

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Aneta Mirová

## Komplexní čísla a kvaterniony v geometrii

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Leo Boček, CSc

Studijní program: Matematika,  
Učitelství matematiky - deskriptivní geometrie pro střední školy

2009

Ráda bych poděkovala všem, kteří mi zapůjčili potřebnou literaturu, nebo mě jakkoli podpořili při psaní této bakalářské práce. Zejména děkuji mému vedoucímu docentu Leu Bočkovi za obětavou pomoc, kterou mi poskytoval v průběhu vytváření celé práce, jakož i za cenné rady a připomínky ke zpracování bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 21.5.2009

Aneta Mirová

Název práce: Komplexní čísla a kvaterniony v geometrii  
Autor: Aneta Mirová  
Katedra (ústav): Katedra didaktiky matematiky  
Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Leo Boček, CSc.  
e-mail vedoucího: Leo.Bocek@mff.cuni.cz

Abstrakt: Tento text je určen všem zájemcům z řad široké veřejnosti, především však jako vzdělávací materiál pro učitele matematiky a deskriptivní geometrie na středních školách. Výklad, členěný do tří kapitol, nejdříve vysvětluje základní zobrazení nad komplexními čísly, kterými jsou posunutí, stejnolehlost, otočení kolem počátku, souměrnost podle reálné osy a kruhová inverze, dále se v práci podrobněji zkoumá lineární lomená funkce nad komplexními čísly, její speciální případy a samodružné body a druhá část práce se věnuje kvaternionům, jejich zavedení a zobrazení kvaternionů a na závěr se práce věnuje Hopfovým zobrazením. Text je doplněn názornými obrázky, většina z nich byla vytvořena v aplikaci DesignCAD.

Klíčová slova: geometrická transformace, kvaterniony, Hopfova zobrazení

Title: Complex numbers and quaternions in geometry  
Author: Aneta Mirová  
Department: Department of Mathematics Education  
Supervisor: doc. RNDr. Leo Boček, CSc.  
Supervisor's e-mail address: Leo.Bocek@mff.cuni.cz

Abstract: This text is especially intended as an educational material for secondary school teachers of mathematics and descriptive geometry, though it can be interesting also for general public. The teaching text, which is divided into three chapters, explains several mapping of complex numbers, namely translation, homothety, rotation, axial symmetry and inversion with respect to a circle. In the next part of the chapter there are linear fractional function of complex numbers, special cases and search for fixed points. Second chapter of the text explains quaternions, their fundamentals and mapping of quaternions. The third chapter describes Hopf's mappings. The text is concluded by clarifying drawn in the DesignCAD software for the most part.

Keywords: mapping of complex numbers, quaternions, Hopf's mappings

# Obsah

ÚVOD .....	5
1. KOMPLEXNÍ ČÍSLA .....	6
1.1 ELEMENTÁRNÍ TRANSFORMACE V GAUSSOVĚ ROVINĚ .....	6
1.1.1 Gaussova a Möbiova rovina.....	6
1.1.2 Posunutí.....	7
1.1.3 Stejnolehlost.....	8
1.1.4 Otočení kolem počátku.....	10
1.1.5 Souměrnost (symetrie) podle reálné osy.....	11
1.1.6 Kruhová inverze .....	12
1.2 LINEÁRNÍ LOMENÁ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ .....	15
1.2.1 Úvod.....	15
1.2.2 Zobrazení $w = \kappa z + \lambda$ .....	15
1.2.4 Zobrazení $w = \frac{\beta}{z}$ .....	17
1.2.4 Zobrazení $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ .....	18
1.3 GRUPA AFINNÍCH ZOBRAZENÍ A JEJÍ PODGRUPY .....	20
1.3.1 Grupa afinit.....	20
1.3.2 Grupa unimodulárních afinit.....	21
1.3.3 Grupa podobností.....	22
1.3.4 Grupa přímých podobností.....	22
1.3.5 Grupa shodností.....	22
1.3.6 Grupa přímých shodností (grupa ortogonální) .....	23
1.3.7 Grupa stejnoolehlostí a posunutí.....	23
2. KVATERNIONY .....	24
2.1 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI .....	24
2.1.1 Zavedení kvaternionů.....	24
2.1.2 Operace s kvaterniony.....	25
2.2 TRANSFORMACE KVATERNIONŮ.....	26
2.2.1 Zobrazení $w = \alpha z$ a $w = \overline{\alpha z}$ .....	26
2.2.2 Zobrazení $w = \frac{1}{z}$ .....	31
3. HOPFOVA ZOBRAZENÍ.....	33
3.1 HOPFOVA ZOBRAZENÍ NAD REÁLNÝMI ČÍSLY .....	33
3.2 HOPFOVA ZOBRAZENÍ NAD KOMPLEXNÍMI ČÍSLY.....	35
3.3 HOPFOVA ZOBRAZENÍ NAD KVATERNIONY .....	35
3.4 SHRUTÍ .....	36
ZÁVĚR .....	37
LITERATURA.....	38

# Úvod

Bakalářská práce Komplexní čísla a kvaterniony v geometrii byla napsána jako učební text pro učitele a nadané studenty gymnázia. Dle mého názoru se studenti seznámí s komplexními čísly ve středoškolských učebnicích matematiky, ale většina těchto studentů nepochopí jejich praktické užití. Proto tento text seznámí čtenáře jak s praktickým využitím komplexních čísel, tak s kvaterniony.

Tento text předpokládá základní znalost komplexních čísel, sčítání a násobení komplexních čísel.

Rozvržení textu je následující. První část první kapitoly popisuje znázorňování komplexních čísel v Gaussově a Möbiově rovině. Další část se věnuje základním geometrickým transformacím užitím komplexních čísel. Třetí část první kapitoly seznamuje čtenáře s lineární lomenou funkcí komplexní proměnné, rozebírá speciální případy a zkoumá samodružné body odpovídajících geometrických zobrazení. Tato kapitola by měla být rozšířením středoškolského učiva.

První část druhé kapitoly se zabývá základními vlastnostmi kvaternionů, sčítáním a násobením kvaternionů. Druhá část druhé kapitoly popisuje dvě transformace popsané kvaterniony a, jak si postupně dokážeme, druhá z těchto transformací je otáčením v prostoru. Poslední část druhé kapitoly popisuje sférickou inverzi.

Třetí kapitola se věnuje Hopfovým zobrazením. Tato zobrazení jsou velmi zajímavá, protože mají snadný předpis, ale jsou složitější na představu.

Tato práce by měla sloužit všem, kteří se chtějí něco dozvědět o geometrii komplexních čísel, která jsou rozšířením reálných čísel, a o praktickém využití kvaternionů. Text je doplněn obrázky, které byly vytvořeny s využitím aplikace DesignCAD.

# Kapitola 1

## Komplexní čísla

### 1.1 Elementární transformace v Gaussově rovině

#### 1.1.1 Gaussova a Möbiova rovina

Bud' dána rovina s pravoúhlým souřadnicovým systémem, jehož osy označme  $x, y$ . Ke každému komplexnímu číslu  $a = a_1 + a_2i$ ,  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  lze přiřadit v této rovině bod  $A$  o souřadnicích  $a_1, a_2$  a naopak, každému bodu  $[a_1, a_2]$  této roviny odpovídá jediné komplexní číslo  $a_1 + a_2i$ .

V této souvislosti se osa  $x$  nazývá *reálná osa* a  $y$  *imaginární osa*.

Rovina, ve které znázorňujeme komplexní čísla, se nazývá Gaussova rovina. Budeme ji značit  $G$ .

Pro některé úvahy v Gaussově rovině je výhodné doplnit množinu všech jejích bodů o prvek (bod)  $\infty$  – nekonečno – podobně, jako se doplňuje v reálném oboru množina všech reálných čísel o prvek  $\infty$  a  $-\infty$ .

Takto doplněnou rovinu  $G$  označíme  $M$  a nazveme *Möbiovou rovinou*. Je tedy

$$M = G \cup \{\infty\},$$

zde je třeba zdůraznit, že  $\infty$  není číslo, ale bod.

Pro počítání s prvky Möbiovy roviny platí tato pravidla:

$$\begin{aligned} a + \infty = \infty + a = \infty, & \quad a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty, & \quad \frac{a}{\infty} = 0, \\ \frac{a}{0} = \infty, & \quad \infty + \infty = \infty, & \quad \infty \cdot \infty = \infty, & \quad 0 + \infty = \infty, \end{aligned}$$

kde  $a$  značí nenulové komplexní číslo.

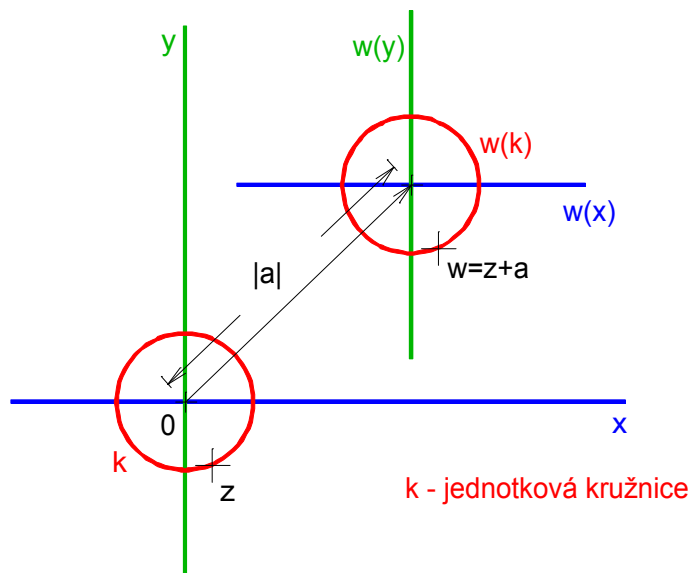
Symboly  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$  a  $\frac{\infty}{\infty}$  se nedefinují.

### 1.1.2 Posunutí

Tranformace

$$\begin{aligned} w &= z + a, & a &\in \mathbb{C}, & a &\neq 0, & (I) \\ \infty &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

přiřazuje každému bodu  $z \in M$  bod  $z + a$ . Je tedy  $a$  směr posunutí,  $|a|$  velikost posunutí. Viz obrázek 1.



Obrázek 1

Po rozepsání transformace (I) do složek pro  $z = [x_1, x_2]$  a  $a = [a_1, a_2]$  dostáváme rovnici

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + a_1 \\ x_2 + a_2 \end{pmatrix}.$$

Samodružným bodem rozumíme takový bod, který splyne se svým obrazem. Souřadnice samodružných bodů musí tedy vyhovovat rovnici

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + a_1 \\ x_2 + a_2 \end{pmatrix}$ , což lze upravit na  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ , ale tato rovnice nevyhovuje podmínce  $a \neq 0$ .

Posunutí má v  $M$  jeden samodružný bod,  $\infty$ .

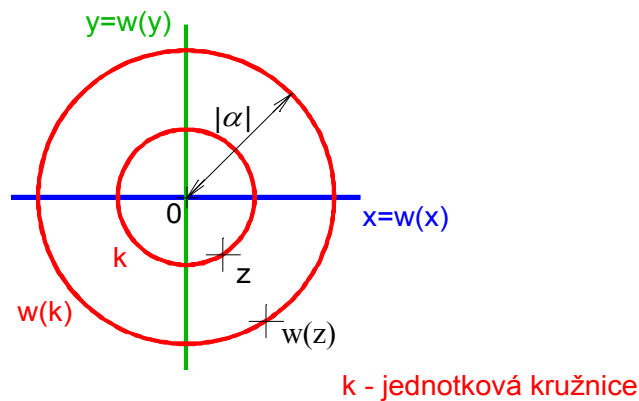
### 1.1.3 Stejnolehlost

Stejnolehlost se středem v počátku je zobrazení

$$w = \alpha z, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0, \alpha \neq 1, \quad (2)$$

$$\infty \rightarrow \infty.$$

Toto zobrazení přiřazuje každému bodu  $z \in M, z \neq 0$ , bod  $\alpha z$ , který leží na přímce  $\vec{0z}$ . Je-li  $\alpha > 0$ , leží  $\alpha z$  na polopřímce  $\vec{0z}$ , je-li  $\alpha < 0$ , leží  $\alpha z$  na polopřímce opačné. Přitom je podíl vzdáleností  $\alpha z$  a  $z$  od počátku konstantní a rovná se  $|\alpha|$ . Protože toto zobrazení zachovává orientaci, patří mezi přímá zobrazení. Viz obrázek 2.



Obrázek 2

Po rozepsání stejnolehlosti se středem v počátku do složek pro  $z = [x_1, x_2]$  dostáváme rovnici

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_2 \end{pmatrix}.$$



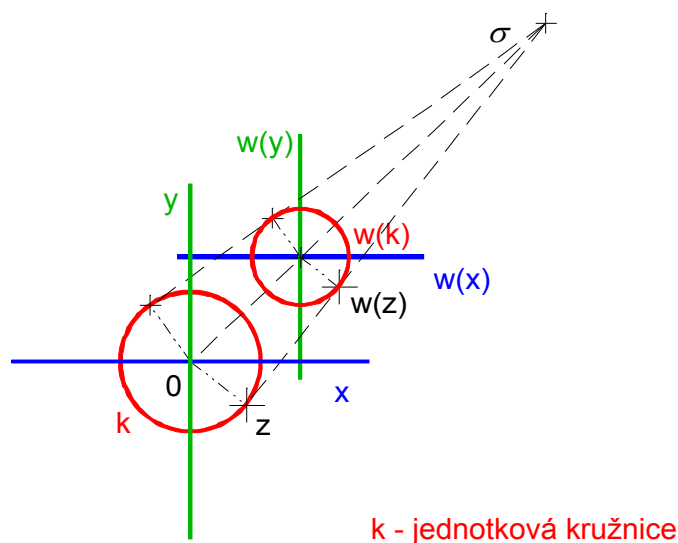
Souřadnice samodružných bodů musí vyhovovat rovnici  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_2 \end{pmatrix}$ , což lze upravit na  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha - 1) \cdot x_1 \\ (\alpha - 1) \cdot x_2 \end{pmatrix}$ . Těto rovnici vyhovuje bod  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Stejnolehlost se středem v počátku má v  $M$  dva samodružné body, počátek a  $\infty$ .

Stejnolehlost se středem v  $\sigma$  dostaneme z původní posunutím

$$\begin{aligned} w - \sigma &= \alpha(z - \sigma), \\ w &= \alpha z - \alpha\sigma + \sigma, \\ \infty &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Viz obrázek 3.



Obrázek 3

Po rozepsání stejnolehlosti se středem v  $\sigma$  do složek pro  $z = [x_1, x_2]$  a  $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2]$  dostáváme rovnici

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \cdot \sigma_1 \\ \alpha \cdot \sigma_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Souřadnice samodružných bodů musí vyhovovat rovnici

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \cdot \sigma_1 \\ \alpha \cdot \sigma_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}. \quad \text{Tuto rovnici lze upravit na}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\alpha - 1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}. \quad \text{Této rovnici vyhovuje bod o souřadnicích}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Stejnolehlost se středem v  $\sigma$  má v  $M$  dva samodružné body, bod  $\sigma$  a  $\infty$ .

#### 1.1.4 Otočení kolem počátku

Bud'  $\varepsilon$  komplexní jednotka,  $\varepsilon = \cos \varphi + i \sin \varphi$  (tzn. komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je rovna jedné). Transformace

$$\begin{aligned} w &= \varepsilon z, \\ \infty &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3)$$

přiřazuje každému bodu  $z = r(\cos \psi + i \sin \psi) \in M$  bod

$w = (\cos \varphi + i \sin \varphi)r(\cos \psi + i \sin \psi) = r[\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)]$ . To značí, že  $w$  dostaneme ze  $z$  otočením kolem počátku o úhel  $|\varphi|$ . Přitom se bod  $z$  otočí kolem počátku v kladném směru (tj. proti směru pohybu hodinových ručiček), je-li  $\varphi > 0$  a v záporném směru (tj. ve směru pohybu hodinových ručiček), je-li  $\varphi < 0$ , je-li  $\varphi = 0$  jedná se o identitu. Toto zobrazení patří mezi přímá zobrazení. Viz *obrázek 4*.

Po rozepsání otočení kolem počátku do složek dostáváme pro  $z = [r \cdot \cos \psi, r \cdot \sin \psi]$  a  $\varepsilon = [\cos \varphi, \sin \varphi]$  rovnici

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi + \psi) \\ r \cdot \sin(\varphi + \psi) \end{pmatrix}.$$

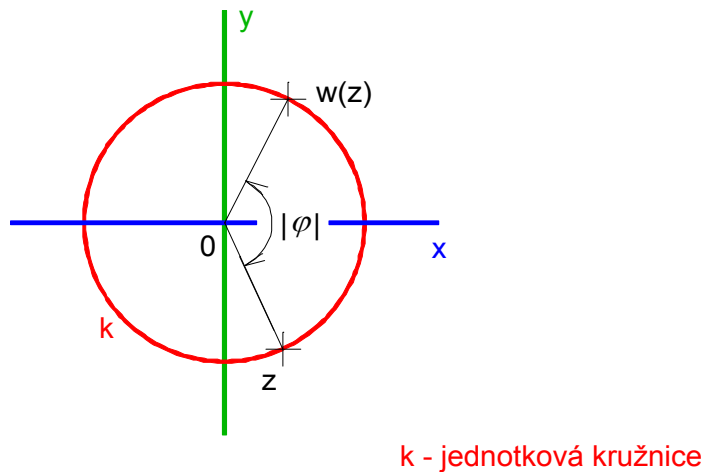
Souřadnice samodružných bodů musí vyhovovat rovnici

$$\begin{pmatrix} r \cdot \cos \psi \\ r \cdot \sin \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi + \psi) \\ r \cdot \sin(\varphi + \psi) \end{pmatrix}. \quad \text{Tuto rovnici lze upravit na}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot (\cos(\varphi + \psi) - \cos \psi) \\ r \cdot (\sin(\varphi + \psi) - \sin \psi) \end{pmatrix}. \quad \text{Této rovnici vyhovuje } \varphi = 0 \text{ nebo } r = 0.$$

Pro  $\varphi = 0$  dostáváme identitu. A pro  $r = 0$  dostáváme jeden samodružný bod o souřadnicích  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Otočení kolem počátku má dva samodružné body, počátek a  $\infty$ .



Obrázek 4

### 1.1.5 Souměrnost (symetrie) podle reálné osy

Transformace

$$\begin{aligned} w &= \bar{z}, \\ \infty &\rightarrow \infty \end{aligned} \tag{4}$$

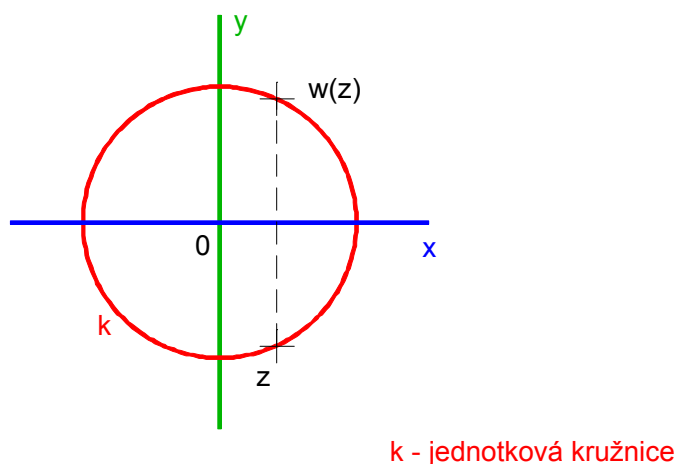
přiřazuje každému bodu  $z \in M$  bod sdružený podle reálné osy. Jestliže  $z = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , potom  $\bar{z} = a - bi$  a body  $z, \bar{z}$  jsou souměrné podle reálné osy. Tato transformace nezachovává orientaci, proto patří mezi nepřímé transformace. Viz *obrázek 5*.

Po rozepsání transformace (4) do složek dostáváme pro  $z = [x_1, x_2]$  rovnici

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

Souřadnice samodružných bodů musí vyhovovat rovnici  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ , tuto rovnici můžeme upravit na  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \cdot x_2 \end{pmatrix}$ . Těto rovnici vyhovují body  $x_2 = 0$ , což je reálná osa.

Souměrnost podle reálné osy má v  $M$  nekonečně mnoho samodružných bodů, reálnou osu a  $\infty$ .



**Obrázek 5**

### 1.1.6 Kruhová inverze

Kruhovou inverzí se středem v počátku a s koeficientem  $k$  rozumíme transformaci  $M \rightarrow M$  určenou předpisem

$$\begin{aligned} w &= \frac{k}{z}, & k \in \mathbb{R}, & & k \neq 0, & & (5) \\ \infty &\rightarrow 0, & 0 &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

O kruhové inverzi víme, že  $w \in \overline{0z}$ , přičemž polopřímky  $\overline{0z}$  a  $\overline{0w}$  jsou stejné při  $k > 0$  a opačné při  $k < 0$ . Viz obrázek 6.

Po rozepsání kruhové inverze se středem v počátku do složek dostáváme pro  $z = [x_1, x_2]$  rovnici

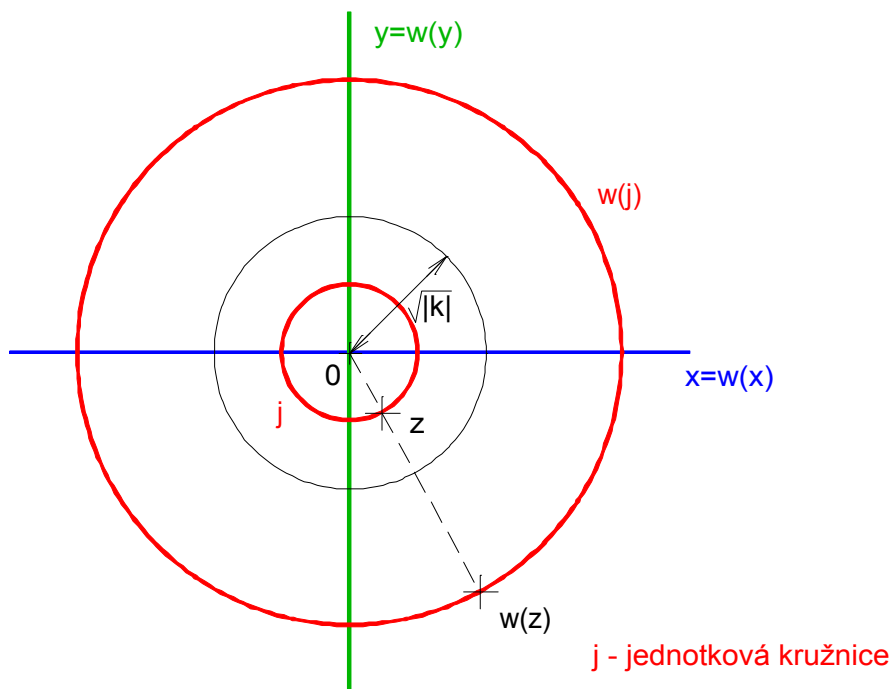
$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k \cdot x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ \frac{k \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}.$$

Souřadnice samodružných bodů musí vyhovovat rovnici

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k \cdot x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ \frac{k \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}. \text{ Tato rovnost je splněna, jestliže platí } \frac{k}{x_1^2 + x_2^2} = 1, \text{ což lze}$$

upravit na  $k = x_1^2 + x_2^2$ , toto je rovnice kružnice se středem v počátku a poloměrem  $\sqrt{|k|}$ .

Kruhová inverze se středem v počátku má pro  $k > 0$  nekonečně mnoho samodružných bodů, kružnici se středem v počátku a poloměrem  $\sqrt{k}$ , a pro  $k < 0$  žádný samodružný bod.



Obrázek 6

Kruhovou inverzi se středem v  $\sigma$  dostaneme z původní posunutím

$$\begin{aligned}
w - \sigma &= \frac{k}{z - \sigma} = \frac{k}{z - \sigma}, \\
w &= \sigma + \frac{k}{z - \sigma}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad k \neq 0, \\
\infty &\rightarrow \sigma, \quad \sigma \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{6}$$

O kruhové inverzi dále víme, že  $|z - \sigma| \cdot |w - \sigma| = k$ . Viz *obrázek 7*.

Po rozepsání kruhové inverze se středem v  $\sigma$  do složek dostáváme pro  $z = [x_1, x_2]$  a  $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2]$  rovnici

$$\begin{pmatrix} w_1 - \sigma_1 \\ w_2 - \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k \cdot (x_1 - \sigma_1)}{(x_1 - \sigma_1)^2 + (x_2 - \sigma_2)^2} \\ \frac{k \cdot (x_2 - \sigma_2)}{(x_1 - \sigma_1)^2 + (x_2 - \sigma_2)^2} \end{pmatrix}.$$

Souřadnice samodružných bodů musí vyhovovat rovnici

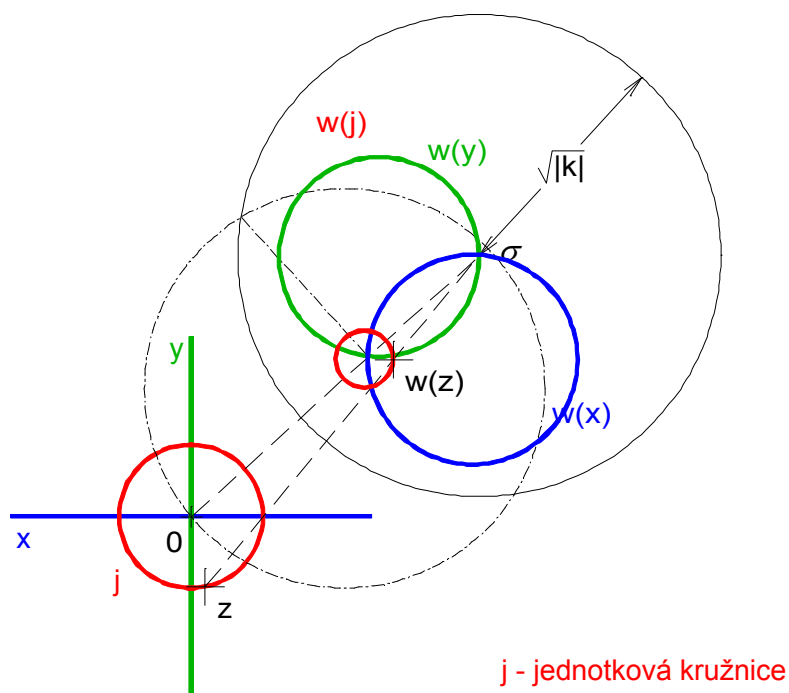
$$\begin{pmatrix} x_1 - \sigma_1 \\ x_2 - \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k \cdot (x_1 - \sigma_1)}{(x_1 - \sigma_1)^2 + (x_2 - \sigma_2)^2} \\ \frac{k \cdot (x_2 - \sigma_2)}{(x_1 - \sigma_1)^2 + (x_2 - \sigma_2)^2} \end{pmatrix}. \quad \text{Tato rovnice je splněna pro}$$

$\frac{k}{(x_1 - \sigma_1)^2 + (x_2 - \sigma_2)^2} = 1$ , tedy pro  $k = (x_1 - \sigma_1)^2 + (x_2 - \sigma_2)^2$ , a to je rovnice

kružnice se středem v  $\sigma$  a poloměrem  $\sqrt{|k|}$ .

Kruhová inverze se středem v  $\sigma$  má pro  $k > 0$  nekonečně mnoho samodružných bodů, kružnici se středem v  $\sigma$  a poloměrem  $\sqrt{k}$ , a pro  $k < 0$  žádný samodružný bod.

Kruhová inverze patří mezi nepřímá zobrazení.



Obrázek 7

## 1.2 Lineární lomená funkce komplexní proměnné

### 1.2.1 Úvod

Zobrazení

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \quad (7)$$

$$-\frac{\delta}{\gamma} \rightarrow \infty, \quad \frac{\alpha}{\gamma} \rightarrow \infty$$

přiřazuje každému bodu  $z \in M$  bod  $w \in M$ .

### 1.2.2 Zobrazení $w = \kappa z + \lambda$

Budeme-li uvažovat v transformaci (7)  $\gamma = 0$  a  $\delta \neq 0$  dostáváme zobrazení

$$w = \frac{\alpha}{\delta} z + \frac{\beta}{\delta}.$$

Podílem dvou komplexních čísel opět získáváme komplexní číslo, proto si zavedeme značení  $\kappa = \frac{\alpha}{\delta}$ ,  $\lambda = \frac{\beta}{\delta}$ . Protože  $\gamma = 0$ , a aby platila rovnost uvedená v (7), musí být  $\kappa \neq 0$ . Platí tedy

$$\begin{aligned} w &= \kappa z + \lambda, & \kappa &\neq 0, \\ \infty &\rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{8}$$

Uvažujme-li body  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ,  $z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_1$  a jejich obrazy  $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ ,  $w_1 \neq w_2 \neq w_3 \neq w_1$ , potom platí následující vztahy

$$\begin{aligned} w_1 &= \kappa \cdot z_1 + \lambda, \\ w_2 &= \kappa \cdot z_2 + \lambda, \\ w_3 &= \kappa \cdot z_3 + \lambda. \end{aligned}$$

Pro vzdálenosti vzorů a obrazů platí tyto vztahy:

$$\begin{aligned} |w_3 - w_1| &= |\kappa z_3 - \kappa z_1| = |\kappa| \cdot |z_3 - z_1|, \\ |w_2 - w_1| &= |\kappa z_2 - \kappa z_1| = |\kappa| \cdot |z_2 - z_1|. \end{aligned}$$

To znamená, že vzdálenost obrazů je  $|\kappa|$  násobkem vzdálenosti vzorů. Takovému zobrazení pro  $|\kappa| \neq 1$  říkáme podobnost a pro  $|\kappa| = 1$  shodnost.

Můžeme si toto zobrazení rozepsat do složek, a to takto:

$$w = w_a + w_b i, \quad z = z_a + z_b i, \quad \kappa = \kappa_a + \kappa_b i, \quad \lambda = \lambda_a + \lambda_b i$$

Dále dostáváme tyto vztahy

$$\begin{aligned} w_a &= \kappa_a z_a - \kappa_b z_b + \lambda_a, \\ w_b &= \kappa_b z_a + \kappa_a z_b + \lambda_b. \end{aligned}$$

Protože  $\kappa \neq 0$ , platí  $\kappa_a^2 + \kappa_b^2 > 0$ , zobrazení určené rovnicí (8) je tedy přímá podobnost.

Souřadnice samodružných bodů zobrazení (8) vyhovují rovnici

$$(1 - \kappa)z - \lambda = 0,$$



a obráceně každý bod jehož souřadnice vyhovují této rovnici je samodružný.

Je-li  $\kappa = 1$  a  $\lambda = 0$ , zobrazení je identitou (přiřazuje každému bodu tentýž) a  $\infty \rightarrow \infty$ .

Je-li  $\kappa = 1$  a  $\lambda \neq 0$ , má zobrazení jeden samodružný bod v  $M$ . Zobrazení je rovnoběžným posunutím (1) a  $\infty \rightarrow \infty$ .

Je-li  $\kappa \neq 1$ , má zobrazení dva samodružné body v  $M$ . Prvním je  $\frac{\lambda}{1-\kappa}$  a druhým je  $\infty$ .

Pro  $\kappa \in \mathbb{R}$  je toto zobrazení stejnolehlost (2) se středem v samodružném bodě a koeficientem  $\kappa$  a  $\infty \rightarrow \infty$ . Zvláštní případ stejnolehlosti dostáváme pro  $\kappa = -1$ , kdy se jedná o středovou souměrnost podle středu a  $\infty \rightarrow \infty$ .

Pro  $\kappa \in \mathbb{C}$  položíme  $\kappa = |\kappa|\varepsilon$ , kde  $\varepsilon$  je vhodná komplexní jednotka. Potom platí

$$w = \varepsilon \left( |\kappa|z + \frac{\lambda}{\varepsilon} \right).$$

Toto zobrazení lze složit z

$$w = \varepsilon z', \quad z' = |\kappa|z + \frac{\lambda}{\varepsilon},$$

kde první z funkcí vyjadřuje otočení kolem počátku (3) a druhá z funkcí vyjadřuje stejnolehlost (2), neboť  $|\kappa| \in \mathbb{R}$  a  $\infty \rightarrow \infty$ .

### 1.2.3 Zobrazení $w = \frac{\beta}{z}$

Toto zobrazení získáme z (7), jestliže  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = 1$  a  $\delta = 0$ . Pro zjednodušení úvah budeme uvažovat  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Zobrazení  $w = \frac{\beta}{z}$  se dá složit ze dvou zobrazení

$$w = \frac{\beta}{z'}, \quad z' = \bar{z}.$$

První zobrazení je kruhovou inverzí (5) s koeficientem  $\beta$  a druhé zobrazení je symetrií podle reálné osy (4) a pro  $w = \frac{\beta}{z}$  platí  $\infty \rightarrow 0$ ,  $0 \rightarrow \infty$ .

Množina samodružných vyhovují rovnici  $z = \frac{\beta}{z}$ . Aby  $z^2 \in \mathbb{R}$ , musí mít  $z$  souřadnice  $(0, z_2)$  nebo  $(z_1, 0)$ . Má-li  $z$  souřadnice  $(0, z_2)$ , potom  $z^2 = -z_2$ . Má-li  $z$  souřadnice  $(z_1, 0)$ , potom  $z^2 = z_1$ .

Zobrazení  $w = \frac{\beta}{z}$  má pro  $\beta > 0$  dva samodružné body, o souřadnicích  $(\sqrt{\beta}, 0)$  a  $(-\sqrt{\beta}, 0)$ , a pro  $\beta < 0$  také dva samodružné body o souřadnicích  $(0, \sqrt{-\beta})$  a  $(0, -\sqrt{-\beta})$ .

#### 1.2.4 Zobrazení $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$

Případ, kdy  $\gamma = 0$ , jsme prodiskutovali v odstavci 1.2.2.

Je-li  $\gamma \neq 0$ , upravíme čitatele zlomku takto

$$\alpha z + \beta = \frac{\alpha}{\gamma}(\gamma z + \delta) + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma}.$$

Označíme-li

$$k = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma},$$

z podmínek v (7) víme, že  $k \neq 0$ . Platí

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{k}{\gamma z + \delta}.$$

Zobrazení (7) lze tedy složit z těchto tří zobrazení:

$$w = k \overline{z^*} + \frac{\alpha}{\gamma}, \quad z^* = \frac{1}{z'}, \quad z' = \gamma z + \delta.$$

První ze zobrazení je podobnost, druhé zobrazení vyjadřuje kruhovou inverzi (5) a třetí zobrazení je také podobnost a  $\infty \rightarrow \frac{\alpha}{\gamma}$  a  $-\frac{\delta}{\gamma} \rightarrow \infty$ .

Při zkoumání zobrazení  $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  jsme mohli použít jiných úvah.

Víme, že  $-\frac{\delta}{\gamma} \rightarrow \infty$  a  $\infty \rightarrow \frac{\alpha}{\gamma}$ . Jediné zobrazení, které nevlastní bod ( $\infty$ ) zobrazí na vlastní a obráceně, tentýž vlastní bod na nevlastní, je kruhová inverze (5) nebo (6), proto můžeme hledat rozklad zobrazení (7) na kruhovou inverzi a podobnost

$$\begin{aligned} -\frac{\delta}{\gamma} &\rightarrow \infty, & \infty &\rightarrow \infty, \\ \infty &\rightarrow -\frac{\delta}{\gamma}, & -\frac{\delta}{\gamma} &\rightarrow \frac{\alpha}{\gamma}. \end{aligned}$$

Kruhová inverze, která zobrazí  $-\frac{\delta}{\gamma} \rightarrow \infty$  a  $\infty \rightarrow -\frac{\delta}{\gamma}$ , má předpis

$$w = -\frac{\delta}{\gamma} + \frac{k}{z + \frac{\delta}{\gamma}}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad k \neq 0. \quad (9)$$

Kruhová inverze patří mezi nepřímá zobrazení, výsledné zobrazení má být přímé, proto ji musíme skládat s nepřímým zobrazením. Nepřímá podobnost má předpis  $w = \rho \bar{z} + \sigma$ . Pokud má tato nepřímá podobnost zobrazit  $-\frac{\delta}{\gamma} \rightarrow \frac{\alpha}{\gamma}$ , platí rovnost  $\frac{\alpha}{\gamma} = -\rho \frac{\delta}{\gamma} + \sigma$ .

Nepřímá podobnost, která zobrazí  $-\frac{\delta}{\gamma} \rightarrow \frac{\alpha}{\gamma}$  má předpis

$$w = \frac{\alpha}{\gamma} + \rho \left( \bar{z} + \frac{\delta}{\gamma} \right), \quad \rho \in \mathbb{C}. \quad (10)$$

Složením zobrazení (9) a (10) dostáváme

$$w = \frac{\alpha}{\gamma} + \rho \left( -\frac{\delta}{\gamma} + \frac{k}{z + \frac{\delta}{\gamma}} + \frac{\delta}{\gamma} \right) = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\rho k}{z + \frac{\delta}{\gamma}} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\rho k \gamma}{\gamma z + \delta}$$

$$w = \frac{\alpha z + \frac{\alpha\delta}{\gamma} + \rho k \gamma}{\gamma z + \delta}$$

Abychom došli k zobrazení (7), položíme  $\frac{\alpha\delta}{\gamma} + \rho k \gamma = \beta$ , odkud dostáváme

$$\rho = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{k\gamma^2}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad k \neq 0.$$

Zobrazení (7) lze složit z kruhové inverze (9) a nepřímé podobnosti (10):

$$w = -\frac{\delta}{\gamma} + \frac{1}{\frac{\bar{z} + \frac{\delta}{\gamma}}{\gamma}}, \quad w = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2} \left( \frac{-\bar{\delta}}{z + \frac{\delta}{\gamma}} \right).$$

Mohli bychom také uvažovat složení nepřímé podobnosti a kruhové inverze a došli bychom k podobným závěrům.

Souřadnice samodružných bodů zobrazení (7) dostaneme řešením rovnice

$$\gamma \cdot z^2 + (\delta - \alpha) \cdot z - \beta = 0,$$

která je kvadratická ( $\gamma \neq 0$ ), a má tedy v oboru komplexních čísel jedno nebo dvě řešení.

## 1.3 Grupa afinních zobrazení a její podgrupy

### 1.3.1 Grupa afinit

Buďte  $a, b, c$  komplexní čísla a  $T: z \rightarrow w$  zobrazení Möbiovy roviny do sebe dané předpisem

$$w = a\bar{z} + bz + c, \quad a, b, c \in \mathbb{C}$$

$$\infty \rightarrow \infty.$$

Přenásobením této rovnice čísly  $\bar{b}$  a  $a$  dostáváme rovnice

$$\bar{b}w = a\bar{b}\bar{z} + b\bar{b}z + \bar{b}c$$

$$\overline{aw} = a\overline{az} + \overline{bz} + \overline{ac}.$$

Odečtením druhé rovnice od první dostáváme vztah

$$\overline{bw} - a\overline{w} = (b\overline{b} - a\overline{a}) \cdot z + \overline{bc} - a\overline{c}.$$

Jestliže  $b\overline{b} - a\overline{a} \neq 0$ , je  $T$  bijektivním zobrazením  $\mathbb{C}$  na sebe a nazývá se afinita.

Všechna zobrazení

$$w = a\overline{z} + bz + c, \quad |a| \neq |b|$$

tvoří grupu. Invariantem této grupy je dělicí poměr tří bodů ležících na přímce.

Dělicím poměrem tří různých bodů  $A, B, C$  ležících na přímce budeme rozumět číslo  $\frac{|C-A|}{|C-B|}$ , jestliže  $C$  není vnitřním bodem úsečky  $A, B$ , nebo číslo  $-\frac{|C-A|}{|C-B|}$ , jestliže  $C$  je vnitřním bodem úsečky  $A, B$ .

### 1.3.2 Grupa unimodulárních afinit

Všechna zobrazení

$$w = a\overline{z} + bz + c, \quad |a|^2 - |b|^2 = \pm 1$$

tvoří grupu. Invariantem této grupy je obsah trojúhelníka. To se snadno ověří takto: označme

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Pak je obsah trojúhelníka s vrcholy  $z_1, z_2, z_3$  dán vzorcem  $\frac{1}{4}|\Delta|$ . Platí však

$$\det \begin{pmatrix} az_1 + b\bar{z}_1 + c & \overline{az_1 + bz_1 + c} & 1 \\ az_2 + b\bar{z}_2 + c & \overline{az_2 + bz_2 + c} & 1 \\ az_3 + b\bar{z}_3 + c & \overline{az_3 + bz_3 + c} & 1 \end{pmatrix} = (|a|^2 - |b|^2) \Delta,$$

z toho plyne, že se zachovává obsah trojúhelníků.

### 1.3.3 Grupa podobností

Všechna zobrazení

$$w = az + b, \quad w = a\bar{z} + b, \quad a \neq 0$$

tvoří grupu. Invariantem této grupy je poměr vzdáleností bodů. Pro vzdálenost obrazů bodů  $z_1, z_2$  platí

$$|az_1 + b - az_2 - b| = |a| \cdot |z_1 - z_2|.$$

Číslo  $|a|$  se nazývá koeficient podobnosti.

### 1.3.4 Grupa přímých podobností

Všechna zobrazení

$$w = az + b, \quad a \neq 0$$

tvoří grupu.

Nepřímé podobnosti ( $w = a\bar{z} + b$ ) grupu netvoří, protože složením dvou nepřímých podobností vzniká podobnost přímá.

### 1.3.5 Grupa shodností

Všechna zobrazení

$$w = \kappa z + b, \quad w = \kappa\bar{z} + b, \quad |\kappa| = 1$$

tvoří grupu. Invariantem této grupy je vzdálenost dvou bodů. To se ověří takto:

$$|\kappa z_1 + b - (\kappa z_2 + b)| = |\kappa(z_1 - z_2)| = |z_1 - z_2|.$$

### 1.3.6 Grupa přímých shodností (grupa ortogonální)

Všechna zobrazení

$$w = \kappa z + b, \quad |\kappa| = 1$$

tvoří grupu. Invariantem této grupy je opět vzdálenost dvou bodů.

Nepřímé shodnosti ( $w = \kappa \bar{z} + b$ ) grupu netvoří, protože složením dvou nepřímých shodností vzniká shodnost přímá.

### 1.3.7 Grupa stejnolehlostí a posunutí

Všechna zobrazení

$$w = \alpha z + b, \quad b \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$$

tvoří grupu.

Složením posunutí  $w = z + \psi$  s posunutím  $w = z + \zeta$  získáváme opět posunutí  $w = z + (\psi + \zeta)$ .

Složením stejnolehlostí se středem  $S$  a koeficientem  $\sigma$  se stejnolehlostí  $T$  a koeficientem  $\tau$  získáváme pro  $\sigma \cdot \tau = 1$  posunutí  $w = z + (\tau - 1) \cdot (S - T)$  a pro  $\sigma \cdot \tau \neq 1$  získáváme stejnolehlost s koeficientem  $\sigma \cdot \tau$  a středem  $S + \frac{1 - \tau}{1 - \tau \cdot \sigma} \cdot (T - S)$ .

Složením posunutí  $w = z + \psi$  a stejnolehlosti se středem  $S$  a koeficientem  $\sigma$  získáváme stejnolehlost se středem  $S + \frac{\sigma}{1 - \sigma} \psi$  a koeficientem  $\sigma$ .

V některých knížkách bývá ještě uvedena podmínka  $\alpha \neq 1$ , ale kdybychom tuto podmínku požadovali, vyloučili bychom z grupy všechna posunutí a identické zobrazení, které je v grupě zobrazení tzv. neutrálním prvkem.

# Kapitola 2

## Kvaterniony

### 2.1 Základní vlastnosti

#### 2.1.1 Zavedení kvaternionů

Kvaterniony jsou jedním ze zástupců tzv. asociativní podílové algebry  $A$ . To znamená, že kvaterniony jsou reálným vektorovým prostorem s jednotkou 1 a zobrazením  $m: A \times A \rightarrow A$ , zvaným *násobení*, splňujícím  $m(1, a) = a = m(a, 1)$  pro každé  $a \in A$  a pro každé dva prvky  $a, b$  platí  $m(a, b) = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ . Násobení  $m(a, b)$  budeme značit  $a \cdot b$ .

Zatímco komplexní čísla jsou vytvořena z reálných přidáním prvku  $i$  splňujícího  $i^2 = -1$ , kvaterniony jsou vytvořeny přidáním prvků  $i$ ,  $j$  a  $k$  tak, že jsou splněny následující vztahy

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1, \\ i \cdot j = k, & \quad j \cdot i = -k, \\ j \cdot k = i, & \quad k \cdot j = -i, \\ k \cdot i = j, & \quad i \cdot k = -j. \end{aligned} \tag{11}$$

Každý kvaternion je lineární kombinací prvků 1,  $i$ ,  $j$  a  $k$ , což znamená, že jej lze psát jako  $a + bi + cj + dk$ , kde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  a  $d$  jsou reálná čísla.

Množina kvaternionů se v matematice typicky značí písmenem  $H$  (podle objevitele Hamiltona).



Sir William Rowan Hamilton (4. srpna 1805, Dublin – 2. září 1865, u Dunsinku) byl irský matematik, fyzik a astronom. Je znám především díky tomu, že jako první popsal kvaterniony, ale přispěl i k rozvoji optiky, dynamiky, a algebry.



Kvaternion lze tedy chápat jako uspořádanou čtveřici reálných čísel  $h = (a, b, c, d)$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , dále lze kvaternion chápat jako uspořádanou dvojici komplexních čísel  $h = (\alpha, \beta)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . A v neposlední řadě lze kvaternion chápat jako uspořádanou dvojici reálného čísla a trojrozměrného vektoru,  $h = (a, \vec{a})$ ,  $a \in \mathbb{R}, \vec{a} \in \mathbb{R}^3$ . Kvaterniony vždy chápeme s operacemi sčítání a násobení uvedenými dále. Kvaternion  $(0, \vec{a})$  se nazývá *ryzí kvaternion*.

### 2.1.2 Operace s kvaterniony

$$H = \mathbb{R}^4$$

Chápeme-li kvaterniony jako uspořádané čtveřice reálných čísel, pak ze vztahů (11) plyne:

$$h = (a, b, c, d) \quad q = (m, n, o, p), \quad a, b, c, d, m, n, o, p \in \mathbb{R}$$

*Sčítání*

$$h + q = (a + m, b + n, c + o, d + p)$$

*Násobení*

$$\begin{aligned} h \cdot q &= (a + bi + cj + dk) \cdot (m + ni + oj + pk) \\ hq &= (am - bn - co - dp) + i(an + bm + cp - do) + \\ &\quad + j(ao - bp + cm + dn) + k(ap + bo - cn + dm) \end{aligned}$$

$$H = \mathbb{C}^2$$

Dále můžeme kvaterniony chápat jako uspořádané dvojice komplexních čísel a potom platí následující vztahy:

$$h = (\alpha, \beta) \quad q = (\gamma, \delta), \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$$

*Sčítání*

$$h + q = (\alpha + \gamma, \beta + \delta)$$

*Násobení*

$$hq = (\alpha\gamma - \beta\bar{\delta}, \alpha\delta + \beta\bar{\gamma})$$

$$H = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

Jako poslední uvedeme, že kvaterniony lze chápat jako uspořádané dvojice reálného čísla a trojrozměrného vektoru, a pro toto chápání platí vztahy:

$$h = (a, \vec{a}) \quad q = (b, \vec{b}), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

*Sčítání*

$$h + q = (a + b, \vec{a} + \vec{b})$$

*Násobení*

$$h \cdot q = (ab - \vec{a}\vec{b}, a\vec{b} + b\vec{a} + \vec{a} \times \vec{b})$$

Pro kvaternion  $h = a + bi + cj + dk$  definujeme jeho *konjugaci* jako  $\bar{h} = a - bi - cj - dk$ . Platí, že součin  $h \cdot \bar{h} = \bar{h} \cdot h = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  je nezáporné reálné číslo a je rovno nule pouze pro *nulový kvaternion*  $h = 0$ .

*Inverzní prvek* ke kvaternionu  $h \neq 0$  je kvaternion  $h^{-1} = \frac{\bar{h}}{(h \cdot \bar{h})}$  (dělení

reálným číslem  $h \cdot \bar{h}$  je definováno po složkách). Platí  $h \cdot h^{-1} = 1$ .

*Norma kvaternionu*  $h$  se definuje jako  $|h| = \sqrt{h \cdot \bar{h}}$ . Násobení zachovává normu, t.j. pro kvaterniony  $h, q$  platí  $|h \cdot q| = |h| \cdot |q|$ . Z toho plyne, že množina kvaternionů normy 1 tvoří grupu při operaci násobení.

## 2.2 Trasformace kvaternionů

### 2.2.1 Zobrazení $w = \alpha z$ a $w = \alpha z \bar{\alpha}$

Při zkoumání transformace, která kvaternionu  $z$  přiřadí kvaternion  $w$ , podle předpisu  $w = \alpha z$ , se omezíme na zobrazování ryzích kvaternionů  $(0, \vec{x})$ .

Tedy na zobrazení  $\mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_3$ .

$$w = \alpha \cdot z, \quad \alpha \in H, \alpha \neq 0, \quad \alpha = (a, \vec{a})$$

$$(\omega, \vec{\omega}) = (a, \vec{a}) \cdot (0, \vec{x}) = (-\vec{a}\vec{x}, a\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x})$$

Zobrazení  $\vec{x} \rightarrow a\vec{x} + (\vec{a} \times \vec{x})$  je součtem dvou lineárních zobrazení  $\vec{x}' \rightarrow a \cdot \vec{x}'$  a  $\vec{x}'' \rightarrow \vec{a} \times \vec{x}''$ , proto i toto zobrazení bude lineární.

Pro  $\vec{a} = \vec{o}$  a  $a = 0$  dostáváme zobrazení, které každému vektoru přiřadí nulový vektor.

Pro  $\vec{a} = \vec{o}$  a  $a \neq 0$  dostáváme zobrazení  $\vec{x} \rightarrow a\vec{x}$ , které je stejnolehlostí se středem v počátku.

Pro  $\vec{a} \neq \vec{o}$  a  $a = 0$  dostáváme zobrazení  $\vec{x} \rightarrow \vec{a} \times \vec{x}$ . Každý vektor  $\vec{x}$  lze vyjádřit jako součet vektorů  $\vec{x}_1$  a  $\vec{x}_2$ , kde  $\vec{x}_1 \perp \vec{a}$  a  $\vec{x}_2 \parallel \vec{a}$ . Protože  $\vec{x}_2 \parallel \vec{a}$ , můžeme psát  $\vec{x}_2 = \lambda \cdot \vec{a}$ . Platí tedy

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \vec{x}_1 + \lambda \cdot \vec{a} \\ \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{a} \times \vec{x}_1.\end{aligned}$$

Zobrazení  $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{a} \times \vec{x}_1$  přiřadí vektoru  $\vec{x}$  vektor kolmý k vektorům  $\vec{a}$  a  $\vec{x}_1$  takový, že jeho velikost bude rovna  $|\vec{a}| \cdot |\vec{x}_1|$ , přičemž orientace vektorů  $\vec{a}$ ,  $\vec{x}$  a  $\vec{a} \times \vec{x}$  bude shodná s orientací baze.

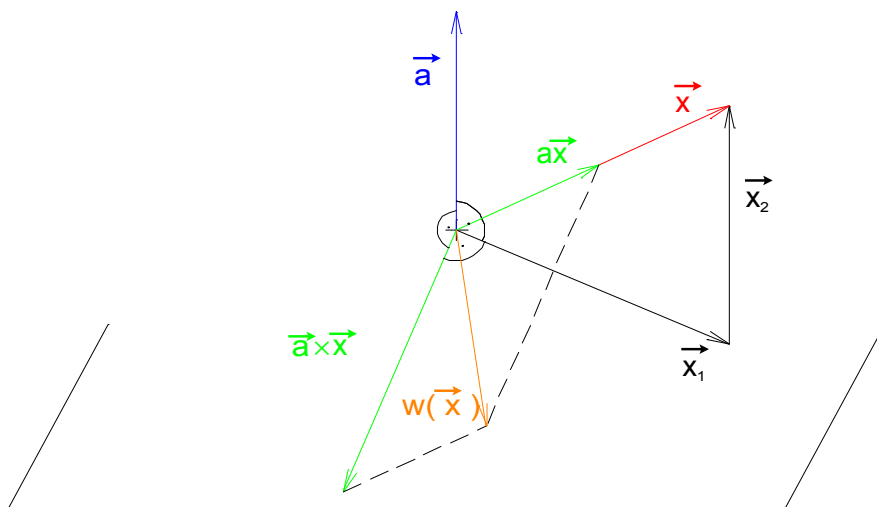
Pro  $\vec{a} \neq \vec{o}$  a  $a \neq 0$  zkoumáme zobrazení  $\vec{x} \rightarrow a\vec{x} + (\vec{a} \times \vec{x})$ .

Po rozepsání do složek dostáváme pro  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$

zobrazení 
$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a_3 & a_2 \\ a_3 & a & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$
 Determinant matice tohoto

zobrazení je roven  $a^3 + a \cdot a_1^2 + a \cdot a_2^2 + a \cdot a_3^2 = a \cdot (a^2 + \|\vec{a}\|^2)$ . Toto zobrazení je regulární, protože možnost  $a = 0$  jsme vyloučili již dříve.

Vhodnou volbou souřadnic dostáváme pro  $\vec{a} = (b, 0, 0)$ ,  $b \neq 0$  zobrazení  $\vec{x} \rightarrow (ax_1, ax_2 - bx_3, bx_2 + ax_3) = a \cdot (x_1, x_2, x_3) + b \cdot (0, -x_3, x_2)$ , které je součtem dvou zobrazení. První zobrazení je stejnolehlost se středem v počátku. Vektor  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  si rozepíšeme jako součet vektorů  $\vec{x}_1 = (0, x_2, x_3)$  a  $\vec{x}_2 = (x_1, 0, 0)$ . Druhé zobrazení je otočení o  $\frac{\pi}{2}$  v kladném směru pro  $b > 0$  a v záporném směru pro  $b < 0$ , složené se stejnolehlostí se středem v počátku a koeficientem  $|b|$ . Viz obrázek 8.



Obrázek 8

Při zkoumání transformace  $w = \alpha z \bar{\alpha}$  se opět omezíme na zobrazování ryzích kvaternionů  $(0, \vec{x})$ . Tedy na zobrazení  $\mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_3$ .

$$\begin{aligned}
 w &= \alpha \cdot z \cdot \bar{\alpha}, \quad \alpha, \bar{\alpha} \in H, \alpha = (a, \vec{a}), \bar{\alpha} = (a, -\vec{a}), \\
 (w, \bar{w}) &= (a, \vec{a}) \cdot (0, \vec{x}) \cdot (a, -\vec{a}) \\
 (w, \bar{w}) &= \left( 0, 2 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{a} + 2 \cdot a \cdot (\vec{a} \times \vec{x}) + \vec{x} \cdot (a^2 - \|\vec{a}\|^2) \right)
 \end{aligned}$$

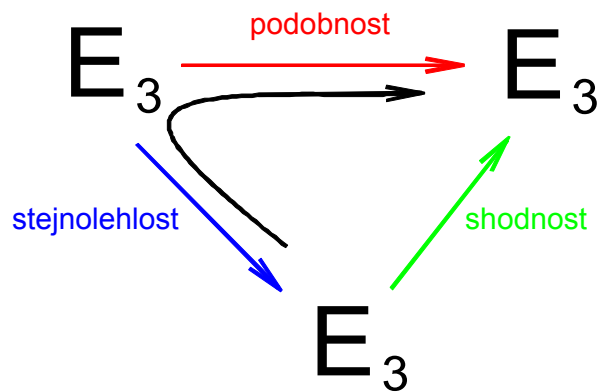
Po rozepsání do složek dostáváme pro  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  zobrazení

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & 2a_1 \cdot a_2 - 2a \cdot a_3 & 2a_1 \cdot a_3 + 2a \cdot a_2 \\ 2a_1 \cdot a_2 + 2a \cdot a_3 & a^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 & 2a_2 \cdot a_3 - 2a \cdot a_1 \\ 2a_1 \cdot a_3 - 2a \cdot a_2 & 2a_2 \cdot a_3 + 2a \cdot a_1 & a^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Vhodnou volbou souřadnic pro  $\vec{a} = (b, 0, 0)$ ,  $b \neq 0$  dostáváme zobrazení

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 - b^2 & -2a \cdot b \\ 0 & 2a \cdot b & a^2 - b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Matice toho zobrazení je ortogonální. To znamená, že zobrazení je podobnost, speciálně pro  $a^2 + b^2 = 1$  shodnost. Víme, že každou podobnost lze složit ze stejnohlosti a shodnosti. Viz *obrázek 9*.



**Obrázek 9**

Stejnohlost má stejný koeficient jako podobnost, tzn. stejnohlost je popsána rovnicí  $w = (a^2 + b^2) \cdot x$ . Shodnost můžeme dostat složením podobnosti a inverzní stejnohlosti. (Inverze ke stejnohlosti bude existovat, protože  $b \neq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \neq 0$ . Po rozepsání do složek dostáváme rovnici pro shodnost

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} & -\frac{2a \cdot b}{a^2 + b^2} \\ 0 & \frac{2a \cdot b}{a^2 + b^2} & \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

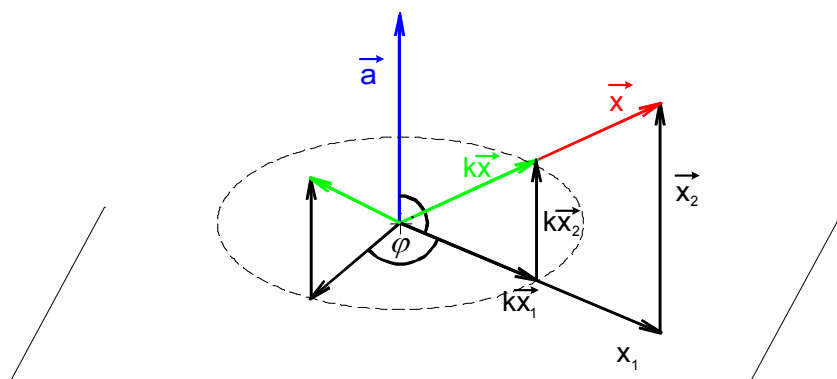
Označíme-li si  $\cos(\varphi) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ , dostáváme ze vzorce  $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$

vztah  $\sin(\varphi) = \frac{2 \cdot |a \cdot b|}{a^2 + b^2}$ . Dosazením těchto vztahů do transformace (12) dostáváme

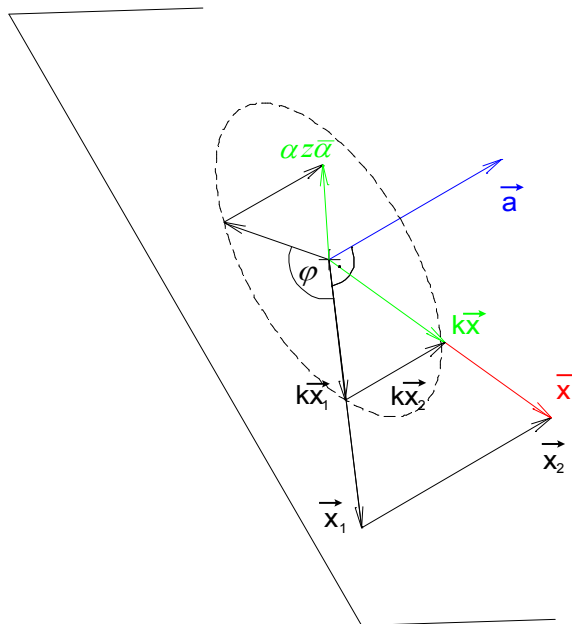
$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Zobrazení (12) je otočením v rovině  $x_1 = 0$  o úhel  $\varphi$ .

Zobrazení  $w = \alpha z \bar{\alpha}$  je složením stejnolehlosti s koeficientem  $k = a^2 + \|\vec{a}\|^2$  a otočení v rovině kolmé k  $\vec{a}$ . Viz *obrázek 10* pro speciální případ  $\vec{a} = (b, 0, 0)$  a *obrázek 11* pro obecný případ  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ .



**Obrázek 10**



Obrázek 11

Budeme-li uvažovat zobrazení  $w = \beta z \bar{\beta}$ , kde  $\beta = (-a, \vec{a})$ , dostáváme stejné zobrazení jako  $w = \alpha z \bar{\alpha}$ , kde  $\alpha = (a, \vec{a})$ .

Budeme-li uvažovat zobrazení  $w = \gamma z \bar{\gamma}$ , kde  $\gamma = (a, -\vec{a})$ , dostáváme zobrazení, které je složeno ze stejnohlosti s koeficientem  $k = a^2 + \|\vec{a}\|^2$  a otočení kolem  $\vec{a}$ , které je inverzní k otočení, ze kterého je složeno zobrazení  $w = \alpha z \bar{\alpha}$ , kde  $\alpha = (a, \vec{a})$ .

Libovolné otočení kolem počátku lze složit z otáčení kolem příslušných vektoru.

### 2.2.2. Zobrazení $w = \frac{k}{z}$ (13)

Podobně, jako jsme rozšířili Gaussovu rovinu přidáním prvku  $\infty$  na Möbiovu rovinu, můžeme eukleidovský prostor  $\mathbb{R}_3$  rozšířit přidáním jednoho prvku, tzv. nevlastního bodu, který bude prvkem každé nadroviny a bude ležet vně každé sféry prostoru  $\mathbb{R}_3$ . Množinu  $M_3 = \mathbb{R}_3 \cup \{\infty\}$  budeme nazývat Möbiův prostor. Pro počítání s prvky Möbiova prostoru platí stejná pravidla jako pro počítání s prvky Möbiovy roviny.

Předpis (13) si také můžeme napsat jako  $w = k \cdot (\bar{z})^{-1}$ . Připomeňme, že pro inverzní kvaternion  $h^{-1}$  ke kvaternionu  $h$  platí následující vztah:

$$h^{-1} = \frac{\bar{h}}{(h \cdot \bar{h})}, \text{ pro } h \neq 0.$$

Z tohoto vztahu dostáváme  $(\bar{z})^{-1} = \frac{z}{(\bar{z} \cdot z)}$ . Zobrazení (13) lze tedy napsat jako

$$(\bar{\omega}, \bar{\omega}) = k \cdot \left( 0, \frac{\bar{x}}{\|x\|^2} \right) = \frac{k}{\|x\|^2} (0, \bar{x}).$$

Při zkoumání této transformace se omezíme na zobrazování ryzích kvaternionů  $(0, \bar{x})$ . Tedy na zobrazení  $M_3 \rightarrow M_3$ .

$$\bar{\omega} = \frac{k}{\|x\|^2} \cdot \bar{x}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad k \neq 0$$

$$\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty.$$

Vektor  $\bar{\omega}$  je násobkem vektoru  $\bar{x}$  a pro součin velikostí vzorů a obrazů platí:

$$\|\bar{x}\| \cdot \left( \frac{|k|}{\|\bar{x}\|^2} \cdot \|\bar{x}\| \right) = |k|.$$

Toto zobrazení se nazývá *sférická inverze* se středem v počátku a koeficientem  $k$ .

Hledáme-li obraz bodu  $x$ , můžeme sférickou inverzi nahradit kruhovou inverzí, a to tak, že vedeme řez bodem  $x$  a středem sférické inverze a řešíme kruhovou inverzi v rovině řezu.



# Kapitola 3

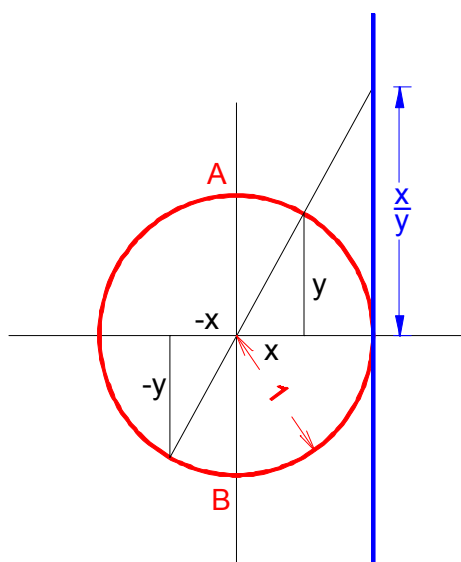
## Hopfova zobrazení

### 3.1 Hopfova zobrazení nad reálnými čísly

Hopfovým zobrazením nad reálnými čísly budeme rozumět zobrazení  $H: \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$  takové, že  $H(x,y) = \frac{y}{x}$  pro  $x \neq 0$  a  $H(x,y) = \infty$  pro  $x = 0$ . Omezíme se na zobrazování dvojic  $x^2 + y^2 = 1$ . Tyto dvojice tvoří kružnici se středem v počátku a poloměrem 1.

Budeme-li hledat vzory  $\infty$ , dostaneme dvojice  $(0,1)$  a  $(0,-1)$ . Budeme-li dále hledat vzory čísla  $a \in \mathbb{R}$ , dostaneme dvojice  $\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)$  a  $\left(-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)$ . Viz obrázek 12.

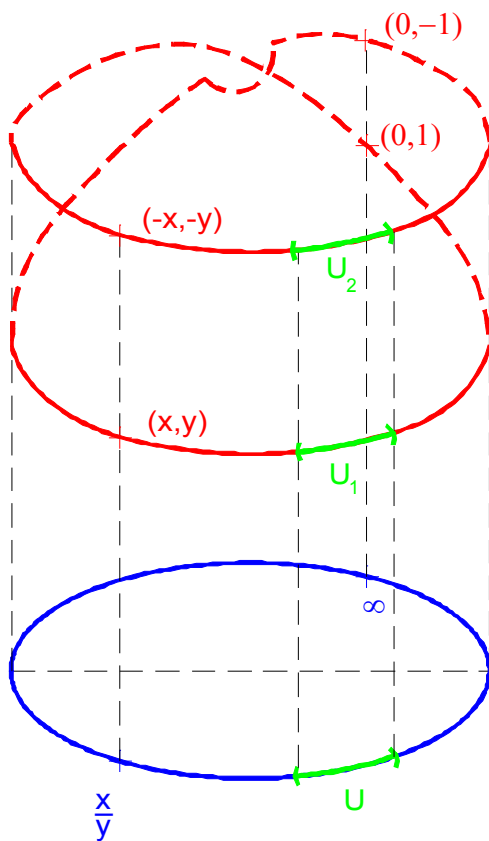
Z obrázku 12 vidíme, že toto zobrazení není prosté, protože každý obraz má dva vzory.



Obrázek 12

Hopfovo zobrazení si také můžeme znázornit prostorově, viz *obrázek 13*.

Budeme-li hledat vzor okolí  $U$ , bude platit, že  $H^{-1}(U) = U_1 \cup U_2$ , přičemž  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .



**Obrázek 13**

### 3.2 Hopfova zobrazení nad komplexními čísly

Hopfovým zobrazením nad komplexními čísly budeme rozumět zobrazení  $H: \mathbb{C}^2 \setminus \{0,0\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$  tak, že  $H(x,y) = \frac{y}{x}$  pro  $x \neq 0$  a  $H(x,y) = \infty$  pro  $x = 0$ . Opět se můžeme omezit na zobrazování komplexních čísel, která vyhovují rovnici  $|x|^2 + |y|^2 = 1$ .

Nechť  $\alpha \in \mathbb{C}$ , potom pro vzory tohoto  $\alpha$  platí, že  $|x| = \frac{1}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}$  a  $|y| = \frac{|\alpha|}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}$ . Takže  $x = \frac{\varphi}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}$  a  $y = \frac{\alpha \cdot \varphi}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}$ , kde  $\varphi$  je komplexní jednotka. Vzorem čísla  $\alpha$  jsou dvojice  $\left( \frac{\varphi}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}, \frac{\alpha \cdot \varphi}{\sqrt{1+|\alpha|^2}} \right)$ .

Opět platí, že vzor okolí  $U$  můžeme psát jako  $H^{-1}(U) = U_1 \cup U_2$ , přičemž  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

### 3.3 Hopfova zobrazení nad kvaterniony

Hopfovým zobrazením nad kvaterniony budeme rozumět zobrazení  $H: H^2 \setminus \{0,0\} \rightarrow H \cup \infty$  tak, že  $H(x,y) = y \cdot x^{-1}$  pro  $x \neq 0$  a  $H(x,y) = \infty$  pro  $x = 0$ . Opět se můžeme omezit na zobrazování komplexních čísel, která vyhovují rovnici  $|x|^2 + |y|^2 = 1$ .

Nechť  $\alpha \in H$ , potom pro vzory tohoto  $\alpha$  platí, že  $|x| = \frac{1}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}$  a  $|y| = \frac{|\alpha|}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}$ . Takže  $x$  bude  $\frac{\varphi}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}$ , kde  $\varphi$  je kvaternion s  $|\varphi|=1$ . Vzorem čísla  $\alpha$  jsou dvojice  $\left( \frac{\varphi}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}, \frac{\alpha \cdot \varphi}{\sqrt{1+|\alpha|^2}} \right)$ .

### 3.4 Shrnutí



Heinz Hopf (9. listopadu 1894, Vratislav, Polsko – 3. června 1971, Curych, Švýcarsko) byl německý matematik. Od roku 1920 působil v Berlíně. Dále také působil na Univerzitě v Princetonu, New Yorku a Stanfordu. Po tomto matematikovi byla pojmenována tzv. Hopfova algebra, H-prostor a mnoho dalších.

Označíme-li sféru dimenze  $n$  symbolem  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , potom  $S^0$  je dvojice bodu,  $S^1$  je koule a odpovídá  $\mathbb{R} \cup (\infty)$ ,  $S^2$  je koule odpovídá  $\mathbb{C} \cup (\infty)$  a  $S^4$  odpovídá  $H \cup (\infty)$ , kde  $H$  je množina kvaternionů.

Budeme-li přímku považovat za kružnici o tzv. nekonečném poloměru, můžeme Hopfovo zobrazení nad reálnými čísly napsat jako  $H_{\mathbb{R}} : S^1 \rightarrow S^1$  a  $H_{\mathbb{R}}^{-1}(\alpha) = S^0$ , kde  $\alpha \in \mathbb{R} \cup (\infty)$ . Zobrazení  $H_{\mathbb{R}}$  je zobrazení  $S^1$  na  $S^1$ .

Hopfovo zobrazení nad komplexními čísly můžeme napsat jako  $H_{\mathbb{C}} : S^3 \rightarrow S^2$  a  $H_{\mathbb{C}}^{-1}(\alpha) = S^1$ , kde  $\alpha \in \mathbb{R} \cup (\infty)$ . Zobrazení  $H_{\mathbb{C}}$  je zobrazení  $S^3$  na  $S^2$ .

Hopfovo zobrazení nad kvaterniony můžeme napsat jako  $H_H : S^7 \rightarrow S^4$  a  $H_H^{-1}(\alpha) = S^3$ , kde  $\alpha \in \mathbb{R} \cup (\infty)$ . Zobrazení  $H_H$  je zobrazení  $S^7$  na  $S^4$ .

# Závěr

V bakalářské práci jsme rozšířili geometrické vnímání komplexních čísel. U každé základní transformace jsme uvedli samodružné body, které nám pomohly při zkoumání složitějších transformací.

Dále jsme se podrobněji seznámili s kvaterniony. Přesvědčili jsme se, že pomocí kvaternionů můžeme snadno odvodit vzorce pro rotaci v prostoru.

V neposlední řadě jsme se seznámili s Hopfovými zobrazeními, na kterých jsme si ukázali, že i funkce se zdánlivě snadnými předpisy nemusí být snadné zobrazit.

Bakalářská práce Komplexní čísla a kvaterniony v geometrii by měla být přínosem pro studenty a učitele matematiky a sloužit jako učební text, který spojuje matematiku s geometrií.

# Literatura

- [1] Ráb M. (1996): Komplexní čísla v elementární matematice. Vydavatelství Masarykovy univerzity, Brno.
- [2] Vyšín J. (1958): Populární přednášky o matematice – Lineární lomená funkce, Státní nakladatelství technické literatury, Praha.
- [3] Sekanina M., Boček L., Kočandrle M., Šedivý J. (1988): Geometrie II, Státní pedagogické nakladatelství, Praha.
- [4] Calda E. (1994): Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla, Prométheus, Praha.
- [5] Bartsch H. J. (2002): Matematické vzorce, Mladá fronta, Praha.

## **Použité webové stránky:**

<http://cs.wikipedia.org/wiki/Kvaterniony>

<http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Hopf.html>

<http://cs.wikipedia.org/wiki/Vektor>