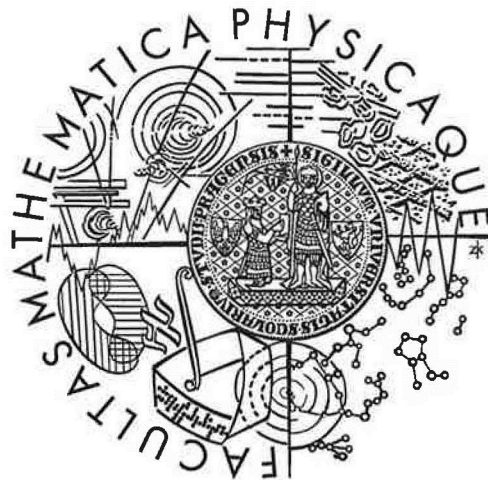


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Martin Sourada

### Minkowského a Kerrův prostoročas z kruhové orbity

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák, Dr.

Studijní program: Obecná fyzika

2009

Děkuji vedoucímu bakalářské práce doc. Oldřichu Semerákovi za cenné rady a připomínky i za ochotu, se kterou ke mně přistupoval po celou dobu vzniku této práce. Umožnil mi pracovat na tématu, které značně rozšířilo mé obzory.

Dále děkuji Marku Bernátovi za cenné rady a připomínky k diferenciální geometrii i za diskuse k různým výsledkům této práce.

Též bych chtěl poděkovat rodičům, kteří mi umožnili a stále umožňují věnovat se studiu a poskytují tolik potřebnou podporu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 19. 7. 2009

Martin Sourada

# OBSAH

Úvod	ix
Použité značení a konvence	x
<b>1 Rotující kotouč v plochém prostoročase</b>	<b>1</b>
1.1 Základní transformace a vztahy	1
1.1.1 Ortonormální báze (tetráda)	2
1.1.2 Christoffelovy symboly	5
1.2 Geodetiky testovacích částic	5
1.3 Prostorová geometrie	7
1.3.1 Lokální měření času	7
1.3.2 Lokální měření vzdáleností	8
1.3.3 Lokální měření rychlostí	10
1.3.4 Rozměry disku	13
1.3.5 Vložení prostorové metriky do 3-rozměrného nadprostoru	14
1.4 Radarová vzdálenost v radiálním směru	16
1.5 Zrychlení rotujícího pozorovatele	18
1.6 Radiální pohyb	18
1.7 Sagnacův efekt	20
<b>2 Kruhové orbity v Kerrově prostoročase</b>	<b>22</b>
2.1 Rotující pozorovatelé v Kerrově prostoročase	22
2.2 Kovariantní derivace	24
2.3 Zrychlení	26
2.4 Význační pozorovatelé v ekvatoriální rovině	26
2.4.1 Statičtí pozorovatelé	26
2.4.2 Pozorovatelé s nulovým momentem hybnosti	28
2.4.3 Carterovi pozorovatelé	28
2.4.4 Geodetičtí pozorovatelé	29
2.4.5 Extremálně urychlení pozorovatelé	30
2.5 Frenetova-Serretova tetráda	30
2.6 Hydrodynamické vlastnosti	32
2.7 Měření délek	33
2.8 Frekvenční posuv vůči nekonečnu	34
2.9 Gravitomagnetický hodinový efekt	35
<b>Závěr</b>	<b>39</b>
<b>Literatura</b>	<b>41</b>

Název práce: Minkowského a Kerrův prostoročas z kruhové orbity  
Autor: Martin Sourada  
Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky  
Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák, Dr.  
E-mail vedoucího: Oldrich.Semerak@mff.cuni.cz

Abstrakt: Cílem práce je podrobně rozebrat různé způsoby měření v rigidně rotující soustavě v plochém prostoročase a získané zkušenosti poté aplikovat při řešení Ehrenfestova paradoxu a na kongruence stacionárních pozorovatelů na kruhových orbitách v Kerrově prostoročase. Speciálně jsme se zabývali znázorněním průběhů důležitých fyzikálně měřitelných veličin a efektů v Kerrově prostoročase.

Klíčová slova: obecná teorie relativity, paradox rotujícího kotouče, kruhové orbity, Minkowského prostoročas, Kerrův prostoročas, černé díry.

Title: Space-times of Minkowski and Kerr from a circular orbit  
Author: Martin Sourada  
Department: Institute of Theoretical Physics  
Supervisor: doc. RNDr. Oldřich Semerák, Dr.  
Supervisor's e-mail address: Oldrich.Semerak@mff.cuni.cz

Abstract: The aim of this work is to compare various methods of measurement in rigidly rotating frames in flat spacetime and then apply the acquired experience in solving the Ehrenfest paradox and to congruences of stationary observers on circular orbits in Kerr spacetime. Specifically, we are interested in dependence of various physically measurable quantities and effects on angular velocity of the observer.

Keywords: general relativity, Ehrenfest paradox, circular orbits, Minkowski space-time, Kerr space-time, black holes.



## ÚVOD

---

Problém měření, jenž je velmi dobře zvládnut v inerciálních systémech speciální relativity, se stává mnohem obtížnějším v urychlených systémech a / nebo v zakřiveném prostoročase. V této práci se problémem zabýváme v Kerrově prostoročase. Uvažujeme jednoduchá prostoro-časová měření, která by tam mohli provést pozorovatelé obíhající po kruhových ekvatoriálních drahách, a studujeme závislost naměřených výsledků na úhlové rychlosti pozorovatelů.

V první kapitole nejdříve probereme základní otázky měření v urychlených systémech v plochém prostoročase, a to na příkladu rotujícího disku. S přechodem do rotující soustavy ve speciální relativitě souvisí tzv. Ehrenfestův paradox. Jeho řešením se již zabývalo mnoho autorů v rámci různých pohledů, za využití jak dynamických, tak kinematických metod, čistě geometrických přístupů, vysvětlení pomocí kontrakce délek, až po cimrmanovský úkrok stranou, kdy prohlásíme, že původně stojící ideálně tuhý disk vlastně ani nelze izotropně roztočit. Pro pochopení problému podrobně rozebereme důsledky přechodu do rotující soustavy a spočítáme, jaké hodnoty by u typických prostoro-časových údajů naměřili pozorovatelé ko-rotující se soustavou.

V druhé kapitole pak přejdeme do Kerrova prostoročasu, kde do hry přistupuje i „skutečná“ křivost a obecně relativistický efekt *draggingu*. Soustředíme se na měření, která by mohli vykonat stacionární pozorovatelé na kruhových drahách kolem rotující černé díry, a na výsledcích doložíme význačnost některých speciálních kongruencí těchto pozorovatelů. V polích daných symetrií představují stacionární kruhové orbity „nejsymetričtější“ druh pohybu, který zároveň může dobře aproximovat skutečný pohyb látky v okolí astrofyzikálních černých děr (např. v jádrech galaxií či v rentgenových dvojhvězdách).

Vlastnostmi daného typu pozorovatelů se již zabývala řada prací, avšak většinou jsou v nich výsledky formulovány pomocí souřadnicových složek určitých tenzorů. Volnost ve výběru souřadného systému je jednou z krás obecné teorie relativity, na druhé straně tam ale souřadnicové složky veličin nemají invariantní význam a typicky ani neodpovídají výsledku nějakého fyzikálního měření. V této práci se proto zaměřujeme na tetradové složky veličin a invarianty, konkrétně na radiální tetradovou komponentu zrychlení, první Frenetovu-Serretovu torzi, vlastní obvod orbit a jejich vlastní vzdálenost od horizontu, na frekvenční posuv vůči nekonečnu a tzv. gravitomagnetický hodinový efekt.

## POUŽITÉ ZNAČENÍ A KONVENCE

---

V části této práce je pro zápis tenzorů a tenzorových operací použit abstraktní, bezsložkový formalismus, který není v oboru příliš obvyklý, přesto jsem se ho rozhodl použít pro jeho eleganci a v některých ohledech i větší přehlednost / jednoduchost. Pro snazší orientaci v následujícím textu uvádím dále stručný přehled.

Dějištěm obecné relativity jsou pseudo-riemannovské (dále jen riemannovské) variety  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  s afinní konexí, lokálně isometrické Minkowskému prostoru (někdy též prostoročasu)  $(M^4, \boldsymbol{\eta})$ , což je čtyřdimenzionální metrický vektorový prostor nad tělesem reálných čísel s pseudo-metrikou (dále jen metrikou) se signaturou  $(- + + +)$ <sup>1)</sup>. V každém bodě  $X \in \mathcal{M}$  existuje tečný prostor  $T_X\mathcal{M}$ . Sjednocením těchto prostorů přes všechny  $X \in \mathcal{M}$  dostaneme tečný bandl  $\mathcal{T}\mathcal{M}$ . Podobně existují duály k těmto objektům – kotečný prostor  $T_X^*\mathcal{M}$  a kotečný bandl  $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ .

Prvky tečného, resp. kotečného prostoru jsou vektory, resp. jedna-formy (krátce formy, někdy též nazývané kovektory), řezy tečného, resp. kotečného bandlu jsou vektorová pole, resp. pole forem. Definice formy říká, že je to lineární funkcionál, který vektoru přiřadí číslo, v našem případě reálné, tj. zobrazení  $\alpha : T_X\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . Působení formy  $\alpha$  na vektor  $\mathbf{X}$  obvykle značíme  $\alpha(\mathbf{X})$ <sup>2)</sup>.

Na varietě lze kromě vektorových polí a polí forem zavést tenzorová pole obecného řádu. Tenzorové pole typu  $(r, s)$  zavedeme jako

$$\mathbf{T}_s^r \in \left( \bigotimes_{i=1}^r \mathcal{T}\mathcal{M} \right) \otimes \left( \bigotimes_{i=1}^s \mathcal{T}^*\mathcal{M} \right). \quad (1)$$

Indexy  $r$  a  $s$  obvykle vynecháváme, pokud je zřejmé o tenzor jakého typu se jedná. Na celé varietě je definováno nedegenerované hladké symetrické bilineární tenzorové pole  $\mathbf{g} \in \mathcal{T}^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{T}^*\mathcal{M}$ , které prvkům z  $T_X\mathcal{M} \otimes T_X\mathcal{M}$  přiřazuje reálné číslo. Tomuto poli říkáme metrický tenzor nebo krátce metrika.

Báze  $\mathcal{T}\mathcal{M}$  budeme obvykle značit  $\mathbf{e}_\alpha$ , báze  $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$  pak  $\boldsymbol{\varepsilon}^\beta$ , přičemž pro navzájem duální báze platí  $\boldsymbol{\varepsilon}^\beta(\mathbf{e}_\alpha) = \delta_\alpha^\beta$ . Speciálně souřadnicové báze tvoří tečná vektorová pole k jednotlivým souřadnicím, obvykle je budeme značit  $\boldsymbol{\partial}_\alpha \equiv \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^\alpha}$ , k nim duální báze pak  $\mathbf{d}x^\beta$ , přičemž opět platí  $\mathbf{d}x^\beta(\boldsymbol{\partial}_\alpha) = \delta_\alpha^\beta$ . Vektory lze do konkrétní báze rozepsat jako  $\mathbf{X} = X^\mu \mathbf{e}_\mu$ , formy jako  $\alpha = \alpha_\mu \boldsymbol{\varepsilon}^\mu$ , obecné tenzory jako  $\mathbf{T} = T_{\alpha\beta\dots}^{\mu\nu\dots} \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^\alpha \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^\beta \otimes \dots$ <sup>3)</sup> Rozpisem do souřadnicové báze lze též snadno nahlédnout, co znamená aplikování vektoru

<sup>1)</sup> V některých zdrojích se lze též setkat se signaturou  $(+ - - -)$ .

<sup>2)</sup> Lze zavést i opačně, tj. formy jako základní objekty a vektory pak jako funkcionály přiřazující formám číslo.

<sup>3)</sup> Pro snazší rozlišení souřadnicových a tetradových složek značíme tetradové indexy stříškou.

na funkci:

$$\mathbf{X}f = X^\mu \partial_\mu f = X^\mu f_{,\mu}. \quad (2)$$

Lieovu derivaci vektorového pole  $\mathbf{Y}$  podle vektorového pole  $\mathbf{X}$  zavedeme jako [1]

$$\mathcal{L}_\mathbf{X}\mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \quad (3)$$

kde komutátor vektorových polí je zaveden pomocí jeho působení na funkci:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f = (\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X})f = \mathbf{X}(\mathbf{Y}f) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}f). \quad (4)$$

V souřadnicové bázi lze psát

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = X^\alpha Y^\beta_{,\alpha} \partial_\beta - Y^\beta X^\alpha_{,\beta} \partial_\alpha. \quad (5)$$

Lieova derivace navíc splňuje Leibnizovo pravidlo a lze tedy lieovsky derivovat obecné tenzory. Speciálním případem je komutátor bázových polí, který lze zapsat jako [1]

$$[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\gamma, \quad (6)$$

kde  $C^\gamma_{\alpha\beta}$  jsou strukturní koeficienty. Pro souřadnicovou bázi jsou identicky nula.

Operaci úžení (též kontrakce) zavedeme jako zobrazení  $C : \mathcal{T}\mathcal{M} \otimes \mathcal{T}^*\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  předpisem  $\forall \alpha \in \mathcal{T}^*\mathcal{M}, \forall \mathbf{X} \in \mathcal{T}\mathcal{M}: C(\mathbf{X}, \alpha) \equiv \langle \mathbf{X}, \alpha \rangle \equiv \alpha(\mathbf{X}) \equiv \mathbf{X}(\alpha)$ . Budeme-li aplikovat operaci úžení na obecný tenzor řádu  $(r, s)$ , pak nebude-li uvedeno jinak, budeme úžit v poslední kontravariantní složce a první kovariantní, tj.

$$C(T^{\alpha\dots\beta\gamma}_{\mu\nu\kappa\dots} \mathbf{e}_\alpha \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\gamma \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^\mu \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^\nu \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^\kappa \otimes \dots) \equiv T^{\alpha\dots\beta\sigma}_{\sigma\nu\kappa\dots} \mathbf{e}_\alpha \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_\beta \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^\nu \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^\kappa \otimes \dots \quad (7)$$

Úžení budeme obvykle značit pomocí kulatých závorek, což umožňuje snadno zapsat úžení i ve více indexech:

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \equiv \mathbf{g}(\mathbf{Y} \otimes \mathbf{X}) \equiv g_{\mu\nu} Y^\nu X^\mu, \quad (8)$$

$$\mathbf{g}^{-1}(\alpha, \beta) \equiv \mathbf{g}^{-1}(\beta \otimes \alpha) \equiv g^{\mu\nu} \beta_\nu \alpha_\mu, \quad (9)$$

$$\mathbf{g}(\cdot, \mathbf{Y} \otimes \mathbf{X}) = \mathbf{Y} \otimes \mathbf{g}(\cdot, \mathbf{X}) = g_{\mu\nu} X^\nu Y^\kappa \partial_\kappa \otimes \mathbf{d}x^\mu, \quad (10)$$

$$\mathbf{g}^{-1}(\alpha \otimes \beta, \cdot) = \mathbf{g}^{-1}(\alpha, \cdot) \otimes \beta = g^{\mu\nu} \alpha_\mu \beta_\kappa \partial_\nu \otimes \mathbf{d}x^\kappa. \quad (11)$$

Metrický tenzor lze v souřadnicové bázi zapsat

$$\mathbf{g} = g_{\mu\nu} \mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu. \quad (12)$$

Pro jeho duál, tedy tenzorové pole  $\mathbf{g}^{-1} \equiv \mathbf{g}^* \in \mathcal{T}\mathcal{M} \otimes \mathcal{T}\mathcal{M}$ , pro které  $\langle \mathbf{g}^{-1}, \mathbf{g} \rangle = \mathbf{I}$  (kde  $\mathbf{I} \equiv \mathbf{e}_\mu \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^\mu$ ) a které nazýváme inverzní metrikou, platí

$$\mathbf{g}^{-1} = g^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu. \quad (13)$$

K obvyklejšímu zápisu metriky a její inverze lze dospět následujícím způsobem:

$$ds^2 = \mathbf{g}(\partial_\mu, \partial_\nu) dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{d}x^\mu, \mathbf{d}x^\nu) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right). \quad (15)$$

tenzor	abstraktní zápis	složkový zápis
metrika	$T^*\mathcal{M} \otimes T^*\mathcal{M} \ni \mathbf{g} = g_{\mu\nu} \mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu$	$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu; g_{\mu\nu}$
inverzní metrika	$\mathcal{T}\mathcal{M} \otimes \mathcal{T}\mathcal{M} \ni \mathbf{g}^{-1} = g^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu$	$(\frac{\partial}{\partial s})^2 = g^{\mu\nu} (\frac{\partial}{\partial x^\mu}) (\frac{\partial}{\partial x^\nu}); g^{\mu\nu}$
vektorové pole	$\mathbf{X} \in \mathcal{T}\mathcal{M}$	$X^\mu$
(čtyř)rychlost	$T_X\mathcal{M} \ni \mathbf{u} = \frac{dx}{d\tau}$	$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$
(čtyř)zrychlení	$T_X\mathcal{M} \ni \mathbf{a} = \frac{D\mathbf{u}}{D\tau} \equiv \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$	$a^\mu = \frac{Du^\mu}{D\tau} \equiv u^\mu{}_{;\alpha} u^\alpha$
(čtyř)hybnost	$T_X^*\mathcal{M} \ni \mathbf{p} \equiv m\mathbf{u}^\flat$	$p_\mu \equiv mu_\mu = mg_{\mu\nu} u^\nu$

Tabulka 1: Příklady tenzorů

Metrika dále definuje zobrazení  $\widehat{\mathbf{g}} : \mathcal{T}\mathcal{M} \rightarrow T^*\mathcal{M}$ . Toto je definováno jako zúžení vektoru z prostoru  $\mathcal{T}\mathcal{M}$  s metrikou a budeme ho značit béčkem <sup>(b)</sup>, tj.

$$\mathbf{X}^b \equiv \widehat{\mathbf{g}}(\mathbf{X}) \equiv \mathbf{g}(\mathbf{X}, \cdot) = g_{\nu\mu} X^\nu \boldsymbol{\varepsilon}^\mu = X_\mu \boldsymbol{\varepsilon}^\mu. \quad (16)$$

Obdobně definujeme křížek <sup>#</sup>:

$$\boldsymbol{\alpha}^\# \equiv \widehat{\mathbf{g}}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{g}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}, \cdot) = g^{\nu\mu} \alpha_\nu \mathbf{e}_\mu = \alpha^\mu \mathbf{e}_\mu. \quad (17)$$

Pro úplnost ještě naznačme, jakým způsobem pracují tato zobrazení na tenzorech vyššího řádu:

$$\mathbf{g}^\# = g^{\nu\mu} g_{\alpha\beta} \langle \partial_\nu, \mathbf{d}x^\alpha \rangle \partial_\mu \otimes \mathbf{d}x^\beta = g_\beta^\mu \partial_\mu \otimes \mathbf{d}x^\beta (= \partial_\mu \otimes \mathbf{d}x^\mu). \quad (18)$$

V Tabulce 1 je uvedeno několik příkladů tenzorů běžně používaných v relativistické fyzice.

Na riemannovských varietách obecné relativity se krom metricky ještě užívá afinní, konkrétně Riemannovy (či Levi-Civitovy) konexe. Afinní konexe přiřazuje každému vektorovému poli  $\mathbf{X} \in \mathcal{T}\mathcal{M}$  diferenciální operátor  $\nabla_{\mathbf{X}}$  splňující následující vztahy [1]:  $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$  je lineární v  $\mathbf{X}$ ,  $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$  je lineární v  $\mathbf{Y}$ ,  $\nabla_{\mathbf{X}}$  na funkci  $f$  definovanou na  $\mathcal{M}$  aplikuje  $\mathbf{X}$  na  $f$  a  $\nabla_{\mathbf{X}}$  splňuje Leibnizovo pravidlo. Operátor kovariantní derivace definujeme vztahem

$$\nabla\mathbf{Y}(\mathbf{X}) \equiv \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \quad (19)$$

pro všechna  $\mathbf{X} \in \mathcal{T}\mathcal{M}$  a všechna  $\mathbf{Y}$  tenzorová pole na  $\mathcal{M}$ . Rozpisem do konkrétní báze  $\mathbf{e}_\alpha$  dostaneme

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \nabla_{\mathbf{X}}Y^\alpha \mathbf{e}_\alpha = (\mathbf{X}Y^\alpha)\mathbf{e}_\alpha + Y^\alpha \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{e}_j = (\mathbf{X}Y^\alpha)\mathbf{e}_\alpha + Y^\alpha \Gamma^\beta{}_\alpha(\mathbf{X})\mathbf{e}_\beta, \quad (20)$$

kde  $\Gamma^\beta{}_\alpha$  jsou jedna-formy. V souřadnicové bázi pak

$$\Gamma^\gamma{}_\alpha(\mathbf{e}_\beta) \equiv \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}, \quad (21)$$

kde  $\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}$  se nazývají Christoffelovy symboly a platí [1]

$$g_{\alpha\delta} \Gamma^\delta{}_{\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\gamma\alpha,\beta} - g_{\beta\gamma,\alpha}). \quad (22)$$

V tetrádové bázi se  $\Gamma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \equiv \eta_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} \Gamma^{\hat{\gamma}}{}_{\hat{\beta}}$  nazývají jedna-formy rotace, jsou antisymetrické a Ricchiho rotační koeficienty  $\Gamma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}} \equiv \Gamma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(\mathbf{e}_{\hat{\gamma}})$  lze vyjádřit několika různými způsoby [2]:

$$\Gamma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}} = \frac{1}{2}(C_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}\hat{\beta}} + C_{\hat{\beta}\hat{\alpha}\hat{\gamma}} + C_{\hat{\gamma}\hat{\alpha}\hat{\beta}}) = -e_{(\hat{\alpha})\alpha;\beta} e_{(\hat{\beta})}^\alpha e_{(\hat{\gamma})}^\beta. \quad (23)$$

název	abstraktní zápis	složkový zápis
tenzor	$\mathbf{T}$	$T_{\mu\nu\dots}^{\alpha\beta\dots}$
infinitesimální vektor	$\delta\mathbf{X}$	$\delta X^\mu$
vlastní čas	$\tau$	$\tau$
Lorentzův faktor	$\gamma$	$\gamma$
klidová hmotnost	$m$	$m$
souřadnicová báze	$\partial_\mu$	—
duální souřadnicová báze	$\mathbf{d}x^\mu$	—
tetráda	$\mathbf{e}_{\hat{\mu}}$	$e_{(\hat{\mu})}^\nu$
duální tetráda	$\varepsilon^{\hat{\mu}}$	$\varepsilon_{\nu}^{(\hat{\mu})}$
Killingovo pole příslušné stacionaritě	$\boldsymbol{\eta}$	$\eta^\mu$
Killingovo pole příslušné axisymetrii	$\boldsymbol{\xi}$	$\xi^\mu$
tenzorový součin	$\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$	$X^\mu Y^\nu$
symetrizovaný tenzorový součin	$\mathbf{X} \odot \mathbf{Y}$	$X^{(\mu} Y^{\nu)}$
antisymetrizovaný tenzorový součin	$\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$	$X^{[\mu} Y^{\nu]}$
metrika	$\mathbf{g} = g_{\mu\nu} \mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu$	$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu; g_{\mu\nu}$
čtyřrychlost	$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$	$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$
zvýšení indexu	$\boldsymbol{\alpha}^\sharp$	$g^{\mu\nu} \alpha_\nu$
snížení indexu	$\mathbf{X}^\flat$	$g_{\mu\nu} X^\nu$
projekční tenzor na $\perp \mathbf{u}$	$\mathbf{h} = \mathbf{g}^\sharp + \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}^\flat$	$h^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu + u^\mu u_\nu$
úžení	$\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{X} \rangle = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha})$	$\alpha_\mu X^\mu$
skalární součin	$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$	$g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu = X^\mu Y_\mu = X_\nu Y^\nu$
norma vektoru, formy	$\ \mathbf{X}\ , \ \boldsymbol{\alpha}\ $	—
parciální derivace ve směru $\mathbf{Y}$	$\partial_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}$	$Y^\alpha X^\mu{}_{,\alpha}$
kovariantní derivace ve směru $\mathbf{Y}$	$\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}$	$Y^\alpha X^\mu{}_{;\alpha}$
absolutní derivace	$\frac{D\mathbf{X}}{D\tau} = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{X}$	$\frac{DX^\mu}{D\tau} = u^\nu X^\mu{}_{;\nu}$
(čtyř)zrychlení	$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{u}}{D\tau} \equiv \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}$	$a^\mu = \frac{Du^\mu}{D\tau} \equiv u^\mu{}_{;\alpha} u^\alpha$
tetrádové složky tenzoru	např. $\varepsilon^{\hat{\mu}}(\mathbf{X})$	např. $X^{\hat{\mu}}$
lagrangián	$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$
průmět na $n$ -rozměrný podprostor	${}^{(n)}\mathbf{T}$	${}^{(n)}T_{\mu\nu\dots}^{\alpha\beta\dots}$

Tabulka 2: Použité značení

Antisymetrizaci značíme

$$\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y} - \mathbf{Y} \otimes \mathbf{X}), \quad X^{[\mu} Y^{\nu]} \equiv \frac{1}{2}(X^\mu Y^\nu - X^\nu Y^\mu), \quad (24)$$

symetrizaci

$$\mathbf{X} \odot \mathbf{Y} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \otimes \mathbf{X}), \quad X^{(\mu} Y^{\nu)} \equiv \frac{1}{2}(X^\mu Y^\nu + X^\nu Y^\mu). \quad (25)$$

Kvadrát normy vektoru/formy definujeme pomocí metriky jako

$$\|\mathbf{X}\|^2 \equiv \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu, \quad (26)$$

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|^2 \equiv \mathbf{g}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = g^{\mu\nu} \alpha_\mu \alpha_\nu, \quad (27)$$

skalární součin budeme značit

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} \equiv \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = X_\mu Y^\mu, \quad (28)$$

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} \equiv \mathbf{g}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \alpha^\mu \beta_\mu. \quad (29)$$

Použitá značení je shrnuté v Tabulce 2.

V této práci používáme geometrizované jednotky, ve kterých

$$c = 1 = G. \quad (30)$$

Římské indexy používáme pro celý prostoročas (obvykle 4-rozměrný, časovou složku číslujeme nulou, prostorové 1–3), latinské pak pro konkrétní podprostor (obvykle 3-rozměrný, složky číslujeme od 1 do 3).

## ROTUJÍCÍ KOTOUČ V PLOCHÉM PROSTOROČASE

---

V této kapitole se budeme věnovat geometrii na rotujícím kotouči. Jednotlivé výsledky budeme často počítat několikrát různými způsoby, abychom ukázali, že při pečlivém dodržování vztahů speciální relativity lze dosáhnout jednoznačných výsledků i z pohledu pozorovatelů ko-rotujících spolu s kotoučem. Postupně budeme směřovat až k vyřešení Ehrenfestova paradoxu rotujícího kotouče. Na konci kapitoly si pak ukážeme několik způsobů, které v principu umožňují v plochem prostoročase rozlišit mezi inerciálním a rotujícím pozorovatelem.

### 1.1 Základní transformace a vztahy

Protože předmětem našeho zájmu je soustava spojená s rotujícím kotoučem, je výhodné použít pro prostorovou část metriky válcové souřadnice. Budeme-li navíc vyšetřovat pouze jevy / měření odehrávající se v rovině rotace<sup>1)</sup>, můžeme bez újmy na obecnosti pracovat s následující metrikou popisující Minkowského prostoročas v inerciální soustavě (obvykle ji budeme značit jako IF – inertial frame):

$$\mathbf{g} = -dT \otimes dT + dR \otimes dR + R^2 d\Phi \otimes d\Phi, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{g}^{-1} = -\partial_T \otimes \partial_T + \partial_R \otimes \partial_R + \frac{1}{R^2} \partial_\Phi \otimes \partial_\Phi. \quad (1.2)$$

Provedme galileovskou transformaci souřadnic do systému rotujícího vůči IF konstantní úhlovou rychlostí  $\omega$  (obvykle jej budeme značit RF – rotating frame):

$$t \equiv T, \quad \varphi \equiv \Phi - \omega T, \quad r \equiv R, \quad (1.3)$$

což dává transformace mezi souřadnicovými bázemi

$$\begin{aligned} dT &= dt, & dt &= dT, \\ dR &= dr, & dr &= dR, \\ d\Phi &= d\varphi + \omega dt, & d\varphi &= d\Phi - \omega dT, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \partial_T &= \partial_t - \omega \partial_\varphi, & \partial_t &= \partial_T + \omega \partial_\Phi, \\ \partial_R &= \partial_r, & \partial_r &= \partial_R, \\ \partial_\Phi &= \partial_\varphi, & \partial_\varphi &= \partial_\Phi. \end{aligned} \quad (1.5)$$

---

<sup>1)</sup> z-ovou souřadnici budeme v této kapitole pro jednoduchost vynechávat, uvažujeme však stále 4-rozměrný prostoročas, proto hovoříme v dalším textu například o tetrádě, byť jsou uvedeny vektory pouze tři.

Dosadíme-li tyto transformace do (1.1) a (1.2), dostaneme metriku v tzv. Bornových souřadnicích:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= -\mathbf{d}t \otimes \mathbf{d}t + \mathbf{d}r \otimes \mathbf{d}r + r^2(\mathbf{d}\varphi + \omega \mathbf{d}t) \otimes (\mathbf{d}\varphi + \omega \mathbf{d}t) \\ &= -\gamma^{-2} \mathbf{d}t \otimes \mathbf{d}t + \mathbf{d}r \otimes \mathbf{d}r + 2r^2 \omega \mathbf{d}t \odot \mathbf{d}\varphi + r^2 \mathbf{d}\varphi \otimes \mathbf{d}\varphi, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{-1} &= -(\partial_t - \omega \partial_\varphi) \otimes (\partial_t - \omega \partial_\varphi) + \partial_r \otimes \partial_r + r^{-2} \partial_\varphi \otimes \partial_\varphi \\ &= -\partial_t \otimes \partial_t + \partial_r \otimes \partial_r + 2\omega \partial_t \odot \partial_\varphi + r^{-2} \gamma^{-2} \partial_\varphi \otimes \partial_\varphi, \end{aligned} \quad (1.7)$$

kde jsme označili  $\gamma \equiv (1 - \omega^2 r^2)^{-1/2}$ . Tuto metriku lze najít například v [3–9].

Můžeme si všimnout dvou vlastností. Metrika závisí pouze na  $r$ , avšak vidíme, že souřadnice  $t$  má význam času pouze v intervalu  $0 \leq |\omega r| < 1$ . To je přirozené omezení, neboť na vnější hranici tohoto intervalu rychlost dosahuje rychlosti světla, které hmotný pozorovatel nemůže v konečném čase dosáhnout. Prvním z důsledků speciální teorie relativity pro rotující kotouč je tedy omezení jeho velikosti.

Dále vidíme, že v metrice vystupuje křížový člen  $2r^2 \omega \mathbf{d}t \odot \mathbf{d}\varphi$ . Pro odvození projekčního tenzoru na prostor  $\perp \mathbf{u}$  pozorovatelů v RF tedy nelze pouze škrtnout členy s  $\mathbf{d}t$ . Čtyřrychlost pozorovatelů v RF je v IF z definice

$$\mathbf{u} = \gamma(\partial_T + \omega \partial_\Phi), \quad (1.8)$$

transformací (1.5) dostaneme

$$\mathbf{u} = \gamma \partial_t \quad (1.9)$$

a snížíme index:

$$\mathbf{u}^b = -\gamma^{-1} \mathbf{d}t + \gamma r^2 \omega \mathbf{d}\varphi. \quad (1.10)$$

Projekční tenzor na prostor kolmý k  $\mathbf{u}$  pak určíme

$$\mathbf{h} \equiv \mathbf{g}^\sharp + \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}^b = \partial_r \otimes \mathbf{d}r + \gamma^2 \omega r^2 \partial_t \otimes \mathbf{d}\varphi + \partial_\varphi \otimes \mathbf{d}\varphi \quad (1.11)$$

a snížením indexu dostáváme metriku tohoto prostoru (viz. [5–9]):

$${}^{(3)}\mathbf{g} \equiv \mathbf{h}^b = \mathbf{d}r \otimes \mathbf{d}r + \gamma^2 r^2 \mathbf{d}\varphi \otimes \mathbf{d}\varphi. \quad (1.12)$$

Podrobněji se touto metrikou budeme zabývat v sekci *Prostorová geometrie*.

### 1.1.1 Ortonormální báze (tetráda)

Prostoročas nějaké kongruence pozorovatelů je možno popsat také pomocí pole jimi nesených ortonormálních tetrád. V našem případě bychom rádi popsali pozorovatele v RF. Jejich tetrádu můžeme získat například lokální Lorentzovou transformací z IF nebo vhodnou ortonormalizací souřadnicové báze RF.

Využijme druhého postupu. Časový vektor této tetrády je z definice roven čtyřrychlostí pozorovatelů stojících v RF, radiální vektor můžeme ztotožnit s radiálním vektorem souřadnicové báze RF – je kolmý na zbylé vektory a je i správně normalizován. Zbývající vektor dopočteme Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací<sup>1)</sup>:

$$Ae_\varphi = \partial_\varphi - \frac{\partial_\varphi \cdot \mathbf{e}_t}{\|\mathbf{e}_t\|^2} \mathbf{e}_t = \partial_\varphi + (\partial_\varphi \cdot \mathbf{e}_t) \mathbf{e}_t = \partial_\varphi + \gamma^2 \left( \partial_\Phi \cdot (\partial_T + \omega \partial_\Phi) \right) \partial_t,$$

<sup>1)</sup> V následujícím textu je použita poněkud nestandardní normalizace  $\|\mathbf{e}_\varphi\|^2 = r^2$ . Byla zvolena proto, aby normy vektorů/forem tetrády pozorovatelů v RF byly schodné s normami vektorů/forem souřadnicové báze v IF.



$$A\mathbf{e}_{\hat{\varphi}} = \partial_{\varphi} + \gamma^2\omega r^2\partial_t, \quad (1.13)$$

$$\|\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}\|^2 = r^2,$$

$$\frac{\|\partial_{\varphi} + \gamma^2\omega r^2\partial_t\|^2}{A^2} = r^2,$$

$$\frac{\|\partial_{\Phi} + \gamma^2\omega r^2(\partial_T + \omega\partial_{\Phi})\|^2}{A^2} = r^2,$$

$$\|\gamma^2\partial_{\Phi} + \gamma^2\omega r^2\partial_T\|^2 = A^2r^2,$$

$$\gamma^4r^2 - \gamma^4\omega^2r^4 = r^2A^2,$$

$$A^2 = \gamma^2 \Rightarrow \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} = \gamma^{-1}\partial_{\varphi} + \gamma\omega r^2\partial_t. \quad (1.14)$$

Obdobným způsobem lze spočítat duální bázi. Výsledné transformace mezi tetrádovou bází a souřadnicovými bázemi IF a RF jsou (např. [8]):

$$\mathbf{e}_{\hat{t}} = \gamma\partial_t = \gamma(\partial_T + \omega\partial_{\Phi}),$$

$$\mathbf{e}_{\hat{r}} = \partial_r = \partial_R, \quad (1.15)$$

$$\mathbf{e}_{\hat{\varphi}} = \gamma^{-1}\partial_{\varphi} + \gamma\omega r^2\partial_t = \gamma(\partial_{\Phi} + \omega R^2\partial_T),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{t}} = \gamma^{-1}dt - \gamma\omega r^2d\varphi = \gamma(dT - \omega R^2d\Phi),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{r}} = dr = dR, \quad (1.16)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\varphi}} = \gamma d\varphi = \gamma(d\Phi - \omega dT),$$

$$\partial_t = \gamma^{-1}\mathbf{e}_{\hat{t}},$$

$$\partial_T = \gamma(\mathbf{e}_{\hat{t}} - \omega\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}),$$

$$\partial_r = \mathbf{e}_{\hat{r}},$$

$$\partial_R = \mathbf{e}_{\hat{r}},$$

$$\partial_{\varphi} = \gamma(\mathbf{e}_{\hat{\varphi}} - \omega r^2\mathbf{e}_{\hat{t}}),$$

$$\partial_{\Phi} = \gamma(\mathbf{e}_{\hat{\varphi}} - \omega r^2\mathbf{e}_{\hat{t}}), \quad (1.17)$$

$$dt = \gamma(\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{t}} + \omega r^2\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\varphi}}),$$

$$dT = \gamma(\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{t}} + \omega r^2\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\varphi}}),$$

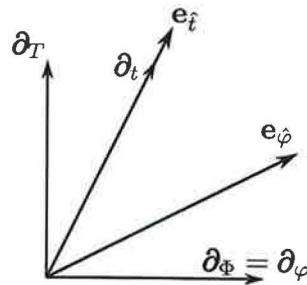
$$dr = \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{r}},$$

$$dR = \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{r}},$$

$$d\varphi = \gamma^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\varphi}},$$

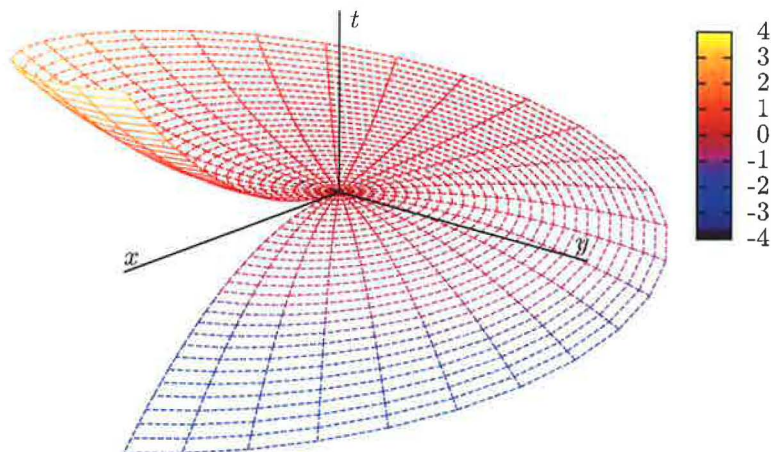
$$d\Phi = \gamma(\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\varphi}} + \omega\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{t}}), \quad (1.18)$$

Vztahy mezi jednotlivými bázemi jsou znázorněny v Obrázku 1.1.



Obrázek 1.1: Vztahy mezi bázemi, pro přehlednost jsme vynechali radiální bázové vektory.

Na tomto místě je vhodné si položit otázku, zda je možné pomocí této ortonormální tetrády sestavit globální souřadný systém. Podíváme-li se na transformační vztahy (1.15)



Obrázek 1.2: Pokus o sestrojení nadplochy kolmé ke čtyřrychlosti

a (1.17), mohlo by se zdát, že ano. Pokud ovšem začneme takovýto systém konstruovat narazíme na problém znázorněný na Obrázku 1.2. Půjdeme-li na něm po křivce kolmé k  $\mathbf{e}_t$  a  $\mathbf{e}_r$ , dorazíme po čase do místa, které má stejné prostorové souřadnice jako počátek našeho pohybu, avšak různou časovou souřadnici, což je v rozporu s očekáváním.

Tento problém lze názorněji rozebrat na příkladu synchronizace hodin na rotujícím kotouči. Mějme na souřadnicích  $r = r_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$  pozorovatele Honzu který si s sebou nese ideální hodiny. Honza si chce synchronizovat svůj čas s ostatními pozorovateli rozmístěnými na obvodu kotouče. Provede tedy synchronizaci se sousedním pozorovatelem ve směru rotace, ten provede synchronizaci hodin s dalším a tak dále, až se dostaneme k Zuzaně, která je vedle Honzy proti směru rotace.

Porovná-li nyní Honza svůj čas se Zuzaniným, zjistí, že se časy liší. Podívejme se proč. Uvažujme, že dva sousední pozorovatelé jsou od sebe vzdáleni o malý úhel  $\delta\varphi$ . Synchronizujeme-li hodiny, znamená to, že nastavíme

$$\delta\hat{t} = 0. \quad (1.19)$$

Složky vektorů se ovšem transformují podle (1.18) a ihned vidíme, že

$$\delta t = \gamma\omega r^2 \delta\hat{\varphi} = \gamma^2\omega r^2 \delta\varphi \neq 0, \quad (1.20)$$

a tedy po vysčítání (resp. v limitě po zintegrování) přes celý obvod kotouče dostaneme rozdíl mezi Zuzaniným a Honzovým souřadnicovým časem  $2\pi\gamma^2\omega r^2$ . Vidíme tedy, že není možné globálně provést standardní synchronizaci hodin, a tedy ani nelze zavést globální ortonormální souřadnice spojené s rotujícím diskem<sup>1)</sup>. Podrobněji je problém synchronizace hodin na rotujícím disku rozebrán například v [10].

<sup>1)</sup> Formální důkaz se opírá o Frobeniův teorém. Ten říká, že pokud je vířivost nenulová, nelze sestřit integrální podvarietu kolmou na pole čtyřrychlosti zkoumané kongruence pozorovatelů. Vířivost je

### 1.1.2 Christoffelovy symboly

Protože používáme křivočaré souřadnice, jsou některé ze Christoffelových symbolů obecně nenulové. Snadno lze ukázat, že v IF jsou to právě a jen

$$-\Gamma_{R\Phi\Phi} = \Gamma_{\Phi\Phi R} = \Gamma_{\Phi R\Phi} = R, \quad (1.23)$$

$$\Gamma_{\Phi\Phi}^R = -R, \quad \Gamma_{\Phi R}^\Phi = \Gamma_{R\Phi}^\Phi = \frac{1}{R}. \quad (1.24)$$

V dalších sekcích však budeme používat hlavně RF a tam je více nenulových složek:

$$-\Gamma_{rtt} = \Gamma_{trt} = \Gamma_{ttr} = \frac{g_{tt,r}}{2} = \omega^2 r, \quad (1.25)$$

$$-\Gamma_{r\varphi\varphi} = \Gamma_{\varphi r\varphi} = \Gamma_{\varphi\varphi r} = \frac{g_{\varphi\varphi,r}}{2} = r, \quad (1.26)$$

$$-\Gamma_{r\varphi t} = -\Gamma_{rt\varphi} = \Gamma_{tr\varphi} = \Gamma_{t\varphi r} = \Gamma_{\varphi tr} = \Gamma_{\varphi rt} = \frac{g_{\varphi t,r}}{2} = \omega r, \quad (1.27)$$

$$\Gamma_{r\varphi}^t = \Gamma_{\varphi r}^t = 0, \quad \Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = 0, \quad (1.28)$$

$$\Gamma_{tt}^r = -\omega^2 r, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r, \quad \Gamma_{\varphi t}^r = \Gamma_{t\varphi}^r = -\omega r, \quad (1.29)$$

$$\Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{tr}^\varphi = \Gamma_{rt}^\varphi = \frac{\omega}{r}. \quad (1.30)$$

## 1.2 Geodetiky testovacích částic

V IF jsou geodetikami testovacích částic přímky a jejich rovnice v RF bychom snadno mohli získat transformací. Spočítejme je však v RF přímo. Mějme Lagrangián volné částice

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}, \quad (1.31)$$

kde  $\lambda$  je afinní parametr, který lze pro hmotnou částici ztotožnit s vlastním časem. Z (1.6) vidíme, že existují tři integrály pohybu:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{u}^b, \mathbf{u}^b) = \begin{cases} 0 & \text{světlo,} \\ -1 & \text{hmotné částice,} \end{cases} \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^t} = u_t \equiv -E, \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\varphi} = u_\varphi \equiv L, \quad (1.34)$$

kde jsme označili  $E$  specifickou energii hmotné částice, resp. energii fotonu a  $L$  specifický moment hybnosti hmotné částice, resp. moment hybnosti fotonu. Dosadíme-li (1.33) a (1.34) do (1.32), dostaneme zbývající složku čtyřrychlosti:

$$-E^2 + (u_r)^2 - 2\omega EL + \frac{1}{r^2}(1 - \omega^2 r^2)L^2 = \begin{cases} 0 & \text{světlo} \\ -1 & \text{hmotné částice} \end{cases} \quad (1.35)$$

definována jako [2]

$$\omega_{\alpha\beta} \equiv h_\alpha^\mu h_\beta^\nu u_{[\mu;\nu]} = h_\alpha^\mu h_\beta^\nu u_{[\mu,\nu]}, \quad (1.21)$$

Takže podle (1.11) a (1.10) vychází

$$\boldsymbol{\omega} = u_{t,r} \gamma^2 \omega r^2 \mathbf{d}\varphi \wedge \mathbf{d}r + u_{\varphi,r} \mathbf{d}\varphi \wedge \mathbf{d}r = 2(\gamma^3 \omega^3 r^3 + \gamma \omega r) \mathbf{d}\varphi \wedge \mathbf{d}r, \quad (1.22)$$

což je obecně různé od nuly.  $\square$

$$(u_r)^2 = B^2 - \frac{L^2}{r^2}, \quad (1.36)$$

kde jsme označili  $B^2 \equiv A^2 \equiv (E + \omega L)^2$  pro světlo, resp.  $B^2 \equiv A^2 - 1 \equiv (E + \omega L)^2 - 1$  pro hmotné částice. Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat  $A$  i  $B$  nezáporné, nezápornost  $(E + \omega L)^2 - 1$  plyne z požadavku na fyzikálnost, tj. časupodobnost čtyřrychlosti. Pro kontravariantní složky čtyřrychlosti pak dostaneme

$$\frac{dt}{d\lambda} = u^t = \frac{dt}{d\lambda} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{u}^b, d\mathbf{t}) = A, \quad (1.37)$$

$$\frac{dr}{d\lambda} = u^r = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{u}^b, d\mathbf{r}) = \pm \sqrt{B^2 - \frac{L^2}{r^2}}, \quad (1.38)$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = u^\varphi = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{u}^b, d\varphi) = \frac{L}{r^2} - \omega A. \quad (1.39)$$

Vyřešením této soustavy diferenciálních rovnic a odstraněním parametru dostaneme pro  $r_0 > 0$

$$r^2 = r_0^2 + C^2 t^2, \quad (1.40)$$

$$\varphi = \varphi_0 - \omega t + \operatorname{sgn}(L) \operatorname{atan} \frac{Ct}{r_0} \quad (1.41)$$

a pro geodetiky procházející počátkem souřadného systému

$$r = |Ct|, \quad (1.42)$$

$$\varphi = \varphi_0 - \omega t + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(t), \quad (1.43)$$

kde jsme označili  $C \equiv \frac{B}{A} \in [0, 1]$  a parametry  $r_0$  a  $\varphi_0$  jsou souřadnice bodu na geodetice nejbližší středu kotouče. Vyšetřeme nyní fyzikální význam této konstanty. Transformací do IF dostáváme rovnice

$$R^2 = R_0^2 + C^2 T^2, \quad (1.44)$$

$$\Phi = \Phi_0 + \operatorname{sgn}(L) \operatorname{atan} \frac{CT}{R_0} \quad (1.45)$$

a zderivováním podle  $T$  dostaneme

$$\frac{dR}{dT} = \frac{C^2 T}{R}, \quad (1.46)$$

$$\frac{d\Phi}{dT} = \frac{\operatorname{sgn}(L) C R_0}{R^2}, \quad (1.47)$$

což jsou složky třírychlosti  $V$  v IF. Spočteme-li velikost  $V$ , zjistíme, že

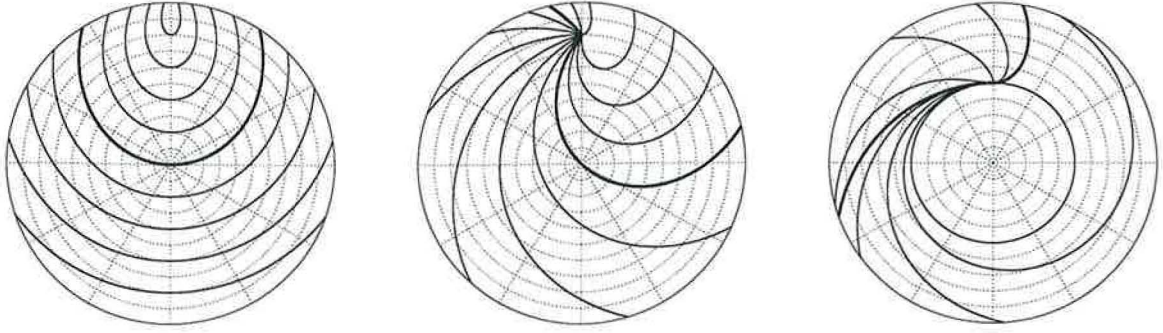
$$V^2 = \left( \frac{dR}{dT} \right)^2 + R^2 \left( \frac{d\Phi}{dT} \right)^2 = C^2, \quad (1.48)$$

tj. konstanta  $C$  má význam velikosti třírychlosti zkoumané částice měřené v IF. Výsledné rovnice geodetik tedy jsou (např. [6]) pro  $r_0 > 0$

$$r^2 = r_0^2 + V^2 t^2, \quad (1.49)$$

$$\varphi = \varphi_0 - \omega t + \operatorname{sgn}(L) \operatorname{atan} \frac{Vt}{r_0} \quad (1.50)$$





Obrázek 1.3: Dráhy částic. Vlevo: Světelné geodetiky. Nad zvýrazněnou geodetikou příslušející  $L = 0$  jsou geodetiky s  $L > 0$ , pod ní pak geodetiky s  $L < 0$ . Uprostřed: Světelné geodetiky vycházející z daného společného bodu. Zvýrazněné geodetiky opět odpovídají  $L = 0$ . Vpravo: Geodetiky částic vypuštěných s nulovou radiální rychlostí z daného bodu různou rychlostí. Zvýrazněné geodetiky příslušejí světlu. Kruhovú geodetiku odpovídá nulové třírychlosti v  $IF$ , tj.  $V = 0$ .

a pro geodetiky procházející počátkem souřadného systému

$$r = |Vt|, \quad (1.51)$$

$$\varphi = \varphi_0 - \omega t + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(t). \quad (1.52)$$

Vybrané geodetiky jsou znázorněny na Obrázku 1.3.

## 1.3 Prostorová geometrie

V této části se budeme zabývat prostorovou geometrií disku z hlediska pozorovatelů v RF, odvodíme lokálně měřené časy, vzdálenosti a rychlosti pomocí na první pohled různých definic, vyplývajících především ze znalosti projekčního tenzoru (1.11), z měření vůči tetradě (1.15) a pomocí světla.

### 1.3.1 Lokální měření času

Lokální měření času je velmi dobře definované právě díky definici čtyřrychlosti a její normalizaci na  $-1$ . Směr pohybu pozorovatele v RF lze popsat infinitesimálním vektorem  $\delta \mathbf{x} = \delta t \boldsymbol{\theta}_t$ . Z normalizace čtyřrychlosti pak plyne

$$-(\delta \tau)^2 = \mathbf{g}(\delta \mathbf{x}, \delta \mathbf{x}) = -\frac{\delta t^2}{\gamma^2}, \quad (1.53)$$

tedy vztah mezi vlastním a souřadnicovým časem pro pozorovatele v RF je (např. [7,9])

$$\delta \tau = \frac{\delta t}{\gamma}. \quad (1.54)$$

Ověřme, zda dostaneme stejný výsledek z transformace tetrady (1.15) (resp. (1.16)). Vektor  $\delta \mathbf{x}$  se tetradových složkách (1.15) vyjádří jako

$$\delta \mathbf{x} = \delta x^{\hat{\mu}} \mathbf{e}_{\hat{\mu}}, \quad \delta x^{\hat{\mu}} \equiv \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\mu}}(\delta \mathbf{x}). \quad (1.55)$$

Z transformačních rovnic (1.17) pak snadno spočteme

$$\delta x^{\hat{\mu}} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\mu}}(\delta t \boldsymbol{\theta}_t) = \delta t \gamma^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\mu}}(\mathbf{e}_{\hat{t}}), \quad (1.56)$$

tj. dostali jsme, že časová tetrádová složka vektoru  $\delta\mathbf{x}$  je shodná s vlastním časovým intervalem

$$\delta\tau = \delta\hat{t} = \frac{\delta t}{\gamma}. \quad (1.57)$$

Vidíme tedy, že pro určení vlastního času pozorovatele v RF jsou oba způsoby ekvivalentní. (Tyto dva způsoby jsou ekvivalentní vždy, je však třeba mít na paměti, že je nutné použít vždy tetradu, jejíž časový vektor odpovídá čtyřrychlosti vyšetřovaného pozorovatele.)

### 1.3.2 Lokální měření vzdáleností

Oproti měření času se lokální měření vzdáleností může zdát větším problémem. Přirozená představa měření pomocí tuhých tyčí odpovídá průmětu do tečného prostoru daného lineárním obalem tetrády (1.15). Můžeme využít také projekčního tenzoru (1.11), a konečně lze využít výše odvozeného vztahu mezi vlastním a souřadnicovým časem.

Začněme využitím projekčního tenzoru (1.11). Měříme-li lokálně vzdálenost v úhlovém směru, máme infinitesimální vektor  $\delta\mathbf{x}_\ell = \delta\varphi\boldsymbol{\partial}_\varphi$ , tj. naměřili jsme souřadnicovou vzdálenost  $\delta\varphi$ . Projekcí tohoto vektoru do prostoru kolmého na pole čtyřrychlostí RF dostaneme

$$(\delta l_\ell)^2 = \|\mathbf{h}(\delta\mathbf{x}_\ell)\|^2 = \|\mathbf{h}(\delta\varphi\boldsymbol{\partial}_\varphi)\|^2 = \gamma^2 r^2 (\delta\varphi)^2, \quad (1.58)$$

tedy naměřená vzdálenost je (např. [6,7])

$$\delta l_\ell = \gamma r \delta\varphi. \quad (1.59)$$

Podívejme se nyní, jak tento výsledek zreprodukujeme průmětem na tetradu (1.15). Vektor  $\mathbf{x}_\ell$  má tetrádové složky

$$\delta x_\ell^{\hat{\mu}} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\mu}}(\delta\mathbf{x}_\ell) = \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\mu}}(\delta\varphi\boldsymbol{\partial}_\varphi). \quad (1.60)$$

Opět dosadíme z (1.17) a pro prostorové složky dostáváme

$$\delta x_\ell^{\hat{i}} = \delta\varphi\gamma\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{i}}(\mathbf{e}_{\hat{\varphi}} - \omega r^2\mathbf{e}_{\hat{t}}) = \delta\varphi\gamma\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{i}}(\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}) \quad (1.61)$$

z čehož je nenulová pouze složka

$$\delta\hat{\varphi}_\ell = \gamma\delta\varphi. \quad (1.62)$$

Z normalizace pak plyne, že naměřená vzdálenost je

$$\delta l_\ell = r\delta\hat{\varphi}_\ell = \gamma r\delta\varphi, \quad (1.63)$$

což je vztah shodný s (1.59).

Výpočet pomocí lokální radarové vzdálenosti je proti předchozím dvěma způsobům poněkud zdlouhavější, neboť musíme uvážit, že světelný paprsek putuje tam a zpět po obecně různých geodetikách. Uvažujme dva body vzdálené od sebe o úhel  $\delta\varphi$ . Z (1.49) plyne, že tyto body budou na geodetice rozmístěny časově symetricky vůči  $r_0$ , tedy souřadnicový čas v prvním bodě  $t_1$  a souřadnicový čas v druhém bodě  $t_2$  budou splňovat rovnice

$$t_1 = -\frac{\delta t'}{2}, \quad (1.64)$$

$$t_2 = \frac{\delta t'}{2}, \quad (1.65)$$

kde  $\delta t'$  označuje čas, za který signál doputuje z prvního do druhého bodu. Cestou zpět bude situace obdobná. Z rovnice (1.50) pak pro obě cesty plyne

$$\delta\varphi = -\omega\delta t' + 2 \operatorname{atan} \frac{\delta t'}{2r_0} \approx -\omega\delta t' + \frac{\delta t'}{r} \Rightarrow \delta t' = \frac{r\delta\varphi}{1 - \omega r}, \quad (1.66)$$

$$\delta\varphi = \omega\delta t'' + 2 \operatorname{atan} \frac{\delta t''}{2r_0} \approx \omega\delta t'' + \frac{\delta t''}{r} \Rightarrow \delta t'' = \frac{r\delta\varphi}{1 + \omega r}. \quad (1.67)$$

Výsledný časový interval  $\delta t$  zavedeme jako polovinu času, za který se paprsek vrátí, tedy

$$\delta t = \frac{\delta t' + \delta t''}{2} = \frac{r\delta\varphi}{1 - \omega^2 r^2} = \gamma^2 r \delta\varphi. \quad (1.68)$$

Odpovídající úsek vlastního času je podle vztahu (1.54)

$$\delta\tau = \frac{\delta t}{\gamma} = \gamma r \delta\varphi, \quad (1.69)$$

a naměřená vzdálenost tedy

$$\delta l_\ell = 1 \cdot \delta\tau = \gamma r \delta\varphi, \quad (1.70)$$

což je opět v souladu s (1.59).

Protože je obecně  $\gamma \geq 1$ , vidíme, že naměřená vzdálenost v úhlovém směru je *větší* než kolik by odpovídalo danému úhlu. To lze interpretovat buď jako důsledek neeukleidovské geometrie na disku, nebo jako důsledek kontrakce délek měřících tyčí. Skutečně, speciální relativita říká, že tuhá tyč pomocí níž pozorovatel provádí měření, je vůči IF lorentzovsky zkrácena přesně v poměru  $1/\gamma$ , takže pozorovatel naměří právě výše uvedenou vzdálenost.

Speciální relativita ovšem též předpovídá, že se stejně v úhlovém směru zkontrahuje i kotouč sám, což je vlastně podstata Ehrenfestova paradoxu. Tento paradox se však zabývá globální strukturou disku a není tedy přímým předmětem zájmu v této podsekcí. Více se mu budeme věnovat v podsekcích *Rozměry disku* a *Vložení prostorové metriky do 3-rozměrného nadprostoru*.

Obraťme nyní pozornost na měření v radiálním směru. Obdobně jako při měření v úhlovém směru zavedme infinitesimální vektor  $\delta\mathbf{x}_r \equiv \delta r \partial_r$ . Jeho projekcí do plochy kolmé na pole čtyřrychlostí RF dostáváme

$$(\delta l_r)^2 = \|\mathbf{h}(\delta\mathbf{x}_r)\|^2 = \|\mathbf{h}(\delta r \partial_r)\|^2 = \delta r^2, \quad (1.71)$$

a tedy naměřená vzdálenost je shodná se souřadnicovou vzdáleností (např. [6,7]),

$$\delta l_r = \delta r. \quad (1.72)$$

Obdobně vychází též průmět do prostorových složek tetrády (1.15):

$$x_r^{\hat{i}} = \varepsilon^{\hat{i}}(\delta\mathbf{x}_r) = \delta r \varepsilon^{\hat{i}}(\partial_r) = \delta r \varepsilon^{\hat{i}}(\mathbf{e}_{\hat{r}}), \quad (1.73)$$

z čehož vidíme, že jediná nenulová složka bude

$$\delta \hat{r}_r = \delta r, \quad (1.74)$$

a tedy

$$\delta l_r = \delta \hat{r}_r = \delta r \quad (1.75)$$

shodně s (1.72).

Pro měření pomocí světla zavedme dva body vzdálené od sebe v radiálním směru o  $\delta r$  (a nacházející se na stejném  $\varphi$ ). Z rovnic (1.49) a (1.50) je ihned zřejmé, že světlu bude cesta tam i zpět trvat stejnou dobu, pro cestu směrem ke středu tedy dostáváme

$$(r + \delta r)^2 = r_0^2 + t^2, \quad (1.76)$$

$$r^2 = r_0^2 + (t + \delta t)^2, \quad (1.77)$$

$$-\omega t + \text{atan} \frac{t}{r_0} = -\omega(t + \delta t) + \text{atan} \frac{t + \delta t}{r_0}. \quad (1.78)$$

Z prvních dvou rovnic dostaneme rozvinutím do prvního řádu v  $\delta r$  a  $\delta t$  a odečtením

$$r\delta r = -t\delta t, \quad (1.79)$$

z poslední rovnice pak rozvinutím do prvního řádu v  $\delta t$

$$\omega\delta t = \frac{r_0\delta t}{r_0^2 - t^2} \Rightarrow \omega = \frac{r_0}{(r + \delta r)^2} \approx \frac{r_0}{r^2} \Rightarrow r_0 = \omega r^2 \Rightarrow t^2 \approx r^2 - \omega^2 r^4. \quad (1.80)$$

Dosadíme-li tento výsledek do (1.79), dostáváme

$$\delta r = \frac{\delta t}{\gamma} \quad (1.81)$$

a po dosazení do (1.54) máme

$$\delta\tau = \delta r. \quad (1.82)$$

Naměřená vzdálenost pak vyjde

$$\delta l_r = 1 \cdot \delta\tau = \delta r, \quad (1.83)$$

což je v souladu s (1.72).

Vidíme tedy, že předpovězená vzdálenost lokálně naměřená v radiálním směru je (podobně jako vzdálenost v úhlovém směru) nezávislá na použité metodě výpočtu, kromě toho se však shoduje se souřadnicovou vzdáleností. Porovnáním s (1.3) tedy můžeme konstatovat, že nedochází v radiálním směru ke kontrakci (radiální směr je k pohybu kolmý).

### 1.3.3 Lokální měření rychlostí

Zatímco čtyřrychlost je na souřadnicích nezávislý pojem a její složky jsou v jakékoliv bázi dobře definované, relativní třírychlost závisí na zvolené definici.

Mějme v IF třírychlost  $\mathbf{V} = V^R \partial_R + V^\Phi \partial_\Phi$ . Odpovídající čtyřrychlostí  $\mathbf{w}$  pak v souřadnicích IF je

$$\mathbf{w} = \gamma_V (\partial_T + V^R \partial_R + V^\Phi \partial_\Phi), \quad (1.84)$$

kde jsme označili  $\gamma_V = (1 - \|\mathbf{V}\|^2)^{-1/2}$ . Transformací (1.17) dostaneme

$$\mathbf{w} = \gamma_V \left( \gamma(1 - V^\Phi \omega r^2) \mathbf{e}_t + V^R \mathbf{e}_{\hat{r}} + \gamma(V^\Phi - \omega) \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} \right). \quad (1.85)$$



V souladu se zavedením třírychlosti ve speciální relativitě nyní zavedeme třírychlost lokálně měřenou v RF jako

$$\hat{\mathbf{v}} \equiv \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{i}}(\mathbf{w})}{\varepsilon^{\hat{i}}(\mathbf{w})} \mathbf{e}_{\hat{i}}. \quad (1.86)$$

což dává

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{V^R}{\gamma(1 - V^\Phi \omega r^2)} \mathbf{e}_{\hat{r}} + \frac{V^\phi - \omega}{1 - V^\Phi \omega r^2} \mathbf{e}_{\hat{\phi}}, \quad (1.87)$$

tedy standardní Lorentzovu transformaci třírychlostí. Čtyřrychlost  $\mathbf{w}$  můžeme zpětně získat jako

$$\mathbf{w} = \hat{\gamma}(\mathbf{e}_{\hat{i}} + \hat{\mathbf{v}}) = \hat{\gamma}(\mathbf{u} + \hat{\mathbf{v}}), \quad (1.88)$$

kde jsme označili  $\hat{\gamma} \equiv (1 - \|\hat{\mathbf{v}}\|^2)^{-1/2}$ . Velikost třírychlosti je

$$\|\hat{\mathbf{v}}\|^2 = \frac{r^2(V^\phi - \omega)^2 + (V^R)^2(1 - \omega^2 r^2)}{(1 - V^\Phi \omega r^2)^2}. \quad (1.89)$$

Vypočtěme nyní tuto rychlost pro speciální případ částice na geodetice. Z (1.37) a (1.39) v IF (tj. dosadíme-li  $\omega = 0$ ) vidíme

$$V^\Phi = \frac{L}{Er^2}, \quad (1.90)$$

ale protože  $L$  a  $E$  jsou konstanty pohybu můžeme zvolit nějaké

$$V_0^\Phi = \frac{L}{Er_0^2} \quad (1.91)$$

a psát

$$V^\Phi = \frac{r_0^2}{r^2} V_0^\Phi. \quad (1.92)$$

Druhou složku pak lze vyjádřit též pomocí pomocí  $V_0^\Phi$ ,

$$V^R = \pm \sqrt{V^2 - (V^\Phi r)^2} = \pm \sqrt{V^2 - \left(V_0^\Phi \frac{r_0^2}{r}\right)^2}, \quad (1.93)$$

kde jsme označili  $V^2 \equiv \|\mathbf{V}\|^2$ . Jelikož je třírychlost v IF podél geodetik konstantní, lze využít toho, že v bodě obratu (jenž má souřadnice  $R_0, \Phi_0$ ) je radiální složka rychlosti nulová, a tedy

$$V^2 = (V_0^\Phi r_0)^2 (= \text{konst}). \quad (1.94)$$

Radiální složku třírychlosti v jiných bodech geodetiky lze pak vyjádřit jako

$$V^R = \pm \frac{V}{r} \sqrt{r^2 - r_0^2}. \quad (1.95)$$

Dosadíme-li nyní (1.92), (1.94) a (1.95) do (1.89), dostáváme

$$\begin{aligned} \hat{v}^2 \equiv \|\hat{\mathbf{v}}\|^2 &= \frac{r^2 \left(\frac{r_0 V}{r^2} - \omega\right)^2 + \left(\frac{V}{r}\right)^2 (r^2 - r_0^2)(1 - \omega^2 r^2)}{(1 - \omega r_0 V)^2} = \\ &= \frac{\omega^2 (r^2 - r_0^2)(1 - V^2) + (\omega r_0 - V)^2}{(1 - \omega r_0 V)^2} \end{aligned} \quad (1.96)$$

a dosazením z (1.49)

$$\hat{v}^2 = \frac{\omega^2 V^2 (1 - V^2) t^2 + (\omega r_0 - V)^2}{(1 - \omega r_0 V)^2}. \quad (1.97)$$

Vidíme, že rychlost  $\hat{v}$  je konstantní v případech  $V = 0$  a  $V = 1$ , tj. pokud je měřenou částicí foton. Pro foton vidíme, že jeho rychlost měřená pozorovatelem v RF vyjde také 1, což je opět v souladu s předpoklady teorie relativity. Rychlost časupodobných geodetik měřená pozorovatelem v RF je závislá kvadraticky na souřadnicovém čase.

Nyní porovnejme naši definici třírychlosti měřené pozorovatelem v RF s jinými definicemi, se kterými se lze v setkat v odborné literatuře věnující se rotujícímu disku.

Definici zcela ekvivalentní (ve smyslu, že dává shodné předpovědi pro kvadrát třírychlosti) s námi použitou, používá de Felice [3]. Označíme-li čtyřrychlost pozorovatele  $\mathbf{u}$  a čtyřrychlost testovací částice  $\mathbf{w}$ , pak de Felice definuje vzájemnou třírychlost vztahem

$$\hat{v} \equiv \frac{\sqrt{(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})^2 - 1}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}}. \quad (1.98)$$

Časový vektor korotující tetrády (1.15) je totiž shodný s čtyřrychlostí pozorovatele, takže dle definice použité v této práci je velikost třírychlosti určena jako podíl průmětu  $\mathbf{w}$  do prostoru kolmého na čtyřrychlost  $\mathbf{u}$  a průmětu do směru této čtyřrychlosti. Uvědomíme-li si dále, že kvadrát normy  $\mathbf{w}$  je roven rozdílu kvadrátu jejího průmětu do podprostoru kolmého na  $\mathbf{u}$  a kvadrátu průmětu na  $\mathbf{u}$ , ihned vidíme, že výraz vyskytující se v de Feliceho definici v čitateli je právě velikost průmětu do podprostoru kolmého na  $\mathbf{u}$ . Definice použitá v této práci je tedy ekvivalentní s definicí použitou de Felicem.

Jiná definice,  $v \equiv \frac{dl}{d\tau}$ , je použita v [6]. Na první pohled by se mohla zdát shodná s naší definicí, neboť tento výraz naznačuje, že by mohlo jít o podíl uražené vzdálenosti testovací částicí a odpovídajícího časového intervalu, nicméně je třeba si uvědomit, že byť  $dl$  zde má význam velikosti průmětu  $\mathbf{w}$  do prostoru kolmého na  $\mathbf{u}$  vynásobeného infinitesimálním časovým úsekem  $d\tau'$  hodin testovací částice,  $d\tau$  zde má význam vlastního časového intervalu pozorovatele v RF, tj.

$$d\tau = \gamma^{-1} dt, \quad (1.99)$$

nikoliv velikosti průmětu  $\mathbf{w}$  do čtyřrychlosti  $\mathbf{u}$  vynásobeného  $d\tau'$ , což by odpovídalo z (1.16)

$$d\tau = \gamma^{-1} dt - \gamma \omega r^2 d\varphi. \quad (1.100)$$

Přesto lze tuto definici považovat v jistém smyslu za korektní. Připomeňme si, že nelze sestavit integrální nadplochu ortogonální k  $\mathbf{u}$ . V tomto světle pak můžeme uvedenou definici třírychlosti vnímat nikoliv jako třírychlost měřenou *jedním* pozorovatelem v RF, nýbrž jako rychlosti kterou bychom mohli v principu měřit pomocí *dvou* vhodně vybraných pozorovatelů v RF – kolem pozorovatele A prolétne měřený objekt v čase  $t$  a kolem pozorovatele B, vzdáleného od pozorovatele A o vzdálenost  $dl$ , prolétne v čase  $t + dt$ , tyto pozorovatele si následně vymění svá naměřená data a s použitím (1.54) pak definují třírychlost jako podíl  $dl$  ku  $d\tau$ .

V tomto smyslu lze tedy o  $\tau$  uvažovat jako o určitém *zobecnění vlastního času pro kongruenci pozorovatelů rigidně rotujících konstantní úhlovou rychlostí* a o třírychlosti pomocí něj spočtené jako o *globální třírychlosti* (v kontrastu k čistě lokálnímu přístupu

použitím v této práci). Je však nutné mít na paměti, že v této definici  $dl/d\tau'$  a  $d\tau/d\tau'$  obecně nejsou velikosti průmětů vektoru čtyřrychlosti  $\mathbf{w}$  do dvou vzájemně ortogonálních podprostorů, a tedy lze dostat „nepřirozené“ výsledky jako rychlost světla odlišnou od 1 a obecně nekonstantní i podél geodetik.

Grøn [7] používá jako třírychlost

$$v \equiv \frac{dl}{dt}, \quad (1.101)$$

což je definice, která se shoduje se skutečně měřenou rychlostí pouze pro pozorovatele v počátku (neboť  $t$  odpovídá vlastnímu času pouze pro pozorovatele v počátku, pro kterého  $\gamma = 1$  a  $r = 0$ ). Pro ostatní pozorovatele dává tato definice obecně jiné předpovědi, než co by měřili jak lokálně, tak i globálně (ve smyslu použitím v předchozím odstavci).

### 1.3.4 Rozměry disku

Z pohledu IF jsou rozměry disku přirozeně

$$\text{poloměr} = R, \quad (1.102)$$

$$\text{obvod} = 2\pi R, \quad (1.103)$$

neboť z (1.1) vidíme, že geometrie prostoru je eukleidovská.

Ehrenfestův paradox, vyplývající s chybného užití STR v neinerciálním systému, o vztazích mezi poloměry měřenými v IF a RF tvrdí:

*Buď  $R$  poloměr disku pozorovaný v IF a  $r$  vlastní poloměr (tj. měřený v RF) disku. Dále předpokládejme eukleidovskou geometrii na tomto disku. Pak  $R$  musí splňovat následující tvrzení:*

- i) Obvod disku měřený v IF musí být vůči vlastnímu obvodu (tj. měřenému v RF) lorentzovsky kontrahovaný, tj.  $2\pi R < 2\pi r$ .*
- ii) Protože radiální čáry se pohybují ortogonálně ke svému směru, nejsou v IF vůči RF lorentzovsky kontrahovány, tj.  $R = r$ .*

Jak si záhy ukážeme, problém vzniká právě v důsledku chybného předpokladu eukleidovské geometrie na rotujícím disku, tedy v předpokladu, že vlastní obvod disku je  $2\pi r$ . Měření poloměru si můžeme představit tak, že postupně v radiálním směru naskládáme měřicí tyče v souřadnicích RF dlouhé  $\delta r$  vedle sebe a spočítáme, kolik se jich vešlo. Protože pro vztah mezi souřadnicemi v RF a IF platí  $r = R$  a délka tyče je podle (1.72)  $\delta r$ , vidíme, že naměříme poloměr shodný s měřením v IF. Tedy druhá část tvrzení Ehrenfestova paradoxu je v pořádku.

Obvod budeme měřit naskládáním infinitesimálně krátkých tyčí souřadnicové délky  $\delta\varphi$  po obvodu kotouče. Z transformace  $\varphi = \Phi - \omega T$  pak plyne (protože z povahy měření plyne  $\delta T = 0$ ), že souřadnicový obvod disku je  $2\pi$ . Měřená délka tyčí je však z (1.59)  $\gamma r \delta\varphi$ , touto metodou tedy naměříme obvod (např. [7–9])

$$2\pi\gamma r, \quad (1.104)$$

což je skutečně větší než  $2\pi R$  avšak v rozporu s předpokladem eukleidovské geometrie na disku.

Zkusme však předpovědět výsledek trochu odlišného experimentu. Uvažujme testovací částici stojící vůči IF na konstantním  $R$  a  $\Phi$ , tj. takovou částici, pro kterou  $V = 0$ . Pro tuto částici pak z (1.49) a (1.50) plyne  $r = r_0$  a, bez újmy na obecnosti,  $\varphi = -\omega t$ . Mezi dvěma nejbližšími okamžiky, kdy tato částice mine nějakého konkrétního pozorovatele v RF, uběhne souřadnicový čas  $t = \frac{2\pi}{\omega}$ , tj. takový pozorovatel naměří oběžnou periodu částice

$$\hat{t} = \frac{2\pi}{\gamma\omega}. \quad (1.105)$$

Tento pozorovatel též z (1.97) naměří rychlost této částice

$$\hat{v} = \omega r. \quad (1.106)$$

Vynásobíme-li nyní rychlost časem, dostaneme obvod

$$\frac{2\pi r}{\gamma}. \quad (1.107)$$

Přirozeně se nabízí otázka, jak toto měření interpretovat. Předpokládali jsme, že rychlost testovací částice je konstantní po celou dobu pohybu, což je však analogické užití celé kongruence testovacích částic – tuhému disku (vystačíme si i s infinitesimálně tenkým prstencem) stojícímu vůči IF. Ale tím ihned vidíme, že jsme ve skutečnosti měřili obvod nikoliv rotujícího disku, vůči kterému je pozorovatel v klidu, ale obvod disku stojícího, vůči kterému pozorovatel obíhá.

Dáme-li obě tato dvě měření dohromady, zjistíme, že

1. Měříme-li obvod rotujícího disku v RF, dostaneme

$$\text{obvod}_{RF,\omega} = 2\pi\gamma r. \quad (1.108)$$

2. Měříme-li obvod téhož disku v IF, dostaneme

$$\text{obvod}_{IF,\omega} = 2\pi R. \quad (1.109)$$

3. Měříme-li obvod stojícího disku v RF, dostaneme

$$\text{obvod}_{RF,0} = \frac{2\pi r}{\gamma}. \quad (1.110)$$

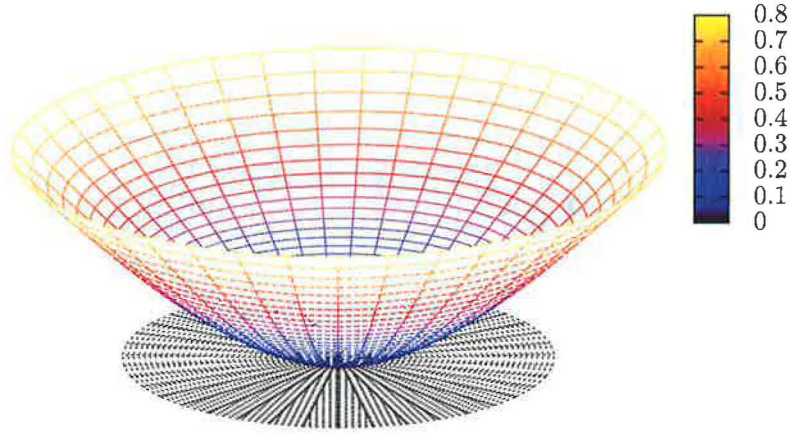
4. Měříme-li obvod téhož disku v IF, dostaneme

$$\text{obvod}_{IF,0} = 2\pi R. \quad (1.111)$$

Vidíme tedy, že k žádnému paradoxu nedochází. Vlastní obvod rotujícího disku je roven  $2\pi\gamma r$ , a tedy po lorentzovské kontrakci je jeho obvod v IF  $2\pi r$ , což je rovno  $2\pi R$ . Na druhé straně vlastní obvod stojícího disku je roven  $2\pi R$ , a tedy po lorentzovské kontrakci je jeho obvod v RF  $2\pi R\gamma^{-1}$ , což je rovno  $2\pi r\gamma^{-1}$ .

### 1.3.5 Vložení prostorové metriky do 3-rozměrného nadprostoru

V předchozí podsekcí jsme ukázali, že Ehrenfestův paradox vzniká jako důsledek předpokladu eukleidovské geometrie na rotujícím disku, kterýžto je patrně chybný. Též jsme



Obrázek 1.4: Vložení prostorové metriky (1.12) do  $M^3$

ukázali, že vlastní obvod rotujícího disku je větší než obvod stojícího disku se stejným poloměrem, což je jeden ze znaků hyperbolické geometrie. V této podsececi se pokusíme geometrii disku znázornit.

Uvažme že (1.12) je metrikou nějaké plochy a vložme tuto plochu do třírozměrného nadprostoru se signaturou  $(- + +)$  a souřadnicemi  $(\varsigma, \varrho, \vartheta)$ , tedy požadujeme

$$dr^2 + r^2\gamma^2 d\varphi^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2 - d\varsigma^2. \quad (1.112)$$

Vidíme, že je vhodné položit

$$\vartheta \equiv \varphi \Rightarrow d\vartheta = d\varphi, \quad (1.113)$$

$$\varrho \equiv \gamma r \Rightarrow d\varrho = \gamma^3 dr, \quad (1.114)$$

čímž dostáváme

$$dr^2 = \gamma^6 dr^2 - \left(\frac{d\varsigma}{dr}\right)^2 dr^2, \quad (1.115)$$

$$\frac{d\varsigma}{dr} = \sqrt{\gamma^6 - 1}, \quad (1.116)$$

což dává

$$\frac{d\varsigma}{d\varrho} = \sqrt{1 - \gamma^{-6}} = \sqrt{\omega^6 r^6 + 3\omega^2 r^2(1 - \omega^2 r^2)} = \sqrt{\frac{\omega^6 \varrho^6 + 3\omega^2 \varrho^2(1 + \omega^2 \varrho^2)}{(1 + \omega^2 \varrho^2)^3}}. \quad (1.117)$$

Tato rovnice není analyticky integrovatelná, pojďme se tedy podívat alespoň na její aproximaci pro malá  $r$  a pro  $\omega r$  blížící se 1. Pro malá  $r$  je též  $\varrho$  malé a můžeme tedy v odmocnině zanedbat všechny členy, kde  $\varrho$  vystupuje ve vyšší než druhé mocnině. Pak máme

$$\frac{d\varsigma}{d\varrho} \approx \sqrt{3}\omega\varrho, \quad (1.118)$$

a tedy v okolí počátku se bude naše plocha podobat rotačnímu paraboloidu.

Pro  $\omega r$  blíží se 1 se  $\gamma$  bude blížit nekonečnu, můžeme tedy pod odmocninou zanedbat člen  $\gamma^{-6}$  a vidíme, že se derivace bude asymptoticky blížit k jedné, a tedy že pro velká  $\varrho$  se bude plocha podobat rotačnímu hyperboloidu.

Grafické znázornění pro stojící a rotující kotouče se stejným poloměrem je na Obrázku 1.4. Uvědomíme-li si, že souřadnice  $\zeta$  vystupuje v metrice se znaménkem mínus, je třeba se na tento diagram dívat podobně jako na prostoročasové diagramy v Minkowského prostoročase, nikoliv jako na znázornění plochy vložené do třírozměrného eukleidovského prostoru, je však třeba mít na paměti, že souřadnice  $\zeta$  zde není časem, nýbrž zde hraje roli další prostorové souřadnice, do které se geometrie rotujícího disku zakřivuje.

Poznamenejme, že vzdálenosti měřené v tomto nadprostoru jsou přímo rovny vlastním vzdálenostem. Nyní můžeme graficky naznačit řešení Ehrenfestova paradoxu. Uvědomme si, že plocha  $\zeta = \text{konst}$  má eukleidovskou geometrii. Obvod disku, který bychom naměřili, by tedy byl  $2\pi\varrho$ , což je, jak vidíme větší, než kolik bychom obdrželi vynásobením poloměru stojícího disku  $2\pi$ .

## 1.4 Radarová vzdálenost v radiálním směru

Pojďme se nyní podívat, jakým způsobem se výsledky změní, pokud se pokusíme použít pro měření globálního charakteru světla. Konkrétně se podíváme na měření vzdáleností v radiálním směru. Náš myšlenkový experiment bude proveden tak, že pozorovatel A vyšle světelný signál, ten se odrazí u pozorovatele B, který je na stejném  $\varphi$  jako pozorovatel A (ale na jiném  $r$ ), a pozorovatel A následně detekuje tento odražený signál, změří čas, za který se signál vrátil a spočte, jak daleko je od něj pozorovatel B. Připomeňme, že oba ko-rotují s diskem.

Předpokládejme, že světlo bude při měření putovat po geodetikách, musíme však zjistit, po kterých. Uvažujme nejprve, že ani pozorovatel A ani pozorovatel B nejsou ve středu disku a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že pozorovatel A se nachází dále od středu než pozorovatel B. Z (1.49) máme pro  $A \rightarrow B$  foton

$$r_A^2 = r_{0,\text{in}}^2 + t_{\text{in}}^2 \Rightarrow -\frac{t_{\text{in}}}{r_{0,\text{in}}} = \sqrt{\frac{r_A^2}{r_{0,\text{in}}^2} - 1}, \quad (1.119)$$

$$r_B^2 = r_{0,\text{in}}^2 + (t_{\text{in}} + \Delta t_{\text{in}})^2 \Rightarrow -\frac{t_{\text{in}} + \Delta t_{\text{in}}}{r_{0,\text{in}}} = \sqrt{\frac{r_B^2}{r_{0,\text{in}}^2} - 1} \quad (1.120)$$

a podobně pro (odražený)  $B \rightarrow A$  foton

$$r_B^2 = r_{0,\text{out}}^2 + t_{\text{out}}^2 \Rightarrow \frac{t_{\text{out}}}{r_{0,\text{out}}} = \sqrt{\frac{r_B^2}{r_{0,\text{out}}^2} - 1}, \quad (1.121)$$

$$r_A^2 = r_{0,\text{out}}^2 + (t_{\text{out}} + \Delta t_{\text{out}})^2 \Rightarrow \frac{t_{\text{out}} + \Delta t_{\text{out}}}{r_{0,\text{in}}} = \sqrt{\frac{r_A^2}{r_{0,\text{out}}^2} - 1}. \quad (1.122)$$

Z (1.50) podobně

$$-\omega t_{\text{in}} + \text{atan} \frac{t_{\text{in}}}{r_{0,\text{in}}} = -\omega(t_{\text{in}} + \Delta t_{\text{in}}) + \text{atan} \frac{t_{\text{in}} + \Delta t_{\text{in}}}{r_{0,\text{in}}}, \quad (1.123)$$



$$-\omega t_{\text{out}} + \text{atan} \frac{t_{\text{out}}}{r_{0,\text{out}}} = -\omega(t_{\text{out}} + \Delta t_{\text{out}}) + \text{atan} \frac{t_{\text{out}} + \Delta t_{\text{out}}}{r_{0,\text{out}}}. \quad (1.124)$$

Dáme-li tyto rovnice dohromady, dostáváme

$$\Delta t_{\text{in}} = \sqrt{r_{\text{A}}^2 - r_{0,\text{in}}^2} - \sqrt{r_{\text{B}}^2 - r_{0,\text{in}}^2} = \frac{\text{atan} \sqrt{\frac{r_{\text{A}}^2}{r_{0,\text{in}}^2} - 1} - \text{atan} \sqrt{\frac{r_{\text{B}}^2}{r_{0,\text{in}}^2} - 1}}{\omega}, \quad (1.125)$$

$$\Delta t_{\text{out}} = \sqrt{r_{\text{A}}^2 - r_{0,\text{out}}^2} - \sqrt{r_{\text{B}}^2 - r_{0,\text{out}}^2} = \frac{\text{atan} \sqrt{\frac{r_{\text{A}}^2}{r_{0,\text{out}}^2} - 1} - \text{atan} \sqrt{\frac{r_{\text{B}}^2}{r_{0,\text{out}}^2} - 1}}{\omega}, \quad (1.126)$$

kde  $r_{0,\text{in}}$ ,  $r_{0,\text{out}}$ ,  $\Delta t_{\text{in}}$  a  $\Delta t_{\text{out}}$  jsou neznámé. Dále vidíme, že rovnice pro pohyb světla směrem do středu i od středu jsou formálně shodné, můžeme tedy položit

$$\Delta t = \sqrt{r_{\text{A}}^2 - r_0^2} - \sqrt{r_{\text{B}}^2 - r_0^2} = \frac{\text{atan} \sqrt{\frac{r_{\text{A}}^2}{r_0^2} - 1} - \text{atan} \sqrt{\frac{r_{\text{B}}^2}{r_0^2} - 1}}{\omega}. \quad (1.127)$$

Tato implicitní rovnice pro  $r_0$  není analyticky řešitelná,  $r_0$  je proto třeba pro každou dvojici pozorovatelů hledat numericky a poté dopočítat  $\Delta t$ . Vlastní čas naměřený pozorovatelem A pak z (1.54) je

$$\Delta \tau_{\text{A}} = \frac{\Delta t}{\gamma_{\text{A}}} \quad (1.128)$$

a pro pozorovatele B

$$\Delta \tau_{\text{B}} = \frac{\Delta t}{\gamma_{\text{B}}}, \quad (1.129)$$

kde jsme označili  $\gamma_{\text{A,B}} \equiv (1 - \omega^2 r_{\text{A,B}}^2)^{-1/2}$ .

V případě, že jeden z pozorovatelů (B) bude ve středu disku a druhý (A) bude od středu vzdálen  $r$ , pak z (1.51) ihned vidíme

$$\Delta t = r, \quad (1.130)$$

takže vlastní čas naměřený pozorovatelem A je z (1.54)

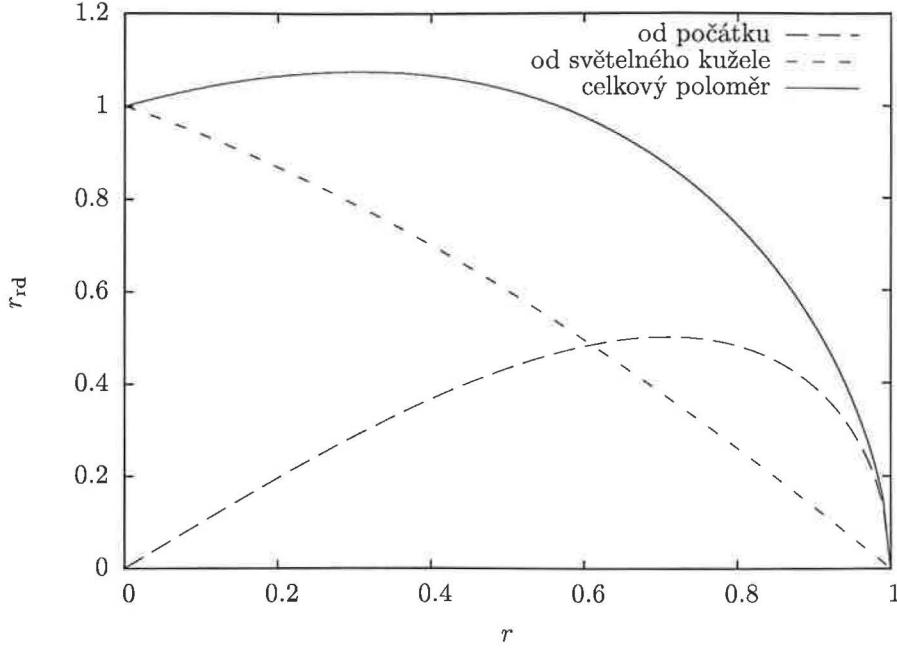
$$\Delta \tau_{\text{A}} = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{r}{\gamma} \quad (1.131)$$

a čas naměřený pozorovatelem B je

$$\Delta \tau_{\text{B}} = \Delta t = r. \quad (1.132)$$

Vidíme tedy, že pouze pro pozorovatele ve středu kotouče se globální radarová vzdálenost v radiálním směru shoduje s vlastní radiální vzdáleností. Díky  $\gamma$  faktoru, který je větší nebo roven jedné, pak radarová radiální vzdálenost konverguje k nule pro pozorovatele blížícího se k světelnému kuželu  $\omega r = 1$ .

Radarové vzdálenosti od počátku, resp. od poloměru odpovídajícího světelnému kuželi  $\omega r = 1$ , naměřené různými pozorovateli jsou znázorněny na Obrázku 1.5. Na témže



Obrázek 1.5: Radarové vzdálenosti od počátku  $r = 0$  a okraje disku  $\omega r = 1$  a radarově měřený poloměr takového disku.

obrázku je pak znázorněn i součet těchto vzdáleností, tedy poloměr kotouče (s vlastním poloměrem rovným  $1/\omega$ ) měřený radarovou metodou.

## 1.5 Zrychlení rotujícího pozorovatele

Čtyřzrychlení je definováno

$$\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}. \quad (1.133)$$

Rozepíšeme-li kovariantní derivaci pomocí parciální derivace a afinní konexe podle (20), dostaneme

$$\mathbf{a} = \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{u} + \Gamma^{\mu}_{\nu}(\mathbf{u}) u^{\nu} \partial_{\mu}. \quad (1.134)$$

Protože z (1.9) vidíme, že v RF má čtyřrychlost rotujícího pozorovatele nenulovou pouze složku  $u^t$  a ta navíc závisí pouze na  $r$ , vidíme, že parciální derivace se zde nerealizují a můžeme psát

$$\mathbf{a} = \Gamma^{\mu}_{tt} u^t u^t \partial_{\mu}. \quad (1.135)$$

Z (1.28) – (1.30) pak vidíme, že jediná nenulová složka čtyřzrychlení je  $a^r$ , tj.

$$\mathbf{a} = \Gamma^r_{tt} u^t u^t \partial_r = -\gamma^2 \omega^2 r \partial_r. \quad (1.136)$$

Velikost zrychlení je tedy

$$a \equiv \|\mathbf{a}\| = \gamma^2 \omega^2 r, \quad (1.137)$$

což je až na  $\gamma^2$  shodné s nerelativistickou hodnotou.

## 1.6 Radiální pohyb

Jedním ze speciálních pohybů, které je vhodné v rotující soustavě vyšetřit, je radiální pohyb. Podrobně se mu věnuje například de Felice v článku [3]. My se zde však omezíme



pouze na pohyb, který je v radiálním směru volný, tedy pro nějž  $a^r = 0$ . Pro takovýto pohyb bude zrychlení možno interpretovat jakožto vyvolané čistě Coriolisovou silou.

Použijme shodné značení, jaké jsme zavedli při odvozování geodetického pohybu, avšak s tím rozdílem, že specifický moment hybnosti  $L$  zde nebude konstantou pohybu, neboť jsme pohyb v úhlovém směru omezili. Protože chceme, aby se jednalo o čistě radiální pohyb (z pohledu RF) požadujeme

$$0 = u^\varphi = \frac{L}{r^2}(1 - \omega^2 r^2) - \omega E \Rightarrow \omega L = \frac{\omega^2 r^2 E}{1 - \omega^2 r^2}. \quad (1.138)$$

Z této rovnice vidíme, že  $L$  se skutečně musí v průběhu pohybu měnit. Zbylé složky čtyřrychlosti dostaneme ze (1.37) a (1.38),

$$u^t = \frac{E}{1 - \omega^2 r^2}, \quad (1.139)$$

$$u^r = \pm \sqrt{\frac{E^2}{1 - \omega^2 r^2} - 1}, \quad (1.140)$$

tedy čtyřrychlost  $\mathbf{u}$  můžeme zapsat jako

$$\mathbf{u} = e^\psi (\partial_t + \beta \partial_r), \quad (1.141)$$

kde jsme označili

$$e^\psi \equiv \frac{E}{1 - \omega^2 r^2}, \quad (1.142)$$

$$\beta \equiv \pm \sqrt{1 - \omega^2 r^2 - \frac{(1 - \omega^2 r^2)^2}{E^2}}. \quad (1.143)$$

Čtyřzrychlení bude

$$\mathbf{a} = \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{u} + \Gamma^\mu{}_\nu(\mathbf{u}) u^\nu \partial_\mu, \quad (1.144)$$

protože však rychlost závisí pouze na  $r$ , můžeme psát

$$\mathbf{a} = u^r \partial_r \mathbf{u} + \Gamma^\mu{}_\nu(\mathbf{u}) u^\nu \partial_\mu. \quad (1.145)$$

Z (1.28) – (1.30) pak vidíme, že složky čtyřzrychlení vycházejí

$$a^t = e^\psi \beta \partial_r u^t = e^{2\psi} \beta \psi', \quad (1.146)$$

$$a^r = e^\psi \beta \partial_r u^r + \Gamma^r{}_{tt} u^t u^t = e^{2\psi} (\beta^2 \psi' + \beta \beta' - \omega^2 r), \quad (1.147)$$

$$a^\varphi = 2\Gamma^{\varphi}{}_{rt} u^r u^t = 2\frac{\omega}{r} e^{2\psi} \beta. \quad (1.148)$$

Předpoklad volného pohybu znamená nulovou složku  $a^r$ , tj.

$$0 = a^r \Rightarrow \frac{\omega^2 r e^{2\psi}}{\beta} - e^{2\psi} \beta' = e^{2\psi} \beta \psi' = a^t. \quad (1.149)$$

Kvadrát čtyřzrychlení pak bude

$$a^2 = - \left( \frac{\omega^2 r e^{2\psi}}{\beta} - e^{2\psi} \beta' \right)^2 (1 - \omega^2 r^2) + 4r\omega^2 \left( \frac{\omega^2 r e^{2\psi}}{\beta} - e^{2\psi} \beta' \right) e^{2\psi} \beta + 4\omega^2 e^{4\psi} \beta^2. \quad (1.150)$$

Dosaďme-li do tohoto výrazu (1.142) a (1.143), dostaneme po úpravě

$$a^2 = \frac{4E\omega^2(E^2 - 1 + \omega^2 r^2)}{(1 - \omega^2 r^2)^4}, \quad (1.151)$$

což je v souladu s výrazem (21) v [3]. Protože pohyb omezujeme pouze v úhlovém směru lze tento výsledek interpretovat jako kompenzaci působení Coriolisovy síly.

## 1.7 Sagnacův efekt

Jedním z nejdůležitějších efektů projevujících se v rotujících soustavách v plochem prostoročase je tzv. Sagnacův efekt. V této sekci nastíníme, jak tento efekt interpretovat z hlediska různých soustav.

Uvažme experiment, ve kterém vysílač v RF vyšle světelný signál ve směru rotace a proti směru rotace, oba paprsky necháme oběhnout po kruhové dráze celý disk a detekujeme je na stejném místě vůči RF, ze kterého jsme je vyslali. Protože vysílač / přijímač v RF vůči IF rotuje, zatímco fotony se pohybují oběma směry stejnou rychlostí, pozorovatel v IF zjistí, že foton vyslaný po směru rotace se k vysílači / přijímači navrátí za delší dobu než foton vyslaný proti směru rotace, neboť musí urazit delší vzdálenost.

Foton cestující po směru rotace splňuje rovnici

$$-2\pi + \frac{T_+}{R} = \omega T_+, \quad (1.152)$$

foton cestující opačným směrem splňuje

$$2\pi - \frac{T_-}{R} = \omega T_-. \quad (1.153)$$

Periody oběhu fotonů měřené v IF tedy jsou

$$T_+ = \frac{2\pi r}{1 - \omega R}, \quad (1.154)$$

$$T_- = \frac{2\pi R}{1 + \omega R}. \quad (1.155)$$

Rozdíl obou period pak činí (např. [8,11])

$$\Delta T = T_+ - T_- = 4\pi\omega\gamma^2 R^2. \quad (1.156)$$

Podívejme se nyní na stejný experiment z hlediska RF. Čtyřrychlost fotonů je nulový vektor, tj.

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0, \quad (1.157)$$

navíc uvažujeme kruhový pohyb, fotony tedy splňují rovnici

$$-\gamma^{-2} dt^2 + 2r^2 \omega dt d\varphi + r^2 d\varphi^2 = 0. \quad (1.158)$$

Označíme-li  $\alpha \equiv \frac{d\varphi}{dt}$ , lze tuto rovnici upravit do tvaru

$$\alpha^2 + 2\omega\alpha - \frac{1 - \omega^2 r^2}{r^2} = 0. \quad (1.159)$$

Tato rovnice má dvě řešení

$$\alpha_{\pm} = -\omega \pm \frac{1}{r}, \quad (1.160)$$

fotonu pohybujícímu se ve směru rotace tedy jeden oběh bude trvat

$$t_{+} = \frac{2\pi r}{1 - \omega r} \quad (1.161)$$

a fotonu pohybujícímu se proti směru rotace

$$t_{-} = \frac{2\pi r}{1 + \omega r}. \quad (1.162)$$

Rozdíl period tedy bude opět činit

$$\Delta t = t_{+} - t_{-} = 4\pi\omega\gamma^2 r^2, \quad (1.163)$$

tentokrát však výsledek interpretujeme tak, že fotony urazily stejnou souřadnicovou vzdálenost  $2\pi$  (a tedy i shodnou vlastní vzdálenost měřenou v RF) avšak různou souřadnicovou rychlostí.

Zbývá ještě interpretace za použití tetrády (1.15). Již víme, že lokálně měřená vzdálenost nezávisí na pohybu testovací částice a lokálně měřená rychlost fotonů je vždy rovna jedné. Mohlo by se tedy zdát, že tento přístup předpovídá odlišný výsledek experimentu. Stačí si však uvědomit, že zde narážíme na stejný problém, jako když jsme se pokoušeli sestrojít integrální podvarietu kolmou na  $\mathbf{u}$ . Posuneme-li se v prostoru o  $\delta\mathbf{x} = r\delta\hat{\varphi}\mathbf{e}_{\hat{\varphi}} = r\gamma\delta\varphi\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}$ , posuneme se zároveň v souřadnicovém čase podle (1.18) o

$$\delta t = \gamma^2\omega r^2\delta\varphi, \quad (1.164)$$

tedy posun za jeden oběh tam, resp. zpět činí

$$\Delta t_{\pm} = \pm 2\pi\gamma^2\omega r^2. \quad (1.165)$$

Díky tomu jeden foton „nabere zpoždění“ a druhý si naopak „naběhne“. Dohromady je pak mezi nimi souřadnicový časový rozdíl (obvykle nazývaný *synchronisation gap*)

$$\Delta t = \Delta t_{+} - \Delta t_{-} = 4\pi\gamma^2\omega r^2, \quad (1.166)$$

což je očekávaný výsledek.

## KRUHOVÉ ORBITY V KERROVĚ PROSTOROČASE

Kerrův prostoročas je (v určité oblasti parametrů) generován rotující černou dírou. Jedná se o přesné vakuové řešení Einsteinových rovnic předpokládající stacionaritu a axiální symetrii. V této kapitole se budeme zabývat pozorovateli v tomto prostoročase, kteří sami tyto symetrie zachovávají, tedy pohybují se po kruhových orbitách s konstantní úhlovou rychlostí  $\Omega$ . Nejprve odvodíme tetradu, kterou si s sebou pozorovatelé nesou, dále ukážeme, jak pomocí této tetrady vypadá kovariantní derivace, a spočteme vlastní zrychlení pozorovatelů. Pak probereme některé privilegované třídy pozorovatelů a odvodíme vztah mezi námi uvažovanou tetradou a tetradou Frenetovou-Serretovou. Konečně uvedeme některé příklady měření provedených rotujícími pozorovateli.

### 2.1 Rotující pozorovatelé v Kerrově prostoročase

Obecná metrika stacionárního, axiálně symetrického, cirkulárního prostoročasu lze zapsat (viz. např. [12])

$$\mathbf{g} = -e^{2\nu} dt \otimes dt + e^{2\psi} (d\varphi - \omega dt) \otimes (d\varphi - \omega dt) + e^{2\mu_1} dr \otimes dr + e^{2\mu_2} d\vartheta \otimes d\vartheta, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{g}^{-1} = -e^{-2\nu} (\partial_t + \omega \partial_\varphi) \otimes (\partial_t + \omega \partial_\varphi) + e^{-2\psi} \partial_\varphi \otimes \partial_\varphi + e^{-2\mu_1} \partial_r \otimes \partial_r + e^{-2\mu_2} \partial_\vartheta \otimes \partial_\vartheta. \quad (2.2)$$

Tato metrika přejde v Kerrovu metriku v Boyerových-Lindquistových (dále BL) souřadnicích pro

$$e^{2\nu} = \frac{g_{t\varphi}^2}{g_{\varphi\varphi}} - g_{tt} = \frac{\Sigma \Delta}{\mathcal{A}}, \quad e^{2\psi} = g_{\varphi\varphi} = \frac{\mathcal{A} \sin^2 \vartheta}{\Sigma}, \quad (2.3)$$

$$e^{2\mu_1} = g_{rr} = \frac{\Sigma}{\Delta}, \quad e^{2\mu_2} = g_{\vartheta\vartheta} = \Sigma, \quad \omega = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{2Mar}{\mathcal{A}},$$

kde

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv r^2 - 2Mr + a^2, \\ \Sigma &\equiv r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta, \\ \mathcal{A} &\equiv (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \vartheta. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ve stacionárním a axiálně symetrickém prostoročase existují dvě Killingova vektorová pole,  $\boldsymbol{\eta} = \partial_t$  a  $\boldsymbol{\xi} = \partial_\varphi$ . Uvažujme nyní kongruenci pozorovatelů s rychlostí

$$\mathbf{u} \equiv u^t (\boldsymbol{\eta} + \Omega \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial_t + \Omega \partial_\varphi}{\sqrt{e^{2\nu} - e^{2\psi} (\Omega - \omega)^2}}. \quad (2.5)$$

Snížením indexu dostaneme explicitní vyjádření energie  $E$  a momentu hybnosti  $L$  na jednotku hmoty (např. [13]):

$$\mathbf{u}^b = \frac{-\left[e^{2\nu} + e^{2\psi}\omega(\Omega - \omega)\right]dt + e^{2\psi}(\Omega - \omega)d\varphi}{\sqrt{e^{2\nu} - e^{2\psi}(\Omega - \omega)^2}} = -Edt + Ld\varphi, \quad (2.6)$$

$$E = \frac{e^{2\nu} + e^{2\psi}\omega(\Omega - \omega)}{\sqrt{e^{2\nu} - e^{2\psi}(\Omega - \omega)^2}} = -u^t(g_{tt} + \Omega g_{t\varphi}), \quad (2.7)$$

$$L = \frac{e^{2\psi}(\Omega - \omega)}{\sqrt{e^{2\nu} - e^{2\psi}(\Omega - \omega)^2}} = u^t g_{\varphi\varphi}(\Omega - \omega). \quad (2.8)$$

Pro fyzikálně přípustné orbity musí být  $u^t$  reálné, tedy

$$e^{2\nu} - e^{2\psi}(\Omega - \omega)^2 > 0,$$

z čehož plyne (např. [13,15,14])

$$\Omega \in (\Omega_{\min}, \Omega_{\max}), \quad (2.9)$$

$$\Omega_{\min}^{\max} = \omega \pm e^{\nu-\psi} = \omega \pm \frac{K}{g_{\varphi\varphi}}, \quad (2.10)$$

kde jsme označili  $K \equiv e^{\psi+\nu} = \sqrt{\Delta} \sin \vartheta$ <sup>1)</sup>. Vidíme, že na horizontu<sup>2)</sup> (tj. na ploše, kde  $\Delta = 0$ ) je fyzikálně přípustná pouze  $\Omega = \omega$ . Též vidíme, že v ergosféře, tj. mezi horizontem a statickou mezí (plochou, kde  $g_{tt} = 0$ ) je  $\Omega_{\min} > 0$  a není zde tedy možné stát na konstantním  $r$ ,  $\vartheta$  a  $\varphi$ .

Chceme-li počítat měřitelné veličiny, je výhodné pracovat v tetrádě uvažovaného pozorovatele místo v souřadnicích. Časový vektor tetrády je roven čtyřrychlosti, avšak ve volbě prostorových vektorů tetrády máme 3 rotační stupně volnosti. Zvolme tedy dva z vektorů tetrády rovnoběžné s vektory souřadnicové báze  $\partial_r$ , resp.  $\partial_\vartheta$ . Zbylý vektor snadno dopočteme tak, aby byl kolmý k již zvoleným vektorům. Tetrádou splňující uvedené podmínky je (např. [15,16])

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\hat{t}} \equiv \mathbf{u} &= \frac{\partial_t + \Omega \partial_\varphi}{\sqrt{e^{2\nu} - e^{2\psi}(\Omega - \omega)^2}} = u^t(\partial_t + \Omega \partial_\varphi), \\ \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} &= \frac{\left[e^{\nu-\psi} + e^{\psi-\nu}\omega(\Omega - \omega)\right]\partial_\varphi + e^{\psi-\nu}(\Omega - \omega)\partial_t}{\sqrt{e^{2\nu} - e^{2\psi}(\Omega - \omega)^2}} = \frac{1}{K}(E\partial_\varphi + L\partial_t), \\ \mathbf{e}_{\hat{r}} &= e^{-\mu_1}\partial_r = \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}\partial_r, \quad \mathbf{e}_{\hat{\vartheta}} = e^{-\mu_2}\partial_\vartheta = \frac{1}{\sqrt{g_{\vartheta\vartheta}}}\partial_\vartheta, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{t}} &= -\mathbf{u}^b = \frac{\left[e^{2\nu} + e^{2\psi}\omega(\Omega - \omega)\right]dt - e^{2\psi}(\Omega - \omega)d\varphi}{\sqrt{e^{2\nu} - e^{2\psi}(\Omega - \omega)^2}} = Edt - Ld\varphi, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\varphi}} &= \frac{e^{\psi+\nu}(d\varphi - \Omega dt)}{\sqrt{e^{2\nu} - e^{2\psi}(\Omega - \omega)^2}} = K u^t(d\varphi - \Omega dt), \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{r}} &= e^{\mu_1}dr = \sqrt{g_{rr}}dr, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\vartheta}} = e^{\mu_2}d\vartheta = \sqrt{g_{\vartheta\vartheta}}d\vartheta. \end{aligned} \quad (2.12)$$

<sup>1)</sup> Připomeňme, že platí  $g_{tt} = \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta}$ ,  $g_{t\varphi} = \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\xi}$ ,  $g_{\varphi\varphi} = \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}$ , mnohé z uvedených veličin tedy mají i konkrétní geometrický význam.

<sup>2)</sup> Uvažujeme pouze rotující černé díry s  $a < M$ , tedy mající dva horizonty, a zajímáme se pouze o oblast vně obou horizontů, tj.  $r > r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$ .

Z rovnic (2.11) a (2.12) lze pak snadno získat transformační matice  $Y_{\hat{\alpha}}^{\mu}$  a  $Y_{\mu}^{\hat{\alpha}}$ , neboť platí  $\mathbf{e}_{\hat{\alpha}} = Y_{\hat{\alpha}}^{\mu} \partial_{\mu}$  a  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\alpha}} = Y_{\mu}^{\hat{\alpha}} \mathbf{d}x^{\mu}$ . Podobně pak pro inverzní transformaci platí  $\partial_{\mu} = Y_{\mu}^{\hat{\alpha}} \mathbf{e}_{\hat{\alpha}}$  a  $\mathbf{d}x^{\mu} = Y_{\hat{\alpha}}^{\mu} \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\alpha}}$ , tj.

$$\begin{aligned} \partial_t &= E \mathbf{e}_{\hat{t}} - K u^t \Omega \mathbf{e}_{\hat{\varphi}}, & \mathbf{d}t &= u^t \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{t}} + \frac{L}{K} \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\varphi}}, \\ \partial_{\varphi} &= K u^t \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} - L \mathbf{e}_{\hat{t}}, & \mathbf{d}\varphi &= \frac{E}{K} \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\varphi}} + u^t \Omega \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{t}}, \\ \partial_r &= e^{\mu_1} \mathbf{e}_{\hat{r}}, & \mathbf{d}r &= e^{-\mu_1} \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{r}}, \\ \partial_{\vartheta} &= e^{\mu_2} \mathbf{e}_{\hat{\vartheta}}, & \mathbf{d}\vartheta &= e^{-\mu_2} \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\vartheta}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ze vztahů (2.11) a (2.12) je pak vidět, že se transformační matice výrazně zjednoduší pro  $\Omega = \omega$ , což platí pro ZAMO (zero angular momentum observers). Podrobněji se o této třídě pozorovatelů zmíníme v sekci *Význační pozorovatelé*.

## 2.2 Kovariantní derivace

Pro výpočet kovariantních derivací různých tenzorů podle (20) potřebujeme znát jednorovnicové rotace, které snadno odvodíme pomocí (23). Strukturální koeficienty vyčteme z komutátorů tetrády (2.11). Nenulové nezávislé komutátory tetrády jsou

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}_{\hat{t}}, \mathbf{e}_{\hat{r}}] &= f \cdot \left[ \left( e^{\psi-\nu} (\Omega - \omega) (\omega_{,r} - \psi_{,r} (\Omega - \omega)) + e^{\nu-\psi} \nu_{,r} \right) \mathbf{e}_{\hat{t}} - \Omega_{,r} \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} \right] \\ &= e^{-\mu_1} \left( \frac{E_{,r} - \Omega L_{,r}}{E - \Omega L} \mathbf{e}_{\hat{t}} - \frac{K \Omega_{,r}}{(E - \Omega L)^2} \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} \right), \\ [\mathbf{e}_{\hat{t}}, \mathbf{e}_{\hat{\vartheta}}] &= g \cdot \left[ \left( e^{\psi-\nu} (\Omega - \omega) (\omega_{,\vartheta} - \psi_{,\vartheta} (\Omega - \omega)) + e^{\nu-\psi} \nu_{,\vartheta} \right) \mathbf{e}_{\hat{t}} - \Omega_{,\vartheta} \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} \right] \\ &= e^{-\mu_2} \left( \frac{E_{,\vartheta} - \Omega L_{,\vartheta}}{E - \Omega L} \mathbf{e}_{\hat{t}} - \frac{K \Omega_{,\vartheta}}{(E - \Omega L)^2} \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} \right), \\ [\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}, \mathbf{e}_{\hat{r}}] &= f \cdot \left[ \left( 2(\Omega - \omega) (\nu_{,r} - \psi_{,r}) - \Omega_{,r} + \omega_{,r} (1 + e^{2(\psi-\nu)} (\Omega - \omega)^2) \right) \mathbf{e}_{\hat{t}} + \right. \\ &\quad \left. + \left( e^{\nu-\psi} \psi_{,r} - e^{\psi-\nu} \nu_{,r} (\Omega - \omega)^2 - \omega_{,r} e^{\psi-\nu} (\Omega - \omega) \right) \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} \right] \\ &= e^{-\mu_1} \left[ \frac{L E_{,r} - L_{,r} E}{K} \mathbf{e}_{\hat{t}} + \left( \frac{K_{,r}}{K} - \frac{E_{,r} - \Omega L_{,r}}{E - \Omega L} \right) \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} \right], \\ [\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}, \mathbf{e}_{\hat{\vartheta}}] &= g \cdot \left[ \left( 2(\Omega - \omega) (\nu_{,\vartheta} - \psi_{,\vartheta}) - \Omega_{,\vartheta} + \omega_{,\vartheta} (1 + e^{2(\psi-\nu)} (\Omega - \omega)^2) \right) \mathbf{e}_{\hat{t}} + \right. \\ &\quad \left. + \left( e^{\nu-\psi} \psi_{,\vartheta} - e^{\psi-\nu} \nu_{,\vartheta} (\Omega - \omega)^2 - \omega_{,\vartheta} e^{\psi-\nu} (\Omega - \omega) \right) \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} \right] \\ &= e^{-\mu_2} \left[ \frac{L E_{,\vartheta} - L_{,\vartheta} E}{K} \mathbf{e}_{\hat{t}} + \left( \frac{K_{,\vartheta}}{K} - \frac{E_{,\vartheta} - \Omega L_{,\vartheta}}{E - \Omega L} \right) \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} \right], \\ [\mathbf{e}_{\hat{r}}, \mathbf{e}_{\hat{\vartheta}}] &= e^{-\mu_2} \mu_{1,\vartheta} \mathbf{e}_{\hat{r}} - e^{-\mu_1} \mu_{2,r} \mathbf{e}_{\hat{\vartheta}}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

kde jsme označili  $f \equiv \frac{e^{-\mu_1 + \psi - \nu}}{1 - e^{2(\psi - \nu)(\Omega - \omega)^2}}$  a  $g \equiv \frac{e^{-\mu_2 + \psi - \nu}}{1 - e^{2(\psi - \nu)(\Omega - \omega)^2}}$ . Jedna-formy rotace pak jsou (připomeňme, že platí  $\Gamma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = -\Gamma_{\hat{\beta}\hat{\alpha}}$ )

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\hat{t}\hat{r}} &= -f \cdot \left( e^{\psi - \nu}(\Omega - \omega) \left( \omega_{,r} - \psi_{,r}(\Omega - \omega) \right) + e^{\nu - \psi} \nu_{,r} \right) \epsilon^{\hat{t}} - \\
 &\quad - f \cdot \left( (\Omega - \omega)(\nu_{,r} - \psi_{,r}) + \frac{\omega_{,r}}{2} \left( 1 + e^{2(\psi - \nu)(\Omega - \omega)^2} \right) \right) \epsilon^{\hat{\varphi}} \\
 &= -e^{-\mu_1} \frac{E_{,r} - \Omega L_{,r}}{E - \Omega L} \epsilon^{\hat{t}} - \frac{e^{-\mu_1}}{2} \left( \frac{K \Omega_{,r}}{(E - \Omega L)^2} + \frac{L E_{,r} - L_{,r} E}{K} \right) \epsilon^{\hat{\varphi}}, \\
 \Gamma_{\hat{t}\hat{\vartheta}} &= -g \cdot \left( e^{\psi - \nu}(\Omega - \omega) \left( \omega_{,\vartheta} - \psi_{,\vartheta}(\Omega - \omega) \right) + e^{\nu - \psi} \nu_{,\vartheta} \right) \epsilon^{\hat{t}} - \\
 &\quad - g \cdot \left( (\Omega - \omega)(\nu_{,\vartheta} - \psi_{,\vartheta}) + \frac{\omega_{,\vartheta}}{2} \left( 1 + e^{2(\psi - \nu)(\Omega - \omega)^2} \right) \right) \epsilon^{\hat{\varphi}} \\
 &= -e^{-\mu_2} \frac{E_{,\vartheta} - \Omega L_{,\vartheta}}{E - \Omega L} \epsilon^{\hat{t}} - \frac{e^{-\mu_2}}{2} \left( \frac{K \Omega_{,\vartheta}}{(E - \Omega L)^2} + \frac{L E_{,\vartheta} - L_{,\vartheta} E}{K} \right) \epsilon^{\hat{\varphi}}, \\
 \Gamma_{\hat{t}\hat{\varphi}} &= f \cdot \left( (\Omega - \omega)(\nu_{,r} - \psi_{,r}) - \Omega_{,r} + \frac{\omega_{,r}}{2} \left( 1 + e^{2(\psi - \nu)(\Omega - \omega)^2} \right) \right) \epsilon^{\hat{r}} + \\
 &\quad + g \cdot \left( (\Omega - \omega)(\nu_{,\vartheta} - \psi_{,\vartheta}) - \Omega_{,\vartheta} + \frac{\omega_{,\vartheta}}{2} \left( 1 + e^{2(\psi - \nu)(\Omega - \omega)^2} \right) \right) \epsilon^{\hat{\vartheta}} \\
 &= \frac{e^{-\mu_1}}{2} \left( \frac{L E_{,r} - L_{,r} E}{K} - \frac{K \Omega_{,r}}{(E - \Omega L)^2} \right) \epsilon^{\hat{r}} + \\
 &\quad + \frac{e^{-\mu_2}}{2} \left( \frac{L E_{,\vartheta} - L_{,\vartheta} E}{K} - \frac{K \Omega_{,\vartheta}}{(E - \Omega L)^2} \right) \epsilon^{\hat{\vartheta}}, \\
 \Gamma_{\hat{r}\hat{\vartheta}} &= e^{-\mu_2} \mu_{1,\vartheta} \epsilon^{\hat{r}} - e^{-\mu_1} \mu_{2,r} \epsilon^{\hat{\vartheta}}, \\
 \Gamma_{\hat{r}\hat{\varphi}} &= -f \cdot \left( e^{\nu - \psi} \psi_{,r} - e^{\psi - \nu} \nu_{,r} (\Omega - \omega)^2 - \omega_{,r} e^{\psi - \nu} (\Omega - \omega) \right) \epsilon^{\hat{\varphi}} + \\
 &\quad + f \cdot \left( (\Omega - \omega)(\nu_{,r} - \psi_{,r}) + \frac{\omega_{,r}}{2} \left( 1 + e^{2(\psi - \nu)(\Omega - \omega)^2} \right) \right) \epsilon^{\hat{t}} \\
 &= e^{-\mu_1} \left( \frac{K_{,r}}{K} - \frac{E_{,r} - \Omega L_{,r}}{E - \Omega L} \right) \epsilon^{\hat{\varphi}} + \frac{e^{-\mu_1}}{2} \left( \frac{K \Omega_{,r}}{(E - \Omega L)^2} + \frac{L E_{,r} - L_{,r} E}{K} \right) \epsilon^{\hat{t}}, \\
 \Gamma_{\hat{\vartheta}\hat{\varphi}} &= -g \cdot \left( e^{\nu - \psi} \psi_{,\vartheta} - e^{\psi - \nu} \nu_{,\vartheta} (\Omega - \omega)^2 - \omega_{,\vartheta} e^{\psi - \nu} (\Omega - \omega) \right) \epsilon^{\hat{\varphi}} + \\
 &\quad + g \cdot \left( (\Omega - \omega)(\nu_{,\vartheta} - \psi_{,\vartheta}) + \frac{\omega_{,\vartheta}}{2} \left( 1 + e^{2(\psi - \nu)(\Omega - \omega)^2} \right) \right) \epsilon^{\hat{t}} \\
 &= e^{-\mu_2} \left( \frac{K_{,\vartheta}}{K} - \frac{E_{,\vartheta} - \Omega L_{,\vartheta}}{E - \Omega L} \right) \epsilon^{\hat{\varphi}} + \frac{e^{-\mu_2}}{2} \left( \frac{K \Omega_{,\vartheta}}{(E - \Omega L)^2} + \frac{L E_{,\vartheta} - L_{,\vartheta} E}{K} \right) \epsilon^{\hat{t}}.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Pohledem na první z uvedených vyjádření si lze všimnout, že se výrazy opět výrazně zjednoduší, pokud položíme  $\Omega = \omega$ . Tento speciální případ je uveden např. v [12]. Nenulových Ricciho rotačních koeficientů je 24, z toho 10 je nezávislých. Tyto dvě vlastnosti dělají ze ZAMO výhodné kandidáty pro počítání v Kerrově geometrii – např. v BL souřadnicích je celkem 32 nenulových Christoffelových symbolů, z toho taktéž 10 nezávislých, viz. např. [15].

### 2.3 Zrychlení

Zkoumaní pozorovatelé obecně nejsou geodetičtí, aby se tedy udrželi na orbitě, je třeba vyvíjet určitou sílu. Tomu odpovídá zrychlení, které spočteme pomocí (2.15) jako

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = \Gamma^{\hat{\alpha}}_{\hat{i}}(\mathbf{e}_{\hat{i}})\mathbf{e}_{\hat{\alpha}} = \Gamma_{\hat{r}\hat{t}\hat{t}}\mathbf{e}_{\hat{r}} + \Gamma_{\hat{\vartheta}\hat{t}\hat{t}}\mathbf{e}_{\hat{\vartheta}} \\ &= f \cdot \left( e^{\psi-\nu}(\Omega - \omega) \left( \omega_{,r} - \psi_{,r}(\Omega - \omega) \right) + e^{\nu-\psi}\nu_{,r} \right) \mathbf{e}_{\hat{r}} + \\ &\quad + g \cdot \left( e^{\psi-\nu}(\Omega - \omega) \left( \omega_{,\vartheta} - \psi_{,\vartheta}(\Omega - \omega) \right) + e^{\nu-\psi}\nu_{,\vartheta} \right) \mathbf{e}_{\hat{\vartheta}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$= e^{-\mu_1} \frac{E_{,r} - \Omega L_{,r}}{E - \Omega L} \mathbf{e}_{\hat{r}} + e^{-\mu_2} \frac{E_{,\vartheta} - \Omega L_{,\vartheta}}{E - \Omega L} \mathbf{e}_{\hat{\vartheta}}. \quad (2.17)$$

Z výrazu (2.16) vidíme, že pro ZAMO se výraz redukuje na

$$\mathbf{a} = e^{-\mu_1}\nu_{,r}\mathbf{e}_{\hat{r}} + e^{-\mu_2}\nu_{,\vartheta}\mathbf{e}_{\hat{\vartheta}}. \quad (2.18)$$

Dosazením koeficientů ploché metriky do (2.2) dostáváme v ekvatoriální rovině

$$\mathbf{a} = -\gamma^2\Omega^2 r \mathbf{e}_{\hat{r}}, \quad (2.19)$$

což je očekávaný výsledek. Další úpravou výrazu (2.16) a použitím (2.10) pak lze dospět k vyjádření zrychlení pomocí hraničních úhlových rychlostí:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{n} + e^{-\mu_1} \left( \frac{\Omega_{\max,r}}{2(\Omega_{\max} - \Omega)} - \frac{\Omega_{\min,r}}{2(\Omega - \Omega_{\min})} \right) \mathbf{e}_{\hat{r}} + \\ &\quad + e^{-\mu_2} \left( \frac{\Omega_{\max,\vartheta}}{2(\Omega_{\max} - \Omega)} - \frac{\Omega_{\min,\vartheta}}{2(\Omega - \Omega_{\min})} \right) \mathbf{e}_{\hat{\vartheta}}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

kde jsme označili  $\mathbf{n} \equiv -e^{-\mu_1}\psi_{,r}\mathbf{e}_{\hat{r}} - e^{-\mu_2}\psi_{,\vartheta}\mathbf{e}_{\hat{\vartheta}}$  vnitřní normálu. Protože tetradové indexy se snižují Minkowského metrikou  $\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ , po snížení a transformaci do BL souřadnic pomocí (2.12) vidíme, že výrazy (2.17) a (2.20) jsou v souladu se zrychlením uvedeným v [13,14].

Dále si všimněme, že dosazením koeficientů Kerrovy metriky vymizí v ekvatoriální rovině ( $\vartheta = \pi/2$ ) „latitudální“ složka čtyřzrychlení. Průběh  $a^{\hat{r}}$  (které je pak v tomto případě až na znaménko rovno  $\|\mathbf{a}\|$ ) v závislosti na  $\Omega$  je pro různá  $r$  znázorněn na Obrázku 2.1.

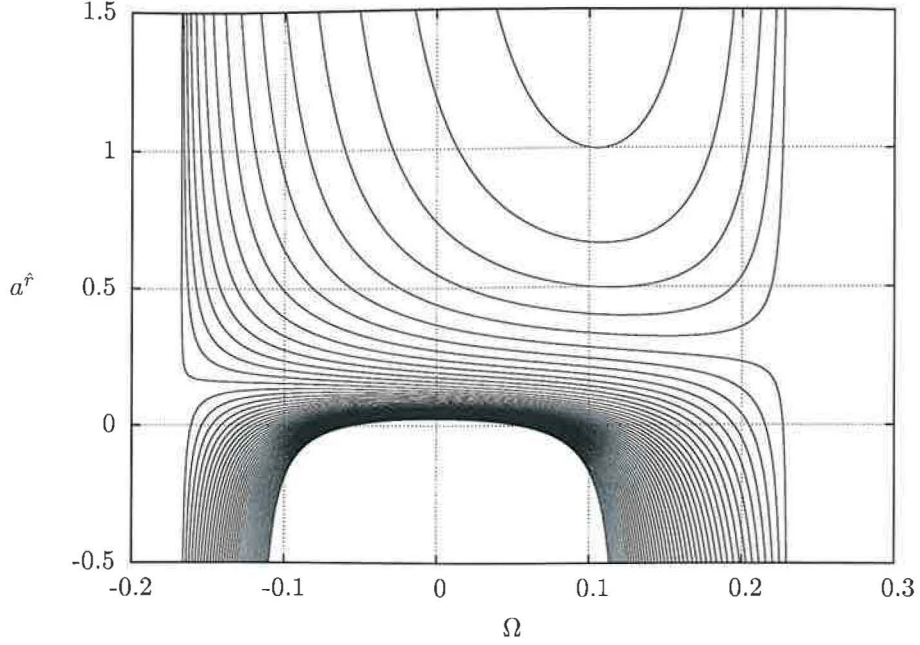
### 2.4 Význační pozorovatelé v ekvatoriální rovině

V Kerrově prostoročase je několik kongruencí stacionárních pozorovatelů, které jsou nějak výjimečné – pozorovatelé statičtí v BL souřadnicích, pozorovatelé s nulovým specifickým momentem hybnosti, Carterovi pozorovatelé, geodetičtí pozorovatelé a extrémně urychlení pozorovatelé. V této sekci shrneme jejich základní vlastnosti a ukážeme, v jakém vztahu k nim jsou ostatní stacionární pozorovatelé na společných orbitách.

#### 2.4.1 Statičtí pozorovatelé

Globální souřadný systém, který používáme, definuje třídu pozorovatelů, kteří jsou vůči němu statičtí (tj. jsou stacionární a navíc mají  $\Omega = 0$ ). Byť je tato definice souřadnicově závislá, díky tomu, že BL souřadnice jsou těsně spojeny s Killingovými vektorovými poli





Obrázek 2.1: Závislost „radiální“ tetradové komponenty zrychlení  $a^{\hat{r}}$  v ekvatoriální rovině na  $\Omega$  pro různá  $r$  blízko vnějšího horizontu  $r_+$  Kerrova prostoročasu s  $a = 0.4M$ . Postupujeme-li od nejvrchnější křivky směrem k nejspodnější, postupujeme od  $r = r_+ + 0.005M$  po krocích velkých  $0.1M$ . Úhlová rychlost  $\Omega$  a „radiální“ tetradová komponenta zrychlení  $a^{\hat{r}}$  jsou v jednotkách  $M^{-1}$ .

Kerrova prostoročasu, jsou to právě tyto pozorovatelé, kteří jsou v klidu vůči asymptotickému Lorentzovu systému zdroje. Z (2.11) a (2.12) dostáváme tetradu<sup>1)</sup> (např. [15])

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_{\hat{t}} &= \frac{\partial_t}{\sqrt{e^{2\nu} - e^{2\psi}\omega^2}} = \frac{\partial_t}{\sqrt{-g_{tt}}}, \\
 \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} &= \frac{(e^{\nu-\psi} - e^{\psi-\nu}\omega^2)\partial_{\varphi} - e^{\psi-\nu}\omega\partial_t}{\sqrt{e^{2\nu} - e^{2\psi}\omega^2}} = \frac{1}{K}(\sqrt{-g_{tt}}\partial_{\varphi} + \frac{g_{t\varphi}}{\sqrt{-g_{tt}}}\partial_t), \\
 \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{t}} &= \frac{(e^{2\nu} - e^{2\psi}\omega^2)\mathbf{d}t + e^{2\psi}\omega\mathbf{d}\varphi}{\sqrt{e^{2\nu} - e^{2\psi}\omega^2}} = \sqrt{-g_{tt}}\mathbf{d}t - \frac{g_{t\varphi}}{\sqrt{-g_{tt}}}\mathbf{d}\varphi, \\
 \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\varphi}} &= \frac{e^{\psi+\nu}\mathbf{d}\varphi}{\sqrt{e^{2\nu} - e^{2\psi}\omega^2}} = \frac{K}{\sqrt{-g_{tt}}}\mathbf{d}\varphi.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Vidíme, že aby byl tento pozorovatel fyzikálně přípustný, musí být  $g_{tt} < 0$ , což v ekvatoriální rovině platí pro  $r > 2M$ ; pro  $r = 2M$  jsou tyto pozorovatelé světelní. Pro jejich energii a moment hybnosti dostáváme

$$E = \sqrt{e^{2\nu} - e^{2\psi}\omega^2} = \sqrt{-g_{tt}}, \tag{2.22}$$

$$L = \frac{-e^{2\psi}\omega}{\sqrt{e^{2\nu} - e^{2\psi}\omega^2}} = \frac{g_{t\varphi}}{\sqrt{-g_{tt}}}. \tag{2.23}$$

Uvažme testovací částici pohybující se po stejné orbitě souřadnicovou úhlovou rychlostí  $\Omega'$ . Její rychlost je shodná s časovým vektorem tetrady (2.11), kde jsme místo  $\Omega$  dosadili  $\Omega'$ . Stacionární pozorovatel pak naměří relativní třírychlost podle vzorce (1.86)

$$\mathbf{v} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{t}}(\mathbf{e}'_{\hat{t}})}{\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{t}}(\mathbf{e}'_{\hat{t}})}\mathbf{e}_{\hat{t}} = \frac{K\Omega'}{-g_{tt} - g_{t\varphi}\Omega'}\mathbf{e}_{\hat{\varphi}} = \frac{\sqrt{\Delta}r\Omega'}{r - 2M + 2M\Omega'a}\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}. \tag{2.24}$$

<sup>1)</sup> Vektory  $\mathbf{e}_{\hat{r}}$  a  $\mathbf{e}_{\hat{\theta}}$  a jejich duály na  $\Omega$  nezávisí, proto je ve výčtu neuvádíme.

Velikost třírychlosti je v oboru všech fyzikálně přípustných  $\Omega'$  rostoucí funkcí  $\Omega'$ , v  $\Omega_{\min}$  nabývá hodnoty  $-1$ , v  $\Omega_{\max}$  hodnoty  $+1$ .

### 2.4.2 Pozorovatelé s nulovým momentem hybnosti

Další významnou třídou pozorovatelů jsou pozorovatelé s nulovým azimutálním momentem hybnosti  $L$  (tj. Zero Angular Momentum Observers – ZAMO). Pro tyto pozorovatele platí (jak je vidět z (2.8))  $\Omega = \omega$ . Jak jsme se již několikrát zmínili v předchozích sekcích, pro tyto pozorovatele se mnoho vztahů výrazně zjednodušuje. Jejich tetráda, nazývající se obvykle LNRF tetráda (protože platí  $\Omega = \omega$ , tyto pozorovatelé „korotují s geometrií“ neboli lokálně nerotují – Locally Non-Rotating Frame), je z (2.11) a (2.12) dosazením  $\Omega = \omega$  (např. [12,15])

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\hat{t}} &= \frac{\partial_t + \omega \partial_\varphi}{e^\nu} = \frac{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}{K} (\partial_t + \omega \partial_\varphi), \\ \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} &= \frac{\partial_\varphi}{e^\psi} = \frac{\partial_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{t}} &= e^\nu \mathbf{d}t = \frac{K}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} \mathbf{d}t, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\varphi}} &= e^\psi (\mathbf{d}\varphi - \omega \mathbf{d}t) = \sqrt{g_{\varphi\varphi}} (\mathbf{d}\varphi - \omega \mathbf{d}t). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Vidíme, že ZAMO jsou fyzikálně přípustní všude vně horizontu a stávají se světelnými na horizontu. Energie a moment hybnosti jsou

$$E = e^\nu = \frac{1}{u^t} = \frac{K}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} = \sqrt{\frac{\Sigma\Delta}{\mathcal{A}}}, \quad (2.26)$$

$$L = 0. \quad (2.27)$$

Relativní třírychlost stacionárního pozorovatele, který po stejné orbitě obíhá se souřadnicovou úhlovou rychlostí  $\Omega'$ , je (např. [12,13])

$$\mathbf{v} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{t}}(\mathbf{e}'_{\hat{t}})}{\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{t}}(\mathbf{e}'_{\hat{\varphi}})} \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} = e^{\psi-\nu} (\Omega' - \omega) \mathbf{e}_{\hat{\varphi}}. \quad (2.28)$$

Velikost třírychlosti je opět v oboru všech přípustných  $\Omega'$  rostoucí funkcí  $\Omega'$ , v  $\Omega_{\min}$  nabývá hodnoty  $-1$ , v  $\Omega_{\max}$  hodnoty  $+1$ , a navíc je lineární jako funkce  $\Omega'$ .

V sekci *Hydrodynamické vlastnosti* navíc ukážeme, že tyto pozorovatelé mají další příjemnou vlastnost, a to nulovost všech složek tenzoru vířivosti, lze tedy sestrojít integrální nadplochy kolmé na pole jejich rychlostí.

### 2.4.3 Carterovi pozorovatelé

Pozorovatelé nejpříměji související s algebraickou strukturou křivosti Kerrova řešení jsou Carterovi pozorovatelé – fotony principiálních nulových kongruencí, přirozené zobecnění radiálních fotonů ve Schwarzschildovi, jsou z pohledu Carterových pozorovatelů čistě radiální. Souřadnicová úhlová rychlost těchto pozorovatelů je (např. [15]),

$$\Omega = \frac{a}{r^2 + a^2}. \quad (2.29)$$

Dosadíme-li z tohoto vztahu do (2.11) a (2.12), dostaneme (např. [15])

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_t &= \frac{(r^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\varphi}{\sqrt{\Sigma\Delta}}, \\
 \mathbf{e}_\varphi &= \frac{\partial_\varphi + a\partial_t}{\sqrt{\Sigma}}, \\
 \boldsymbol{\varepsilon}^t &= \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}\mathbf{d}t - \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}a\mathbf{d}\varphi, \\
 \boldsymbol{\varepsilon}^\varphi &= \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}\left((r^2 + a^2)\mathbf{d}\varphi - a\mathbf{d}t\right).
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Vidíme, že fyzikálně přípustní jsou tyto pozorovatelé v oblasti  $\Delta > 0$ , tedy všude vně horizontu; na horizontu se stávají světelnými. Jejich energie a moment hybnosti jsou

$$E = \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}, \tag{2.31}$$

$$L = \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}a. \tag{2.32}$$

Relativní třírychlost stacionárního pozorovatele na stejné orbitě se souřadnicovou úhlovou rychlostí  $\Omega'$  je

$$\mathbf{v} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^i(\mathbf{e}'_i)}{\boldsymbol{\varepsilon}^t(\mathbf{e}'_t)}\mathbf{e}_i = \frac{\Omega'(r^2 + a^2) - a}{\sqrt{\Delta}(1 - a\Omega')}\mathbf{e}_\varphi. \tag{2.33}$$

Velikost třírychlosti je rostoucí funkcí  $\Omega'$  na intervalu  $[\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$ , oborem hodnot je interval  $[-1, 1]$ .

#### 2.4.4 Geodetičtí pozorovatelé

V Kerrově prostoročase existují i kruhové geodetiky. Místo přímého hledání rovnice geodetik však můžeme využít toho, že se zajímáme pouze o ekvatoriální kruhové geodetiky a navíc již máme spočteno zrychlení (2.16). „Latitudální“ složka je v ekvatoriální rovině nulová vždy, stačí tedy hledat  $\Omega$ , pro které platí  $a^{\hat{r}} = 0$ . To vede na kvadratickou rovnici

$$\begin{aligned}
 &(2a^4M^2 + a^4Mr - a^2Mr^3 - a^2r^4 - r^6)\Omega^2 + \\
 &+ (2Mra^3 + 4a^3M^2 + 2aMr^3)\Omega + Mra^2 + 2a^2M^2 + Mr^3 = 0,
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

jejímiž kořeny jsou (např. [12,15])

$$\Omega_{\pm} = \frac{Ma \mp r\sqrt{Mr}}{Ma^2 - r^3} = \pm \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{r^3 \pm \sqrt{Ma}}}. \tag{2.35}$$

Dosazením do (2.11) a (2.12) dostaneme

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_{t\pm} &= \frac{(\sqrt{r^3} \pm \sqrt{Ma})\partial_t \pm \sqrt{M}\partial_\varphi}{\sqrt{Z_{\pm}}}, \\
 \mathbf{e}_{\varphi\pm} &= \frac{(\sqrt{r^3} - 2M\sqrt{r} \pm \sqrt{Ma})\partial_\varphi \pm \sqrt{M}(r^2 + a^2 \mp 2a\sqrt{Mr})\partial_t}{\sqrt{\Delta Z_{\pm}}}, \\
 \boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}^t &= \frac{(\sqrt{r^3} - 2M\sqrt{r} \pm \sqrt{Ma})\mathbf{d}t \mp \sqrt{M}(r^2 + a^2 \mp 2a\sqrt{Mr})\mathbf{d}\varphi}{\sqrt{Z_{\pm}}}, \\
 \boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}^\varphi &= \sqrt{\frac{\Delta}{Z_{\pm}}}\left((\sqrt{r^3} \pm \sqrt{Ma})\mathbf{d}\varphi \mp \sqrt{M}\mathbf{d}t\right),
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

kde jsme označili  $Z_{\pm} \equiv r^3 - 3Mr^2 \pm 2a\sqrt{Mr^3}$ . Fyzikálně přípustným pohybům zde odpovídají ty, pro něž

$$r^2 - 3rM \pm 2a\sqrt{Mr} \geq 0. \quad (2.37)$$

Prográdní pozorovatelé jsou fyzikálně přípustní po vnitřní kruhovou světelnou orbitu (odpovídá maximum  $\Omega_{\max}$ ) a retrográdní po vnější kruhovou světelnou orbitu (odpovídá minimum  $\Omega_{\min}$ ). Energie a moment hybnosti jsou (např. [12])

$$E_{\pm} = \frac{\sqrt{r^3 - 2M\sqrt{r}} \pm \sqrt{Ma}}{\sqrt{Z_{\pm}}}, \quad (2.38)$$

$$L_{\pm} = \frac{\pm\sqrt{M}(r^2 + a^2 \mp 2a\sqrt{Mr})}{\sqrt{Z_{\pm}}}. \quad (2.39)$$

Relativní třírychlost stacionárního pozorovatele obíhajícího po stejné orbitě se souřadnicovou úhlovou rychlostí  $\Omega'$  je

$$\mathbf{v} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^i(\mathbf{e}'_i)}{\boldsymbol{\varepsilon}^i(\mathbf{e}_i)} \mathbf{e}_i = \frac{\sqrt{\Delta} \left[ \mp \sqrt{M} + \left( \sqrt{r^3} \pm \sqrt{Ma} \right) \Omega' \right]}{\sqrt{r^3 - 2M\sqrt{r}} \pm \sqrt{Ma} \mp \sqrt{M}(r^2 + a^2 \mp 2a\sqrt{Mr}) \Omega'} \mathbf{e}_{\dot{\varphi}}. \quad (2.40)$$

Velikost třírychlosti je rostoucí lineární lomenou funkcí  $\Omega'$  na intervalu  $[\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$ , oborem hodnot je interval  $[-1, 1]$ .

#### 2.4.5 Extremálně urychlení pozorovatelé

Poslední význačnou třídou stacionárních kruhových pohybů v ekvatoriální rovině jsou extrémálně urychlení pozorovatelé, tj. ti, pro něž platí  $\frac{\partial a^r}{\partial \omega} = 0$ . Zderivováním (2.20) dostaneme rovnici

$$e^{-\mu_1} \left[ \frac{\Omega_{\max,r}}{2(\Omega_{\max} - \Omega)^2} + \frac{\Omega_{\min,r}}{2(\Omega - \Omega_{\min})^2} \right] = 0, \quad (2.41)$$

jejímž řešením jsou (např. [13,17,18])

$$\Omega_{12} = \frac{-r(r^2 - 3Mr) + 2Ma^2 \pm r\sqrt{(r^2 - 3Mr)^2 - 4Ma^2r}}{2(3Mar^2 + Ma^3)}. \quad (2.42)$$

Fyzikálně přípustní jsou pak prográdní pozorovatelé od horizontu až po vnitřní kruhovou nulovou geodetiku, retrográdní jsou přípustní od vnější kruhové nulové geodetiky. Podrobněji se těmto pozorovatelům věnuje např. Semerák v [13].

## 2.5 Frenetova-Serretova tetráda

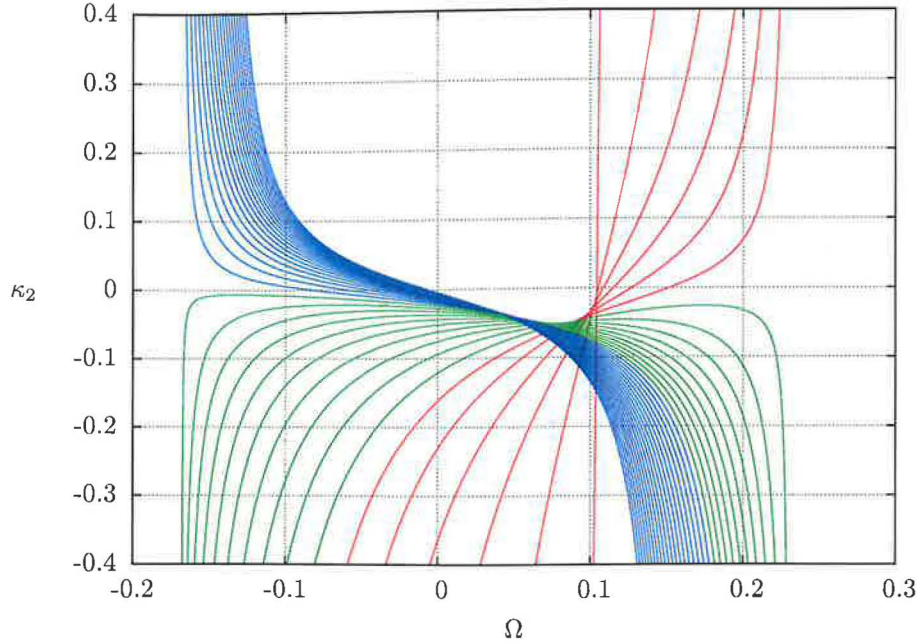
Námi zvolená tetráda sice velmi dobře popisuje měření prováděná stacionárním rotujícím pozorovatelem, natočení prostorových vektorů je však závislé na používaných souřadnicích, v našem případě BL. Existuje však tetráda, která reflektuje pouze geometrické vlastnosti prostoročasu a světočáry pozorovatele. Ta je definována zcela invariantně, bez jakýchkoliv referencí na konkrétní souřadný systém nebo pozorovatele. Tato tetráda se nazývá Frenetova-Serretova a splňuje vztahy [14]

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{e}_0 = \kappa_1 \mathbf{e}_1, \quad (2.43)$$

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{e}_1 = \kappa_1 \mathbf{e}_0 + \kappa_2 \mathbf{e}_2, \quad (2.44)$$

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{e}_2 = -\kappa_2 \mathbf{e}_1 + \kappa_3 \mathbf{e}_3, \quad (2.45)$$

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{e}_3 = -\kappa_3 \mathbf{e}_2, \quad (2.46)$$



Obrázek 2.2: Závislost první torze  $\kappa_2$  v ekvatoriální rovině na  $\Omega$  pro různá  $r$  blízko vnějšího horizontu  $r_+$  Kerrova prostoročasu s  $a = 0.4M$ . Postupujeme-li od téměř svislé křivky po směru hodinových ručiček, postupujeme od  $r = r_+ + 0.005M$  po krocích velkých  $0.1M$ . Červené křivky odpovídají oblastem, ve které existují progradně rotující extrémně urychlení pozorovatelé, zelené odpovídají oblastem, ve které neexistují extrémně urychlení pozorovatelé, a konečně modré odpovídají oblastem, ve které existují retrogradně rotující extrémně urychlení pozorovatelé. Úhlová rychlost  $\Omega$  a první torze  $\kappa_2$  jsou v jednotkách  $M^{-1}$ .

kde skaláry  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  a  $\kappa_3$  se nazývají první, druhá a třetí křivost (někdy též křivost a první a druhá torze). Časový (tečný) vektor je shodný se čtyřrychlostí a první normála je, jak vidíme z (2.43), normovaným zrychlením, tedy

$$\mathbf{e}_{\hat{0}} = \mathbf{u} = \mathbf{e}_{\hat{t}}, \quad (2.47)$$

$$\mathbf{e}_{\hat{1}} = \frac{\mathbf{a}}{\kappa_1}, \quad \kappa_1 = \|\mathbf{a}\|, \quad (2.48)$$

řešením zbylých rovnic (2.44) – (2.46) pak dostaneme i vztahy pro druhou a třetí normálu a obě torze (např. [14]):

$$\mathbf{e}_{\hat{2}} = -\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}, \quad (2.49)$$

$$\mathbf{e}_{\hat{3}} = \frac{a^{\hat{\vartheta}} \mathbf{e}_{\hat{r}} - a^{\hat{r}} \mathbf{e}_{\hat{\vartheta}}}{\kappa_1}, \quad (2.50)$$

$$\kappa_2 = -\Gamma_{\hat{t}\hat{r}\hat{\varphi}} \frac{a^{\hat{r}}}{\kappa_1} - \Gamma_{\hat{t}\hat{\vartheta}\hat{\varphi}} \frac{a^{\hat{\vartheta}}}{\kappa_1}, \quad (2.51)$$

$$\kappa_3 = \Gamma_{\hat{t}\hat{r}\hat{\varphi}} \frac{a^{\hat{\vartheta}}}{\kappa_1} - \Gamma_{\hat{t}\hat{\vartheta}\hat{\varphi}} \frac{a^{\hat{r}}}{\kappa_1}. \quad (2.52)$$

V ekvatoriální rovině se pak křivost a první a druhá torze díky nulovosti  $a^{\hat{\vartheta}}$ ,  $\nu_{,\vartheta}$ ,  $\psi_{,\vartheta}$  a  $\omega_{,\vartheta}$  zjednoduší na

$$\kappa_1 = |a^{\hat{r}}| = |\Gamma_{\hat{r}\hat{t}\hat{t}}|, \quad (2.53)$$

$$\kappa_2 = -\Gamma_{\hat{t}\hat{r}\hat{\varphi}}, \quad (2.54)$$

$$\kappa_3 = 0. \quad (2.55)$$



Křivost  $\kappa_1$  je tedy shodná s velikostí  $a^{\hat{r}}$  (které je znázorněno na Obrázku 2.1), závislost první torze  $\kappa_2$  na  $\Omega$  pro různá  $r$  je znázorněna na Obrázku 2.2. Křivost  $\kappa_1$  je nulová z definice právě tehdy, když je pohyb geodetický, první torze  $\kappa_2$  pak v ekvatoriální rovině vymizí pro extrémně urychlené pozorovatele. Obě jsou nulové v případě, že jsou splněny obě podmínky, což nastává v případě kruhových nulových geodetik.

Dále vidíme, že F-S tetráda se v ekvatoriální rovině zjednoduší na

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\hat{0}} &= \mathbf{e}_t, \\ \mathbf{e}_{\hat{1}} &= \text{sgn}(a^{\hat{r}})\mathbf{e}_{\hat{r}}, \\ \mathbf{e}_{\hat{2}} &= -\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}, \\ \mathbf{e}_{\hat{3}} &= -\text{sgn}(a^{\hat{r}})\mathbf{e}_{\hat{\beta}}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

## 2.6 Hydrodynamické vlastnosti

V analogii s klasickou fyzikou lze hydrodynamické vlastnosti kongruence pozorovatelů popsat polem rychlostí  $\mathbf{u}$ , polem zrychlení  $\mathbf{a}$ , antisymetrickým tenzorovým polem vířivosti  $\boldsymbol{\omega}$  a symetrickým tenzorovým polem expanze  $\Theta$ , které lze ještě dále rozdělit na jeho stopu  $\Theta$  a bezstopou část, tenzorové pole střížných deformací  $\sigma$ . Rychlost a zrychlení jsme již odvodili v předchozích sekcích, zde se tedy budeme věnovat pouze tenzorovým polím vířivosti a expanze. Vířivost lze v souřadnicových složkách zapsat jako [8]

$$\omega_{\mu\nu} = u_{[\mu;\nu]} + a_{[\mu}u_{\nu]}, \quad (2.57)$$

tetrádové složky získáme prostou transformací (viz. str. 24 pro použité značení)

$$\omega_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = (u_{[\mu;\nu]} + a_{[\mu}u_{\nu]})Y_{\hat{\alpha}}^{\mu}Y_{\hat{\beta}}^{\nu} = -(\nabla_{[\hat{\beta}}\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{t}}, \mathbf{e}_{\hat{\alpha}}]) + (\nabla_{\hat{t}}\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{t}}, \mathbf{e}_{[\hat{\alpha}}])(\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{t}}, \mathbf{e}_{\hat{\beta}}]), \quad (2.58)$$

z čehož po úpravě dostáváme

$$\boldsymbol{\omega} = (\Gamma^{\hat{t}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} - \Gamma^{\hat{t}}_{\hat{\alpha}\hat{t}}\eta^{\hat{t}}_{\hat{\beta}})\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\alpha}} \wedge \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\beta}}. \quad (2.59)$$

Ihned vidíme, že druhý člen se realizuje pouze pro  $\hat{\beta} = \hat{t}$ , pak se ale oba členy odečtou, vířivost je tedy rovna

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \Gamma^{\hat{t}}_{\hat{i}\hat{j}}\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{i}} \wedge \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{j}} = -\Gamma_{\hat{i}\hat{j}}^{\hat{t}}\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{i}} \wedge \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{j}} \\ &= e^{-\mu_1} \left( \frac{LE_{,r} - L_{,r}E}{K} \right) \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{r}} \wedge \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\varphi}} + e^{-\mu_2} \left( \frac{LE_{,\vartheta} - L_{,\vartheta}E}{K} \right) \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\vartheta}} \wedge \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\varphi}}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

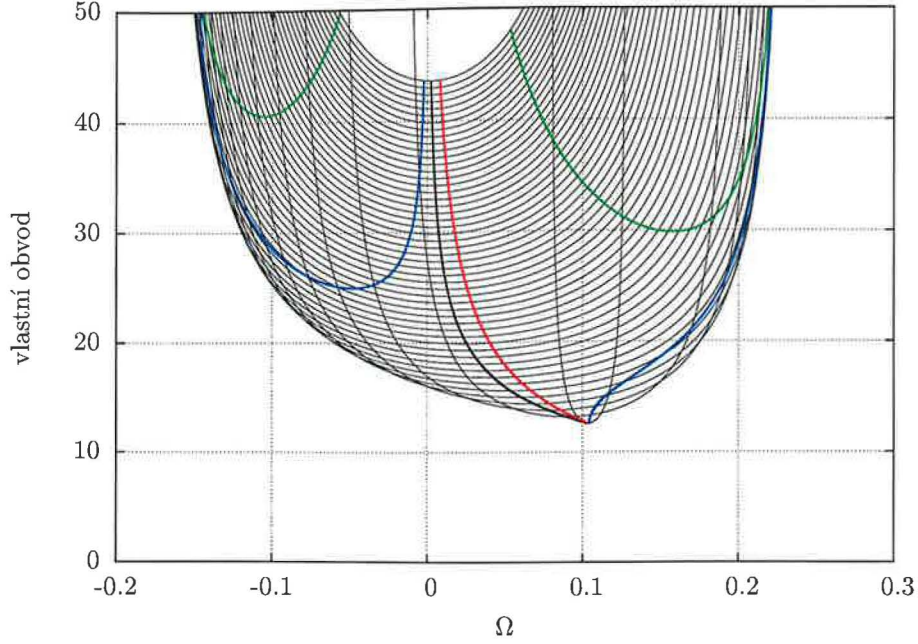
Vidíme, že vířivost je nulová pro ZAMO a pro pozorovatele, pro něž platí  $L/E = \text{konst.}$

Expanze lze v souřadnicových složkách zapsat jako (např. [8] a [2])

$$\Theta_{\mu\nu} = u_{(\mu;\nu)} + a_{(\mu}u_{\nu)}. \quad (2.61)$$

Podobně jako u vířivosti dostaneme její vyjádření v tetrádové bázi

$$\begin{aligned} \Theta &= \Gamma^{\hat{t}}_{\hat{i}\hat{j}}\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{i}} \odot \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{j}} = -\Gamma_{\hat{i}\hat{j}}^{\hat{t}}\boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{i}} \odot \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{j}} \\ &= e^{-\mu_1} \frac{K\Omega_{,r}}{(E - \Omega L)^2} \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{r}} \odot \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\varphi}} + e^{-\mu_2} \frac{K\Omega_{,\vartheta}}{(E - \Omega L)^2} \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\vartheta}} \odot \boldsymbol{\varepsilon}^{\hat{\varphi}}. \end{aligned} \quad (2.62)$$



Obrázek 2.3: Závislost vlastního obvodu v ekvatoriální rovině na  $\Omega$  pro různá  $r$  blízko vnějšího horizontu  $r_+$  Kerrova prostoročasu s  $a = 0.4M$ . Postupujeme-li od nejspodnější křivky směrem nahoru, postupujeme od  $r = r_+ + 0.005M$  po krocích velikých  $0.1M$ . Vlastní obvod je v jednotkách  $M$ ,  $\Omega$  je v jednotkách  $M^{-1}$ . Tučně vyznačená černá křivka označuje ZAMO, červená Carterovy pozorovatele, zelená geodetické pozorovatele a modrá extrémně urychlené pozorovatele.

Vidíme, že stopa  $\Theta$  je pro všechny stacionární kruhové kongruence nulová. Tenzorové pole střížných deformací je tedy

$$\sigma = \Theta = e^{-\mu_1} \frac{K\Omega_{,r}}{(E - \Omega L)^2} \varepsilon^{\hat{r}} \odot \varepsilon^{\hat{\varphi}} + e^{-\mu_2} \frac{K\Omega_{,\vartheta}}{(E - \Omega L)^2} \varepsilon^{\hat{\vartheta}} \odot \varepsilon^{\hat{\varphi}}, \quad (2.63)$$

a nuluje se pro konstantní  $\Omega$ .

## 2.7 Měření délek

Jak jsme v minulé kapitole ukázali na příkladě rotujícího kotouče v Minkowského prostoročase, lokálně měřit vzdálenosti lze několika různými postupy. Zde využijeme průmětů do tetrády (2.11). Mějme infinitesimální vektor  $\delta \mathbf{x} = \delta \varphi \partial_\varphi + \delta r \partial_r + \delta \vartheta \partial_\vartheta$ . Prostorové tetrádové složky pak snadno spočteme pomocí (2.12) jako

$$\delta \hat{\varphi} = \varepsilon^{\hat{\varphi}}(\delta \mathbf{x}) = K u^t \delta \varphi = \frac{e^\psi \delta \varphi}{\sqrt{1 - e^{2(\psi - \nu)} (\Omega - \omega)^2}}, \quad (2.64)$$

$$\delta \hat{r} = \varepsilon^{\hat{r}}(\delta \mathbf{x}) = e^{\mu_1} \delta r, \quad (2.65)$$

$$\delta \hat{\vartheta} = \varepsilon^{\hat{\vartheta}}(\delta \mathbf{x}) = e^{\mu_2} \delta \vartheta. \quad (2.66)$$

Vidíme, že dle očekávání „radiální“ a „latitudinální“ tetrádové složky jsou nezávislé na souřadnicové úhlové rychlosti  $\Omega$ , na rozdíl od „azimutální“ tetrádové složky.

Vztahy (2.64) a (2.65) nyní můžeme využít ke spočtení vlastního obvodu orbity a vlastní radiální vzdálenosti od horizontu v ekvatoriální rovině. Měření si můžeme představit tak, že naskládáme v příslušném směru vedle sebe infinitesimálně krátké tyče (označme si prostorové křivky, které tyto tyče vytvoří,  $\gamma_o$  při měření obvodu a  $\gamma_r$  při měření

vzdálenosti od horizontu) a spočteme, kolik tyčí se vedle sebe vešlo. V limitě pak přejde suma v integrál a pro vlastní obvod, resp. vzdálenost od horizontu dostaneme

$$\text{obvod} = \int_{\gamma_\circ} d\hat{\varphi} = \int_0^{2\pi} K u^t d\varphi = 2\pi K u^t, \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \text{vzdál. od horizontu} &= \int_{\gamma_r} d\hat{r} = \int_{r_+}^r e^{\mu_1(r', \vartheta=\frac{\pi}{2})} dr' = \int_{r_+}^r \frac{r'}{\sqrt{r'^2 - 2Mr' + a^2}} dr' \\ &= \left[ \sqrt{\Delta(r')} + M \ln(r' - M + \sqrt{\Delta(r')}) \right]_{r_+}^r \\ &= \sqrt{\Delta} + M \ln \frac{r - M + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{M^2 - a^2}}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Závislost vlastního obvodu na  $\Omega$  pro různá  $r$  je znázorněna na Obrázku 2.3.

## 2.8 Frekvenční posuv vůči nekonečnu

Pro libovolný foton pohybující se po geodetice v stacionárním prostoročase se jeho energie zachovává. Energie jakožto záporně vzatá časová složka hybnosti však není invariant a při transformaci souřadného systému se tedy bude obecně měnit. Libovolný pozorovatel s rychlostí  $\mathbf{u}$  naměří u fotonu o hybnosti  $\mathbf{p}$  energii  $\hat{E} = -\mathbf{u}(\mathbf{p})$  (např. [8]). Protože frekvence  $f$  fotonu souvisí s jeho energií vztahem  $E = hf$ , je poměr frekvencí geodetického fotonu měřený pozorovatelem v bodě B s rychlostí  $\mathbf{w}$  a pozorovatelem v bodě A s rychlostí  $\mathbf{u}$  roven (např. [8])

$$\frac{\hat{f}_B}{\hat{f}_A} = \frac{\mathbf{w}(\mathbf{p})|_B}{\mathbf{u}(\mathbf{p})|_A}. \quad (2.69)$$

Uvažme nyní stacionárního pozorovatele A, který vyšle fotony kolmo ke směru pohybu. Fotony doletí k pozorovateli B stojícímu v nekonečnu, a ten změří jejich frekvenci. Poměr frekvencí bude

$$\frac{\hat{f}_B}{\hat{f}_A} = \frac{-p_t|_B}{\hat{E}_A \sqrt{-g_{tt}|_B}}, \quad (2.70)$$

kde ještě využijeme, že  $p_t$  je integrál pohybu a že v radiálním nekonečnu  $-g_{tt} = 1$ :

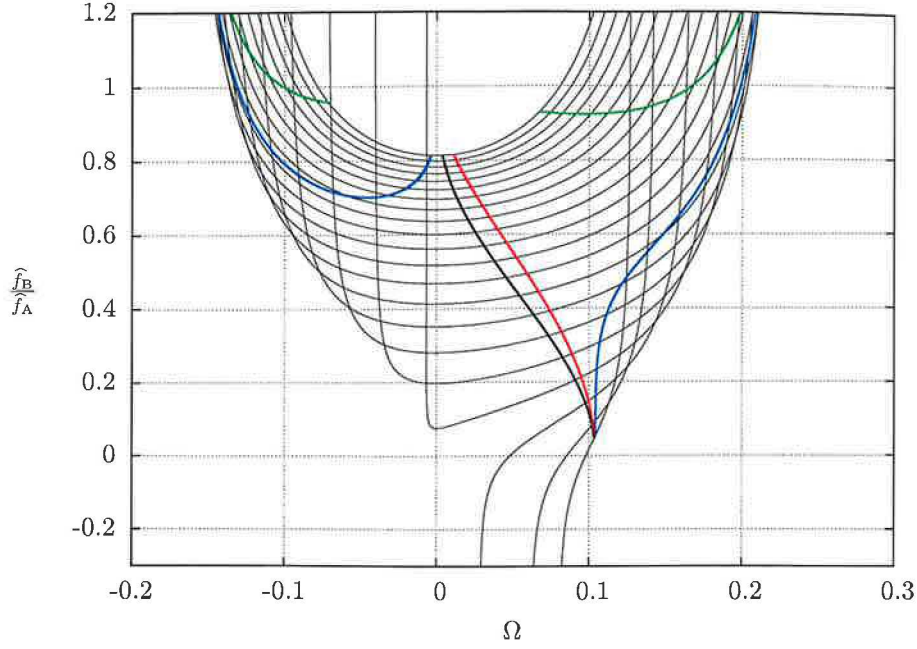
$$\frac{\hat{f}_B}{\hat{f}_A} = \frac{-p_t|_A}{\hat{E}_A} = \frac{-\partial_t(-\hat{E}_A \epsilon^t + p_{\hat{k}} \epsilon^{\hat{k}})}{\hat{E}_A}, \quad (2.71)$$

a konečně využijeme předpokladu kolmosti  ${}^{(3)}\mathbf{p}$  a  ${}^{(3)}\mathbf{u}^b$ :

$$\frac{\hat{f}_B}{\hat{f}_A} = Y_t^t = \frac{e^{2\nu} + e^{2\psi} \omega (\Omega - \omega)}{\sqrt{e^{2\nu} - e^{2\psi} (\Omega - \omega)^2}}. \quad (2.72)$$

Závislost na  $\Omega$  pro různá  $r$  v ekvatoriální rovině je znázorněna na Obrázku 2.4. Všimněme si, že v ergosféře existují i fotony se zápornou energií. Tyto fotony však mohou existovat *pouze* v ergosféře nikdy se tedy nedostanou k pozorovateli v nekonečnu. Též je vidět,





Obrázek 2.4: Závislost frekvenčního posuvu vůči  $\infty$  na  $\Omega$  pro různá  $r$  blízko vnějšího horizontu  $r_+$  Kerrova prostoročasu s  $a = 0.4M$  v ekvatoriální rovině. Postupujeme-li od nejspodnější křivky směrem nahoru, postupujeme od  $r = r_+ + 0.005M$  a přičítáme  $0.01n^2M$ ,  $n = 0, 1, 2 \dots$ . Souřadnicová úhlová rychlost  $\Omega$  je v jednotkách  $M^{-1}$ . Tučně vyznačená černá křivka označuje ZAMO, červená Carterovy pozorovatele, zelená geodetické pozorovatele a modrá extrémně urychlené pozorovatele.

že minimum, tj. největší rudý posuv, nastává pro statické pozorovatele (v oblasti, kde neexistují, pak závislost nemá minimum).

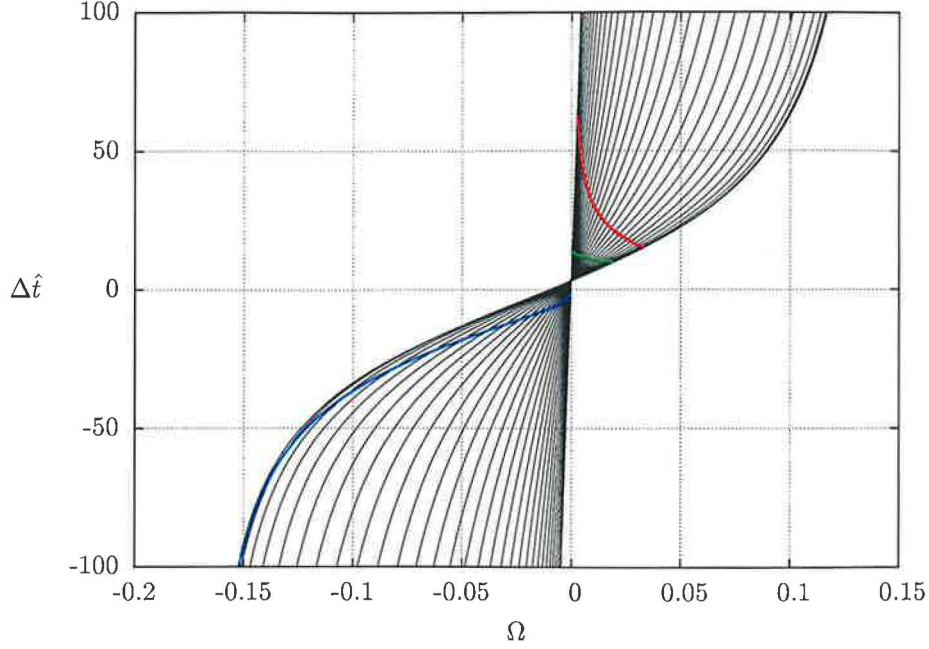
## 2.9 Gravitomagnetický hodinový efekt

Gravitomagnetický hodinový efekt (též *GM clock effect*) je časový rozdíl v periodách oběhu částic po kruhových orbitách v prográdním a retrográdním směru. Rozlišujeme tři typy efektu (viz. např. [18]):

- i) *single-clock clock effect* závislý na pozorovateli – rozdíl v periodách oběhu vzájemně opačně obíhajících geodetických částic měřený pozorovatelem;
- ii) *two-clock clock effect* závislý na pozorovateli – rozdíl v periodách oběhu vzájemně opačně obíhajících geodetických částic měřený jejich hodinami, jeden oběh je uvažován relativně k pozorovateli;
- iii) *two-clock clock effect* nezávislý na pozorovateli – rozdíl v naměřeném časovém intervalu mezi dvěma setkáními vzájemně opačně obíhajících geodetických částic měřený jejich hodinami.

Křivku, po které se pohybuje pozorovatel s úhlovou rychlostí  $\Omega$ , lze v BL souřadnicích parametrizovat

$$\begin{aligned} t &= u^t \lambda, \\ \varphi &= u^t \Omega \lambda (\text{mod } 2\pi), \end{aligned} \quad (2.73)$$



Obrázek 2.5: *Single-clock GM clock effect závislý na pozorovateli v závislosti na  $\Omega$  pro různá  $r$  blízko vnější kruhové nulové geodetiky  $r_{\text{ph-}}$  Kerrova prostoročasu s  $a = 0.4M$  v ekvatoriální rovině. Postupujeme-li z dolního levého rohu směrem doprava, například podél modré křivky, postupujeme od  $r = r_{\text{ph-}} + 0.005M$  a přičítáme  $0.01n^2M$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Souřadnicová úhlová rychlost  $\Omega$  je v jednotkách  $M^{-1}$ ,  $\Delta\hat{t}$  v jednotkách  $M$ . Tučně vyznačená zelená křivka označuje ZAMO, červená Carterovy pozorovatele, modrá extrémně urychlené pozorovatele.*

podobně pak pro obíhající geodetické testovací částice platí

$$\begin{aligned} t_{\pm} &= u_{\pm}^t \lambda_{\pm}, \\ \varphi_{\pm} &= u_{\pm}^t \Omega_{\pm} \lambda_{\pm} \pmod{2\pi}, \\ \Omega_{\pm} &= \frac{\pm\sqrt{M}}{\sqrt{r^3 \pm \sqrt{M}a}}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Nastavme počátek souřadnic tak, aby  $t = t_{\pm} = \varphi = \varphi_{\pm} = 0$  při vypuštění obou testovacích částic. Vyšetřujeme-li efekty závislé na pozorovateli, hledáme nejmenší  $t_{\pm} > 0$  takové, aby platily rovnice

$$\varphi = \varphi_{+}, \quad t = t_{+} \quad (2.75)$$

pro prohrádně obíhající, resp.

$$\varphi = \varphi_{-}, \quad t = t_{-} \quad (2.76)$$

pro retrohrádně obíhající částici. Řešením jsou

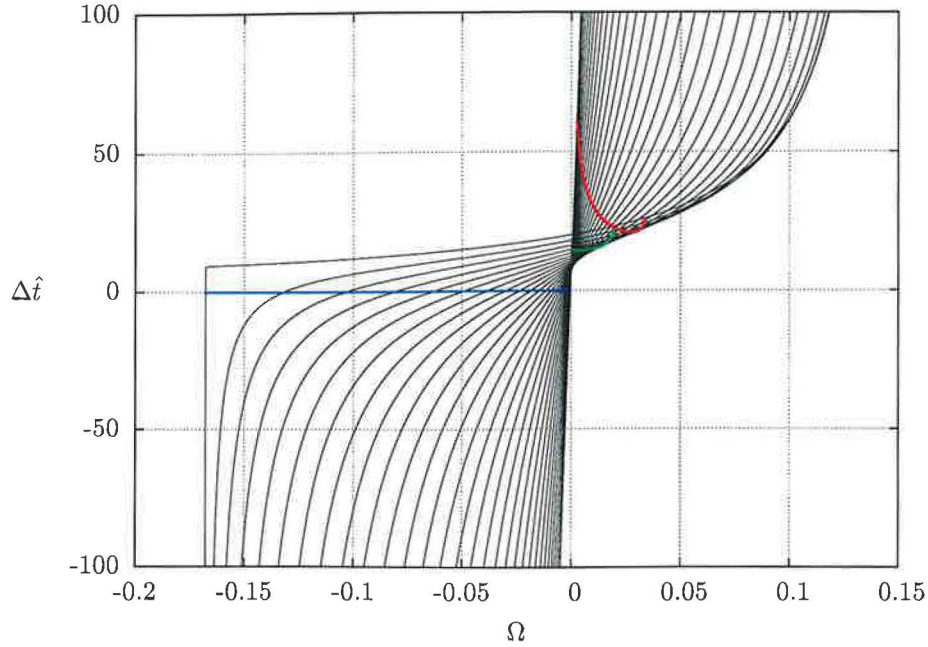
$$t_{\pm} = \frac{\pm 2\pi}{(\Omega_{\pm} - \Omega)}, \quad (2.77)$$

pro  $\Omega \in (\Omega_{-}, \Omega_{+})$ . Vlastní čas naměřený pozorovatelem s úhlovou rychlostí  $\Omega$  je

$$\hat{t}_{\pm}(\Omega) = t_{\pm} \varepsilon^{\hat{t}}(\partial_t + \Omega \partial_{\varphi})(\Omega) = (E - \Omega L)t_{\pm} = \frac{t_{\pm}}{u^t(\Omega)}, \quad (2.78)$$

což pro single-clock clock effect závislý na pozorovateli dává (např. [18])

$$\Delta\hat{t} = \hat{t}_{+}(\Omega) - \hat{t}_{-}(\Omega) = \frac{1}{u^t(\Omega)} \frac{2\pi(2\Omega - \Omega_{+} - \Omega_{-})}{(\Omega_{+} - \Omega)(\Omega - \Omega_{-})} \quad (2.79)$$



Obrázek 2.6: Two-clock GM clock effect závislý na pozorovateli v závislosti na  $\Omega$  pro různá  $r$  blízko vnější kruhové nulové geodetiky  $r_{\text{ph-}}$  Kerrova prostoročasu s  $a = 0.4M$  v ekvatoriální rovině. Postupujeme-li z dolního levého rohu směrem doprava, například podél modré křivky, postupujeme od  $r = r_{\text{ph-}} + 0.005M$  a přičítáme  $0.01n^2M$ ,  $n = 0, 1, 2 \dots$ . Souřadnicová úhlová rychlost  $\Omega$  je v jednotkách  $M^{-1}$ ,  $\Delta\hat{t}$  v jednotkách  $M$ . Tučně vyznačená zelená křivka označuje ZAMO, červená Carterovy pozorovatele, modrá extrémně urychlené pozorovatele.

a pro two-clock clock effect závislý na pozorovateli (např. [18])

$$\Delta\hat{t} = \frac{2\pi}{(\Omega_+ - \Omega)u^t(\Omega_+)} - \frac{2\pi}{(\Omega - \Omega_-)u^t(\Omega_-)}. \quad (2.80)$$

Single-clock clock effect závislý na pozorovateli vymizí pro pozorovatele s úhlovou rychlostí

$$\Omega = \frac{-Ma}{(r^3 - Ma)}, \quad (2.81)$$

avšak z (2.40) lze ukázat, že relativní třírychlosti testovacích částic jsou vzájemně opačné právě pro extrémně urychlené pozorovatele. Časový rozdíl naměřený těmito pozorovateli tedy musí být důsledkem skoku v synchronizaci času v prográdním, resp. retrográdním směru (tzv. *synchronization gap*), podobným jako jsme zjistili u Sagnacova efektu v Minkowského prostoročase, použijeme-li k jeho vysvětlení tetradu (viz. 1.7 Sagnacův efekt).

Two-clock effect závislý na pozorovateli vymizí pro extrémně urychlené pozorovatele (např. [17,18]), což opět ukazuje na význačnost této třídy pozorovatelů. GM clock effect závislý na pozorovateli v závislosti na  $\Omega$  pro různá  $r$  je znázorněn na Obrázcích 2.5 a 2.6.

Vyšetřujeme-li efekt nezávislý na pozorovateli, hledáme nejmenší  $t_{\pm} > 0$  takové, aby platily rovnice

$$\varphi_+ = \varphi_-, \quad t_+ = t_-. \quad (2.82)$$

Řešením je

$$t_+ = t_- = \frac{2\pi}{\Omega_+ - \Omega_-}, \quad (2.83)$$

pro two-clock effect nezávislý na pozorovateli pak tedy máme (např. [18])

$$\Delta\hat{t} = \hat{t}_+(\Omega_+) - \hat{t}_-(\Omega_-) = \frac{\pi(r^3 - Ma^2)}{\sqrt{Mr^3}} \left( \frac{1}{u^t(\Omega_+)} - \frac{1}{u^t(\Omega_-)} \right), \quad (2.84)$$

což je různé od nuly.



## ZÁVĚR

V této práci jsme se zabývali některými zajímavostmi spojenými s orbitálním pohybem v Minkowského a Kerrově prostoročase. Zvláště jsme se zajímali o jednoduchá prostorová a časová měření, která by v těchto polích mohli vykonat pozorovatelé na stacionárních kruhových orbitách. Práce je založená na převzatých, případně i všeobecně známých výsledcích, avšak všechny jsme je přepočítali, popř. odvodili a interpretovali nezávisle na literatuře.

V první kapitole jsme nahlíželi Minkowského prostoročas z hlediska rotující soustavy (t.j. studovali jsme geometrii „na rotujícím kotouči“). Nalezli jsme časupodobné a nulové geodetiky a znázornili, jak vypadají vůči rotující soustavě. Probrali jsme několik způsobů, jak mohou pozorovatelé ko-rotující s kotoučem provádět lokální měření vzdáleností a času, a ukázali, že všechny dávají ekvivalentní výsledky. U tří-rychlosti jsme poukázali na rozdílnost definic používaných různými autory a vyjasnili, co tyto definice fyzikálně představují. Získané výsledky jsme využili k popisu globální struktury disku. Speciálně jsme ukázali, že tzv. Ehrenfestův paradox, upozorňující na rozdíl mezi měřením v inerciální a rotující soustavě, není paradoxem, pokud připustíme, že disk nemá eukleidovskou geometrii. Jeho skutečnou geometrii lze popsat Langevinovou-Landauovou-Lifshitzovou metrikou. Interpretovali jsme ji jako třírozměrnou nadplochu vloženou do čtyřrozměrného Minkowského prostoročasu a zobrazili jsme její řez  $z = \text{konst.}$

Na příkladě radiální radarové vzdálenosti jsme ukázali, že světla nelze obecně využít ke globálnímu měření vzdáleností. Odvodili jsme vztahy pro zrychlení orbitujícího pozorovatele a pro zrychlení radiálně se pohybujícího objektu vůči rigidně rotující soustavě (toto zrychlení je způsobeno Coriolisovou silou). Nakonec jsme ukázali, že interpretace Sagnacova efektu závisí na zvolené soustavě – v inerciální soustavě jde o důsledek toho, že proti-rotující fotony musí od zdroje k přijímači projít různě dlouhé dráhy, v rotující soustavě efekt vzniká díky rozdílné rychlosti světla v prográdním a retrográdním směru, a konečně vůči poli tetrad spojených s rigidně rotující soustavou lze efekt interpretovat jako důsledek nespojitosti vznikající při roznášení času v prográdním, resp. retrográdním azimutálním směru (tzv. *synchronisation gap*).

Druhá kapitola je věnována stacionárním kruhovým orbitám v Kerrově prostoročase, speciálně v případě buzeném černou dírou (tvar většiny výsledků je však platný i pro obecný cirkulární, stacionární a axiálně symetrický prostoročas). Pomocí základních parametrů tetrad vázaných na kruhový pohyb jsme spočetli odpovídající Ricciho rotační koeficienty a zrychlení. Probrali jsme několik zvláště privilegovaných podtříd kruhových pohybů – pozorovatele s nulovým momentem hybnosti vůči ose symetrie (ZAMO), tzv. Carterovy (kanonické) pozorovatele, vázané na hlavní nulové směry Riemannova tenzoru, pozorovatele stojící vůči nekonečnu, pozorovatele obíhající volně a pozorovatele s extrémální velikostí zrychlení. Dále jsme odvodili souvislost mezi tetradou stacionárního pozorovatele a Frenetovou-Serretovou tetradou vázanou na danou kruhovou dráhu. Věnovali jsme se také základním „hydrodynamickým“ vlastnostem stacionárních kruhových kongruencí. Vířivost vymizí pro ZAMO pozorovatele, obecněji pro jakoukoli kongruenci s konstantním poměrem  $L/E$ , expanze je nulová pro všechny stacionární kruhové pohyby a pole střížné deformace vymizí pro „rigidně rotující“ kongruenci (jejíž úhlová rychlost nezávisí na poloze).

Zvláště jsme se soustředili na prostorová a časová měření, která by mohli obíhající pozorovatelé uskutečnit. Zajímavé například je, jak na úhlové rychlosti oběhu závisí vlastní obvod orbity. Vykreslili jsme také průběh frekvenčního posuvu pozorovatelů vůči nekonečnu. (V ergosféře existují i fotony se zápornou energií vůči nekonečnu; ty však ergosféru nemohou opustit.) Měření času se týká z literatury známý tzv. *gravitomagnetic clock effect* (překládáme přímočaře jako „hodinový efekt“). Jedná se o jakousi obdobu Sagnacova efektu, tentokrát však s podstatným příspěvkem *draggingu* (strhávání geometrie ve směru rotace centra). Odvodili jsme průběhy tří různých variant tohoto efektu a potvrdili, že výsadní, „symetrickou“ roli v něm hrají extrémně urychlení pozorovatelé.

## LITERATURA

- [1] Chandrasekhar S.: *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford University Press, New York 1983
- [2] de Felice F., Clarke C. J. S.: *Relativity on Curved Manifolds*. Cambridge University Press, Cambridge 1990
- [3] de Felice F.: *Dynamics on a rotating disk*, Phys. Rev. A **52**, 3452 (1995)
- [4] Nikolić H.: *Relativistic contraction and related effects in noninertial frames*, Phys. Rev. A **61**, 032109 (2000)
- [5] Davies P. A.: *Measurements in rotating systems*, J. Phys. A **9**, 951 (1976)
- [6] McFarlane K., McGill N. C.: *Light ray and particle paths on a rotating disc*, J. Phys. A **11**, 2191 (1978)
- [7] Grøn Ø.: *Relativistic description of a rotating disk*, Am. J. Phys **43**, 869 (1975)
- [8] Grøn Ø., Hervik S.: *Einstein's General Theory of Relativity*. Springer, New York 2007
- [9] Ruggiero M. L.: *Relative space: space measurements on a rotating platform*, Eur. J. Phys. **24**, 563 (2003)
- [10] Cranor M. B., Heider E. M., Price R. H.: *A circular twin paradox*, Am. J. Phys. **68**, 1016 (2000)
- [11] Post E. J.: *Sagnac Effect*, Rev. Mod. Phys. **39**, 475 (1967)
- [12] Bardeen J. M., Press W. H., Teukolsky S. A.: *Rotating Black Holes: Locally Nonrotating Frames, Energy Extraction, and Scalar Synchrotron Radiation*, Astrophys. J. **178**, 347 (1972)
- [13] Semerák O.: *Rotospheres in Stationary Axisymmetric Spacetimes*, Ann. Phys. (N.Y.) **263**, 133 (1997)
- [14] Semerák O.: *Circular Orbits in Stationary Axisymmetric Spacetimes*, Gen. Rel. Grav. **30**, 1203 (1998)
- [15] Semerák O.: *Stationary Frames in the Kerr Field*, Gen. Rel. Grav. **25**, 1041 (1993)
- [16] de Felice F., Usseglio-Tomasset S.: *Strains and Rigidity in Black-hole Fields*, Gen. Rel. Grav. **28**, 179 (1996)
- [17] Semerák O.: *Gravitomagnetic clock effect and extremely accelerated observers*, Class. Quantum Grav. **16**, 3769 (1999)
- [18] Bini D., Jantzen R. T., Mashhoon B.: *Gravitomagnetism and relative observer clock effects*, Class. Quantum Grav. **18**, 653 (2001)