Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Adam Štefánik

Základy teorie her

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.

Studijní program: Obecná matematika

2009

Rád by som sa poďakoval vedúcemu práce doc. RNDr. Daliborovi Pražákovi, Ph.D. za zaujímavú tému, pomoc a podnety pri písaní tejto práce, Miroslavovi Kuchtovi za pomoc s TeXom a v neposlednom rade mojim rodičom za stálu podporu.

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu napísal samostatne a výhradne s použitím citovaných zdrojov. Súhlasím so zapožičiavaním práce a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa Adam Štefánik

Obsah

Název práce: Základy teorie her
Autor: Adam Štefánik
Katedra: Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.
e-mail vedoucího: prazak@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Táto práca obsahuje základné pojmy a definície teórie hier. Tieto pojmy sú vysvetlené na jednoduchých príkladoch. Nachádzame najlepšiu stratégiu v hre Kameň-papier-nožnice. Hlbšie skúmame hru Väzňovo dilema a dávame odpoveď na otázku v akých podmienkach stratégia Oko za oko tvorí Nashovu rovnováhu. Práca zoznamuje s hrou Jastrabov a hrdličiek a vysvetľuje pojem evolučne stabilnej stratégie. Hovoríme v nej aj o použití teórie hier a uvedených modelových hier v ekonómii. V dodatku je dôkaz všeobecnej Nashovej vety.

Klíčová slova: hra, stratégia, Nashova rovnováha, Väzňovo dilema

Title: Basics of the game theory
Author: Adam Štefánik
Department: Department of Mathematical analysis
Supervisor: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: prazak@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: This work summarizes basic terms and definitions of the game theory. These terms are demonstrated on simple examples. The work finds the best strategy in Rock-scissors-paper game. It explores the Prisoner's Dilemma game in a deeper way and answeres the question under which conditions the Tit for Tat strategy is Nash equilibrium. It introduces Hawk-Dove game and explains the evolutionarily stable strategy. It talks about using the game theory in economics. There is a general Nash Equilibrium Theorem proof in the appendix.

Keywords: game, strategy, Nash equilibrium, Prisoner's Dilemma

Kapitola 1

Úvod

Táto práca je súhrnom základných pojmov a definícií z Teórie hier vysvetlených na príkladoch. Snahou bolo vybrať príklady tak, aby sa práca stala zrozumiteľnejšou ale aj zaujímavejšou ako je tomu aj v príklade Kameň-papier-nožnice. Z rovnakých dôvodov som pri definovaní pojmov volil cestu opisu, namiesto zložitých viac indexových matematických zápisov. Zdrojom väčšiny týchto pojmov je [7].

Práca sa opiera aj o prednášku *Teorie her* vyučovanú RNDr. Magdalenou Hykšovou, Ph.D. na MFF UK pod kódom NUMV090, ktorú som absolvoval. Prácu miestami dopĺňajú materiály z tejto prednášky [4].

V druhej kapitole sa zoznamujeme zo základnými pojmami Teórie hier, ako sú hra, hráči, strom hry, stratégia, výplatná funkcia, rozvinutý a normalizovaný tvar hry a rovnovážna situácia hry. Na konci sa nachádza stručný životopis J. F. Nasha.

Tretia kapitola sa venuje antagonistickým hrám a ich riešeniu v rozvinutom a normalizovanom tvare. Objavujú sa pojmy: optimálna stratégia, minimaxova a maximinimova stratégia. Venuje sa aj zmiešaným stratégiám a dokazuje ich existenciu. Snaží sa ozrejmiť a aplikovať tieto pojmy na príklade Kameň-papier-nožnice.

Štvrtá kapitola sa opiera najmä o knihu [2], ktorá je skôr populárnou literatúrou, ale snaží sa zodpovedať zaujímave otázky. Táto kapitola je hlavnou časťou práce. Venuje sa známemu problému Väzňovho dilema. Ukazuje rozdiely pri jednom, známom a neznámom počte opakovaní hry. Určuje podmienky, za platnosti ktorých, je výhodnejšie správať sa kooperatívne. Dokazuje tiež stabilitu stratégie Oko za oko (Tit for Tat).

Posledná kapitola sa venuje modelu Jastrabov a hrdličiek, pojmu evolučne stabilnej stratégie - ESS, základnými vlastnosťami ESS s niekoľkými príkladmi. Zaoberá sa aj pohľadom mikroekonómie na celú problematiku. Opiera sa pri tom najmä o [6] a [5].

V dodatku sa nachádza všeobecnejšia Nashova veta s dôkazom. Tento dodatok je zároveň príkladom matematického spôsobu zápisu, do ktorého sa ťažšie preniká. Znenie vety, značenie a úvod dôkazu je prevzatý z [1].

Kapitola 2

Základné pojmy

Ľudia už dávno používajú matematické modely na analýzu a riešenie problémov, s ktorými sa denne v živote stretávajú.

Za zakladateľa teórie hier sa pokladá John von Neumann, ktorý sa základnými otázkami teórie hier zaoberal vo svojej práci z roku 1928.

V tejto práci sa zameriame na matematické modely konfliktných situácií, ktoré vznikajú pri stretnutí záujmov rozumných ľudí alebo skupín ľudí. Na tieto situácie budeme hľadieť z normatívneho hľadiska, t.j. budeme sa usilovať nájsť pre každého účastníka najlepší postup na dosiahnutie jeho cieľov.

Niektoré reálne životné situácie sa dajú pomerne dobre modelovať a teda aj študovať prostredníctvom spoločenských hier. Pravdepodobne odtiaľ aj vznikol názov tejto časti matematickej teórie dnes známej ako *teória hier*. Matematický model konfliktnej situácie sa nazýva *hrou* a jej účastníci sa nazývajú *hráči*.

2.1 Klasický príklad

Uvažujme chlapca a dievča, ktorí nemajú rovnaké záujmy, ale majú sa radi a svoj voľný čas najradšej trávia spolu. Dievča má rado vážnu hudbu a je pravidelnou návštevníčkou koncertov. Chlapec je vášnivý hokejový fanúšik. Situácia sa skomplikuje tým, že veľmi lákavý koncert aj zaujímavý zápas sa konajú v tom istom čase ale na rôznych miestach.

Situáciu zjednodušíme predpokladom, že obaja majú iba dve možnosti: buď ísť na koncert, alebo ísť na hokej. Potom pripadajú do úvahy len nasledujúce možné výsledky:

A: Dievča aj chlapec sú spolu na hokeji.
B: Dievča je na koncerte a chlapec na hokeji.
C: Dievča je na hokeji a chlapec na koncerte.
D: Dievča aj chlapec sú spolu na koncerte.

Ak predpokladáme, že obaja dávajú prednosť výsledkom, pri ktorých sú spolu, ich konflikt je potom v tom, že dievča dáva prednosť výsledku D pred A a chlapec naopak A pred D. V ostatnom sa ich preferencie zhodujú.

2.2 Preferenčné relácie

Ako bolo vidieť v príklade predpokladáme, že každý hráč má jasnú predstavu o tom, ktorým výsledkom dáva prednosť. Tieto preferencie sa nemenia počas hry a dajú sa vyjadriť vhodnými binárnymi reláciami. Napríklad preferencie dievčaťa môžeme vyjadriť binárnou reláciou: $R = \{[D, A], [D, B], [D, C], [B, C], [A, C], [A, B]\}$, kde zápis $[K, L] \in R$ znamená, že dievča dáva prednosť výsledku K pred výsledkom L. Chlapcove preferencie sa líšia iba tým, že miesto prvku [D,A] obsahuje prvok [A,D].

Konflikt hráčov je teda v tom, že ich preferenčné relácie nie sú totožné. Preferenčné relácie tvoria jednu zo základných zložiek matematických modelov konfliktných situácii.

Na tieto preferenčné relácie však budeme mať požiadavky, ktoré sa budú snažiť matematicky zapísať rozumnosť hráčov. Nesmieme pripustiť aby niektorý z hráčov dával prednosť výsledku K pred L a súčasne výsledku L pred K. Teda každý hráč musí mať asymetrickú preferenčnú reláciu. Druhou požiadavkou je tranzitívnosť preferenčnej relácie každého hráča, t.j. $[A, B]$ & $[B, C] \Rightarrow [A, C]$.

2.3 Strom hry

Našou úlohou je nájsť pre každého hráča postup, ktorý mu zaručí najlepší možný výsledok vzhľadom na jeho preferencie. Pri vytváraní takéhoto postupu musíme vziať do úvahy nie len preferenčné relácie, ale aj ďalšie faktory. Napríklad to, či hráči majú alebo nemajú možnosť dopredu sa dohovoriť, alebo či sa každý musí rozhodnúť bez poznania partnerovho rozhodnutia. Tieto faktory sa obyčajne nazývajú pravidlá hry. V nasledujúcom texte budeme predpokladať, že všetci hráči pravidlá hry dodržujú.

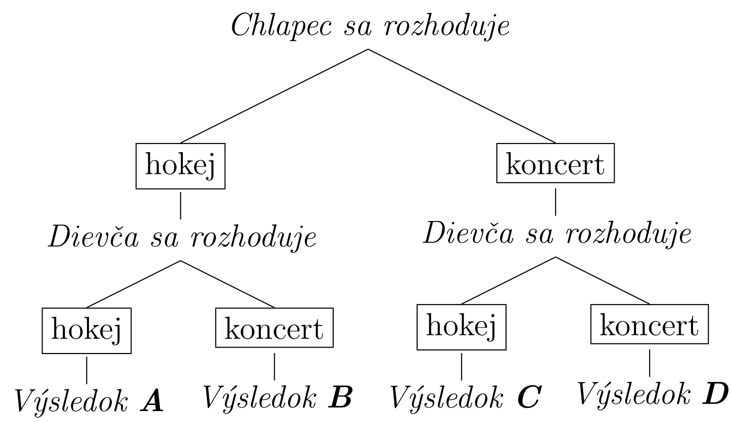
Tieto skutočnosti si môžeme ukázať na našom príklade s chlapcom a dievčaťom. Je rozdiel či sa rozhodujú spolu alebo každý zvlášť, kto sa rozhoduje prvý, kto druhý a či pri svojom rozhodnutí poznajú alebo nepoznajú rozhodnutie druhého partnera.

Hry, v ktorých sa pripúšťa spolupráca nazveme *kooperatívne*. V opačnom prípade hovoríme o *nekooperatívnych* hrách.

Pravidlá hry určujú aj všetky možné priebehy hry v závislosti od rozhodovania účastníkov. V niektorých hrách sa dá situácia zjednodušiť prehľadným znázornením, ale v niektorých prípadoch sa to elementárnymi prostriedkami znázorniť nedá. Môžeme uvažovať, že hra začína v nejakej štartovacej pozícii, potom prechádza ďalšími pozíciami, ktoré závisia od rozhodovania hráčov, a nakoniec končí v niektorej z možných výsledných pozícii.

Obyčajne sa na zobrazenie používa špeciálny orientovaný graf, ktorý sa nazýva *strom hry*. Jeho vrcholy predstavujú možné pozície hry a hrany znázorňujú možné prechody z jednej pozície do druhej. Tento prechod je závislý od rozhodovania hráčov.

Každý hráč upravuje priebeh hry tak, že v určitej pozícii sa rozhodne. To znamená, že danom vrchole stromu hry si vyberie niektorú z vychádzajúcich hrán. Pritom predpokladáme, že všetky nekoncové vrcholy stromu hry sú rozdelené medzi hráčov tak, že každý rozhodovací vrchol patrí práve jednému hráčovi a každému hráčovi patrí aspoň jeden rozhodovací vrchol. Nie je vylúčené, že viac vetiev vedie po čase k rovnakému stavu hry (napr. hra piškvorky na hracom poli 3x3) prípadne, že viac rozhodovacích vrcholov má rovnaké rozhodovacie hrany.



Na obrázku vidíme jeden z možných stromov hry z príkladu z úvodu kapitoly. Chlapec je na tomto obrázku prvým hráčom a teda rozhoduje ako prvý, patrí mu vrchol stromu. Má dve možnosti a preto vedú z vrchola dve vetvy. Dievča sa rozhoduje ako druhé, preto sú jej rozhodovacie vrcholy v druhej vrstve. Aj dievča má dve možnosti voľby, preto z každého jej rozhodovacieho vrchola vedú dve vetvy. Výsledky A, B, C a D sú zhodné s výsledkami z úvodu kapitoly.

Hry, v ktorých hráč vždy presne vie, v ktorom rozhodovacom vrchole sa nachádza nazývame *hry s úplnou informáciou*. Každá orientovaná cesta z koreňa do listu stromu hry reprezentuje jeden z možných priebehov hry.

Stratégiou nazveme zobrazenie, ktoré každému rozhodovaciemu vrcholu daného hráča priraďuje jednu z jeho príslušných možností.

Pre väčšie uľahčenie opisu hier sa preferenčné relácie hráčov reprezentujú reálnou funkciou, ktorá je definovaná na množine všetkých výsledkov tak, aby platilo: Hráč dáva prednosť výsledku A pred B práve vtedy, keď funkcia priraďuje výsledku A väčšie číslo ako výsledok B.

Túto funkciu nazveme *výplatnou funkciou*. Cieľom každého hráča je dosiahnuť pre seba čo najväčšie výplaty. Ak je výplata kladná hovoríme o zisku a ak záporná, hovoríme o strate. V mnohých hrách dvoch hráčov sú možné výsledky iba výhra, prehra a remíza. V takých prípadoch volíme funkciu: výhra 1 , prehra -1 , remíza 0.

2.4 Prechod k normalizovanému tvaru hry

Namiesto stromu hry, pravidiel hry a ďalších zložiek hry môžeme uvažovať iba množinu stratégií a zobrazenia, ktoré každej voľbe stratégie priraďujú výplaty hráčov. Ak ide o hru dvoch hráčov, je vhodné zapisovať tieto zobrazenia do tabuliek, ktoré sa nazývajú *výplatné matice*. Ich riadky zodpovedajú stratégiam jedného hráča a stĺpce stratégiám druhého hráča. Prvky vyjadrujú výplaty.

Pomenujme množiny stratégií vo všeobecnom prípade hier n-hráčov symbolmi $X_1, X_2, \ldots, X_n$, potom dostaneme n-reálnych funkcií $f_1, f_2, \ldots, f_n$, ktoré sú definované na kartézkom súčine $X_1 \otimes X_2 \otimes \ldots \otimes X_n$. Číslo $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pritom udáva výplaty i-temu hráčovi v prípade, že si prvý hráč vybral stratégiu $x_1 \in X_1$, druhý hráč stratégiu $x_2 \in X_2$ atď, až n-tý hráč stratégiu $x_n \in X_n$. Rozdiel od rozvinutého tvaru je v tom, že v normalizovanom tvare sú výplatné funkcie $f_1, f_2, \ldots, f_n$ definované na kartézkom súčine množín stratégií, pričom v rozvinutom tvare boli definované na množine výsledkov.

Hra n hráčov v normalizovanom tvare je daná množinami stratégií $X_1, X_2, \ldots, X_n$ a výplatnými funkciami $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Jej priebeh si predstavujeme tak, že každý hráč si vyberie jednu zo svojich stratégií izolovane, teda bez informácie o výbere ostatných hráčov. Tým je presne určený prvok kartézkeho súčinu množín stratégií a teda aj výplaty jednotlivých hráčov. Pri tom predpokladáme, že každý hráč pozná všetky množiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$, výplatné funkcie $f_1, f_2, \ldots, f_n$ a usiluje o maximum svojej výplaty.

2.5 Rovnovážne situácie

Rovnovážnou situáciou hry budeme nazývať takú konfiguráciu stratégií hráčov, ktorá zaručuje, že pri použití inej stratégie zo svojich stratégií ľubovoľným hráčom, nemôže tento hráč dosiahnuť lepší výsledok, vyššie výplaty. Teda rovnovážny bod je taký bod hry, kedy žiadny hráč nemôže zlepšiť svoju výplatu tým, že zmení vlastnú stratégiu.

Ak budeme uvažovať o hre dvoch hráčov v normalizovanom tvar, ktorý je daný množinami X_1 a X_2 a výplatnými funkciami f_1 a f_2, bude rovnovážnou stratégiou každá usporiadaná dvojica $[x_1^*, x_2^*]$ tak, že $x_1^* \in X_1$ a $x_2^* \in X_2$ s vlastnosťou :
a) pre každú stratégiu $x_1 \in X_1$ platí $f_1(x_1, x_2^*) \leq f_1(x_1^*, x_2^*)$
b) pre každú stratégiu $x_2 \in X_2$ platí $f_2(x_1^*, x_2) \leq f_2(x_1^*, x_2^*)$

Analogicky sa dá uvažovať o trojici či n-tici hráčov a o rovnovážnych stratégiách ako o usporiadaných trojiciach či n-ticiach napĺňujúcich tri či n podobných podmienok ako v prípade dvoch hráčov. Rovnovážna situácia sa nazýva aj Nashova rovnováha (Nash equilibrium).

Príkladom takejto situácie môže byť jazda áut na ceste po pravej strane. Hráčmi sú jednotliví vodiči áut. Ako ich stratégie uvažujme jazdu po pravej či ľavej strane, po strede, prípadne mimo cesty. Ak napríklad budú všetci jazdiť vpravo, žiaden vodič si nepolepší ak si vyberie inú stratégiu.

John Forbes Nash, Jr. je americký matematik narodený 13. júna 1928 a pracujúci v oblastiach teórie hier a diferenciálnej geometrie. V roku 1978 dostal John Von Neumann Theory Prize za objav nekooperatívnej rovnováhy dnes známej ako Nashova rovnováha. V roku 1994 mu bola za prínos v teórií hier udelená Nobelova cena za ekonómiu - za analýzu rovnováhy v teórii nekooperatívnych hier. Spoločne s ním ju získali aj matematici Reinhard Selten a John Harsany.

Kapitola 3

Antagonistické hry

Antagonistická hra je každá hra dvoch hráčov s konštantným súčtom. Teda o koľko je výplata jednému z hráčov v danej partii väčšia ako v druhej partii, o toľko je menšia výplata druhého hráča. Obaja sa snažia svoju výplatu maximalizovať, čo spôsobuje, že v tomto prípade su ich záujmy úplne protichodné.

Rovnovážnu situáciu budeme nazývať *riešením* a stratégie hráčov, ktoré takú situáciu tvoria nazveme *optimálnymi stratégiami*. Riešiť antagonistickú hru znamená zistiť, či rovnovážna situácia existuje a ak existuje, tak nájsť aspoň jednu.

3.1 Riešenie hier v rozvinutom tvare

Najskôr určíme všetky také rozhodovacie vrcholy, ktorých všetky vychádzajúce hrany smerujú do koncových vrcholov (listov) stromu hry. V každom z týchto rozhodovacích vrcholov určíme hranu, ktorá smeruje do najlepšieho listu (najlepšieho z pohľadu toho hráča, ktorému rozhodovací vrchol patrí). Ak je takých vrcholov viac, vyberieme ľubovoľný z nich. Pre každý z uvažovaných rozhodovacích vrcholov potom urobíme nasledovné:

1) označíme si určenú hranu,
2) k vrcholu pripíšeme výplaty, ktoré sú zapísané pri najlepšom koncovom vrchole,
3) vynecháme všetky vychádzajúce hrany, vrátane ich koncových vrcholov.

Takto vznikne nový, menej rozsiahly strom, ktorému sú vo všetkých koncových vrcholoch pripísané výplaty. Pre tento nový strom sa celý postup zopakuje. Pokračujeme tak dlho, až prídeme k začiatočnému vrcholu.

V priebehu postupu získame pre každého hráča v každom jeho rozhodovacom vrchole určitú hranu. Postupnosť týchto hrán určuje pre každého hráča istú stratégiu. Systém takto získaných stratégií tvorí rovnovážnu situáciu.

Rovnovážnu situáciu tvoria vždy n-tice stratégií, kde n je počet hráčov. Stratégie, ktoré takúto situáciu tvoria, nie sú nevyhnutne najlepšie vzhľadom na každú konfiguráciu stratégií ostatných hráčov. Aj túto skutočnosť si ukážeme na príklade (∇).

Aj keď je vyššie uvedený postup jednoduchý, nie sme ho schopný vykonať pre každú takú hru. Môžeme uvažovať šachovú partiu. Obmedzíme ju pravidlom, že partia sa končí remízou, ak niektorý z hráčov urobil 50 ťahov za sebou bez toho, aby premiestnil pešiaka alebo zobral figúru súpera. Potom túto hru môžeme považovať za konečnú antagonistickú hru s úplnou informáciou. Možné výsledky sú zrejmé: výhra bieleho (=prehra čierneho), remíza, výhra čierneho (=prehra bieleho). V riešení nám bráni rozsiahlosť a zložitosť stromu hry. Počet vrcholov v partii môže presiahnuť 6000 a počet hrán v niektorých vrcholoch môže presiahnuť 250.

Poznamenajme, že pri riešení rozsiahlych a zložitých stromov hier môžu napomôcť k inteligentnému spôsobu hry aj *heuristické postupy*, t.j. rozbory nejakej časti stromu hry. Ich funkciu si vysvetlíme na hre piškôrky na ploche 3×3 známej aj ako Tri v rade. Napríklad si rozmyslime situáciu, v ktorej prvý hráč umiestnil svoj symbol do stredu - políčko $[2, 2]$. Predpokladajme, že prvý hráč umiestňuje krížiky. Je vidieť, že osem možností umiestnenia krúžku patriacemu druhému hráčovi sa dá zredukovať vďaka symetrii na dve. A to umiestnenie do rohu - políčka $[1, 1], [1, 3], [3, 1], [3, 3]$ alebo umiestnenie vedľa stredu - políčka $[1, 2], [2, 1], [2, 3]$ a $[3, 2]$. Takže z ôsmich vetiev podstromu zjednodušíme pomocou našej heuristiky problém len na dve vetvy. Napriek tomu je strom tejto primitívnej hry aj pri využití ďalších heuristík pomerne rozsiahly.

3.2 Riešenie hier v normalizovanom tvare

Pri antagonistickej hre s úplnou informáciou zjednodušíme normalizovaný tvar pomocou konštantného súčtu. Je zrejmé, že nie je potrebne uvádzať výplaty oboch hráčov. Stačí uvádzať výplaty len jedného z nich. Výplaty druhého hráča zistíme odčítaním výplat prvého hráča od príslušnej konštanty.

Množina rovnovážnych situácií sa nemení ak k výplatám jedného hráča pričítame konštantu, preto stačí uvažovať, že konštantný súčet je rovný nule. Táto hra bude teda určená iba jedinou maticou. Stratégiám prvého hráča zodpovedajú riadky a stratégiám druhého hráča zodpovedajú stĺpce. Prvok matice $[i, j]$ udáva výplatu prvému hráčovi pri použití stratégie i prvým hráčom a stratégie j druhým hráčom.

Namiesto pojmu antagonistická hra sa používa aj názov *hra dvoch hráčov s nulovým súčtom* alebo *maticová hra*. Príslušná matica sa potom nazýva *matica hry*.

Rovnovážnu situáciu nájdeme tak, že vyhľadáme taký prvok matice hry, ktorý je najmenší v príslušnom riadku a najväčší v príslušnom stĺpci. Daný riadok a stĺpec, alebo presnejšie stratégie, ktoré sú týmto riadkom a stĺpcom reprezentované, potom tvoria rovnovážnu situáciu.

Platí to, pretože každý prvok a_{ij} matice hry vyjadruje výplatu prvého hráča, kde i označuje riadok a j označuje stĺpec matice. Výplata druhého hráča je potom $-a_{ij}$. Z definície tvorí rovnovážnu situáciu taká dvojica $[i^*, j^*]$ riadku a stĺpca, ktorá má nasledujúcu vlastnosť:

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \text{ pre každý riadok } i$$

a súčasne

$$-a_{i^*j} \leq -a_{i^*j^*} \text{ pre každý stĺpec } j$$

Teda $[i^*, j^*]$ je rovnovážna situácia, ak pre každý riadok i a stĺpec j platí:

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

To platí práve vtedy, keď je prvok $a_{i^*j^*}$ najmenším prvkom riadku i^* a najväčším prvkom stĺpca j^*. Tento prvok nazývame *sedlový bod matice*.

Hľadanie rovnovážnej situácie si ukážeme aj na príklade (∇). Uvažujme antagonistickú hru určenú nasledujúcou maticou.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 & 3 & 5 & 3 \\ -3 & -3 & -3 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

V tejto matici je iba prvok a_{11} najmenším prvkom svojho riadku a najväčším prvkom svojho stĺpca. Rovnovážnu situáciu tvorí dvojica stratégií (pretože v hry sa zučastňujú dvaja hráči). Táto dvojica je tvorená prvou stratégiou prvého hráča a prvou stratégiou druhého hráča. Ak sa hra dostane do tohto bodu, ani jeden z hráčov nebude mať záujem zmeniť svoju stratégiu, pretože takáto zmena by znamenala zníženie výplaty.

Ak zanedbáme na chvíľu úplnú informáciu o hre (hráč nevie aké sú výplaty protihráča a teda nevie akú stratégiu použije protihráč) vidíme, že stratégie z rovnovážnej situácie, nemusia byť najlepšie vzhľadom ku všetkým stratégiám protihráča. Ak by si napríklad druhý hráč z nejakého dôvodu vybral inú ako prvú stratégiu napr. piatu, tak najlepšie by prvý hráč urobil ak by zvolil štvrtú - zisk 5 jednotiek.

3.3 Minimaxová a maxminimová stratégia

Teraz budeme zisťovať, akú najväčšiu výplatu si môže zaistiť hráč bez ohľadu na stratégiu protihráča. Takúto stratégiu pre prvého hráča získame tak, že v každom riadku matice hry nájdeme najmenší prvok a medzi týmito prvkami nájdeme najväčší. Je to teda maximum z miním. Preto sa táto výplata nazýva aj *maxminimová výplata* a príslušnú stratégiu prvého hráča nazývame *maxminimové stratégia*.

Všeobecne: Máme maticu hry $A = (a_{ij})$, m-počet riadkov, n-počet stĺpcov. Označme $\underline{v}$ maxminimovú výplatu, potom platí:

$$\underline{v} = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$$

Maximová stratégia je každá stratégia, pri ktorej sa maxima nadobudne. Rovnako však môžeme uvažovať o druhom hráčovi. Použijeme rovnakú maticu a pripomeňme fakt, že výplaty pre druhého hráča sú čísla opačné k výplatám prvého hráča.

Maximalizácia výplaty druhého hráča je to isté ako minimalizácia výplaty prvého hráča. Najprv teda v každom stĺpci nájdeme najväčší prvok a medzi týmito potom vyberieme najmenší. Je to teda minimum z maxím.

Táto výplata sa nazýva *minimaxová výplata* a príslušná stratégia sa nazýva *minimaxová stratégia.*

Všeobecne: Máme maticu hry $A = (a_{ij})$, m-počet riadkov, n-počet stĺpcov. Označme $\overline{v}$ minimaxovú výplatu, potom platí:

$$\overline{v} = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}$$

Číslo $\underline{v}$ sa nazýva *dolná hodnota hry* a číslo $\overline{v}$ sa nazýva *horná hodnota hry.*

Veta

1. Ak $\underline{v} = \overline{v}$, tak matica hry má sedlový bod a je ním každá dvojica $[i^*, j^*]$ s vlastnosťami:

$$\min_{1 \leq j \leq n} a_{i^* j} = \underline{v} \tag{I}$$

a

$$\max_{1 \leq i \leq m} a_{i j^*} = \overline{v} \tag{II}$$

2. Ak má matica hry sedlový bod, tak platí $\underline{v} = \overline{v}$ a každý sedlový bod $[i^*, j^*]$ má vlastnosti (I) a (II).

Dôkaz. 1. Nech platí $\underline{v} = \overline{v}$ a nech i^* má vlastnosť (I) a j^* má vlastnosť (II). Potom z vlastností (I) a (II) pre každý riadok i platí

$$a_{ij^*} \leq \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij^*} = \overline{v}$$

a pre každý stĺpec j platí

$$a_{i^*j} \geq \min_{1 \leq j \leq n} a_{i^*j} = \underline{v}$$

Pretože to platí pre každý stĺpec, platí aj pre stĺpec j^* a teda $a_{i^*j^*} \geq \overline{v}$. Podobne z prvej nerovnosti a z rovnosti $\underline{v} = \overline{v}$ vyplýva, že pre každý riadok i platí

$$a_{ij^*} \leq \overline{v} = \underline{v} \leq a_{i^*j^*}$$

Podobne dostaneme pre riadok i^* z prvej nerovnosti nerovnosť $a_{i^*j^*} \leq \overline{v}$ a z rovnosti $\underline{v} = \overline{v}$ potom vyplýva, že pre každý stĺpec j platí

$$a_{i^*j^*} \leq \overline{v} = \underline{v} \leq a_{i^*j}$$

Pre každý riadok i a každý stĺpec j teda platí

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

a teda $[i^*, j^*]$ je sedlový bod matice A.

2. Nech $[i^*, j^*]$ je sedlový bod matice A, t.j. nech pre každý riadok i a každý stĺpec j platí

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

Z týchto nerovností ďalej platí

$$a_{i^*j^*} = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij^*}$$

a

$$a_{i^*j^*} = \min_{1 \leq j \leq n} a_{i^*j}$$

Ďalej z

$$\max_{1 \leq i \leq m} a_{ij^*} \geq \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}$$

a z

$$\min_{1 \leq j \leq n} a_{i^*j} \leq \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$$

plynie $\underline{v} \geq \overline{v}$. Ďalej stačí ukázať $\underline{v} \leq \overline{v}$.

Pre každý prvok a_{ij} matice A platí:

$$a_{ij} \leq \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}$$

z toho pre každý riadok i plynie

$$\min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} \leq \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}$$

Platí to aj pre riadok, v ktorom výraz na ľavej strane poslednej nerovnosti je najväčší. Teda

$$\max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} \leq \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}$$

čo je len inak zapísaný fakt, že $\underline{v} \leq \overline{v}$.

Q.E.D.

Ak má antagonistická hra rovnovážnu situáciu, má potom matica každej takej hry sedlový bod a dolná hodnota hry sa rovná hornej hodnote hry. Táto spoločná hodnota sa nazýva *hodnota hry*.

3.4 Zmiešané stratégie

Určite si každý uvedomuje, že existujú antagonistické hry, ktoré nemajú rovnovážnu situáciu. Ako príklad si uvedieme nasledujúcu hru.

Každý z oboch hráčov ukáže jeden alebo dva prsty, pričom ani jeden z nich pri svojom rozhodovaní nevie, koľko prstov ukáže protihráč. Ak ukážu rovnaký počet prstov, zaplatí druhý hráč výhru prvému hráčovi vo výške súčtu ukázaných prstov. Teda buď dve alebo štyri peňažné jednotky. Ak ukážu rôzny počet, zaplatí prvý hráč druhému tri jednotky.

Hru si zapíšeme pomocou matice hry.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v} = \max\{\min\{2, -3\}, \min\{-3, 4\}\} = \max\{-3, -3\} = -3$$
$$\overline{v} = \min\{\max\{2, -3\}, \max\{-3, 4\}\} = \min\{2, 4\} = 2$$

Vidíme, že matica hry nemá sedlový bod a teda hra nemá rovnovážnu situáciu.

Uvažujeme konečnú hru dvoch hráčov v normálnom tvare. Nech S_i je priestor stratégií ľubovoľného hráča $i \in \{1, 2\}$ a jej veľkosť označme symbolom m. *Zmiešanou stratégiou* hráča i budeme rozumieť pravdepodobnostné rozdelenie $p^i = (p_1^i, p_2^i, ..., p_{m_i}^i)$, kde $0 \leq p_j^i \leq 1$ a $\sum p_j^i = 1$ pre všetky $1 \leq j \leq m_i$. Táto definícia sa dá zovšeobecniť na k hráčov, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Zmiešaná stratégia je opäť nejaká stratégia, ktorá hovorí: s pravdepodobnosťou p_j^i použi stratégiu s_j^i, kde $j = 1, ..., m_i$. Stratégie, ktoré sme uvádzali doteraz nazveme *rýdze*. Tie sú špeciálnym prípadom zmiešaných stratégií, je to usporiadaná n-tica núl a na i-tom mieste má 1, kde i označuje stratégiu, ktorá je optimálna.

Napríklad v predošlej hre s prstami, ktorá nemala sedlový bod, by mohla byť takou zmiešanou stratégiou stratégia, ktorú budeme označovať ako usporiadanú dvojicu $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ v prípade dvoch stratégii a n-ticu v prípade n stratégií. Znamená to, že prvý hráč s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ použije prvú stratégiu a s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ použije druhú stratégiu. Zmiešanú stratégiu môžeme tiež chápať ako náhodnú veličinu, ktorá nadobúda hodnotu 1 s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ a hodnotu 2 s rovnakou pravdepodobnosťou. Hodnota 1 reprezentuje (rýdzu) stratégiu, ktorej zodpovedá prvý riadok matice hry a hodnotou 2 myslíme (rýdzu) stratégiu, ktorej zodpovedá druhý riadok matice hry.

Ďalej budeme potrebovať nejakú obdobu výplatnej funkcie pre zmiešané stratégie. Označme s_i resp. t_j príslušnú i-tu resp. j-tu čistú stratégiu prvého resp. druhého hráča. Výplatná funkcia prvého hráča je potom:

$$\Pi_1(s_i, t_j) = a_{ij}.$$

Z úvah o pravdepodobnosti plynie

$$\Pi_1(s_i, q) = \sum_{j=1}^{n} q_j \Pi_1(s_i, t_j) = \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij}$$

a teda

$$\Pi_1(p, q) = \sum_{i=1}^{m} p_i \Pi_1(s_i, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij}$$

pre prvého hráča a analogicky pre druhého hráča:

$$\Pi_2(p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j b_{ij}$$

Funkcie $\Pi_1(p, q)$ a $\Pi_2(p, q)$ nazveme *očakávná hodnota výhry.*

Hľadanie zmiešanej stratégie, ktorá zaručuje najväčšiu očakávanú hodnotu výhry si ukážeme na všeobecne známej hre kameň-papier-nožnice.

3.5 Kameň-Papier-Nožnice

Princíp hry je všeobecne známy. Kameň otupí nožnice, tie vždy prestrihnú papier a ten dokáže zabaliť kameň. Táto hra je bežne používaná pri prijímaní ľahších rozhodnutí. Intuitívne sa predpokladá, že každý hráč má rovnakú pravdepodobnosť výhry. Ukážeme, kedy to platí.

Z hľadiska teórie hier ide o antagonistickú hru. Jej zápis sprehľadníme tabuľkou :

	kameň	*nožnice*	*papier*
kameň	$(0, 0)$	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
nožnice	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, -1)$
papier	$(1, -1)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$

Všetky stratégie prvého hráča sú v prvom stĺpci a všetky stratégie druhého hráča sú v prvom riadku. Dvojice (a, b) značia výplatu 1. resp. 2. hráča. Vezmime si napríklad bod, kde prvý hráč zvolí kameň a druhý hráč zvolí nožnice. Kameň otupí nožnice, preto prvému hráčovi prideľujeme jednotku výhry a druhý hráč o tú istú jednotku prichádza. Podobne sa dajú interpretovať aj ostatné body.

Cieľom je nájsť stabilnú stratégiu pre oboch hráčov tak, aby dosiahli čo najväčší úžitok (v tomto prípade je to čo najväčší počet jednotiek výhry). V prvom kroku hľadáme bod (konkrétnu kombináciu stratégií prvého a druhého hráča), ktorý by bol výhodný pre oboch hráčov natoľko, že každý z nich si túto stratégiu vždy vyberie. Hľadáme teda rovnovážny bod hry v rýdzych stratégiách.

Začnime napríklad v bode (*kameň,nožnice*). Tento bod nie je rovnovážnou stratégiou pre druhého hráča, ten by si pri stratégii *kameň* prvého hráča zvolil stratégiu *papier*. Posunul by hru do bodu (*kameň,papier*). Tento bod nie je rovnovážnou stratégiou pre prvého hráča, ten by hru posunul do bodu (*nožnice*, *papier*) atď. Takto by v každom bode jeden z hráčov posunul hru do iného bodu. Žiadny bod z bodov v tabuľke teda nie je rovnovážnym bodom.

V druhom kroku hľadáme zmiešanú stratégiu tak, aby pri nej hráč náhodne s určitou pravdepodobnosťou striedal svoje stratégie *kameň*, *papier* a *nožnice*. Upravíme si tabuľku pridaním neznámych pravdepodobností p_1, p_2, q_1 a q_2, ktoré všetky ležia v intervale [0,1]:

	kameň	*nožnice*	*papier*	
kameň	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	p_1
nožnice	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$	p_2
papier	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$	$1-p_1-p_2$
	q_1	q_2	$1-q_1-q_2$	

Veta (J.Nash)

V zmiešaných stratégiách má každá hra s konečným počtom stratégií aspoň jeden rovnovážny bod.

Poznámka: Veta nehovorí len o antagonistických hrách. Platí aj v hrách viacerých hráčov dokonca aj v tedy, keď hra nemá konštantný súčet. Pre zjednodušenie uvádzame dôkaz pre hry dvoch hráčov. Všeobecnejšia verzia tejto vety sa nachádza v dodatku.

Dôkaz. Veta tvrdí, že existuje rovnovážny bod, t.j. $\exists(p^*, q^*)$ také, že

$$\Pi_1(p, q^*) \le \Pi_1(p^*, q^*)\ \forall p \text{ a } \Pi_2(p^*, q) \le \Pi_2(p^*, q^*)\ \forall q,$$

kde $p = (p_1, \ldots, p_m)$ a $q = (q_1, \ldots, q_n)$.

Definujme zisk 1. hráča pri zmene jeho stratégie p na jeho i-tu rýdzu stratégiu s_i:

$$c_i(p, q) = \max(\Pi_1(s_i, q)) - \Pi_1(p, q), 0)$$

a pre druhého hráča, zisk pri zmene stratégie q na jeho j-tu rýdzu stratégiu t_j:

$$d_j(p, q) = \max(\Pi_2(p, t_j) - \Pi_2(p, q), 0)$$

Teraz môžeme definovať zobrazenie $T : (p, q) \to (\widetilde{p}, \widetilde{q})$ nasledovne :

$$\widetilde{p_i} = \frac{p_i + c_i(p,q)}{1 + \sum_{k=1}^{m} c_k(p, q)} \text{ a } \widetilde{q_j} = \frac{q_j + d_j(p,q)}{1 + \sum_{k=1}^{n} d_k(p, q)}$$

$c_i(p,q)$ a $d_j(p,q)$ sú spojité, pretože Π_1 a Π_2 sú spojité. Zo spojitosti $c_i(p,q)$ a $d_j(p,q)$ plynie spojitosť zobrazenia T. Vidíme, že $\widetilde{p}$ a $\widetilde{q}$ sú opäť pravdepodobnostné rozdelenia, pretože menovateľ $\widetilde{p}$ a $\widetilde{q}$ sú normalizačné konštanty.

Ďalej využijeme vetu L.E.J. Brouwera o pevnom bode. [3]

Veta (L.E.J. Brouwer 1909). Nech $B \subset \mathbb{R}^n$ je uzavretá, ohraničená a konvexná množina. Ak $f : B \to B$ je spojité zobrazenie, potom existuje pevný bod $x \in B$ tohoto zobrazenia, t.j. $f(x) = x$.

V našom prípade je $B = \Delta_m \times \Delta_n$, kde

$$\Delta_n = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_i \in [0,1], \sum_i x_i = 1 \right\}.$$

Dokážeme, že (p^*, q^*) je rovnovážnym bodom práve vtedy, keď (p^*, q^*) je pevným bodom zobrazenia T, t.j. $T(p^*, q^*) = (p^*, q^*)$. Začneme implikáciou zľava doprava:

$$\forall p : \Pi_1(p, q^*) \leq \Pi_1(p^*, q^*) \Rightarrow c_i(p^*, q^*) = 0 \ \forall i \Rightarrow \widetilde{p_i} = p_i^*$$

a súčasne

$$\forall q : \Pi_2(p^*, q) \leq \Pi_2(p^*, q^*) \Rightarrow d_j(p^*, q^* = 0 \ \forall j \Rightarrow \widetilde{q_j} = q_j^*.$$

Z týchto dvoch rovností plynie $T(p^*, q^*) = (p^*, q^*)$.

Implikácia z prava do ľava:

Nech (p,q) je pevný bod, potom $\exists\ i$ tak, že $p_i > 0$ a súčasne $c_i(p,q) = 0$.

Túto implikáciu dokážeme sporom. Nech teda $\forall i$ také, že $p_i > 0$ plynie $c_i(p,q) > 0$, potom

$$\Pi_1(s_i, q) > \Pi_1(p, q).$$

Nerovnosť vynásobíme kladným číslom p_i a dostaneme

$$p_i \Pi_1(s_i, q) > p_i \Pi_1(p, q).$$

Obe strany rovnice vysčítame cez všetky i také, že $p_i > 0$.

$$\sum_{i:p_i>0} p_i \Pi_1(s_i, q) > \sum_{i:p_i>0} p_i \Pi_1(p, q)\ .$$

Využijeme fakt, že daný súčet všetkých p_i je rovný 1.

$$\Pi_1(p,q) > \Pi_1(p,q) \text{ čo je hľadaný spor.}$$

Pre i z práve dokázanej implikácie platí:

$$\widetilde{p_i} = \frac{p_i + 0}{1 + \sum_{k=1}^{m} c_k(p,q)}$$

Z predpokladu je (p,q) pevným bodom, teda $\widetilde{p_i} = p_i$. Ďalej vieme, $c_k \geq 0$ a teda $\sum\limits_{\forall k} c_k = 0$. Z toho plynie, že pre všetky k je $c_k = 0$ a teda $\Pi_1(s_i, q) \leq \Pi_1(p,q)$. To už priamo implikuje, že p je rovnovážnou stratégiou pretože stratégia s_i bola volená ľubovoľne.

Pre druhého hráča sa tvrdenie dokáže analogicky.

Q.E.D.

Problémom je, že rovnovážnych bodov môže byť viac. Vďaka tejto vete však vieme, že aj hra kameň-papier-nožnice má v zmiešaných stratégiách rovnovážny bod. Výplatné funkcie hráčov sú:

$$\Pi_1 = p_1q_2 - p_1(1-q_1-q_2) - p_2q_1 + p_2(1-q_1-q_2) + (1-p_1-p_2)q_1 - (1-p_1-p_2)q_2$$

$$\Pi_2 = -p_1q_2 + p_1(1-q_1-q_2) + p_2q_1 - p_2(1-q_1-q_2) - (1-p_1-p_2)q_1 + (1-p_1-p_2)q_2$$

Z definície Nashovho ekvilibria plynie, že funkcia

$$p \mapsto \Pi_1(p, q^*)$$

má v bode $p = p^*$ maximum vzhľadom na Δ_m. Hľadať stratégie tvoriace rovnovážny bod je teda to isté ako hľadať maximum. V našom prípade ide o maximum spojitej funkcie na kompaktnej množine. Vieme, že v takomto prípade musí existovať. Situáciu rozdelíme na dva prípady.

V prvom prípade hľadáme maximum vo vnútri množiny, teda $\nabla\Pi_1$ a $\nabla\Pi_2$ musia byť nulové:

$$\tfrac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = q_2 - 1 + q_1 + q_2 - q_1 + q_2 = 3q_2 - 1$$

$$\tfrac{\partial \Pi_1}{\partial p_2} = -q_1 + 1 - q_1 - q_2 - q_1 + q_2 = -3q_1 + 1$$

$$(3q_1 - 1, -3q_2 + 1) = (0,0) \Rightarrow q_1 = \tfrac{1}{3} = q_2$$

Hra je symetrická $\Pi_1 = -\Pi_2$, z toho dostávame:

$$p_1 = \tfrac{1}{3} = p_2 = \tfrac{1}{3}$$

Máme teda maximum oboch funkcií v bode $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ vo vnútri množiny.

V druhom prípade hľadáme maximum na hranici. Uvažujme napríklad časť hranice, kde $p_1 = 0$. To však znamená, že prvý hráč vôbec nechce použiť stratégiu *kameň*. Druhý hráč dokáže zvoliť neprehrávajúcu stratégiu a to *nožnice*. Proti takejto stratégii druhého hráča by prvý hráč reagoval stratégiou *kameň*, čo je už spor s tým, že túto stratégiu nechce použiť. Analogicky sa dá postup uplatniť na ostatné časti hranice a teda na hranici sa žiaden rovnovážny bod nenachádza.

Záver: Najlepší výsledok v hre kameň-papier-nožnice dosiahneme tým, že budeme náhodne s rovnakou pravdepodobnosťou striedať všetky symboly. Je to jediná stabilná stratégia pre oboch hráčov.

Podľa psychológov, ľudský mozog nedokáže náhodne generovať a teda náhodne voliť medzi stratégiami. Táto hra sa môže stať strategická a dokonca vraj môže odhaľovať prefíkanosť i hranice ľudskej mysle. V tejto hre existujú dokonca aj turnaje. Podľa týždenníka New Scientist je najlepšie začať nožnicami a po prvom ťahu zvoliť zložitejšie stratégie. Napríklad súperovi vopred oznámiť svoj ťah a potom ho naozaj urobiť. Druhá taktika je urobiť ťah, ktorý by neporazil predchádzajúci ťah protivníka. Štúdia totiž naznačuje, že väčšina ľudí sa inštinktívne snaží poraziť svoj vlastný predchádzajúci ťah.(denník Pravda 20. decembra 2007)

Dlho platil názor, že hra kameň-papier-nožnice sa rozoberá len na pobavenie teoretikov, kým sa zistilo, že jeden druh jašteríc ju hrá. Tento druh má tri rozdielne druhy samčekov (obvykle sa rozlišujú pomocou farby hrdielka). Typ A má jednu samičku a tú si starostlivo stráži. Typ B má niekoľko samičiek a stráži ich menej starostlivo. Typ C nestráži žiadnu samičku a snaží sa potajme páriť s nejakou nestráženou samičkou. Tieto typy sa navzájom napádajú cyklicky. C môže napadnúť B, B môže napadnúť A a to zase môže napadnúť C. Rovnaký jav môžeme pozorovať aj v parazitológii.(Hofbauer and Sigmund, 1998)

Kapitola 4

Neantagonistické hry

Väčšina konfliktov z bežného života nemá antagonistický charakter. Ukážeme si niekoľko javov, ktoré sa v antagonických hrách nemôžu vyskytnúť. *Neantagonické hry* sú buď hry dvoch hráčov s nekonštantným súčtom alebo hry viacerých hráčov.

Základným rozdielom je, že v neantagonistických hrách môžu rôzne rovnovážne situácie viesť k rôznym výplatám. V antagonistických hrách viedli vždy k výplate, ktorá sa rovnala hodnote hry. Tento rozdiel vedie k problému, že hráči môžu dávať prednosť rôznym rovnovážnym situáciám.

Ďalším rozdielom je, že maximová rýdza stratégia, ktorá zabezpečuje každému z hráčov najväčšiu možnú výplatu nezávisle od výberu stratégie druhého hráča, nemusí tvoriť rovnovážnu situáciu. Nielen tieto rozdiely si budeme ilustrovať na známej hre *Väzňovo dilema (Prisoner's Dilemma).*

4.1 Väzňovo dilema (Prisoner's Dilemma)

Väzňovo dilema objavili okolo roku 1950 americkí matematici Merrill Meeks Flood a v Poľsku narodený Melvin Dresher. Formalizoval a do dnešnej podoby ho upravil americký matematik Albert William Tucker.

Väzňovo dilema je hrou dvoch hráčov. Každý z hráčov má dve stratégie - spolupracovať (cooperate - C) alebo zradiť (defect - D). Túto stratégiu vyberá každý z nich bez toho, aby vedel ako sa rozhodol druhý z hráčov. Zrada prináša väčšiu výhodu ako spolupráca. Pritom však zrada oboch hráčov vedie k horšiemu výsledku ako spolupráca.

V pôvodnej forme ide o dvoch väzňov, ktorých držia izolovane a sú obvinený zo spoločného zločinu. Izolovanosť zabraňuje akejkoľvek dohode. Ak budú obaja zapierať, nemajú proti nim dostatok dôkazov a odsúdia ich len za malý zločin. Ak jeden z nich bude ochotný spolupáchateľa prezradiť, dostane ako odmenu symbolický trest, ale jeho spolupáchateľa odsúdia za závažný zločin a potrestajú prísnym trestom. Ak sa priznajú obaja odsúdia ich za závažný zločin, ale trest bude miernejší ako v prípade jedného priznania.

Tabuľkou môžeme Väzňovo dilema zapísať takto:

	spolupráca	*zrada*
spolupráca	(R, R)	(S, T)
zrada	(T, S)	(P, P)

Dvojice (a,b) značia tak ako pri hre kameň-papier-nožnice výplatu 1. resp. 2. hráča.
R je odmena (reward)
S je okradnutie (sucker's payoff)
T je pokušenie (temptation)
P je potrestanie (punishment)

Zároveň musí platiť

$$S < P < R < T$$

a tiež

$$2R > T + S$$

čim je zapísané to, že súčet výplat hráčov je väčší ak obaja spolupracujú, ako keď jeden z nich spolupracuje a druhý zrádza.

Pokúsme sa teraz nájsť rovnovážny bod. Nech si prvý hráč vyberie stratégiu spolupracovať. Pri tejto jeho voľbe si druhý hráč ale vybrie zradu, pretože $R < T$. Prvý hráč by reagoval tak, že by si tiež vybral zradu pretože $S < P$. Stratégia (*zrada*,*zrada*) je rovnovážnym bodom, tj. ak sú obaja hráči rozumný budú voliť stratégiu zrady. Dilema tejto hry je v tom, že stratégia (*spolupráca*,*spolupráca*) by obom hráčom priniesla vyššie výplaty. Táto stratégia však nie je stabilná. Nesmieme zabúdať, že v našom modely uvažujeme, že prioritou každého hráča je maximalizovať vlastnú výplatu. Kamarátstvo a dobré slovo v ňom zatiaľ nemajú váhu.

Zodpovedá to aj tej predstave s väzňami. Asi sa nedá spoľahnúť na zločinca, keď ide o roky vo väzení. Ukazuje sa, že neantagonistické hry sú omnoho zložitejšie ako antagonistické. Príklad naznačuje, že pokiaľ to pravidlá hry dovoľujú mali by sa hráči o spoluprácu usilovať.

Predstavme si ďalej, že uvedená hra sa bude opakovať ľubovoľný no pritom *známy* počet kôl. Nech je to napríklad päť kôl. Prvý hráč môže uvažovať nasledovne: Môžem stále spolupracovať a tak dosiahneme obaja slušné výplaty. Ak však v poslednom piatom kole zradím budem mať vyššiu výplatu a druhý hráč ma už nestihne potrestať, pretože piate kolo je posledné.

Rovnako môže uvažovať druhý hráč, dokonca počíta so zradou v poslednom kole, tak si uvedomí, že jeho zisk bude maximálny ak zradí už vo štvrtom kole a v piatom samozrejme zradí tiež. Opätovne z predpokladu, že prvý hráč je rozumný a jeho cieľom je maximalizácia vlastnej výplaty usúdime, že počíta s vyššie uvedenou stratégiou druhého hráča a preto zradí už v treťom kole.

Túto úvahu môžeme opakovať pre každé kolo. Tým sme ukázali, že v prípade konečného počtu opakovaní sa stratégia nemení. Spolupráca a dohoda by boli iracionálne. Stratégia zradiť je dominantná.

4.2 Neznámy alebo nekonečný počet opakovaní

Pri neznámom alebo nekonečnom počte opakovaní sa situácia mení. Spolupráca už nie je nutne iracionálna. Dvojica (*zrada*,*zrada*) aj naďalej tvorí stabilnú rovnovážnu situáciu. Cieľom bude objavenie inej stabilnej rovnovážnej situácie.

Pojem *stratégia* bude v opakovanej hre predstavovať kompletný plán, postup či algoritmus ako sa hráč zachová v priebehu celej hry. Predpokladajme, že hráči sú schopný pamätať si svoje a súperove chovanie v jednotlivých kolách a použiť ho vo svojej ďalšej stratégii. Hráč však nemá vedomosť o tom, ako sa zachová súper v ďalšom kole.

Stratégiu, ktorá nikdy nezradí ako prvá nazveme *milá* stratégia.

Možnosť spolupráce vznikla vďaka tomu, že hráči sa môžu stretnúť pri rovnakej hre znova. Rozhodnutia, ktoré urobili dnes, neovplyvňujú len dnešné výplaty ale aj tie budúce. Musí však existovať len veľmi malá pravdepodobnosť, že sa hráči v ďalšom kole nestretnú. Hra môže v skutočnom svete skončiť presťahovaním, zmenou práce, smrťou alebo skrachovaním jedného z hráčov. Preto má výplata z nasledujúcich kôl menšiu hodnotu ako tá za súčasné kolo.

Pokúsime sa zodpovedať otázku, ktorá stratégia v opakovanej hre prinesie najväčšiu výplatu. Takúto stratégiu označíme ako *najlepšiu*. Je to teda stratégia, ktorej výplata bude aspoň tak vysoká ako výplata ktorejkoľvek inej stratégie, pričom protihráč môže použiť ľubovoľnú svoju stratégiu.

Zavedieme parameter $w \in (0,1)$, ktorý bude určovať pravdepodobnosť, že bude nasledovať ďalšie kolo. Ľahko si rozmyslíme, že ak je w príliš malé bude každý z hráčov opäť zrádzať bez vážnych následkov.

Motivácia:

Zamyslime sa, čo sa bude diať, ak bude parameter w dostatočne veľký. Aká bude najlepšia stratégia?

Intuícia hovorí, že žiadna stratégia nie je najlepšia. Môžeme predpokladať, že druhý hráč používa stratégiu, v ktorej stále zrádza (stratégia ALL D). Ak hráč nikdy nespolupracuje, najlepšie čo môže prvý hráč urobiť pre maximalizáciu svojej výplaty je tiež stále zrádzať.

Rovnako však môže druhý hráč použiť stratégiu, ktorá spolupracuje, až kým prvý hráč nezradí a potom už neodpúšťa a stále zrádza (Spiteful). Najlepšia stratégia prvého hráča by bola stratégia stále spolupracovať, pričom tušíme, že výplata, ktorú by obdržal pri stratégii ALL D je menšia ako výplata, ktorú by obdržal pri stálej spolupráci. Chceme, aby $T + P + P + P + ... < R + R + R + R + ...$. Toto je to miesto, kde bude veľkosť w rozhodovať. Pri dostatočnej veľkosti w by platilo, že dve rôzne verzie hry majú dve rôzne najlepšie stratégie. V tomto prípade by neexistovala najlepšia stratégia.

Cieľom ďalšej časti bude určiť dostatočnú veľkosť w. Ukážeme, že pre takéto w existuje aj iná rovnovážna situácia ako dvojica stratégií ALL D, a že v tejto rovnovážnej situácii dosiahneme lepší výsledok ako pri dvojici stratégii ALL D.

Uvažujme hru dvoch milých stratégií, výsledkom je spolupráca počas celej dĺžky trvania hry. Očakávanú hodnotu výplat pre každého hráča získame ako súčet výplat v jednotlivých kolách. Pri obojstrannej spolupráci je jedno kolová výplata rovná hodnote R. Túto hodnotu musíme vynásobiť pravdepodobnosťou uskutočnenia daného kola (pre prvé kolo je pravdepodobnosť rovná 1, pre druhé kolo je to už w, i-te kolo nastane s pravdepodobnosťou w ak sa hra dostala do kola $i-1$). Dostávame:

$$\Pi_S = R + Rw + Rw^2 + Rw^3 + \ldots + Rw^n + \ldots$$

Chceme zistiť, pre aké w sa zmena stratégie zo spolupráce na zradu nevyplatí. Nech sa jeden z hráčov odkloní od milej stratégie a v ľubovoľnom kole zradí bez ohľadu na to, že súper doteraz stále spolupracoval. Nazveme takúto stratégiu *nemilá* stratégia. Keď bude takýto hráč hrať proti stratégii Spiteful, je jeho výplata rovná maximálne:

$$\Pi_N = R + Rw + Rw^2 + Rw^3 + \ldots + Rw^{n-1} + Tw^n + Pw^{n+1} + Pw^{n+2} + \ldots$$

Ak by v niektorom z kôl nasledujúcich, za n volil spoluprácu, mohol by získať ešte menej. Spočítajme rozdiel medzi týmito výplatami:

$$\Pi_S - \Pi_N = (R-T)w^n + (R-P)w^{n+1} + \ldots + (R-P)w^{n+k} + \ldots$$

vyjmeme w^n a sčítame nekonečný geometrický rad $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} w^k = \frac{w}{1-w}$

$$\Pi_S - \Pi_N = w^n[R - T + (R-P)\tfrac{w}{1-w}]$$

Potom je rozdiel výplat nezáporný ak:

$$T - R \leq (R-P)\tfrac{w}{1-w}.$$

roznásobením a malou úpravou

$$\tfrac{R-Pw}{1-w} \geq T.$$

vyjadríme si z nerovnosti w

$$w \geq \tfrac{T-R}{T-P}$$

Záver : Nemilá stratégia v hre so stratégiou Spiteful, ktorá je milou stratégiou, má menšiu výplatu ako hra dvoch milých stratégií, ak pre pravdepodobnosť uskutočnenia ďalšej hry platí:

$$w \geq \frac{T-R}{T-P}.$$

Pre takéto w je dvojica dvoch Spiteful (prípadne ľubovoľných dvoch milých) stratégií rovnovážnym bodom opakovaného Väzňovho dilema, pretože ani jeden z hráčov nezvýši svoju výplatu pri možnej zrade.

Stratégia Oko za oko (Tit for Tat - TFT) je stratégiou hráča, ktorý v prvom kole spolupracuje a v ďalšom kole sa zachová rovnako ako jeho protihráč v posledne hranom kole. Je zrejmé, že stratégia TFT je milá stratégia.

Veta.

Stratégia Oko za oko (TFT) je stabilná vtedy a len vtedy, ak pre pravdepodobnosť uskutočnenia ďalšej hry platí:

$$w \geq \frac{T-R}{T-P} \tag{III}$$

a súčasne

$$w \geq \frac{T-R}{R-S}. \tag{IV}$$

Dôkaz. Inými slovami veta vraví, že ak každý z hráčov použije stratégiu TFT, a budúcnosť je dostatočne dôležitá, potom si žiaden hráč nepolepší zmenou stratégie.

Stratégia ALL D neohrozuje TFT, tým myslíme, že očakávaná hodnota výplaty ALL D hrajúcej proti TFT je maximálne taká veľká ako očakávaná hodnota výplaty TFT proti TFT, t.j. $V(ALLD|TFT) \leq V(TFT|TFT)$. Symbolom $V(A|B)$ rozumieme výplatu hráča, ktorý uplatňuje stratégiu A a jeho protihráč uplatňuje stratégiu B.

Keď stretne ALL D stratégiu TFT, získa T v prvom kroku a P v každom ďalšom.

$$V(ALL\ D|TFT) = T + \frac{wP}{1-w}$$

Keď sa stretnú dve stratégie TFT, každá získa

$$V(TFT|TFT) = R + Rw + Rw^2 \ldots = \frac{R}{1-w}.$$

ALL D nemôže ohroziť TFT ak

$$T + \frac{wP}{1-w} \leq \frac{R}{1-w}$$

vynásobíme kladným $(1-w)$

$$T(1-w) + wP \leq R$$

vyjadríme w

$$w \geq \frac{T-R}{T-P}$$

Podobne pre stratégiu pravidelne striedajúcu zradu a spoluprácu si rozpíšeme, ako vyzerá hra týchto hráčov:

pravidelné striedanie zrady a spolupráce dá : DCDCDC...

TFT reaguje na súpera takýmto postupom : CDCDCD...

Teda

$$V(DCDC...|TFT) = T + Sw + Tw^2 + Sw^3 + ...$$

po prerovnaní

$$V(DCDC...|TFT) = T(1 + w^2 + w^4 + ...) + Sw(1 + w^2 + w^4 + ...)$$

po vyňatí a sčítaní geometrického radu s parametrom w^2 dostaneme

$$V(DCDC...|TFT) = (T + Sw)\frac{1}{1-w^2}$$

Aby táto stratégia neohrozila TFT musí teda platiť

$$\frac{T+wS}{1-w^2} \leq \frac{R}{1-w}$$

upravíme na tvar

$$\frac{T-R}{R-S} \leq w$$

Už sme ukázali, že stratégia, ktorá stále zrádza ani stratégia, ktorá pravidelne strieda zradu a spoluprácu neohrozuje TFT. Ľahko si rozmyslime, že ani stratégia, ktorá spolupracuje do určitého momentu a potom stále zrádza nemôže TFT ohroziť. Je jasné, že počas spolupráce získa takáto stratégia rovnako ako pri strete dvoch stratégií TFT. V porovnaní týchto situácií môžeme teda zisk získaný počas spolupráce odčítat a kolo, v ktorom príde zrada, považovať za prvé. Tým sme sa však dostali do situácie TFT proti ALL D.

Posledný prípad, ktorý musíme uvážiť je stratégia, ktorá po niekoľkých spoluprácach zradí. Takúto situáciu nám opäť stačí uvažovať od momentu prvej zrady. Uvažovaná stratégia bude hrať: DDD...DC. Stratégia TFT bude reagovať: CDD...DD. Výplata hráča pri takejto stratégii bude:

$$V(D...DC|TFT) = T + Pw + Pw^2 + ... + Pw^{N-1} + Sw^N.$$

Chceme aby platilo:

$$T + Pw + Pw^2 + ... + Pw^{N-1} + Sw^N \leq R + wR + ... + Rw^N \text{ pre všetky } N \in \mathbb{N}$$

Nerovnosť budeme dokazovať indukciou.

1.krok

$n = 1$, dostávame

$T + Sw \leq R + Rw$, čo upravíme na: $w \geq \frac{T-R}{R-S}$ a to platí z predpokladu vety (IV).

2.krok

Predpokladáme, že tvrdenie platí pre $n = N$ a snažíme sa dokázať, že tvrdenie platí pre $n = N + 1$. Indukčný predpoklad (IP) teda bude:

$$T + P\sum_{i=1}^{N-1} w^i + Sw^N \leq R\sum_{i=0}^{N} w^i$$

Chceme aby platilo

$$T + P\sum_{i=1}^{N} w^i + Sw^{N+1} \leq R\sum_{i=0}^{N} w^i + Rw^{N+1}$$

prenesieme člen Rw^{N+1} na ľavú stranu a použijeme IP

$$T + P\sum_{i=1}^{N} w^i + Sw^{N+1} - Rw^{N+1} \leq T + P\sum_{i=1}^{N-1} w^i + Sw^N$$

upravíme na tvar

$$Pw^N + Sw^{N+1} \leq Rw^{N+1} + Sw^N$$

vydelíme kladným w^N

$$w \geq \tfrac{P-S}{R-S}.$$

Použitím predpokladu vety (IV) stačí už len ukázať, že

$$\tfrac{P-S}{R-S} \leq \tfrac{T-R}{R-S}.$$

Nerovnosť vynásobíme kladným $(R - S)$

$$P - S \leq T - R.$$

Upravíme predpoklady vety (III) a (IV) na tvar

$$T - R \leq w(T - P) \text{ a } T - R \leq w(R - S)$$

tieto dve nerovnosti od seba odčítame

$$0 \leq w(T - P - R + S)$$

vynásobením kladným w a usporiadaním získame žiadanú nerovnosť.

Q.E.D.

4.3 Axelrodov turnaj

(prevzaté z [4] a [2])

V roku 1981 usporiadal Robert Axelrod turnaj, v ktorom sa stretlo proti sebe 15 rôznych stratégii pre opakované Väzňovo dilema. Turnaj prebehol ako počítačový program. Stratégie obdržal od profesorov z univerzít z celého sveta. Každá stratégia sa stretla s každou aj sama so sebou v zápase na 200 kol. Body sa získavali podľa tabuľky:

	spolupráca	*zrada*
spolupráca	$(3, 3)$	$(0, 5)$
zrada	$(5, 0)$	$(1, 1)$

Najviac bodov získala stratégia Oko za oko (TFT). Bolo to veľkým prekvapením, pretože táto stratégia mala jeden z najjednoduchších algoritmov. Túto stratégiu poslal Anatol Rapoport. V turnaji bolo osem milých stratégií a obsadili prvých osem miest.

Krátko po prvom turnaji prebehol druhý. Turnaj však nemal pevne určený počet kôl. Snažil sa napodobniť evolúciu prírodného výberu. Celkový počet jedincov bol stály. Úspešné stratégie sa množili na úkor neúspešných. Asi po 1000 kolách bola dosiahnutá stabilita. V tomto turnaji rovnako zvítazila stratégia TFT.

Uveďme si niekoľko príkladov stratégií, ktoré v sa turnaji objavili:

Stratégia, ktorá vždy spolupracuje.

Stratégia, ktorá vždy zradí.

Stratégia (Spiteful), ktorá spolupracuje, kým protihráč nezradí. Potom stále zrádza.

Stratégia (Oko za oko - TFT), ktorá najprv spolupracuje a potom opakuje ťah protihráča. Na zradu odpovie v ďalšom kole zradou a na spoluprácu spoluprácou.

Stratégia, ktorá sa chová ako TFT ale občas zradí, napríklad raz za x kôl alebo náhodne.

Stratégia, ktorá je náhodná. Spolupracuje s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$.

Stratégia, ktorá v prvom kole zradí a potom sa chová ako TFT.

Stratégia, ktorá spolupracuje s výnimkou, keď súper zradil aspoň k-krát v posledných l kolách.

Stratégia, ktorá spolupracuje, kým súper nezradí. Po jednej zrade raz zradí a dva krát spolupracuje, po n-tej zrade n-krát zradí a dva krát spolupracuje.

Stratégia, ktorá spolupracuje, kým súper nezradí dvakrát po sebe.

Stratégia, ktorá hrá periodicky určitú kombináciu, napr zrada-zrada-spolupráca.

Stratégia, ktorá spolupracuje a potom použije najčastejšiu stratégiu súpera ak sú obe narovnako tak spolupracuje.

Stratégia, ktorá spolupracuje ak obaja hráči v minulom kole zvolili rovnakú stratégiu.

Stratégia, ktorá sa chová ako TFT, ale zradí len s určitou pravdepodobnosťou.

a mnoho ďalších prípadne aj o mnoho zložitejších.

Kapitola 5

ESS a kúsok ekonómie

Aby mikroekonómia dospela k uspokojivým poznatkom a modelom, ktoré vystihujú chovanie ekonomických subjektov pri hospodárskych aktivitách musela prijať pomerne silné predpoklady týkajúce sa rozhodovania a motívov jednania. Výsledné poznatky a modely teda popisujú relatívne úzku oblasť chovania ekonomických subjektov, ktoré sa v praxi riadia neporovnateľne širšou a jemnejšou škálou.

V predošlých kapitolách sme predpokladali, že každému hráčovi ide o čo možno najvyššie výplaty. V praktickom živote sa podľa tohoto modelu chováme skôr výnimočne. Hlavne v rodine sa vyskytuje *altruizmus*. To je chovanie, keď sa hráč vzdá časti svojho zisku v prospech niekoho iného. Napr. rodičia sa radi vzdajú časti svojej výplaty i pohodlia, aby sa postarali o svoje deti. Niektorí ľudia darujú svoju krv, telesné orgány atď. Altruizmus je mimoriadne dôležité pre zachovanie (nielen) ľudského rodu.

Aké chovanie je ekonomicky najlepšie sa snaží ekonómia vysvetliť pomocou modelu Väzňového dilema a modelu Jastrabov a hrdličiek.

5.1 Model Jastrabov a hrdličiek

Týmto modelom ekonómia vysvetľuje, že ani agresívne a ani naopak altruistické chovanie neprináša trvalé výhody ani nevýhody. Nachádzame tu aj odpoveď na otázku, prečo si pri boji zvieratá nespôsobia vážnejšie zranenia.

Uvažujme skupinu živočíchov, tvorenú jedincami, ktorý sa od seba nedajú rozoznať. Odlišné chovanie sa prejaví len vtedy, keď sa jedinci stretnú pri potrave. Agresívnych jedincov nazveme *jastraby* (Howk - H). Druhý typ jedincov sa o potravu delí a nikdy nebojuje. Tento typ jedincov nazveme *hrdličky* (Dowe - D).

Ak sa pri potrave stretne jastrab a hrdlička, jastrab hrdličku odoženie a ziska V jednotiek energie z tejto potravy. Budeme to zapisovať $W(H, D) = V$, čo znamená, že H získal v súboji s D V-jednotiek energie. Podobne $W(D, H) = 0$, čo znamená, že D nezískala v súboji s H žiadnu energiu.

Ak sa stretnú pri potrave dvaja jastraby, vždy nastane boj, jeden z nich získa V jednotiek energie, obaja však stratia bojom C jednotiek energie. Priemerne to pre každého jastraba znamená $\frac{V-C}{2}$ jednotiek energie, t.j. $W(H,H) = \frac{V-C}{2}$.

Ak sa stretnú dve hrdličky, rozdelia sa o potravu bez boja. $W(D,D) = \frac{V}{2}$.
V tabuľke to znázorníme takto:

	jastrab	*hrdlička*
jastrab	$(\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2})$	$(V,0)$
hrdlička	$(0,V)$	$(\frac{V}{2}, \frac{V}{2})$

Ďalej nás bude zaujímať, či je niektorá stratégia výhodnejšia, a v populácii sa rozšíri. Predstavme si situáciu, keď v populácii sú len hrdličky. Ak sa tu objaví mutant, ktorý použije stratégiu H, rozšíri sa v populácii, pretože $W(H,D) = V \geq W(D,D) = \frac{V}{2}$. Zdá sa, že stratégia H je výhodnejšia.

Ak naopak máme populáciu tvorenú len jedincami H, zaujíma nás či sa rozšíri mutant so stratégiou D. Odpoveď je áno aj nie. Z rovníc $W(D,H) = 0$ a $W(H,H) = \frac{V-C}{2}$ plynie, že ak $C < V$, potom $W(H,H) > W(H,D)$ a mutant sa nerozšíri. Stratégia H je v tomto prípade odolná, voči mutantovi so stratégiou D.

Ak však $C > V$, potom $W(H,H) < W(H,D)$ a stratégia D sa rozšíri v takejto populácii. Ak platí $C > V$, vidíme tiež, že stratégia H ani stratégia D nie je dominantná. Skúsme uplatnenie zmiešanej stratégie $pH + (1-p)D$. Jedinec použije H s pravdepodobnosťou p a D s pravdepodobnosťou $1-p$. Pre energie z potravy potom platí:

$$W(H, pH + (1-p)D) = pW(H,H) + (1-p)W(H,D) = \tfrac{1}{2}(V - pC)$$

a

$$W(D, pH + (1-p)D) = pW(D,H) + (1-p)W(D,D) = \tfrac{1}{2}(V - pV)$$

Ak $p < \frac{V}{C}$, potom $W(H, pH + (1-p)D) > W(D, pH + (1-p)D)$ a stratégia H sa v populácii rozširuje. V opačnom prípade sa v populácii rozširuje stratégia D. Ak $p = \frac{V}{C}$ je populácia odolná voči stratégii H aj stratégii D. Ak je hodnota C vysoká, agresivita v populácii je nízka.

Model Jastrabov a hrdličiek má teda dve rovnovážne situácie. Prvou je $(\frac{V}{C}, 1 - \frac{V}{C})$ a druhou je (H,H) za predpokladu $V > C$. Dvojica stratégii (D,D) nemôže tvoriť rovnovážnu situáciu, lebo $W(D,D) < W(H,D)$.

Uvažujme ďalej, že je populácia tvorená iba jedincami, ktorý používajú zmiešanú stratégiu. Pri ich strete platí:

$$W(pH + (1-p)D, pH + (1-p)D) =$$
$$pW(H, pH + (1-p)D) + (1-p)W(pH + (1-p)D, D) = \tfrac{V}{2} - \tfrac{C}{2}p^2$$

Takáto skupina by sa podľa Darwinovej teórie výberu snažila reprodukovať tak, aby maximalizovala svoje zisky energii. Maximum sa dosiahne pre $p = 0$, t.j. keď v populácii nie je žiadna agresia. Hodnota energie z potravy je $\frac{V}{2}$. V populácii sú teda samé hrdličky. V tom je rozdiel od teórie rozhodovania sa jednotlivcov, kde stabilizácia nastane pre $p = \frac{V}{C}$. Ak sa stretnú pri potrave jedinci, používajúci zmiešanú stratégiu s takýmto p, ich zisk je po úprave:

$$W(\tfrac{V}{C}H + (1 - \tfrac{V}{C})D, \tfrac{V}{C}H + (1 - \tfrac{V}{C})D) = \tfrac{V}{2}(1 - \tfrac{V}{C})$$

Čo je určite menej ako $\frac{V}{2}$. Odtiaľ vidíme, že zisk z individuálnej voľby je horší ako voľba v prípade skupiny. V prípade skupiny by však populácia nebola odolná voči mutantom a teda nemožno takúto populáciu považovať za konečné štádium.

5.2 Väzňovo dilema z pohľadu mikroekonomie

Vo Väzňovom dilema sa mikroekonómia snaží zodpovedať otázku, či je egoizmus trvalou výhodou. Ako hráčov si môžeme predstaviť dvoch ľudí, kde každý z nich ovláda iné remeslo. Tieto remeslá sú prepojené tak, že ich spojením môžu vytvoriť výnosný podnik. Napr. kuchár a čašník, majiteľ auta (kamiónu) a vodič, maklér a investor, zamestnávateľ a zamestnanec. Každý z nich však pozná len svoje remeslo a nemôže zistiť, či ten druhý podvádza alebo nie.

Príkladom na neznámy počet opakovaní môže byť z reálneho života postavenie dvoch duopolných firiem. Obe sú hospodársky silné, ale nie natoľko aby zničili svojho konkurenta. Z princípu duopolu nevedia kedy a či vôbec budú môcť rozhodovať bez ohľadu na svojho ekonomického súpera.

Väzňovo dilema ukazuje, že ak je dostatočne veľká pravdepodobnosť ďalšieho kola, tak ľudia uzavretý vo svojom vlastnom sebectve utrpia škodu v porovnaní s trvalou spoluprácou. Zamerajú sa preto na jedno kolové aktivity a aktivity v so známym počtom kôl. Prípadne aktivity, ktoré dokážu bez očakávania druhého hráča ukončiť v kole, ktoré je pre nich najvhodnejšie.

Z modelu tiež vyplýva, že kooperátor aj okrádač by si za partnera priali kooperátora. Nik však pri výbere partnera nemôže vedieť, či tento partner spoluprácu len nepredstiera. Nemožnosť rozpoznať, je pre kooperátorov osudovou nevýhodou. Ako plynie z modelu Jastrabov a hrdličiek kooperátori by vyhynuli, lebo pri strete s okrádačom, by o všetko prišli.

Ak by sa však kooperátori mohli rozpoznať na prvý pohľad, vyhynuli by okrádači. Preto sa dá uvažovať pre kooperátorov existencia *nákladov na ostražitosť*, t.j. niečo čo zníži výnosy ale zabráni zničujúcej strate. Okrádači by naopak privítali *náklady na mimikry*, t.j. niečo čo zníži výnosy ale maskuje okrádačov. Populácia sa potom vyvíja na základe výšky oboch týchto nákladov.

V civilizovaných štátoch sa okradnutý kooperátori môžu spoľahnúť na prácu polície. Nakoniec je to súd, ktorý rozhodne o vine či nevine podozrivého. Rozsudok sa dá chápať ako verejné odmaskovanie. S takýmto okrádačom už potom nechce nik spolupracovať. Za predpokladu dôkladného prešetrenia políciou a rýchleho priebehu súdneho konania môžu byť náklady na ostražitosť nízke. Je to síce nutná ale nie postačujúca podmienka. V štátoch, ktoré sú blízko k ideálu právneho štátu, sa subjekty neboja spolupráce ani s neznámymi partnermi.

5.3 ESS - evolučne stabilná stratégia

Evolučne stabilná stratégia - ESS je stratégia, ktorá keď je prijatá všetkými členmi populácie tak je odolná voči všetkým mutantným stratégiám. Teda ak nejaký jedinec použije inú stratégiu ako ESS tak nebude úspešný pri reprodukcii. Mala by byť konečným štádiom vývoja v daných podmienkach. Stratégia p^* je teda *evolučne stabilná*, ak pre každú inú stratégiu $p \neq p^*$ ak existuje $\overline{\epsilon}(p) > 0$ (akási bariéra závislá od zvolenej stratégie p) také, že

$$W(p^*, \epsilon p + (1-\epsilon)p^*) > W(p, \epsilon p + (1-\epsilon)p^*)$$

pre každé ϵ splňujúce $0 < \epsilon < \overline{\epsilon}(p)$.

V situáciach, ktoré sa dajú modelovať hrou dvoch hráčov v normalizovanom tvare platí, že p^* je ESS práve vtedy, keď spĺňa:
1. $W(p^*, p^*) \geq W(p, p^*)$, pre všetky možné stratégie p
2. Ak $p \neq p^*$ a $W(p^*, p^*) = W(p, p^*)$, potom $W(p^*, p) > W(p, p)$.

Prvá podmienka hovorí, že ESS stratégie tvoria NE. Druhá podmienka sa nazýva podmienka stability a hovorí, že ESS je lepšia ako iná stratégia.

Uvažujme o ESS v modely Jastrabov a hrdličiek. Ak $C > V$ tvorí dvojica $(\frac{V}{C}, 1 - \frac{V}{C})$ ESS. V prípade $C < V$ je ESS dvojica (H,H).

Treba zdôrazniť, že ESS nie je odolná voči súčasnej invázii dvoch alebo viacerých mutantných stratégii.

Uvažujme teraz hru dvoch hráčov s dvomi stratégiami e_1 a e_2 určenú maticou

$$\begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix}$$

Veta. Ak $a \neq b$ alebo $c \neq d$, potom má takáto hra ESS. Možnosti sú nasledovné:
1. Ak $a \geq c$ a $d < b$, potom e_1 tvorí ESS.
2. Ak $a > c$ a $d > b$, potom e_1 a e_2 tvoria ESS.
3. Ak $a < c$ a $d \geq b$, potom e_2 tvorí ESS.
4. Ak $a \leq c$ a $d \leq b$, potom $(\frac{b-d}{b-d+c-a}, \frac{c-a}{b-d+c-a})$ je ESS.

Dôkaz. Ak $a > c$, potom e_1 je NE. Ak $a = c$, potom z podmienky stability v definícií ESS plynie, že $W(e_2, e_2) < W(e_1, e_2)$, čo je presne $d < b$. Tým sme ukázali platnosť prvého tvrdenia. Analogicky môžeme postupovať s tretím tvrdením.

Z vyššie uvedených nerovností a platnosti tvrdení 1. a 3. plynie aj druhé tvrdenie.

V štvrtom prípade nemáme rovnovážnu situáciu v čistých stratégiách. Označme NE v zmiešaných stratégiách ako $p = (p_1, p_2)$. Z podmienok pre ESS sa má $W(e_1, p) = W(e_2, p)$, odkiaľ dostaneme

$$p = (\tfrac{b-d}{b-d+c-a}, \tfrac{c-a}{b-d+c-a}).$$

Teraz uvážme inú stratégiu $q = (q_1, q_2)$. Overíme druhú podmienku ESS:

$$W(p, q) - W(q, q) = \tfrac{((b-d)(1-q_1)+(a-c)q_1)^2}{b-d+c-a} > 0,$$

a teda p tvorí ESS.

Q.E.D.

V hre Kameň-Papier-Nožnice sme našli NE pre $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Nie je to však ESS, lebo nespĺňa podmienku stability $0 = W(q, q) < W(p, q) = 0$.

Dodatok A

Zovšeobecnenie Nashovej vety

Nashove ekvilibrium - NE je vektor stratégií (rýdzich alebo zmiešaných), v ktorom prvok na i-tom mieste zodpovedá stratégii i-teho hráča. Platí pritom, že žiaden hráč jednostrannou zmenou svojej stratégie nie je schopný zlepšiť vlastnú výplatu. Označme hru N hráčov písmenom G. $G = \left(N, A = \times_{i=1}^{N} A_i, u : A \to \mathbb{R}^N\right)$ a NE je $\sigma \in \Delta = \Delta_1 \times \ldots \times \Delta_N$ také, že

$u_i(\sigma) \geq u_i(\acute{\sigma_i}, \sigma_{-i})$, pre všetky $\sigma \in \Delta, \acute{\sigma_i} \in \Delta_i$.

Čo je ekvivalentné s

$u_i(\sigma) \geq u_i(\acute{a_i}, \sigma_{-i})$, pre všetky $\sigma \in \Delta, \acute{a_i} \in A_i$.

Kde $\Delta_i = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m; x_i \in [0,1], \sum_i x_i = 1 \right\}$ pre všetky $i = 1...N$ a (a_{ij}, σ_{-i}) znamená, že vo vektore stratégií $\sigma_1 \times ... \times \sigma_N$ nahradíme stratégiu i-teho hráča (σ_i) jeho čistou j-tou stratégiou (a_{ij}), t.j.

$$(a_{ij}, \sigma_{-i}) = \sigma_1 \times ... \times \sigma_{i-1} \times a_{ij} \times \sigma_{i+1} \times ... \times \sigma_N$$

Veta (J.Nash 1950)

Nech G je konečná hra, potom pre G existuje NE v zmiešaných stratégiách.

Dôkaz. V dôkaze použijeme Brouwerovu vetu o pevnom bode. Preto si pripomenieme jej znenie.

Veta (L.E.J. Brouwer 1909). Nech $B \subset \mathbb{R}^n$ je uzavretá, ohraničená a konvexná množina. Ak $f : B \to B$ je spojité zobrazenie, potom existuje pevný bod $x \in B$ tohoto zobrazenia, t.j. $f(x) = x$. [3]

V našom prípade je množina $B = \Delta$. Nech ďalej $A_i = a_{i1}, \ldots, a_{im}$ je množina rýdzich stratégií hráča i. Pre $1 \leq i \leq n$,$1 \leq j \leq m$, $\sigma \in \Delta$, definujme $g_{ij}(\sigma)$, zisk hráča i pri zmene jeho stratégie zo stratégie σ na jeho j-tu rýdzu stratégiu a_{ij} (ak je takáto zmena zisková):

$$g_{ij}(\sigma) = \max\{u_i(a_{ij}, \sigma_{-i}) - u_i(\sigma), 0\}$$

Teraz môžeme definovať zobrazenie $y : \Delta(A) \rightarrow \Delta(A)$ nasledovne:

$$y_{ij}(\sigma) = \frac{\sigma_{ij}+g_{ij}(\sigma)}{1+\sum_{j=1}^{m} g_{ij}(\sigma)}$$

Platí:

Pre každého hráča i a stratégiu a_{ij} je $g_{ij}(\sigma)$ spojitá funkcia v premennej σ, pretože $u_i(\sigma)$ je spojitá funkcia. Zo spojitosti $g_{ij}(\sigma)$ priamo plynie spojitosť $y_{ij}(\sigma)$.

Pre každého hráča i je vektor $(y_{ij}(\sigma))_{j=1}^{m}$ pravdepodobnostné rozdelenie a teda patrí $\Delta(A_i)$, pretože menovateľ $y_{ij}(\sigma)$ je normalizačná konštanta pre každé i.

Dokážeme, že σ^* je NE práve vtedy, keď σ^* je pevným bodom zobrazenia y. Začneme implikáciou zľava doprava:

$$u_i(\tilde{\sigma}, \sigma^*_{-i}) \leq u_i(\sigma),$$

pre ľubovolne i a ľubovolne $\tilde{\sigma} \in \Delta_i$. Inými slovami: ak i-ty hráč zmení svoju stratégiu na $\tilde{\sigma}$ (a ostatný hráči svoje stratégie nemenia), jeho zisk sa nezväčší.

$$q_{ij}(\sigma^*) = 0, \text{ pre všetky } i \text{ a } j \Rightarrow y_{ij}(\sigma) = y_{ij}(\sigma^*)$$

Implikácia z prava do ľava:

Nech σ je pevný bod, potom pre všetky i existuje j tak, že $x_{ij} > 0$ a súčasne $g_{ij}(\sigma) = 0$. Tvrdenie dokážeme sporom. Nech teda existuje i také, že pre všetky j také, že $x_{ij} > 0$ plynie $g_{ij}(\sigma) = 0$, potom

$$u_i(a_{ij}, \sigma_i) > u_i(\sigma).$$

Nerovnosť vynásobíme kladným číslom x_{ij} a vyscítame cez všetky j také, že $x_{ij} > 0$.

$$\sum_{j:x_{ij}>0} x_{ij} u_i(a_{ij}, \sigma_i) > \sum_{j:x_{ij}>0} x_{ij} u_i(\sigma).$$

Použijeme fakt, že x_{ij} je pre každé i pravdepodobnostné rozdelenie a teda daný súčet je rovný 1.

$$u_i(a_{ij}, \sigma_i) > u_i(\sigma), \text{ čo je hľadaný spor.}$$

Pre j z práve dokázanej implikácie platí:

$$y_{ij}(\sigma) = \frac{\sigma_{ij}+0}{1+\sum_{j=1}^{m} g_{ij}(\sigma)}.$$

Z predpokladu je σ pevným bodom, teda $y_{ij}(\sigma) = y_{ij}(\sigma^*)$.

Ďalej vieme, že $q_{ik} \geq 0$ a teda $\sum_{\forall k} q_{ik} = 0$. Z toho plynie, že pre všetky k je $q_{ik} = 0$ a teda $u_i(a_{ij}, \sigma_i) \leq u_i(\sigma)$. To už priamo implikuje, že σ_i je NE pre všetky i, pretože a_{ij} bola volená ľubovolne vzhľadom na j.

Q.E.D.

Literatúra

[1] Nash equilibrium. http://wiki.cc.gatech.edu/theory/index.php/Nash_equilibrium, 12.1.2009.

[2] Axelrod, R. *The Evolution of Cooperation.* Basic Books, United States of America, 1984.

[3] Casti, J. M. *Five golden rules : Great theories of 20th-century mathematics-and why they matter.* Wiley, J. and Sons, Incorporated, United States of America, 1997.

[4] Hykšová, M. Teorie her a optimální rozhodování. http://euler.fd.cvut.cz/predmety/teorie_her/, 12.1.2009.

[5] Kameníček, J., and Kobek, I. Mikroekonomie (stredne pokročilý kurz). Rukopis pripravovanej publikácie VSEM. Podklad poskytol autor J. Kameníček s povolením citovať, parafrázovať alebo odvolávať sa.

[6] Křivan, V. Evolutionary games and population dynamics. Lecture notes for Seminar in Differential Equations, Kamenice nad Lipou, May 19-23, 2008.

[7] Vlach, M. *Seminár a cvičenia z matematiky - Teória hier.* Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1989.