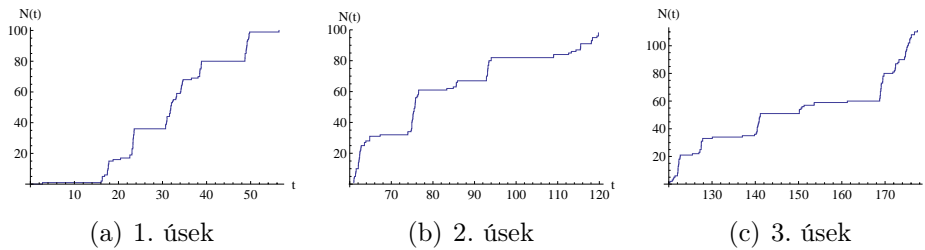
$z_0^0(r, \varphi)$	$= 1$
$z_1^1(r, \varphi)$	$= r \cos(\varphi)$
$z_1^{-1}(r, \varphi)$	$= r \sin(\varphi)$
$z_2^0(r, \varphi)$	$= 2r^2 - 1$
$z_2^2(r, \varphi)$	$= r^2 \cos(2\varphi)$
$z_2^{-2}(r, \varphi)$	$= r^2 \sin(2\varphi)$
$z_3^1(r, \varphi)$	$= (3r^3 - 2r) \cos(\varphi)$
$z_3^{-1}(r, \varphi)$	$= (3r^3 - 2r) \sin(\varphi)$
$z_3^3(r, \varphi)$	$= r^3 \cos(3\varphi)$
$z_3^{-3}(r, \varphi)$	$= r^3 \sin(3\varphi)$

Zernikeho polynómy tvoria ortogonálny systém polynómov na jednotkovom kruhu. Známe sú najmä z aplikácií v optike. Aby bolo prevedenie algoritmu zvládnuteľné, zvolili sme maximálny stupeň polynómov  $L = 3$ . Existuje 10 nenulových Zernikeho polynómov stupňa maximálne 3 (viď. Tabuľka 3.1). Vektor parametrov  $\boldsymbol{\psi}_k = (\psi_k^{0,0}, \psi_k^{1,-1}, \dots, \psi_k^{3,3})$  má preto veľkosť 10. Dĺžku kroku  $\Delta$  sme zvolili 0.005s. To znamená že bolo vykonaných 36000 iterácií. Vývoj vektora parametrov  $\boldsymbol{\psi}_k$  sme modelovali ako

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}_0 &= (1, 0, \dots, 0) \\ \boldsymbol{\psi}_k &= \boldsymbol{\psi}_{k-1} + \boldsymbol{\eta}_{k-1} \quad k = 1, \dots, 36 \times 10^3.\end{aligned}\tag{3.2}$$

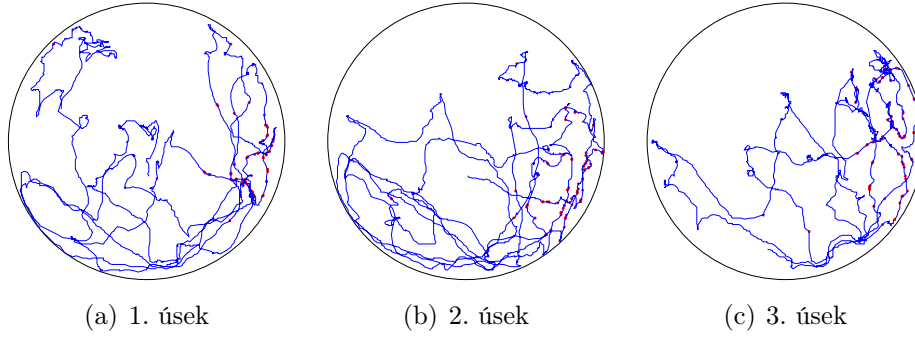
Evolučnou maticou  $\mathbf{F}$  je teda pre nás jednotková matica  $\mathbf{I}_{10 \times 10}$ . Za kovariančnú maticu vektora  $\boldsymbol{\eta}$  sme zvolili  $\sigma^2 \mathbf{I}_{10 \times 10}$ , kde  $\sigma^2 = 10^{-3}$ .

Pre prehľadnosť sme rozdelili dobu trvania pokusu na tri úseky, každý o dĺžke 60 sekúnd. V prvom úseku sa vyskytlo 100 výbojov, v druhom úseku 98 výbojov a v treťom úseku 111 výbojov. Obrázok 3.1 znázorňuje priebeh pokusu v čase. Obrázok 3.2 znázorňuje priebeh pokusu v priestore.



Obrázok 3.1: Priebeh pokusu v čase. Čas je udávaný v sekundách. Veličina  $N(t)$  udáva celkový počet výbojov v čase  $t$ .





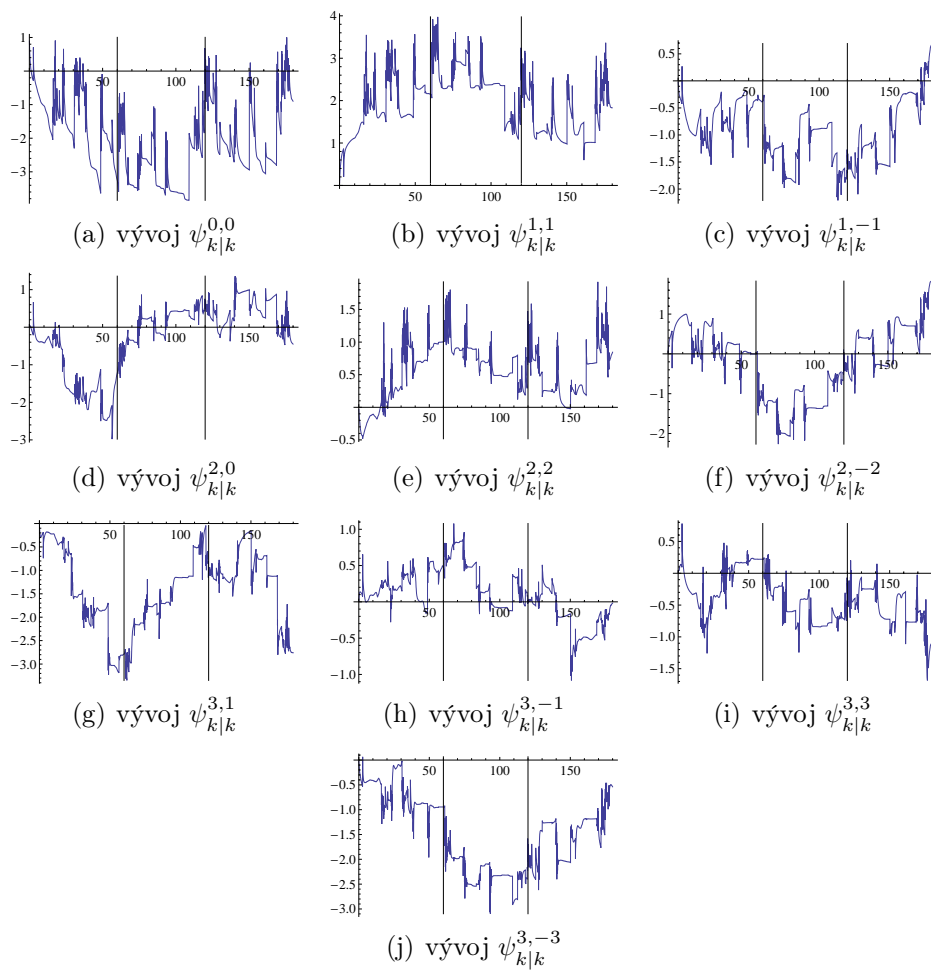
Obrázek 3.2: Priebeh pokusu v priestore. Červené body udávajú polohy výskytu výboja neurónu. Čiara znázorňuje trajektóriu pohybu potkana.

Na obrázku 3.3 je znázornený vývoj vektora  $\boldsymbol{\psi}_{k|k} = \text{E}[\boldsymbol{\psi}_k | \mathbf{N}_{1:k}]$  vypočítaný pomocou algoritmu SSPPF.

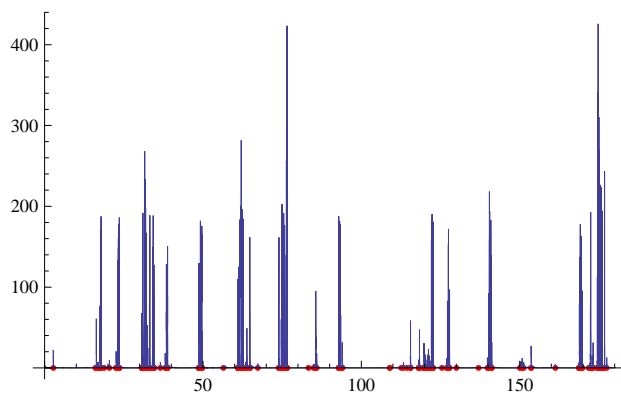
Vývoj podmienenej intenzity  $\lambda_k$  je znázornený na Obrázku 3.4. Ďalej vypočítame hodnotu podmienenej intenzity na celej kruhovej aréne. Podmienenu intenzitu v (3.1) budeme chápať ako funkciu polárnych premenných  $r$  a  $\varphi$ . Za vektor parametrov zoberieme priemernú hodnotu  $\boldsymbol{\psi}_{k|k}$  v jednotlivých úsekoch, označme ich  $\bar{\boldsymbol{\psi}}_1$ ,  $\bar{\boldsymbol{\psi}}_2$  a  $\bar{\boldsymbol{\psi}}_3$ . Budeme teda vyčíslovať funkcie

$$\lambda^{\bar{\boldsymbol{\psi}}_i}(r, \varphi) = \exp \left\{ \sum_{l=0}^3 \sum_{m=-l}^l \bar{\boldsymbol{\psi}}_i z_l^m(r, \varphi) \right\}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.3)$$

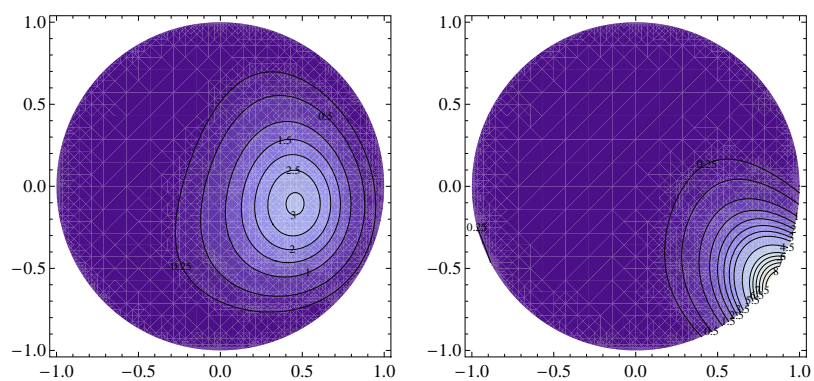
Na Obrázku 3.5 sú znázornené vrstevnice funkcií  $\lambda^{\bar{\boldsymbol{\psi}}_i}$ ,  $i=1,2,3$ .



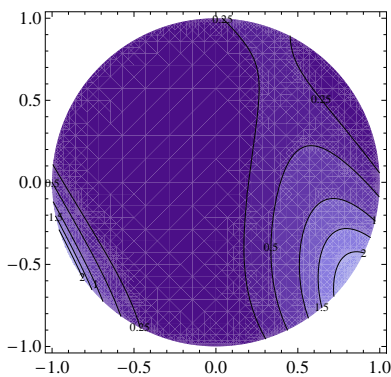
Obrázek 3.3: Vývoj parametrov  $\psi_{k|k}$ . Zvislými čiarami sú oddelené jednotlivé úseky.



Obrázek 3.4: Vývoj podmienenej intenzity  $\lambda_k$ . Červené body označujú doby výskytu výboja neurónu.



(a) 1. minúta pokusu, funkcia  $\lambda^{\bar{\psi}_1}$  (b) 2. minúta pokusu, funkcia  $\lambda^{\bar{\psi}_2}$



(c) 3. minúta pokusu, funkcia  $\lambda^{\bar{\psi}_3}$

Obrázek 3.5: Podmienená intenzita v kruhovej aréne.

# Dodatok A: Program v Mathematike

Na priloženom CD nosiči sa nachádza súbor `MathematicaCode.nb` spustiteľný programom Mathematica. Nosič ďalej obsahuje textové súbory `Track.txt` a `Spike.txt` obsahujúce dáta z [6].

**Vstup.** Vstupom programu sú dva spomenuté textové súbory. Súbor `Track.txt` obsahuje dáta o pohybe potkana. Prvý stĺpec udáva čas, druhý a tretí stĺpec udávajú polohu potkana. Súbor `Spike.txt` obsahuje údaje o časoch výskytov výbojov neurónu. Pre správny chod programu je nutné v prvých dvoch riadkoch kódu v `MathematicaCode.nb` upraviť odkaz na textové súbory tak, aby zodpovedal ich aktuálnemu umiestneniu.

**Výstup.** Výstup programu je výlučne grafický a je automaticky exportovaný do adresára dokumentov prihláseného užívateľa. Výstup obsahuje všetky obrázky použité v kapitole 3.

# Dodatok B: Podmieňovanie

**Veta 3.0.1.** Pre  $X, Y \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$  a  $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$   $\sigma$ -algebru platí

i) Pre konštanty  $a, b, c \in \mathbb{R}$  platí

$$\mathbb{E}[aX + bY + c|\mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] + c \quad s.j.$$

ii) Ak  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{A}$  sú  $\sigma$ -algebry, potom

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}] \quad s.j.$$

iii) Ak je  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{H}$  nezávislá na  $\sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$ , potom

$$\mathbb{E}[X|\sigma(\mathcal{H}, \mathcal{G})] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \quad P_Z - s.j.$$

**Veta 3.0.2.** Nech  $Y, Z$  sú nezávislé náhodné veličiny a nech je funkcia  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  borelously merateľná. Potom

$$\mathbb{E}[g(Y, Z)|Z = z] = \mathbb{E}g(Y, z) \quad P_Z - s.j.$$

**Veta 3.0.3.** Pre náhodnú veličinu  $Y$  a javy  $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  platí

$$P(A \cap Y \in B) = \int_B P(A|Y = y)dP_Y(y).$$

# Literatura

- [1] Crisan D.: *Particle filters - A Theoretical Perspective*. In: *Sequential Monte Carlo Methods in Practice* (Doucet A., de Freitas N., Gordon N.), Springer, New York (2001), 17-41.
- [2] Daley D. J., Vere-Jones D.: *An Introduction to the Theory of point Processes, Vol. I*, Springer, New York (2003).
- [3] Daley D. J., Vere-Jones D.: *An Introduction to the Theory of point Processes, Vol. II*, Springer, New York (2003).
- [4] Eden U. T., Frank L. M., Solo V., Brown E.N.: *Dynamic Analysis of Neural Encoding by Point Process Adaptive Filtering*. *Neural Computation* 16, 971-998 (2004).
- [5] Ergun A., Barbieri R., Eden U. T., Wilson M. A., Brown E.N.: *Construction Of Point Process Adaptive Filter Algorithms for Neural System Using Sequential Monte Carlo Methods*, 54, 3, 419-428 (2007).
- [6] Klement D.: *Stochastické modely v neurofyzilogii*. Diplomová práce, MFF UK Praha (2006).