Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michal Oplt

Oceňování opcí pomocí rychlé Fourierovy transformace

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Andrea Karlová

Studijní program: Obecná matematika

2009

V první řadě bych chtěl velmi poděkovat svojí vedoucí bakalářské práce
Mgr. Andree Karlové za její odborné rady, za poskytnutí studijních materiálů a za veškerý čas, který mi věnovala. Dále děkuji svým rodičům, kteří mi umožňují studovat.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 28. května 2009 Michal Oplt

Obsah

Název práce: Oceňování opcí pomocí rychlé Fourierovy transformace
Autor: Michal Oplt
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Andrea Karlová
e-mail vedoucího: karlova@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Rychlá Fourierova transformace je numerická metoda, která je efektivní z hlediska implementace a výpočtové náročnosti. Její použití pro oceňování opcí přináší možnost rychlého ocenění finančního derivátu (případně složitější derivátové struktury). Metoda předpokládá, že charakteristická funkce rizikově neutrální hustoty je analyticky známa. Hlavním cílem této práce je aplikovat numerickou metodu rychlé Fourierovy transformace na evropské call opce. Práce poskytuje vhled do teorie a aplikování klasické, inverzní a diskrétní Fourierovy transformace, dále se soustředí na některé stochastické procesy, které jsou uplatňovány ve finančnictví. V poslední kapitole se práce věnuje samotné numerické implementaci algoritmu pro oceňování opcí.

Klíčová slova: rychlá Fourierova transformace, oceňování opcí, analytické vyjádření ceny opce, stochastické procesy

Title: Option pricing using fast Fourier transformation
Author: Michal Oplt
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Mgr. Andrea Karlová
Supervisor's e-mail address: karlova@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: Fast Fourier Transform is a numeric method, which is effective in term of implementation and demands on computing. Its usage for option pricing brings the possibility of fast pricing of a financial derivative (eventually more complicated derivative structure). The method presumes that the characteristic function of the risk neutral density is analytically known. Main goal of this work is to apply the method of Fast Fourier Transform to European call options. The work offers insight into the theory and application of classic, inverse and discrete Fourier transform, moreover it concentrates on some stochastic processes, which are important for finance. In the last chapter the work focuses on the numeric implementation of the algorithm for option pricing.

Keywords: fast Fourier transform, option pricing, analytic expression of the option price, stochastic processes

Úvod

Oceňování opcí je důležitou disciplínou v oblasti finanční matematiky. Dnes existuje mnoho možností, jak opce správně ocenit, hlavním problémem však zůstává, že tyto metody nejsou vždy efektivní z hlediska rychlosti výpočtu, což je důležité, jedná-li se například o portfolia s velkým množstvím opcí. Tato práce se zaměřuje na metodu ocenění opcí pomocí numerické metody rychlé Fourierovy transformace, která slibuje spočítání ceny opce téměř v reálném čase.

V první kapitole se práce věnuje zavedení analytických pojmů, jako jsou spojitá a diskrétní Fourierova transformace, nutných k aplikaci výše zmíněné numerické metody. Také jsou zde zmíněny dvě metody pro aproximaci určitého integrálu funkce. Druhá kapitola se soustředí na definování několika Lévyho procesů, které se často ve finančním modelování využívají - Poissonův, složený Poissonův, Wienerův, gamma a variance gamma proces. Všechny procesy jsou doplněny grafy. Tato kapitola také představuje velmi silnou větu používanou v teorii pravděpodobnosti - Lévy-Khintchninovu formuli.

Poslední kapitola je věnována oceňování opcí, je zde rozvedena metoda oceňování pomocí rychlé Fourierovy transformace. Na závěr práce porovnává časovou náročnost tří různých metod.

Kapitola 1

Fourierova transformace

1.1 Základní vlastnosti

Fourierova transformace (FT) je metoda, která se používá pro transformaci funkcí z reálných čísel do reálných čísel na funkce z reálných čísel do čísel komplexních. Jak dále uvidíme, FT převádí aditivní operace na operace multiplikativní.
FT má značné uplatnění například ve fyzice, kde se její pomocí rozkládají funkce na oscilační funkce. Cenným nástrojem je FT také například pro řešení obyčejných nebo parciálních diferenciálních rovnic.
FT se uplatní i v pravděpodobnosti, kdy její aplikací na hustotu náhodné veličiny dostáváme její charakteristickou funkci.
Nyní již k formálním definicím:

Nechť ν je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$. Zaveďme

$$dx = \frac{d\nu}{\sqrt{2\pi}}.$$

Dále toto zavedení používejme.

Definice 1.1.1. Nechť $f \in L^1$, potom **Fourierův obraz** funkce f definujeme jako výraz

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt}dx \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{1.1}$$

Zobrazení $f \mapsto \widehat{f}$ se nazývá **Fourierova transformace**.

Dále pak definujme **p-normu** funkce f

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \qquad (1 \leq p < \infty), \tag{1.2}$$

konvoluci funkcí f a g

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \qquad (x \in \mathbb{R}), \tag{1.3}$$

a **skalární součin** funkcí f a g

$$< f, g > = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{1.4}$$

V teorii pravděpodobnosti se často výraz (1.1) zavádí jako

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ixt}dx \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Na obecnosti to však nic nemění.

Definice 1.1.2. Pro každé $t \in \mathbb{R}$ se funkce e_t nazývá **charakter**, jestliže platí

$$e_t(x) = e^{itx} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Platí $e_t(x+y) = e^{it(x+y)} = e^{itx+ity} = e^{itx}e^{ity} = e_t(x)e_t(y)$. Tedy e_t je homomorfismus aditivní grupy $\mathbb{R}$ na multiplikativní grupu komplexních čísel s absolutní hodnotou rovnou 1.

Věta 1.1.3 (Vlastnosti Fourierovy transformace)**.** *Nechť α, λ jsou reálná čísla, $f \in L^1$. Potom platí:*

(a) *Je-li $g(x) = f(x)e^{i\alpha x}$, pak platí $\widehat{g}(t) = \widehat{f}(t-\alpha)$,*

(b) *je-li $g(x) = f(x-\alpha)$, potom $\widehat{g}(t) = \widehat{f}(t)e^{-i\alpha t}$,*

(c) *je-li $g \in L^1$, $h = f * g$, potom $\widehat{h}(t) = \widehat{f}(t)\widehat{g}(t)$,*

(d) *je-li $g(x) = \overline{f(-x)}$, potom $\widehat{g}(t) = \overline{\widehat{f}(t)}$,*

(e) *je-li $g(x) = f(x/\lambda)$, $\lambda > 0$, potom $\widehat{g}(t) = \lambda\widehat{f}(\lambda t)$,*

(f) *je-li* $g(x) = -ixf(x),\ g \in L^1,$ *potom* $\widehat{f}$ *má derivaci a platí* $(\widehat{f})'(t) = \widehat{g}(t)$.

Důkaz. Tvrzení v (a), (b), (d) i (e) se dokáže přímým dosazením do vzorce (1.1).
K důkazu (c) použijeme Fubiniovu větu a invariantnost Lebesgueovy míry vůči posunutí.
Pro důkaz měřitelnosti funkce $h = f * g$ viz [5], věta 8.14.

$$\widehat{h}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-itx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-ity} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-it(x-y)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-ity} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}dx = \widehat{g}(t)\widehat{f}(t)$$

Pro důkaz (f) viz [5], věta 9.2. □

1.2 Inverzní Fourierova transformace

Po aplikování Fourierovy transformace na funkce a počítání s ní potřebujeme získat výsledný produkt. K tomu právě slouží Inverzní Fourierova transformace. Je to vlastně opačný proces k FT.

Věta 1.2.1 (O inverzní Fourierově transformaci)**.** *Je-li* $f \in L^1, \widehat{f} \in L^1$ *a*

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)e^{ixt}dt \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

potom platí $g \in C_0$ *a* $f(x) = g(x)$ *s.v.*

Důkaz. Viz [5], věta 9.11. □

Věta 1.2.2 (O jednoznačnosti)**.** *Je-li* $f \in L^1$ *a* $\widehat{f}(t) = 0$ *pro všechna* $t \in \mathbb{R}$, *potom* $f(x) = 0$ *skoro všude.*

Důkaz. Protože $\widehat{f} = 0$, je $\widehat{f} \in L^1$ a tvrzení plyne z předcházející věty. □

Věta 1.2.3 (Plancherelova)**.** *Pro každou funkci* $f \in L^2$ *existuje funkce* $\widehat{f} \in L^2$ *taková, že platí:*

(a) *Je-li* $f \in L^1 \cap L^2$, *potom je* $\widehat{f}$ *definována jako Fourierův obraz funkce f,*

(b) *pro každou* $f \in L^2$ *je* $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$,

(c) *pro f a $\widehat{f}$ platí tyto symetrické vztahy: Je-li*

$$\varphi_A(t) = \int_{-A}^{A} f(x)e^{-ixt}dx \quad a \quad \psi_A(x) = \int_{-A}^{A} \widehat{f}(t)e^{ixt}dt,$$

potom pro $A \to \infty$ je $\|\varphi_A - \widehat{f}\|_2 \to 0$ a $\|\psi_A - f\|_2 \to 0$.

Důkaz. Pro důkaz viz [5], věta 9.13. □

Věta 1.2.4. *Je-li $f \in L^2$ a $\widehat{f} \in L^1$, potom*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)e^{ixt}dt \quad s.v.$$

Důkaz. Tvrzení je důsledkem předcházející věty, bod (c). □

1.3 Diskrétní Fourierova transformace

Diskrétní Fourierova transformace je specifický druh Fourierovy transformace, který však jako vstup vyžaduje diskrétní funkci.

Definice 1.3.1. Řekneme, že F_n je **diskrétní Fourierovou transformací** funkce f_k jestliže platí

$$F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)e^{-2\pi ink/N}, \qquad n = 0, \dots, N-1, \tag{1.5}$$

kde N je typicky mocnina 2.

Připomeňme na tomto místě dvě pravidla pro aproximaci určitých integrálů

(i) Lichoběžníkové pravidlo

Jednoduché lichoběžníkové pravidlo je založené na aproximování $f(x)$ úsečkou spojující bod $[a, f(a)]$ s bodem $[b, f(b)]$. Integrováním této nově zavedené aproximace, dostáváme

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{b-a}{2}\right)[f(a) + f(b)].$$

Chceme-li získat lepší aproximaci, rozdělíme interval $[a, b]$ na n stejných dílů. Na každém z nich provedeme aproximaci integrálu z funkce jednoduchým lichoběžníkovým pravidlem a celkem dostaneme

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right],$$

(ii) Simpsonovo pravidlo

Chceme-li ještě zlepšit jednoduché lichoběžníkové pravidlo, použijeme kvadratickou aproximaci funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

Předpokládejme nyní, že chceme aproximovat Fourierovu transformaci funkce $f(x)$ pomocí diskrétní Fourierovy transformace. Integrál musí být omezen a diskretizován následujícím způsobem

$$\widehat{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} f(x)dx \approx \int_{-A/2}^{A/2} e^{-iux} f(x)dx \approx \frac{A}{N}\sum_{k=0}^{N-1} w_k f(x_k) e^{iux_k},$$

kde $x_k = -A/2 + k\Delta, \Delta = A/(N-1)$ je diskretizační krok a w_k jsou váhy odpovídají zvolenému integračnímu pravidlu (například pro lichoběžníkové pravidlo je $w_0 = w_{N-1} = 1/2$ a ostatní váhy jsou rovny 1).
Zvolme nyní $u_n = \frac{2\pi n}{N\Delta}$, vidíme, že dosazením do poslední sumy dostáváme diskrétní Fourierovu transformaci

$$\widehat{f}(u_n) \approx \frac{A}{N} e^{iu_n \frac{A}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} w_k f(x_k) e^{-2\pi ink/N}$$

Kapitola 2

Lévyho procesy

2.1 Stochastické procesy a filtrace

Definice 2.1.1. Nechť $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ je úplný pravděpodobnostní prostor. **Filtrací** nazveme systém σ-algeber $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, jestliže platí:

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \quad a \quad \mathcal{F}_t \in \mathcal{F},$$

pro všechna $0 \leq s \leq t < \infty$.
$\mathcal{F}_t$ tedy reprezentuje informaci dostupnou do času t. Vidíme, že filtrace je neklesající systém vzhledem k inkluzi.

Definice 2.1.2. Systém náhodných veličin $X = \{X_t,\ 0 \leq t \leq T\}$, definovaný na úplném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, se nazývá **stochastický proces**.
Řekneme, že X je $\mathbb{F}$**-adaptovaný**, jestliže X_t je $\mathcal{F}_t$-měřitelná pro každé t (značíme $X_t \in \mathcal{F}_t$).

Definice 2.1.3. Nechť $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ je pravděpodobnostní prostor s filtrací $\mathbb{F}$ a $\{X_t\}$ je $\mathbb{F}$-adaptovaný proces. **Přirozenou filtrací** stochastického procesu $\{X_t\}$ nazveme systém σ-algeber $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}_{t\geq 0}$ takový, že platí $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s;\ s \leq t)$

Definice 2.1.4. Stochastický proces $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ se nazývá **martingal**, jestliže platí:

(a) X je $\mathbb{F}$-adaptovaný proces,

(b) $E[|X_t|] < \infty$ pro každé t ≥ 0,

(c) $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$, P-skoro jistě $(0 \leq s \leq t)$.

Definice 2.1.5. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je reálná funkce. Nechť pro všechna $t \in (a, b]$ je f zprava spojitá a má vlastní limity zleva. Pak říkáme, že funkce f je **càdlàg**.

Zřejmě každá spojitá funkce je *càdlàg*, neboť je-li funkce spojitá, pak je jistě spojitá zprava a má vlastní limity zleva i zprava a ty se rovnají.

Definice 2.1.6. Označme $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ množinu všech borelovských pravděpodobnostních měr na $\mathbb{R}$. Řekneme, že $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ má **n-tou konvoluční odmocninu**, jestliže existuje míra $\mu^{1/n} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, pro kterou platí $(\mu^{1/n})^{*^n} = \mu^{1/n} * \ldots * \mu^{1/n} = \mu$.
Řekneme, že $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ je **nekonečně dělitelná**, jestliže existuje její n-tá konvoluční odmocnina v $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Nechť X je náhodná veličina s hodnotami v $\mathbb{R}$ vzhledem k μ_X. Řekneme, že X je **nekonečně dělitelná**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny $Y_1^{(n)}, \ldots, Y_n^{(n)}$ takové, že

$$X = Y_1^{(n)} + \ldots + Y_n^{(n)}$$

Definice 2.1.7. Řekneme, že stochastický proces $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ definovaný na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathrm{P})$ je **Lévyho proces**, jestliže

(a) $X_0 = 0$ s.j.,

(b) X má nezávislé přírůstky, tj. pro každé $t > 0$ a $h > 0$ je přírůstek $X_{t+h} - X_t$ nezávislý na X_s kdykoli $s \leq t$,

(c) X má stacionární přírůstky, tj. pro každé $h > 0$ má $X_{t+h} - X_t$ stejné pravděpodobnostní rozdělení jako X_h,

(d) X je stochasticky spojitý, tj. pro každé $a > 0$ a pro každé $s \geq 0$ platí

$$\lim_{t \to s} P(|X_t - X_s| > a) = 0.$$

(e) X má *càdlàg* trajektorie.

Věta 2.1.8. *Je-li* $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ *Lévyho proces, pak je* X_t *nekonečně dělitelná náhodná veličina pro každé* $t \geq 0$.

Důkaz. Označme $X(t) = X_t$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ můžeme psát:

$$X(t) = Y_1^{(n)}(t) + \ldots + Y_n^{(n)}(t),$$

kde

$$Y_k^{(n)}(t) = X\left(\frac{kt}{n}\right) - X\left(\frac{(k-1)t}{n}\right).$$

Veličiny $Y_k^{(n)}(t)$ jsou i.i.d. podle bodů b) a c) v definici Lévyho procesu. $\square$

Definice 2.1.9. Řekneme, že Lévyho proces je **subordinátor**, jestliže má neklesající trajektorie.

Tedy je-li $T = \{T(t),\ t \geq 0\}$ subordinátor, tak platí

$$T(t) \geq 0 \quad s.j. \quad \forall t > 0,$$

$$T(t_1) \leq T(t_2) \quad s.j. \quad \forall t_1 \leq t_2.$$

2.2 Příklady Lévyho procesů

2.2.1 Jednoduchý Poissonův proces

Definice 2.2.1. Řekneme, že $N = \{N_t,\ t \geq 0\}$ je **Poissonův proces** s parametrem intenzity $\lambda > 0$, jestliže $N_0 = 0$, má nezávislé a stacionární přírůstky a ty jsou řízeny za časový interval $s > 0$ Poissonovým rozdělením s parametrem (λs). Velikost skoku se rovná 1.

Ukažme si nyní, že Poissonův proces je nekonečně dělitelný. Mějme náhodnou veličinu X s Poissonovým rozdělením s parametrem λ. Platí

$$\mu_X = P[X = n] = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}.$$

Spočítejme nyní charakteristickou funkci této náhodné veličiny.

$$\widehat{\mu}_X(u) = \phi_X(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}e^{-inu} = e^{-\lambda}\exp\left[\lambda e^{-iu}\right] = \exp\left[\lambda(e^{-iu} - 1)\right]$$

Z toho vidíme, že X je nekonečně dělitelná náhodná veličina, kde každé $Y_j^{(n)}(t)$ má Poissonovo rozdělení s parametrem λ/n.

Je zřejmé, že Poissonův proces je příkladem subordinátoru.

Pro graf Poissonova procesu a kompenzovaného Poissonova procesu viz Obrázek 2.1.

Nechť $N = \{N_t,\ t \geq 0\}$ je Poissonovův proces s intenzitou λ. Pro něj platí

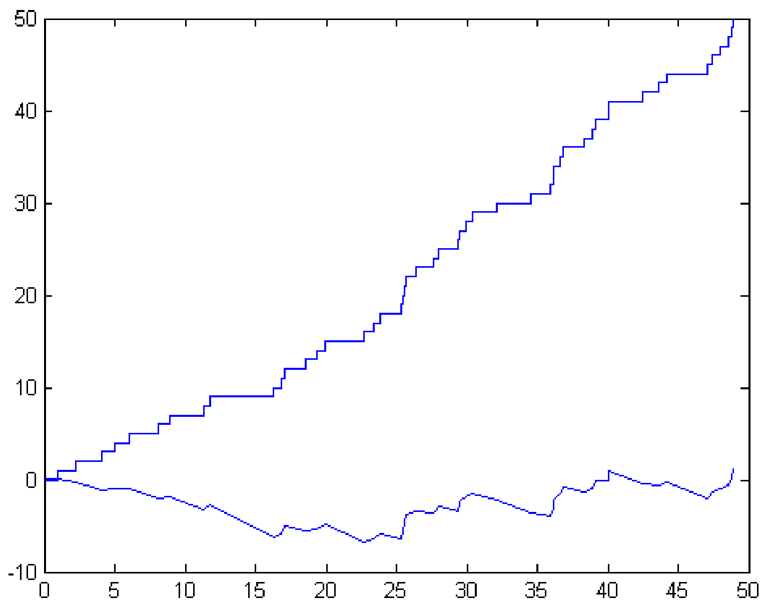
$$E[N_t|\mathcal{F}_s] = E[N_t - N_s + N_s|\mathcal{F}_s] = E[N_t - N_s|\mathcal{F}_s] + E[N_s|\mathcal{F}_s] =$$

$$= E[N_t - N_s] + N_s = \lambda t - \lambda s + N_s.$$

Z předcházejícího výpočtu tedy vyplývá, že Poissonův proces martingal není. Pokud ale budeme uvažovat kompenzovaný proces $N_t - \lambda t$, pak uvidíme, že ten již martingal bude.

$$E[N_t - \lambda t|\mathcal{F}_s] = E[N_t - N_s + N_s - \lambda t|\mathcal{F}_s] = E[N_t - N_s|\mathcal{F}_s] + E[N_s|\mathcal{F}_s] -$$

$$-E[\lambda t|\mathcal{F}_s] = E[N_t - N_s] + N_s - \lambda t = \lambda t - \lambda s + N_s - \lambda t = N_s - \lambda s.$$



Obrázek 2.1: Poissonův proces a kompenzovaný Poissonův proces, $\lambda = 1$

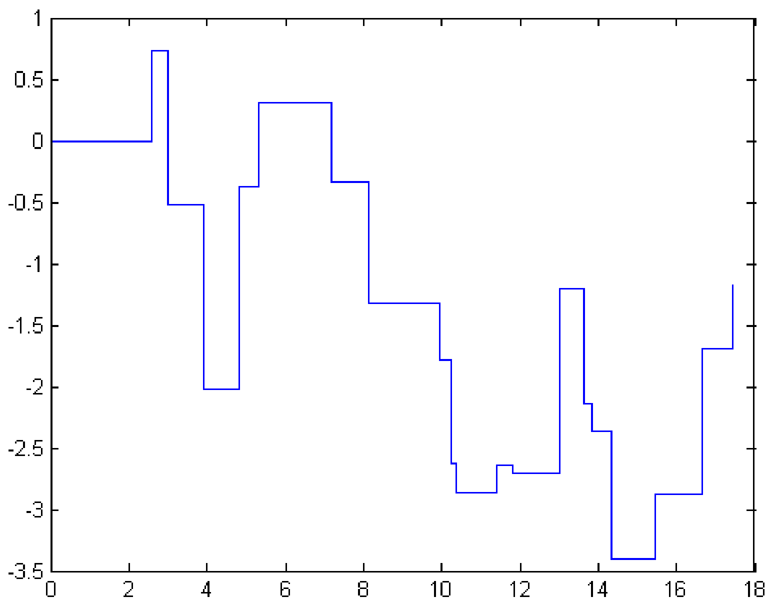
2.2.2 Složený Poissonův proces

Definice 2.2.2. Nechť $N = \{N_t,\ t \geq 0\}$ je Poissonův proces s parametrem intenzity $\lambda > 0$ a nechť $Z_i, i = 1, 2, \ldots$ je posloupnost nezávislých a stejně rozdělených náhodných veličin nezávislých na $\mathbb{N}$. Potom řekneme, že $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$, kde

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k \qquad t \geq 0,$$

je **složený Poissonův proces**.

Pro graf složeného Poissonova procesu viz Obrázek 2.2.



Obrázek 2.2: Složený Poissonův proces, $\lambda = 1$

2.2.3 Wienerův proces

Definice 2.2.3. Řekneme, že stochastický proces $W = \{W_t,\ t \geq 0\}$ definovaný na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathrm{P})$ je **Wienerův proces**, jestliže

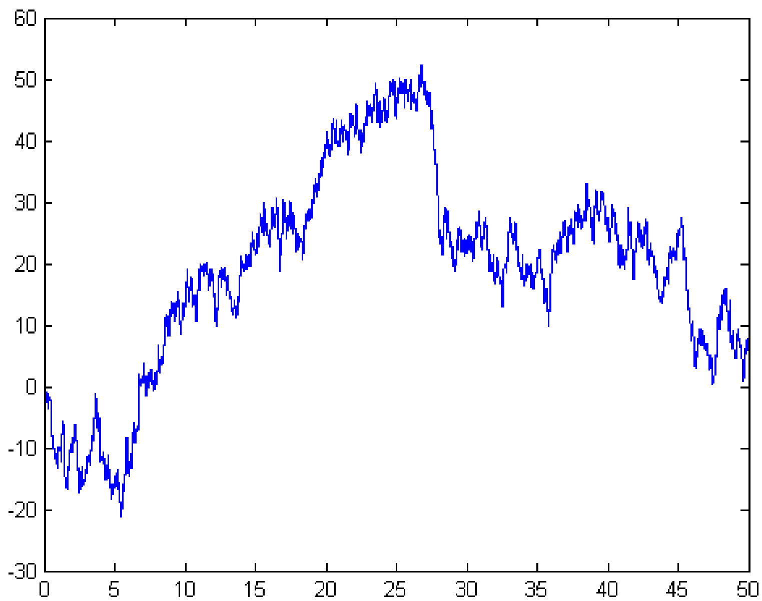
(a) $W_0 = 0$ s.j.,

(b) W má nezávislé přírůstky,

(c) W má stacionární přírůstky,

(d) $W_{t+s} - W_t \sim N(0, s)$.

Vždy budeme předpokládat, že pracujeme s přirozenou filtrací $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W = \{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$ procesu W. Přírůstky $W_{t+s} - W_t$ jsou nezávislé na $\mathcal{F}_t$.



Obrázek 2.3: Wienerův proces

Mějme nyní náhodnou veličinu W_s. Víme, že $W_s \sim N(0, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 = s$. Tedy pro její hustotu platí

$$\mu(t) = f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right).$$

Na tuto hustotu použijeme Fourierovu transformaci a dostaneme charakteristickou funkci W_s

$$\widehat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(itx\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{-x^2 + 2i\sigma^2 tx + (i\sigma^2 t)^2 - (i\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}\right) dx =$$

$$= \exp\left(-\frac{\sigma^4 t^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{-(x - i\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

Tedy i Wienerův proces je nekonečně dělitelný.

Pro graf Wienerova procesu viz Obrázek 2.3.

Lze dokázat, že Wienerův proces má spojité trajektorie, tzn. W_t je spojitou funkcí proměnné t. Tyto trajektorie však nejsou v žádném bodě diferencovatelné. Lze také dokázat, že na každém intervalu mají trajektorie Wienerova procesu nekonečnou variaci.

Dále platí

$$P\left(\sup_{t\geq 0} W_t = +\infty \quad a \quad \inf_{t\geq 0} W_t = -\infty\right) = 1.$$

Z toho vidíme, že hodnoty Wienerova procesu oscilují mezi kladnými a zápornými hodnotami.

Mějme Wienerův proces $W = \{W_t, t \geq 0\}$, pak platí

$$E[W_t|\mathcal{F}_s] = E[W_t - W_s + W_s|\mathcal{F}_s] = E[W_t - W_s|\mathcal{F}_s] + E[W_s|\mathcal{F}_s] =$$

$$= E[W_t - W_s] + W_s = 0 + W_s = W_s.$$

A tedy Wienerův proces je podle definice martingal.

2.2.4 Gamma proces

Hustota rozdělení Gamma(a, b) s parametry $a > 0$ a $b > 0$ je dána vztahem

$$f(x; a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-xb), \quad x > 0.$$

Dosazením této funkce do Fourierovy transformace získáme charakteristickou funkci tohoto rozdělení

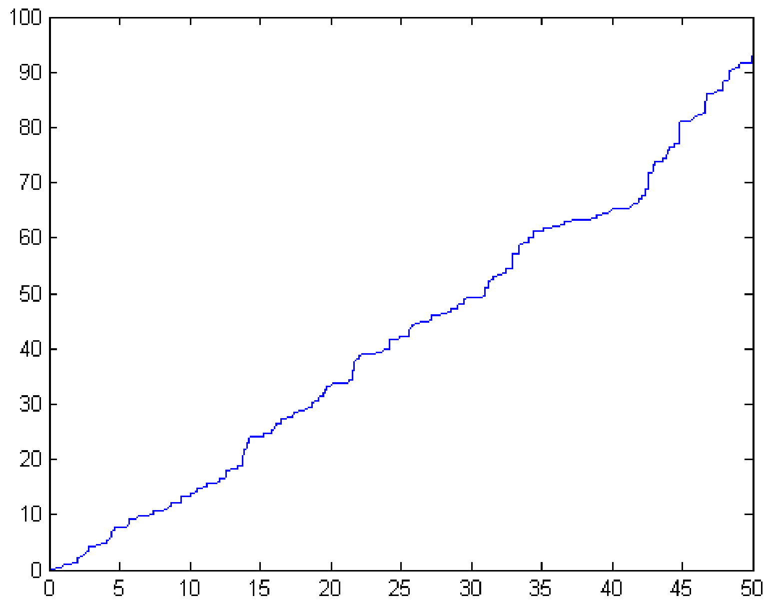
$$\phi(u; a, b) = (1 - \frac{iu}{b})^{-a}.$$

Tatko definovaná funkce je zřejmě nekonečně dělitelná.

Definice 2.2.4. Řekneme, že stochastický proces $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ definovaný na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathrm{P})$ je **Gamma proces**, jestliže $X_0 = 0$ s.j. a X má nezávislé a stacionární přírůstky, které jsou řízeny gamma rozdělením s parametry a a b.

Zřejmě je gamma proces subordinátor.

Pro graf gamma procesu viz Obrázek 2.4.



Obrázek 2.4: Gamma proces, a = b = 1/2

2.2.5 Variance gamma proces

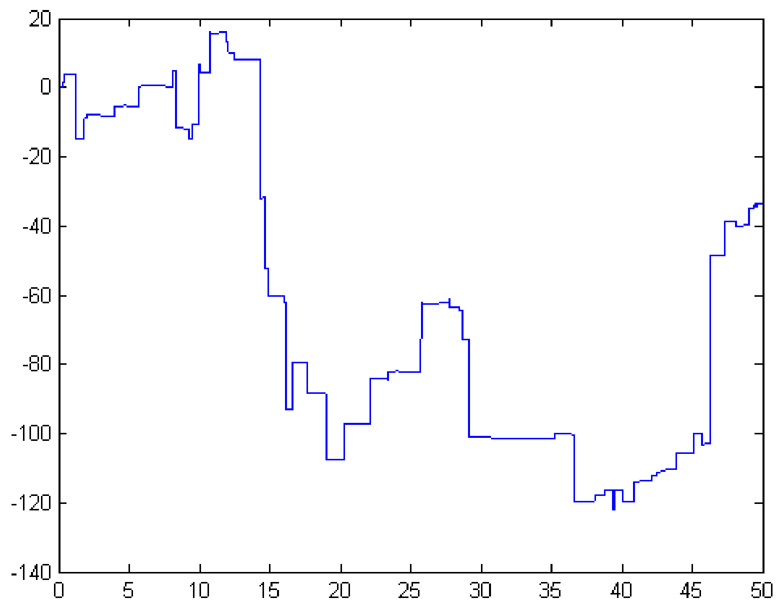
Definice 2.2.5. Mějme náhodnou veličinu, která se řídí variance gamma rozdělením s parametry σ, ν, θ, značíme $\mathrm{VG}(\sigma, \nu, \theta)$; její charakteristická funkce je tvaru

$$\phi_{VG}(u) = (1 - iu\theta\nu + \frac{1}{2}\sigma^2\nu u^2)^{-1/\nu}$$

Toto rozdělení je nekonečně dělitelné. Definujme **variance gamma proces** $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ jako proces, pro který platí $X_0 = 0$ s.j., X má nezávislé a stacionární přírůstky a pro který má přírůstek $X_{s+t} - X_s$ rozdělení VG$(\sigma\sqrt{t}, \nu/t, t\theta)$.

Lze také ukázat, že VG proces může být alternativně vyjádřen jako rozdíl dvou nezávislých gamma procesů.
Nebo jej můžeme vyjádřit jako Wienerův proces, jehož čas je řízen gamma rozdělením.
Je také zajímavé si uvědomit, že složený Poissonův proces je speciálním případem variance gamma procesu.
Pro volbu parametru θ blízko 0 dostáváme Wienerův proces a naopak volbou θ adekvátně k parametru λ získáváme složený Poissonův proces.

Pro graf variance gamma procesu viz Obrázek 2.5.



Obrázek 2.5: Varianční gamma proces, $\sigma = 10$, $\nu = 1/3$, $\theta = 10$

2.3 Lévy-Khintchinova věta

Mějme nyní Lévyho proces $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$. Zadefinujme si pro každé $t \geq 0$ veličinu $\Delta X(t) = X(t) - X(t^-)$ jako velikost skoku procesu. Zřejmě $\Delta X(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$, má-li proces spojité trajektorie.
Nechť $U \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, potom definujeme **Poissonovu náhodnou míru** jako

$$N(t, U) = \sum_{0 \leq s \leq t} \mathbb{I}_{\{\Delta X(s) \in U\}}.$$

Někdy je tato míra také nazývána jako skoková míra. Můžeme si ji představit jako počet skoků procesu, jejichž velikost se vejde do množiny U. Její diferecniální formu můžeme psát ve tvaru $N(dt, dz), \quad t > 0, z \in \mathbb{R}_0$.
Máme-li Poissonovu náhodnou míru, tak můžeme dále definovat **Lévyho míru** procesu jako

$$\nu(U) = E[N(1, U)], \quad U \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0).$$

Důležité je zmínit, že ν nemusí být nutně konečná míra, může totiž platit

$$\int_{\mathbb{R}_0} min(1, |z|)\nu(dz) = \infty.$$

Toto může nastat, když má proces nespočetně mnoho skoků malé velikosti.
Na druhou stranu ale vždy musí platit

$$\int_{\mathbb{R}_0} min(1, z^2)\nu(dz) < \infty. \tag{2.1}$$

Věta 2.3.1 (Lévy-Khintchinova)**. (i)** *Nechť $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ je Lévyho proces. Potom jeho charakteristická funkce je tvaru*

$$E[e^{iuX(t)}] = e^{i\Psi(u)}, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

kde

$$\Psi(u) = i\alpha u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \int_{|z|<1} (e^{iuz} - 1 - iuz)\nu(dz) + \int_{|z|\geq 1} (e^{iuz} - 1)\nu(dz), \tag{2.3}$$

přičemž parametry $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 \geq 0$ jsou konstantní a ν je Lévyho míra splňující (2.1).

(ii) *Naopak, existují-li konstanty $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$ a Lévyho míra ν, potom existuje Lévyho proces X takový, že splňuje (2.2) a (2.3).*

Důkaz. Viz [1], theorem 1.2.14 □

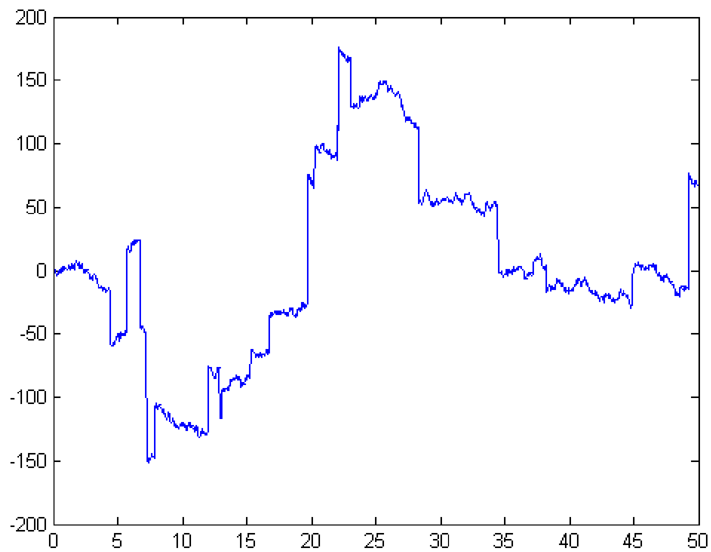
Funkce $\Psi(u)$ ve vzorci (2.2) se nazývá **charakteristický exponent** Lévyho procesu.

Lévy-Khintchinova věta nám tedy umožňuje libovolný Lévyho proces jednoznačně popsat pomocí tzv. charakteristického tripletu (α, σ, ν), kde α je takzvaná driftová část, σ je difuzní část a ν popisuje charakteristiku skoků procesu. A naopak, máme-li zadaný takovýto triplet, víme, že k němu existuje právě jeden Lévyho proces, který má požadované vlastnosti.

Věta 2.3.2 (Lévy-Itôova věta o dekompozici)**.** *Nechť $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ je Lévyho proces. Potom X_t splňuje následující rovnici*

$$X_t = a_1 t + \sigma W_t + \int_0^t \int_{|z|<1} z\widetilde{N}(ds, dz) + \int_0^t \int_{|z|\geq 1} zN(ds, dz),$$

kde $a_1, \sigma \in \mathbb{R}$, $W = \{W(t),\ t \geq 0\}$ je standardní Wienerův proces a $\widetilde{N}(dt, dz) = N(dt, dz) - \nu(dz)dt$ je kompenzovaná Poissonova náhodná míra.



Obrázek 2.6: Součet Wienerova a složeného Poissonova procesu

Proces definovaný jako součet Wienerova a složeného Poissonova procesu s parametrem λ má charakteristický Lévyho triplet tvaru $(0, \sigma, \lambda\delta_1(dx))$.

Kapitola 3

Oceňování opcí

V tomto oddíle se budeme věnovat metodě oceňování evropských opcí pomocí Fourierovy transformace tak, jak je popsána v [2] a [3]. Odvodíme analytické vyjádření FT ceny opce.

Uvažujme finanční trh bez arbitráže, kde jsou hodnoty podkladových aktiv modelovány stochastickým procesem $S = \{S(t), 0 \leq t \leq T\}$, $\mathcal{F}_t$ reprezentuje historii vývoje aktiva S a $\widehat{S} = e^{-rt}S_t$ značí diskontovanou hodnotu aktiva při pevné úrokové míře r. Předpokládejme, že se pohybujeme v rizikově neutrálním prostředí. Označme $k = \ln K$, kde K je realizační cena (strike) opce. Nechť $C_T(k)$ je požadovaná hodnota evropské call opce s realizační cenou $\exp(k)$ a časem maturity T.

Dynamiku vývoje ceny akcie vyjádřeme zaměněním Wienerova procesu ve standardním Black-Scholesovu modelu za variance gamma proces. Nechť je statistický proces pro cenu akcie dán jako

$$S(t) = S(0)\exp(rt + X(t;\sigma,\nu,\theta) + \omega t),$$

kde $\omega = \frac{1}{\nu}\ln(1 - \theta\nu - \sigma^2\nu/2)$.

Hodnota evropské call opce se strikem K a časem maturity T je standardně definována jako

$$C_T(K) = e^{-rT}E[\max(S(T) - K, 0)].$$

Analytické vyjádření ceny opce pomocí VG procesu můžeme nalézt ve článku [3]. Autoři dokázali, že platí

$$C_T(K) = S(0)\Psi\left(d\sqrt{\frac{1-c_1}{\nu}}, (\alpha+s)\sqrt{\frac{\nu}{1-c_1}}, \frac{T}{\nu}\right) -$$

$$-K\exp(-rT)\Psi\left(d\sqrt{\frac{1-c_2}{\nu}},(\alpha s)\sqrt{\frac{\nu}{1-c_2}},\frac{T}{\nu}\right),$$

kde

$$s=\frac{\sigma}{\sqrt{1+\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^2\frac{\nu}{2}}},\qquad \alpha=-\frac{\theta}{\sigma^2}s,$$

$$c_1=\frac{\nu(\alpha+s)^2}{2},\qquad c_2=\frac{\nu\alpha^2}{2},$$

$$d=\frac{1}{s}\left[\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right)+rT+\frac{T}{\nu}\ln\left(\frac{1-c_1}{1-c_2}\right)\right]$$

a pro funkci Ψ platí

$$\Psi(a,b,\gamma)=\frac{c^{\gamma+\frac{1}{2}}\exp(\operatorname{sign}(a)c)(1+u)^{\gamma}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\gamma)\gamma}\cdot K_{\gamma+\frac{1}{2}}(c)\Phi\left(\gamma,1-\gamma,1+\gamma;\frac{1+u}{2},-\operatorname{sign}(a)c(1+u)\right)-$$

$$-\operatorname{sign}(a)\frac{c^{\gamma+\frac{1}{2}}\exp(\operatorname{sign}(a)c)(1+u)^{1+\gamma}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\gamma)(1+\gamma)}\cdot K_{\gamma-\frac{1}{2}}(c)\Phi\left(1+\gamma,1-\gamma,2+\gamma;\frac{1+u}{2},-\operatorname{sign}(a)c(1+u)\right)+$$

$$+\operatorname{sign}(a)\frac{c^{\gamma+\frac{1}{2}}\exp(\operatorname{sign}(a)c)(1+u)^{\gamma}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\gamma)\gamma}\cdot K_{\gamma-\frac{1}{2}}(c)\Phi\left(\gamma,1-\gamma,1+\gamma;\frac{1+u}{2},-\operatorname{sign}(a)c(1+u)\right),$$

kde

$$c=|a|\sqrt{2+b^2}\qquad a\quad u=\frac{b}{\sqrt{2+b^2}}.$$

Funkce Φ je definována jako

$$\Phi(\alpha,\beta,\gamma;x,y)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\cdot$$

$$\cdot\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}\exp(uy)du.$$

Ještě doplňme, že $K_\alpha(x)$ je tzv. modifikovaná Besselova funkce druhého druhu, kterou je možné dostat jako řešení modifikované Besselovy diferenciální rovnice. Platí pro ni

$$K_\alpha(x)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\alpha}(x)-I_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)},$$

kde $I_\alpha(x)$ je modifikovaná Besselova funkce prvního druhu, která je zavedena jako

$$I_\alpha(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^n}{n!\Gamma(n+\alpha+1)}.$$

3.1 Fourierova transformace ceny opce

Nechť $q_T(s)$ je rizikově neutrální hustota $s_T = \ln S_T$, kde S_T je cena podkladového aktiva v čase T. Charakteristická funkce s_T je poté definována jako:

$$\widehat{q_T}(u) = \phi_T(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ius} q_T(s) ds.$$

V čase 0 je hodnota $C_T(k)$ vzhledem k rizikově neutrální hustotě $q_T(s)$ vyjádřena jako

$$C_T(k) = e^{-rT} E[S_T - K]^+ = e^{-rT} E[e^{s_T} - e^k]^+ = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} (e^s - e^k)^+ q_T(s) ds =$$

$$= \int_k^{\infty} e^{-rT}(e^s - e^k) q_T(s) ds.$$

Všimněme si nyní, co se děje s $C_T(k)$, pokud $k \to -\infty$.

$$\lim_{k \to -\infty} C_T(k) = \lim_{k \to -\infty} \int_k^{\infty} e^{-rT}(e^s - e^k) q_T(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT}(e^s) q_T(s) ds =$$

$$= e^{-rT} E[e^{s_T}] = e^{-rT} E[S_T] = S_0.$$

Z výpočtu vyplývá, že takto zavedená funkce není L^2 integrovatelná, což nám znemožňuje pozdější použití inverzní Fourierovy transformace. Zadefinujme tedy modifikovanou cenu opce jako

$$c_T(k) = \exp(\alpha k) C_T(k), \qquad \alpha > 0.$$

Pro takto upravenou funkci vezměme jako fakt, že její kvadrát již je integrovatelný přes celé $\mathbb{R}$ v k. Později se ještě vrátíme k volbě α.
Uvažujme nyní Fourierovu transformaci naší modifikované funkce $c_T(k)$

$$\psi_T(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivk} c_T(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivk} \int_k^{\infty} e^{\alpha k} e^{-rT}(e^s - e^k) q_T(s) ds dk =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_k^{\infty} e^{-rT} e^{ivk} e^{\alpha k}(e^s - e^k) q_T(s) ds dk = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{s} e^{-rT} e^{ivk} e^{\alpha k}(e^s - e^k) q_T(s) dk ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(s) \int_{-\infty}^{s} (e^{s+\alpha k} - e^{(1+\alpha)k}) e^{ivk} dk ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(s) \left[\frac{e^s e^{k(\alpha+iv)}}{\alpha + iv} - \frac{e^{k(1+\alpha+iv)}}{1+\alpha+iv} \right]_{-\infty}^{s} ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(s) \left[\frac{e^{s(1+\alpha+iv)}}{\alpha + iv} - \frac{e^{s(1+\alpha+iv)}}{1+\alpha+iv} \right] ds =$$

$$= \frac{e^{-rT}}{\alpha^2 + \alpha - v^2 + i(2\alpha+1)v} \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(1+\alpha+iv)} q_T(s) ds = \frac{e^{-rT}\phi(v - (\alpha+1)i)}{\alpha^2 + \alpha - v^2 + i(2\alpha+1)v}. \quad (3.1)$$

Tedy jsme dostali analytické vyjádření charakteristické funkce $c_T(k)$.
Nyní již získáme zpět $C_T(k)$ metodou inverzní Fourierovy transformace:

$$C_T(k) = c_T(k) e^{-\alpha k} = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivk} \psi_T(v) dv = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-ivk} \psi_T(v) dv. \quad (3.2)$$

Druhá rovnost platí, neboť $C_T(k)$ je reálná funkce, což implikuje, že $\psi_T(v)$ je sudá ve své imaginární složce a lichá v reálné části.
Vraťme se nyní k volbě parametru α. Aby byla modifikovaná cena opce integrovatelná přes $\mathbb{R}^+$ v k, stačí, aby byla splněna podmínka, že $\psi(0)$ je konečné. Z vyjádření (3.1) vidíme, že $\psi(0)$ je konečné, právě když $\phi(-(\alpha+1)i)$ je konečné. Z definice charakteristické funkce tedy musí platit

$$\phi(-(\alpha+1)i) = E[e^{i(-i)(\alpha+1)s_T}] = E[e^{s_T(\alpha+1)}] = E[S_T^{\alpha+1}] < \infty. \quad (3.3)$$

Nyní už jen zbývá efektivně spočítat (3.2).

K tomu nám poslouží numerická metoda Rychlé Fourierovy transformace (dále jen FFT). Je to efektivní cesta, jak spočítat sumu (1.5). Přímé vyjádření této sumy má náročnost $O(N^2)$, zatímco použití FFT poskytuje složitost pouze řádu $O(N \log N)$

Použitím lichoběžníkového pravidla na integrál na pravé straně výrazu (3.2) a položením $v_j = \eta(j-1)$, dostáváme aproximaci pro $C_T(k)$ jako

$$C_T(k) \approx \frac{\exp(-\alpha k)}{\pi} \sum_{j=1}^{N} e^{-iv_j k} \psi_T(v_j) \eta. \quad (3.4)$$

Efektivní horní limit pro integraci je nyní

$$a = N\eta.$$

Zaveďme ekvidistantní dělení na úseky délky λ, tedy hodnoty pro logaritmus striku k budou

$$k_u = -b + \lambda(u-1), \qquad u = 1, \ldots, N. \quad (3.5)$$

Tedy k_u probíhá interval od $-b$ do b, kde

$$b = \frac{N\lambda}{2}.$$

Vhodnou volbou λ můžeme naše dělení udělat hustší nebo řidší a podle potřeby se přiblížit požadovanému striku.
Dosazením (3.5) do (3.4) dostáváme

$$C_T(k_u) \approx \frac{\exp(-\alpha k_u)}{\pi} \sum_{j=1}^{N} e^{-iv_j(-b+\lambda(u-1))} \psi_T(v_j)\eta \quad u = 1, \ldots, N. \tag{3.6}$$

Uvědomíme-li si, že $v_j = (j-1)\eta$, můžeme psát

$$C_T(k_u) \approx \frac{\exp(-\alpha k_u)}{\pi} \sum_{j=1}^{N} e^{-i\lambda\eta(j-1)(u-1)} e^{ibv_j} \psi_T(v_j)\eta \quad u = 1, \ldots, N. \tag{3.7}$$

Abychom dostali přesný tvar diskrétní Fourierovy transformace, musí platit

$$\lambda\eta = \frac{2\pi}{N}.$$

Nyní je zřejmé, že když zvolíme malé η, abychom dostali hustou síť bodů pro integraci, tak se zvětší mezery v dělení logaritmů striku. My chceme získat přesnou aproximaci integrálu i pro volbu větších η, a proto do naší sumace zapracujeme Simpsonovo pravidlo. Dostáváme

$$C_T(k_u) = \frac{\exp(-\alpha k_u)}{\pi} \sum_{j=1}^{N} e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(u-1)} e^{ibv_j} \psi_T(v_j) \frac{\eta}{3}(3 + (-1)^j - \delta_{j-1}), \tag{3.8}$$

kde δ_{j-1} je Kroneckerovo delta.

3.2 Porovnání s jinými metodami

V tomto oddílu ukážeme, jak se liší rychlost výpočtu ceny opce podle použité metody. Testovali jsme tři různé metody: rychlou Fourierovu transformaci, analytické vyjádření ceny opce uvedené ve článku [3] a metodu Monte Carlo.
Všechny implementace byly provedeny v matematickém programu MATLAB. Jako parametry pro naše modely jsme zvolili

σ	ν	θ	T	$S(0)$	K	α	r
0.12	0.16	-0.33	1	100	75	1.1	0.05

Počítali jsme 160 různých hodnot striku a porovnávali jsme čas nutný k výpočtu ve všech tří metodách. Výsledky použitých metod shrnuje následjící tabulka, v níž je vždy uveden CPU čas nutný k vyhodnocení daného algoritmu.

metoda	čas v sekundách
FFT	6.35
analytické vyjádření	22.06
Monte Carlo	75.14

Z uvedených výsledků vyplývá, že metoda použití FFT je více než třikrát rychlejší, než metoda ocenění pomocí analytického vyjádření ceny opce. Výsledné ceny opcí se od sebe neliší o více než 0.01.

Závěrem tedy můžeme shrnout, že metoda ryhlé Fourierovy transformace je efektivním nástrojem pro oceňování opcí.

Literatura

[1] Applebaum D.: *Lévy Processes and Stochastic Calculus*
Cambridge University Press, 2004

[2] Carr P., Madan D.B.: *Option Valuation Using the Fast Fourier Transform*

[3] Carr P., Madan D.B., Chang, E.C.: *The Variance Gamma Process and Option Pricing*

[4] Di Nunno G., Oksendal B., Proske F.: *Malliavin Calculus for Levy processes with Applications to Finance.*
Spinger, Berlin, 2009.

[5] Rudin W.: *Analýza v reálném a komplexním oboru*
ACADEMIA 2003

[6] Schoutens W.: *Lévy Processes in Finance*
WILEY, London 2003