Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vendula Exnerová

Větvení řešení rovnic a nerovnic v $\mathbb{R}^n$

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: **doc. RNDr. Jana Stará, CSc.**

Studijní program: **Obecná matematika, Matematická analýza**

Rok vypracování: **2009**

Poděkování

Velice děkuji paní docentce Janě Staré za skvělé vedení, milý přístup a trpělivost.
Děkuji také panu profesorovi Milanovi Kučerovi za podnětný seminář o bifurkacích.
Dále děkuji svým přátelům za technickou pomoc v boji s LaTeXem a svým rodičům za celkovou podporu ve studiu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.
V Praze
Dne 28. května 2009

Vendula Exnerová

Obsah

Název práce: **Větvení řešení rovnic a nerovnic v $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$**

Autor: **Vendula Exnerová**

Katedra: **Katedra matematické analýzy**

Vedoucí bakalářské práce: **doc. RNDr. Jana Stará, CSc.**

E-mail vedoucího: **Jana.Stara@mff.cuni.cz**

Abstrakt: Tato práce se zabývá úvodem do teorie bifurkací, tedy teorií větvení řešení rovnic a nerovnic. Zde se omezujeme jen na reálné prostory konečné dimenze. V první části zavádíme základní pojmy týkající se teorie. Dále připravíme důležitý matematický nástroj — Ljapunov-Schmidtovu redukci, která převádí rovnici na prostory nižší dimenze. Následuje Crandall-Rabinowitzova věta, která krom postačujících podmínek bifurkace popisuje množinu netriviálních řešení na okolí bodu bifurkace jako hladkou křivku. Böhmeho příklad naopak uvádí případ, kdy na žádném okolí bodu bifurkace nelze řešení popsat spojitě. Další odstavec se zabývá bifurkací podél nedegenerovaného vlastního směru („eigenray“). Poslední část zabývající se rovnicemi nabízí přehled dalších bifurkačních vět.

V kapitole o bifurkaci nerovnic opět definujeme základní pojmy, uvádíme základní lemmata a příklady a dále výčet některých dalších vět pro nerovnice.

Práci zakončují Dodatky, kde jsou základní poznatky matematické analýzy používané v textu.

Klíčová slova: bifurkace, bod větvení, Crandall-Rabinowitzova věta, Böhmeho příklad, vlastní směr

Title: **Bifurcation of solution to equations and inequalities in $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$**

Author: **Vendula Exnerová**

Department: **Department of Mathematical Analysis**

Supervisor: **doc.RNDr. Jana Stará, CSc.**

Supervisor's e-mail address: **Jana.Stara@mff.cuni.cz**

Abstract: In the present work we study the bifurcation of equations and inequalities. In real finite-dimension spaces. In the first part, we introduce the bifurcation theory for equations — we define fundamental terms. Next, we prepare a very important mathematical tool - the Lyapunov-Schmidt reduction which reduces the dimension of space where the equation is considered. The Crandall-Rabinowitz Theorem follows. It gives sufficient conditions for bifurcation and, in addition, it describes locally a set of non-trivial solutions as a smooth curve on a neighbourhood of bifurcation point. On the other hand, the Böhme's example shows a case where the bifurcated solution do not form a continuous curve in any neighbourhood of the point of bifurcation. The next paragraph deals with bifurcation along a non-degenerated eigenray. In the last part concerning equations we offer a view of other bifurcation theorems.

In the chapter about bifurcation of inequalities we define the basic terms and present basic lemmas and examples. Again, we demonstrate some theorems for ineqaulities.

We finish with appendix where the elementary knowledge of mathematical analysis used in the text can be found.

Keywords: bifurcation, bifurcation point, Crandall-Rabinowitz Theorem, Böhme's example, eigenray

Úvod

Tento text je jen letmým pohledem na základní kámen teorie bifurkací (tj. teorie větvení řešení). Bez těchto základů by však rozsáhlá teorie bifurkací nemohla být vystavěna. Poznatků o bifurkaci se přitom hojně využívá — například v biologii, chemii a psychologii.

Přestože je teorie bifurkací vytvořena pro reálné Hilbertovy prostory, tato práce se omezuje na reálné prostory konečné dimenze. To hlavně proto, že práce pouze nastiňuje problém bifurkace a pro lepší ilustrativnost.

V následujícím textu nejprve zavádíme bifurkační rovnice $F(0, \lambda) = 0$ a základní pojmy (bod bifurkace, množina řešení). Dále zde uvádíme postup Ljapunov-Schmidtovy redukce zjednodušený pro prostory konečné dimenze. Ljapunov-Schmidtova redukce nám poslouží tím, že převádí problém na prostory nižší dimenze.

Crandall-Rabinowitzova věta, která je zde uvedena i s důkazem, dává postačující podmínky bifurkace pro $\dim \operatorname{Ker} F_1'(0, \lambda) = 1$. Navíc popisuje množinu netriviálních řešení na okolí bodu bifurkace jako spojitou křivku. Předkládáme však také Böhmeho příklad, který naopak ilustruje případ rovnice, pro kterou neexistuje žádná spojitá křivka, na které by zároveň ležel bod větvení a nějaký bod netriviálního řešení.

Pomocí Taylorova rozvoje zobrazení, které určuje rovnici, a věty o implicitních funkcích, která je v teorii bifurkace velice důležitá, dokazujeme další větu - o nedegenerovaném vlastním směru.

Další část textu se zabývá bifurkací nerovnic na kuželech v $\mathbb{R}^n$. Zavádíme zde pojmy vlastního čísla a bifurkace nerovnice. Také zde najdete základní lemmata a několik příkladů, které dokreslují fakt, že většinu bifurkačních vět pro rovnice na nerovnice nelze aplikovat.

Na koncích obou částí jsou vysloveny další bifurkační věty pro rovnice, respektive nerovnice. Uvádíme je pro dokreslení představy o problému a možnostech jeho řešení.

Pro úplnost práce uvádíme také dodatky, aby čtenář nemusel pátrat po přesném znění používaných vět v paměti, ale stačilo mu pátrat v textu.

Zavedení základních pojmů

V následujících odstavcích budeme uvažovat zobrazení $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, kde F má spojité všechny parciální derivace alespoň do řádu p, $p \geq 1$, a rovnici

$$F(x, \lambda) = 0, \tag{1}$$

která nás bude provázet celým textem.

Dále budeme předpokládat, že

$$F(0, \lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Budeme se zabývat hledáním netriviálních řešení rovnice (1) na okolí nadroviny $x = 0$ v závislosti na λ.

Zobrazení $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ chápeme jako $F = (F^1, \ldots, F^m)$ a x jako $x = [x_1, \ldots, x_n]$. Zavedeme označení:

$$\frac{\partial F^i}{\partial x_j}(x, \lambda) = \lim_{h \to 0} \frac{F^i(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - h, x_{j+1}, \ldots, x_n, \lambda) - F^i(x_1, \ldots, x_n, \lambda)}{h}$$

pro $i = 1, \ldots, m$ a $j = 1, \ldots, n$.

Totálním diferenciálnem zobrazení F podle x (označme $F_1'(x, \lambda)$, respektive $\frac{\partial F}{\partial x}(x, \lambda)$) rozumíme lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ reprezentované maticí

$$F_1'(x, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x_1}(x, \lambda) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x_n}(x, \lambda) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x_1}(x, \lambda) & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x_n}(x, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Totální diferenciál zobrazení F podle λ (označme $F_2'(x, \lambda)$, respektive $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \lambda)$) je lineární zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^m$ reprezentované m-rozměrným vektorem

$$F_2'(x, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \lambda) = \left(\frac{\partial F^1}{\partial \lambda}(x, \lambda), \ldots, \frac{\partial F^m}{\partial \lambda}(x, \lambda) \right).$$

Zobrazení F má *v bodě* $[x, \lambda]$ *druhý totální diferenciál*[1] podle x, jestliže $F_1'(x, \lambda)$ existuje na okolí bodu $[x, \lambda]$ a existuje $F_{1,1}''(x, \lambda)$ spojité bilineární zobrazení z $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ takové, že

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{\sup\{|F_1'(x + h, \lambda)y - F_1'(x, \lambda)y - F_{1,1}''(x, \lambda)hy|; y \in \mathbb{R}^n, |y| \leq 1\}}{|h|},$$

[1] [2], str. 125.

kde $h \in \mathbb{R}^n$.

Tedy druhým totálním diferenciálem $F''_{1,1}(x,\lambda)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zobrazení F rozumíme bilineární zobrazení $(y,z) \to F''_{1,1}(x,\lambda)yz$.

Smíšený totální diferenciál druhého řádu $F''_{1,2}(x,\lambda)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je

$$F''_{1,2}(x,\lambda) = \frac{\partial^2 F}{\partial\lambda\partial x}(x,\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,\lambda)\right).$$

Analogicky definujeme $F''_{2,2}$ a totální diferenciály vyšších řádů.

Zdůrazněme, že totální diferenciál k-tého řádu podle x je k-lineární (to jest lineární v každé proměnné) zobrazení k proměnných.

Totální diferenciály lze případně podrobněji nastudovat v [2], kapitola 4.4.

Jelikož pracujeme na reálných prostorech konečné dimenze, v následujícím textu **ztotožníme totální diferenciál** (prvního řádu a smíšený druhého řádu) zobrazení **s** (Jacobiho) **maticí**, která ho reprezentuje.

Poznámka 1. *Uvědomme si, co tedy v reálných konečně dimenzionálních prostorech znamená*

$$F'_1(0,0)x.$$

Rozumíme tím ***násobení matice*** $n \times m$*, která vypadá následovně*

$$F'_1(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x_1}(0,0) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x_n}(0,0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x_1}(0,0) & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x_n}(0,0) \end{pmatrix},$$

a n*-rozměrného* ***vektoru*** x*.*

Stejně tak

$$F''_{1,2}(0,0)x$$

rozumíme násobení matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F^1}{\partial\lambda\partial x_1}(0,0) & \cdots & \frac{\partial^2 F^1}{\partial\lambda\partial x_n}(0,0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F^m}{\partial\lambda\partial x_1}(0,0) & \cdots & \frac{\partial^2 F^m}{\partial\lambda\partial x_n}(0,0) \end{pmatrix}$$

a n*-rozměrného vektoru* x*.*

Nyní definujme základní pojmy teorie bifurkací.

Definice 1. *Nechť $F(0, \lambda) = 0$ pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Řekneme, že bod $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ je bodem bifurkace *(resp. bodem větvení) rovnice $F(x, \lambda) = 0$, jestliže pro každé okolí $\mathcal{U}$ bodu $[0, \lambda_0]$ v $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ existuje $[x, \lambda] \in \mathcal{U}$, $x \neq 0$, takové, že $F(x, \lambda) = 0$.*

Definice 2. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $p \in \mathbb{N}_0$.*

Řekneme, že zobrazení $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je třídy $C^p(\Omega)$ (tedy $F \in C^p(\Omega)$), jestliže všechny parciální derivace zobrazení F až do řádu p jsou spojité na množině Ω.

Řekneme, že zobrazení $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je třídy $C^\infty(\Omega)$, jestliže parciální derivace všech řádů zobrazení F jsou spojité na množině Ω.

Definice 3. Množinou řešení *rovnice $F(x, \lambda) = 0$ rozumíme množinu $S = \{[x, \lambda] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; F(x, \lambda) = 0\}$.*

Pozorování 1. *Bod λ_0 je bodem bifurkace právě tehdy, když*

$$[0, \lambda_0] \in \overline{S \cap \{[x, \lambda] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; x \neq 0\}}.$$

Pozorování 2. [2] *Bod λ_0 je bodem bifurkace, pokud na žádném okolí bodu $[0, \lambda_0]$ nelze množinu řešení S vyjádřit jako graf funkce proměnné λ.*

Pozorování 3. [3] *Nechť $F \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Pak z věty 11, respektive 12, o implicitní funkci (viz Dodatky) dostáváme nutnou podmínku pro to, aby bod $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ byl bodem bifurkace: matice $F_1'(0, \lambda_0)$ odpovídá zobrazení, které není izomorfismus (to jest matice $F_1'(0, \lambda_0)$ není regulární; pro $F \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tedy $F_1'(0, \lambda_0) = 0$).*

Toto lze ekvivalentně vyjádřit takto:

Nechť $\operatorname{Ker} F_1'(0, \lambda_0) = \{0\}$. Pak λ_0 není bodem bifurkace rovnice (1).

Pozorování 4. *Pokud je bod λ_0 bodem bifurkace, pak nutně musí být $\dim \operatorname{Ker} F_1'(0, \lambda) > 0$. Tato podmínka však není postačující!*

Příklad 1. [4] *Uvažme $F \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ danou předpisem $F(x, y, \lambda) = (\lambda x + y^5, \lambda y - x^3)$. Pak $F(x, y, \lambda) = 0$ má jen triviální řešení, ale pro $\lambda \neq 0$*

$$\dim F'(0, \lambda) = \dim \begin{pmatrix} \lambda & 5y^4 \\ -3x^2 & \lambda \end{pmatrix} \Bigg|_{[x,y]=[0,0]} = \dim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = 2.$$

[2] [1], str. 11.
[3] [6], str. 127.
[4] [6], str. 127–128.

Ljapunov-Schmidtova redukce [5]

Ljapunov[6]-Schmidtova redukce slouží k upravení rovnice (1) na *jednodušší* tvar.

Mějme F jako na začátku a podívejme se na rovnici (1) na nějakém okolí $\mathcal{U}$ bodu $[x,\lambda]=[0,\lambda_0]$. Tedu $\mathcal{U}=\mathcal{V}\times\mathcal{W}$, kde $\mathcal{V}$ je nějaké okolí 0 v $\mathbb{R}^n$ a $\mathcal{W}$ je nějaké okolí λ v $\mathbb{R}$.

Buď nyní λ_0 pevné. Díky tomu budeme uvažovat zjednodušenou rovnici

$$F(x,\lambda)=0. \tag{3}$$

Nechť $F(\cdot,\cdot)\in C^p(\mathcal{U})$, $p\in\mathbb{N}$.

Označme

$$X_1=\operatorname{Ker}F_1'(0,\lambda_0)\subsetneqq\mathbb{R}^n,\ Y_1=\operatorname{Im}F_1'(0,\lambda_0)\subsetneqq\mathbb{R}^m.$$

Pak existují uzavřené podprostory $X_2\subsetneqq\mathbb{R}^n$ a $Y_2\subsetneqq\mathbb{R}^m$ takové, že $\mathbb{R}^n=X_1\oplus X_2$, $\mathbb{R}^m=Y_1\oplus Y_2$. Nechť

$$P\colon\mathbb{R}^n\to X_1,\ Q\colon\mathbb{R}^m\to Y_1$$

jsou projekce $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ **na** X_1 a Y_1. Jelikož uvažujeme konečně dimenzionální prostory, jsou X_i, Y_i, $i=1,2$, uzavřené podprostory $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ a tedy jsou tyto projekce spojité.

Pro zjednodušení vezměme za P, Q ortogonální projekce na X_1, Y_1.

Povšimněme si, že $QF_1'(0,\lambda_0)=F_1'(0,\lambda_0)$, protože $\operatorname{Im}Q=Y_1=\operatorname{Im}F_1'(0,\lambda_0)$.

Označme $x_1=Px$ a $x_2=(I-P)x$. Tedy rozklad $x=x_1+x_2$ je určen jednoznačně. Rovnice (3) je ekvivalentní systému rovnic

$$QF(x_1+x_2,\lambda)=0, \tag{4}$$

$$(I-Q)F(x_1+x_2,\lambda)=0. \tag{5}$$

Dále označme $G(x_1,x_2,\lambda)=QF(x_1+x_2,\lambda)$. Pak $G\colon X_1\times X_2\times\mathbb{R}\to Y_1$ a $G(\cdot,\cdot,\lambda)\in C^p(\mathcal{U})$, kde $\mathcal{U}$ je nějaké okolí $0\in X_1\times X_2$, a $G(0,0,\lambda_0)=0$.

Navíc $\frac{\partial G}{\partial x_2}(0,0,\lambda_0)=QF_1'(0,\lambda_0)|_{X_2}$ je izomorfismus X_2 na Y_1, protože

$$\frac{\partial G}{\partial x_2}(0,0,\lambda_0)=Q'F(0,\lambda_0)\circ F_1'(0,\lambda_0)=F_1'(0,\lambda_0)\text{ na }X_2,$$

neboť Q je na Y_1 identita a tedy Q' je totožná s jednotkovou maticí na Y_1, a Q je totožná s nulovou maticí na Y_2.

Z věty 12 o implicitních funkcích plyne (její předpoklady jsou splněny: $G\in C^1$, neboť je složením dvou C^1 zobrazení, $G(0,0,\lambda)=0$ pro každé $\lambda\in\mathbb{R}$ z definice G a podmínky (2)

---

[5] [1], str. 22–23.

[6] Práci M. A. Ljapunova můžete nastudovat například v Lyapunov M. A: *The general problems of the stability of motion*, Taylor & Francis, London, 1992.

a $\frac{\partial G}{\partial x_2}(0,0,\lambda_0)$ je izomorfismus X_2 na Y_1), že existuje okolí $\mathcal{W}_1$ bodu $[0,\lambda_0] \in X_1 \times \mathbb{R}$ a okolí $\mathcal{W}_2$ bodu $0 \in X_2$ a vzájemně jednoznačné zobrazení $\tilde{x}_2 \colon \mathcal{W}_1 \to \mathcal{W}_2$ splňující podmínky

a) $\tilde{x}_2(0,\lambda_0) = 0$,

b) $G(x_1, \tilde{x}_2(x_1,\lambda),\lambda) = 0$ pro každé $[x_1,\lambda] \in \mathcal{W}_1$,

c) každé řešení rovnice $G(x_1,x_2,\lambda) = 0$ pro $x_1 \in \mathcal{W}_1$ je tvaru $[x_1, \tilde{x}_2(x_1,\lambda),\lambda]$.

Navíc $\tilde{x}_2$ je $C^p(\mathcal{W}_1)$.

Zjednodušili jsme tedy rovnici (3) na rovnici

$$(I-Q)F(x_1 + \tilde{x}_2(x_1,\lambda),\lambda) = 0 \tag{6}$$

na $\mathcal{W}_1 \subset X_1 \times \mathbb{R}$.

Shrňme ještě jednou, jak jsme postupovali v Ljapunov-Schmidtově redukci[7].

Krok 1: Rozložili jsme prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ na direktní součty pomocí $\operatorname{Ker} F_1'(0,\lambda_0)$ a $\operatorname{Im} F_1'(0,\lambda_0)$.

Krok 2: Pomocí tohoto rozložení jsme převedli rovnici (3) na systém rovnic (4) a (5).

Krok 3: Ukázali jsme pomocí věty o implicitních funkcích, že (4) lze lokálně řešit jako rovnici d_1 proměnných ($d_1 < n$).

Krok 4: Použili jsme výsledku kroku 3, dosadili jsme ho do rovnice (5) a získali rovnici (6).

Poznámka 2. [8] *Z předchozího vychází, že* $[x,\lambda]$*, kde* $x = x_1 + \tilde{x}_2(x_1,\lambda)$ *je řešení rovnice* (1) *na nějakém okolí* $0 \in \mathbb{R}^n$ *právě tehdy, když* $[x_1,\lambda]$ *je řešení rovnice*

$$(I-Q)F(x_1 + \tilde{x}_2(x_1,\lambda),\lambda) = 0 \tag{7}$$

na odpovídajícím okolí $0 \in X_1 \times \mathbb{R}$.

Pozorování 5. [9] *Dokonce platí, že* $\tilde{x}_2'(0,\lambda) = 0$ *pro každé* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Důkaz. *Z věty 11, respektive 12, o implicitní funkci máme*

$$\tilde{x}_2'(0,\lambda) = -\left[\frac{\partial G}{\partial x_2}(0,0,\lambda)\right]^{-1} \circ \frac{\partial G}{\partial x_1}(0,0,\lambda),$$

kde $\frac{\partial G}{\partial x_1}(0,0,\lambda)(0,0,\lambda) = QF'(0,\lambda)|_{X_1}$ *(k čemuž jsme došli obdobně jako v Ljapunov-Schmidtově redukci).*

Jelikož $X_1 = \operatorname{Ker} F_1'(0,\lambda)$*, je* $F_1'(0,\lambda)|_{X_1}$ *nulové zobrazení. Z toho, že totální diferenciál* $\frac{\partial G}{\partial x_2}(0,0,\lambda)$ *je lineární zobrazení, tedy* $\frac{\partial G}{\partial x_2}(0,0,\lambda)(0) = 0$*, již tvrzení snadno plyne.*

[7] [3], str. 29.
[8] [1], str. 24.
[9] [1], str. 24.

$\blacksquare$

Buď dále bez újmy na obecnosti $\lambda_0 = 0$. Pak $X_1 = \operatorname{Ker} F_1'(0,0)$ a $Y_1 = \operatorname{Im} F_1'(0,0)$ a X_2, Y_2 jejich doplňky, tedy $\mathbb{R}^n = X_1 \oplus X_2$ a $\mathbb{R}^m = Y_1 \oplus Y_2$.

Předpokládejme, že $\dim X_1 = 1$, tj. existuje $x_0 \in \mathbb{R}^n : X_1 = \operatorname{Lin}\{x_0\}$, a že $\operatorname{codim} Y_1 = 1$, tj. $\dim Y_2 = 1$.

Existuje tedy $y_0 \notin Y_1$ takové, že $Y_2 = \operatorname{Lin}\{y_0\}$ a lineární zobrazení $y^* \in (\mathbb{R}^m)^*$ takové, že

$$y^*(y_0) = 1,\ y^*(y) = 0\ \forall y \in Y_1.$$

Zřejmě

$$Y_1 = \operatorname{Ker} y^*.$$

Z rovnosti $y = Qy + (I - Q)y$ navíc dostáváme

$$(I - Q)y = y^*(y)y_0. \tag{8}$$

Protože $y_0 \neq 0$, z rovnice (8) snadno vyplývá:

$$(I - Q)y = 0 \text{ právě tehdy, když } y^*(y) = 0.$$

Pro ortogonální projekce P, Q je y^* dáno $y^*(y) = \frac{\langle y, y_0\rangle}{|y_0|}$, kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalární součin, neboť y_0 je kolmé na Y_1.

Crandall-Rabinowitzova věta

Tato věta říká, jak lze najít lokálně bod bifurkace rovnice (1) a jak vypadá lokálně netriviální řešení. Důležitou podmínkou je, že dimenze jádra zobrazení daného derivací zobrazení F je 1.

Věta 1. ***(Crandall–Rabinowitz***[10]*)*[11] *Nechť* $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ *a* (2). *Nechť* $\dim X_1 = 1$ *(to jest* $X_1 = \mathrm{Lin}\{x_0\}$*)*, $\mathrm{codim}\, Y_1 = 1$. *Nechť* $F \in C^p(\mathcal{U})$, $p > 2$, *na nějakém okolí* $\mathcal{U}$ *bodu* $[0,0] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. *Dále nechť*

$$F''_{1,2}(0,0)x_0 \notin Y_1. \tag{9}$$

Pak bod $\lambda_0 = 0$ *je bodem bifurkce* (1).

Větev netriviálních řešení má tvar C^{p-2} *křivky procházející bodem* $[0, \lambda_0]$ *a uzávěr množiny netriviálních řešení na okolí bodu* $[0, \lambda_0]$ *lze zapsat jako*

$$\overline{S} = \{[x, \lambda]; x = sx_0 + \tilde{x}_2(s),\ \lambda = \hat{\lambda}(s),\ s \in (-\varepsilon, \varepsilon)\},$$

kde $\tilde{x}_2(0) = 0$, $\tilde{x}_2'(0) = 0$, $\hat{\lambda}(0) = \lambda_0$ *a* $\tilde{x}_2(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot) \in C^{p-2}((-\varepsilon, \varepsilon))$.

Důkaz. *Jelikož je* X_1 *je generován prvkem* x_0, *lze každé* $x \in X_1$ *zapsat jednoznačně jako* $x = sx_0$, *kde* $s \in \mathbb{R}$. *Využijeme tedy izomorfismu*

$$x = sx_0 \to s$$

a tím převedeme problém z X_1 *na* $\mathbb{R}$.

Z předchozích úvah v kapitole o Ljapunov-Schmidtově redukci plyne, že existuje C^p-*zobrazení* $x_2 = \tilde{x}_2(s, \lambda)$ *na nějakém* $\mathcal{U}$ *okolí* $[0,0] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *a* $\mathcal{V}$ *okolí* $0 \in \mathbb{R}^m$ *tak, že*

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2(0, \lambda) &= 0 \qquad && \forall \lambda \in \mathbb{R}, \\ QF(sx_0 + \tilde{x}_2(s, \lambda), \lambda) &= 0 && \forall [s, \lambda] \in \mathcal{U}. \end{aligned} \tag{10}$$

Chceme dokázat, že

$$(I - Q)F(sx_0 + \tilde{x}_2(s, \lambda), \lambda) = 0\ \forall [s, \lambda] \in \mathcal{U} \tag{11}$$

a že všechna řešení (5) *na nějakém okolí bodu* $[0,0]$ *jsou tvaru* $[sx_0 + \tilde{x}_2(s, \lambda), \lambda]$.

Díky předpokladu (2) *máme*

$$F_2'(0,0) = F_{2,2}''(0,0) = 0.$$

---

[10]Výsledky spolupráce těchto dvou matematiků můžeme najít v Crandall M. G., Rabinowitz P. H.:*Bifurcation from simple eigenvalues*, J. Functional Analysis 8, 1971.

[11][1], str. 25–28.

Z poznámky 5 plyne

$$\frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial s}(0,0) = 0. \tag{12}$$

Pak rovnici (11) *(která je dle Ljapunov-Schmidtovy redukce ekvivalentní rovnici* (1)*) můžeme díky* (8) *přepsat jako*

$$H(s,\lambda) = y^*(F(sx_0 + \tilde{x}_2(s,\lambda),\lambda)) = 0.$$

Z předpokladů (2) *a* (10) *dostaneme* $H(0,\lambda) = 0\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$*. Tedy*

$$\frac{\partial H}{\partial s}(s,\lambda) = y^*(F_1'(sx_0 + \tilde{x}_2(s,\lambda),\lambda) \cdot (x_0 + \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial s}(s,\lambda)).$$

A z toho

$$\frac{\partial H}{\partial s}(0,0) = y^*(F_1'(0,0)x_0) = 0.$$

Dále pak

$$\frac{\partial^2 H}{\partial s \partial \lambda}(0,0) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\frac{\partial H}{\partial s}(0,\lambda)}{\lambda} = y^*\big(\lim_{\lambda\to 0} \frac{F_1'(0,\lambda)(x_0 + \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial s}(0,\lambda))}{\lambda}\big) =$$
$$= y^*(F_{1,2}''(0,0)x_0) + y^*(F_1'(0,0)\frac{\partial^2 \tilde{x}_2}{\partial s\partial\lambda}(0,0)).$$

Již víme, že $F_1'(0,0)h \in Y_1\ \forall h \in \mathbb{R}^n$*, tedy* $y^*(F_1'(0,0)h) = 0\ \forall h \in \mathbb{R}^n$*.*
Z toho $y^*(F_1'(0,0)\frac{\partial^2 \tilde{x}_2}{\partial s\partial\lambda}(0,0)) = 0$.
Naopak $y^*(F_{1,2}''(0,0)x_0) \neq 0$ *(jinak by* $F_{1,2}''(0,0)x_0 \in Y_1$*, což by byl spor s předpoklady).*
Celkově tedy

$$\frac{\partial H}{\partial s \partial \lambda}(0,0) \neq 0.$$

Nyní jsou splněny předpoklady důsledku 3, který najdete v Dodatcích. Jeho aplikací dostáváme, že uzávěr množiny netriviálních řešení rovnice $H(s,\lambda) = 0$ *má na nějakém okolí* $[0,0]$ *tvar* C^{p-2} *větve*

$$\{[s,\lambda]; \lambda = \hat{\lambda}(s), s \in (-\varepsilon,\epsilon)\},\ kde\ \hat{\lambda}(0) = 0.$$

Dle poznámky 2 je uzávěr množiny netriviálních řešení (1) *na nějakém okolí bodu* $[0,0] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *tvaru*

$$\{[x,\lambda]; x = sx_0 + \tilde{x}_2(s,\hat{\lambda}(s)), \lambda = \hat{\lambda}(s), s \in (-\varepsilon,\varepsilon)\},$$

kde $\hat{\lambda}(0) = 0, \hat{\lambda} \in C^p((-\varepsilon,\varepsilon))$*,* $\hat{\lambda}(\cdot) \in C^p((-\varepsilon,\varepsilon))$*.*

Označme $\tilde{x}_2(s) = \tilde{x}_2(s,\hat{\lambda}(s))$*. Zřejme* $\tilde{x}_2(0) = 0$ *a* $\tilde{x}_2'|_{s=0} = \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial s}(0,0) + \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial \lambda}(0,0)\cdot\hat{\lambda}(0) = 0$ *z* (10) *a* (12).

■

Pozorování 6. [12] *Vezměme $\hat{\lambda}(s)$ z důkazu věty 1. Převedením na Taylorův polynom můžeme předpokládat, že tato funkce má tvar*

$$\hat{\lambda}(s) = \hat{\lambda}'(0)s + \frac{1}{2}\hat{\lambda}''(0)s^2 + \cdots + \frac{1}{p!}\hat{\lambda}^{(p)}(0)s^p + l(s),$$

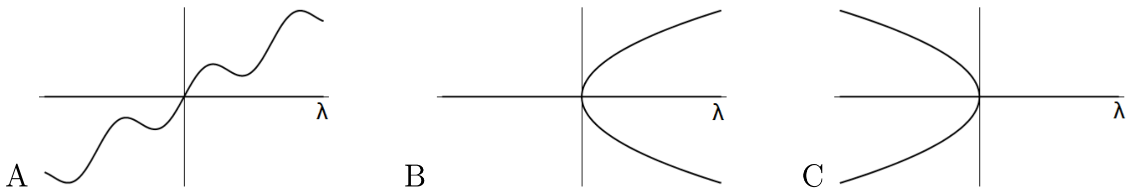
kde $\frac{l(s)}{|s|} \to 0$ pro $s \to 0$, a dále nechť platí $\hat{\lambda}^{(k)}(0) = 0$ pro $k = 1, \ldots, q-1$ a $\hat{\lambda}^{(q)}(0) \neq 0$ pro nějaké $q < p$.

Rozlišujeme pak tři případy. Pokud q je

a) liché, mluvíme o transkritické bifurkaci *(obrázek A),*

b) sudé a $\hat{\lambda}^{(q)}(0) > 0$, mluvíme o superkritické bifurkaci *(obrázek B),*

c) sudé a $\hat{\lambda}^{(q)}(0) < 0$, mluvíme o subkritické bifurkaci *(obrázek C).*



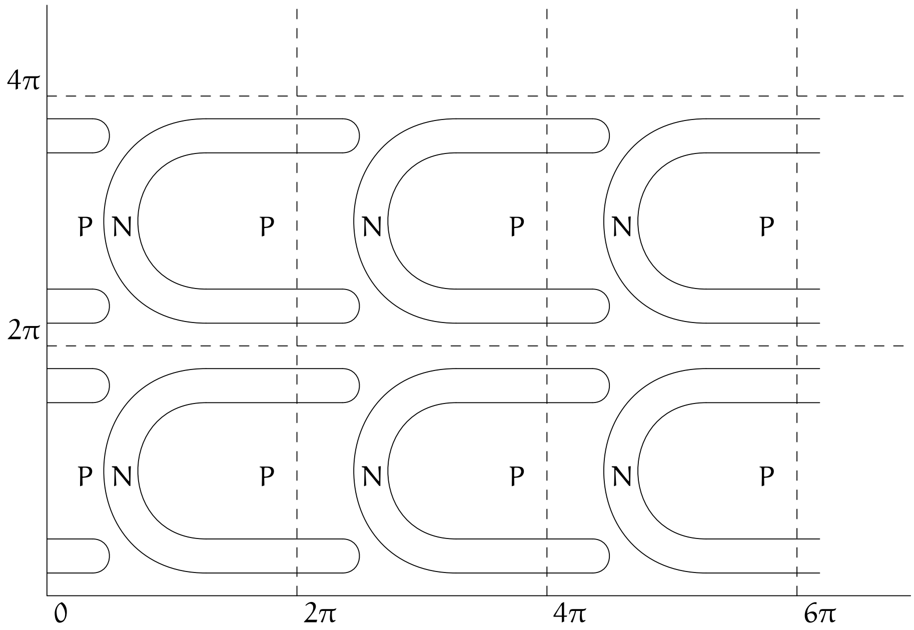
Obrázek 1: typy bifurkace

[12] [1], str. 32.

Příklad[13]

Následující příklad ukazuje, že pokud nejsou splněny všechny předpoklady věty 1, pak nemusí být množina řešení na okolí bodu $[0, \lambda_0]$, kde λ_0 je bodem bifurkace, tvořena spojitými křivkami.

Příklad 2. ***(R. Böhme***[14]***)***



Obrázek 2: N záporná, P kladná

Najdeme zobrazení $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, pro které platí, že bod $\lambda = 1$ je bodem bifurkace, ale větve řešení nejsou hladké spojité křivky. Mějme

$$f(z, \lambda) = \lambda z - F'(z) = 0, \tag{13}$$

kde $z = [x, y] \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ačkoli je F nekonečně hladké, neexistuje žádná spojitá křivka řešení rovnice (13)*, na níž leží bod $[0, 1] \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ a současně bod $[z, \lambda]$ takový, že $z \neq 0$.*

[13] [5], str. 120–122.

[14] Böhme publikoval své výsledky v Böhme R.: *Die Lösung der Verzweigungsproblemen für Nichtlineare Eigenwertprobleme*, Math. Z., 1972.

Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ *splňuje:*

$$\varphi(t+2\pi, s) = \varphi(t, s+2\pi) = \varphi(t,s) \qquad \forall t, s \in \mathbb{R} \tag{14}$$

a

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t,s)\, ds = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Budeme předpokládat, že množina bodů, na nichž je φ *záporná (na obrázku označeno* N*), respektive kladná (na obrázku označeno* P*), vypadá tak, jak ukazuje obrázek 2.*

Položme

$$M = \{[t,s]; \varphi(t,s) = 0\}$$

a

$$\phi(t,s) = \int_0^s \varphi(t,\tau)\, d\tau.$$

Pak zřejmě $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ *a navíc*

$$\phi(t+2\pi, s) = \phi(t, s+2\pi) = \phi(t,s) \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Dále definujeme

$$G(r,\vartheta) = \begin{cases} \phi(\frac{1}{r}, \vartheta) \cdot e^{-\frac{1}{r^2}} & r > 0, \\ 0 & r = 0 \end{cases}$$

a

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} r^2 + G(r,\vartheta) & r > 0 \\ 0 & r = 0 \end{cases}, \tag{16}$$

kde $[r,\vartheta]$ *jsou polární souřadnice bodu* $z = [x,y] \in \mathbb{R}^2$.

Z definice F *je zřejmé, že* $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. *Dále je vidět, že* $F'(0,0) = 0$, *z čehož plyne, že množina řešení rovnice* (13) *obsahuje přímku* $\{[[0,0],\lambda]; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Nyní budeme hledat netriviální řešení. Předpokládejme tedy, že $[x,y] \neq [0,0]$ *a převeďme rovnici* (13) *do polárních souřadnic. Dostáváme pak:*

$$(\lambda - 1) \cdot r \cdot \cos\vartheta - \frac{\partial G}{\partial r}(r,\vartheta) \cdot \cos\vartheta - \frac{\partial G}{\partial \vartheta}(r,\vartheta) \cdot \frac{\sin\vartheta}{r} = 0 \tag{17}$$

$$(\lambda - 1) \cdot r \cdot \sin\vartheta - \frac{\partial G}{\partial r}(r,\vartheta) \cdot \sin\vartheta + \frac{\partial G}{\partial \vartheta}(r,\vartheta) \cdot \frac{\cos\vartheta}{r} = 0, \tag{18}$$

pro $r > 0$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$.

Po úpravě získáme

$$\frac{\partial G}{\partial \vartheta}(r,\vartheta) = 0 \qquad \forall r > 0, \forall \vartheta \in [0, 2\pi). \tag{19}$$

Existuje-li nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$ *takové, že* $\big[[x,y],\lambda\big]$, *kde* $[x,y] \neq [0,0]$, *řeší rovnici* (13), *a jsou-li* $[r,\vartheta]$ *polární souřadnice bodu* $[x,y]$, *pak z* (19)

$$\varphi(\frac{1}{r},\vartheta) = 0$$

a tedy $[\frac{1}{r},\vartheta] \in M$.

Naopak, zvolíme-li $r > 0$, *najdeme* $\vartheta(r)$ *tak, že* $[\frac{1}{r},\vartheta(r)] \in M$ *(viz obrázek 2). Pro takto zvolené* $\vartheta(r)$ *se systém rovnic* (17) *a* (18) *zredukuje na*

$$(\lambda - 1)\cdot r - \frac{\partial G}{\partial r}(r,\vartheta(r)) = 0. \tag{20}$$

Zvolíme-li

$$\lambda(r) = 1 + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial G}{\partial r}(r,\vartheta(r)),$$

pak $\big[[r,\vartheta(r)],\lambda(r)\big]$ *řeší rovnici* (13).

Z definice zobrazení G *plyne, že*

$$\lim_{r\to 0}\lambda(r) = 1.$$

Tedy pro každé $r > 0$ *jsme našli bod* $z = [x,y] \in S([0,0],r)(= \{v \in \mathbb{R}^2; |v| = r\})$ *o polárních souřadnicích* $[r,\vartheta(r)]$ *a číslo* $\lambda(r)$ *tak, že*

$$\lambda(r)z - F'z = 0, \textit{ kde } \lambda(r) \to 1 \textit{ pro } r \to 0.$$

Dokázali jsme tedy, že $\lambda = 1$ *je bodem bifurkace rovnice* (13).

Zbývá dokázat, že neexistuje žádná spojitá křivka řešení rovnice (13) *spojující bod* $\big[[0,0],1\big]$ *a* $\big[[x,y],\lambda\big]$ *pro* $[x,y] \neq [0,0]$, *což dokážeme sporem.*

Buď $a > 0$ *a* $\gamma\colon (-a,a) \to \mathbb{R}^2$, $\lambda\colon (-a,a) \to \mathbb{R}$, *kde* γ,λ *jsou spojité na* $(-a,a)$.

Nechť

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha)\cdot\gamma(\alpha) - F'(\gamma(\alpha)) = 0 \qquad &\forall \alpha \in (-a,a), \\ \gamma(0) = [0,0]&, \\ \lambda(0) = 1&. \end{aligned} \tag{21}$$

Předpokládejme dále, že existuje $\alpha_0 \in (-a, a)$ *takové, že* $\gamma(\alpha_0) \neq [0, 0]$. *Bez újmy na obecnosti uvažujme* $\alpha_0 > 0$. *Položme*

$$\alpha_1 = \inf\{\alpha \in (0, \alpha_0); \gamma(\beta) \neq 0 \ \forall \beta \in [\alpha, \alpha_0]\}.$$

Vezměme $[r(\alpha), \vartheta(\alpha)]$ *polární souřadnice bodu* $\gamma(\alpha)$ *pro* $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_0]$. *Zřejmě platí*

$$r(\alpha) = \|\gamma(\alpha)\| \to \|\gamma(\alpha_1)\| = 0 \text{ pro } \alpha \to \alpha_1. \tag{22}$$

Protože $\gamma(\alpha_0) \neq [0, 0]$ *a řeší rovnici* (21), *je*

$$[\frac{1}{r(\alpha_0)}, \vartheta(\alpha_0)] \in M.$$

Označme C *komponentu množiny* M, *která tento bod obsahuje. Pak však souvislá množina*

$$\{[\frac{1}{r(\alpha)}, \gamma(\alpha)]; \alpha \in (\alpha_1, \alpha_0]\} \subseteq C$$

a protože komponenta C *je omezená, existuje konstanta* $K > 0$ *tak, že*

$$\frac{1}{r(\alpha)} \leq K \qquad \forall \alpha \in (\alpha_1, \alpha_0].$$

To znamená, že

$$r(\alpha) \geq \frac{1}{K} \qquad \forall \alpha \in (\alpha_1, \alpha_0],$$

a to je spor s (22).

Bifurkace podél nedegenerovaného vlastního směru

Na rozdíl od jiných vět, věta o bifurkaci podél nedegenerovaného vlastního směru může dávat řešení i pro vlastní čísla sudé násobnosti a i v případech vícedimenzionálního jádra.

V následující části budeme uvažovat zobrazení z $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^n$.

Zobrazení $F(x, \lambda)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ splňující (2) můžeme pomocí Taylorova rozvoje v proměnné x, respektive λ, převést [15] na tvar

$$F(x, \lambda) = F_1'(0, \lambda_0)x + G(x, \lambda),$$

kde $\frac{|G(x,\lambda)|}{|x|} \to 0$ pro $|x| \to 0$ stejnoměrně vzhledem k λ z omezených podmnožin $\mathbb{R}$.

Předpokládejme, že $\lambda_0 = 0$ (jinak za λ bereme $\lambda - \lambda_0$). Nechť $F(\cdot, \cdot) \in C^p(\mathcal{U})$, $p \geq 2$, kde $\mathcal{U}$ je nějaké okolí bodu $[0, \lambda_0]$ v $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Rovnici (1) upravíme na tvar

$$F(x, \lambda) = Lx + \lambda C(\lambda)x + R(x, \lambda) = 0, \tag{23}$$

kde $Lx = F_1'(0, 0)x$, $\lambda C(\lambda)x + R(x, \lambda) = G(x, \lambda)$ a

$$C(\lambda) = \begin{cases} \frac{F_1'(0,\lambda) - F_1'(0,0)}{\lambda} & \text{pro } \lambda \neq 0 \\ F_{1,2}''(0, 0) & \text{pro } \lambda = 0 \end{cases}.$$

Víme, že totální diferenciál $L\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení.

Nechť $R(0, \lambda) = \frac{\partial R}{\partial x}(0, \lambda) = 0$ pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dále vyjádříme $R(x, \lambda)$ pomocí Taylorovy řady v x následovně pro $s < p$:

$$R(x, \lambda) = \sum_{k=2}^{s} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k R}{\partial x^k}(0, \lambda)x^k + H(x, \lambda),$$

kde $\frac{|H(x,\lambda)|}{|x|^s} \to 0$ pro $|x| \to 0$ stejnoměrně vzhledem k λ z omezených podmnožin $\mathbb{R}$ a kde $\frac{\partial^k R}{\partial x^k}(0, \lambda)\colon (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^n$ je k-tým totálním diferenciálem R (viz výše), tedy zobrazení k proměnných (dosazujeme však k-krát tentýž vektor x, což reprezentujeme x^k).

Nechť $N_k\colon \operatorname{Ker}(L) \to \mathbb{R}^n$ definované následovně:

$$N_k(x) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k R}{\partial x^k}(0, \lambda)x^k$$

[15] [6], str. 119–120.

a nechť $M_k\colon \operatorname{Ker}(L) \to \operatorname{Ker}(L)$ je definováno jako

$$M_k = PC(0) + PN_k,$$

kde P je projekce na $X_1 = \operatorname{Ker}(L)$ definovaná v Ljapunov-Schmidtově redukci.

N_k a M_k závisí na λ, to je všakk nýní pevné, proto tuto závislost neznačíme.

Uvědomme si, že jsme si jednodušili práci tím, že místo zobrazení $\frac{1}{k!}\frac{\partial^k R}{\partial x^k}(0, \lambda)$ k proměnných používáme zobrazení N_k jedné proměnné.

Věta 2. [16] *Nechť existuje $s \geq 2$, $s < p$, splňující následující předpoklady:*

1) $N_k \equiv 0$ pro každé $k \leq s - 1$,
2) existuje $z_0 \in \operatorname{Ker}(L)\backslash\{0\}$ takové, že $M_s(z_0) = 0$,
3) $M_s'(z_0)\colon \operatorname{Ker}(L) \to \operatorname{Ker}(L)$ je prosté.

Pak bod $\lambda = 0$ je bodem bifurkace rovnice (23)*. Navíc existuje konstanta $\sigma > 0$ a spojité zobrazení $p\colon (-\sigma, \sigma) \to \mathbb{R}^n$ takové, že $p(0) = 0$ a $[\alpha z_0 + \alpha p(\alpha), \alpha^{s-1}] \in S$ pro $0 < |\alpha| < \sigma$.*

Důkaz. *Budeme používat značení z Ljapunov-Schmidtovy redukce. Ztotožnili jsme projekce P a $I - Q$, což můžeme, neboť z $F(x, \lambda)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dostáváme* $\dim X_2 = \dim Y_1$, *a tedy* $\dim X_1 = \dim Y_2$.

Uvažme rovnici

$$PC(\alpha^{s-1})[z + \frac{\tilde{x}_2(\alpha z, \alpha^{s-1})}{\alpha}] + \alpha^{-s} PR(\alpha z + \tilde{x}_2(\alpha z, \alpha^{s-1}), \alpha^{s-1}) = 0 \tag{24}$$

pro $[z, \alpha] \in \operatorname{Ker}(L) \times \mathbb{R}$.

Z Ljapunov-Schmidtovy redukce, dosazení do rovnice (23) *a pomocí jednoduchých výpočtů získáme, že pokud $[z, \alpha]$, kde $z \neq 0$ a $\alpha \neq 0$, řeší rovnici* (24)*, pak $[\alpha z, \alpha^{s-1}]$ je řešení rovnice* (23).

Vyřešme tedy (24) *na nějakém okolí bodu $[z_0, 0]$ pomocí věty 11 o implicitní funkci.*

Nechť $B = \{z \in \operatorname{Ker}(L); |z - z_0| < 1\}$. Pak existuje konstanta ν taková, že množina $\{[\alpha z, \alpha^{s-1}]; |\alpha| < \nu, z \in B\}$ je obsažena v definičním oboru zobrazení $\tilde{x}_2$.

Definujme $h\colon B \times (-\nu, \nu) \to \operatorname{Ker}(L)$ následovně

$$h(z, \alpha) = \begin{cases} PC(\alpha^{s-1})[z + \frac{q(z,\alpha)}{\alpha}] + \alpha^{-s} PR(\alpha z + q(z, \alpha), \alpha^{s-1}) & \alpha \neq 0 \\ M_s(z) & \alpha = 0 \end{cases},$$

kde $q\colon B \times (-\nu, \nu) \to X_2$ je dána vzorcem $q(z, \alpha) = \tilde{x}_2(\alpha z, \alpha^{s-1})$.

[16][6], str. 134–136.

Definovali jsme h tak, aby h i $\frac{\partial h}{\partial z}$ byla spojitá zobrazení na nějakém okolí bodu $[z_0, 0]$. Navíc předpodklad 2) implikuje, že $h(z_0, 0) = 0$.

Z předpokladu 3) dostáváme, že $\frac{\partial h}{\partial z}(z_0, 0)\colon \mathrm{Ker}(L) \to \mathrm{Ker}(L)$ je lineární a prosté (a tedy i na, neboť je konečně-dimenzionální z prostoru $\mathrm{Ker}(L)$ do něj samotného), neboť $\frac{\partial h}{\partial z}(z_0, 0) = M_s'(z_0)$.

Tedy z věty 11 o implicitní funkci máme, že existuje konstanta $\sigma > 0$ a spojité zobrazení $\varphi\colon (-\sigma, \sigma) \to \mathrm{Ker}(L)$ takové, že $\varphi(0) = 0$ a

$$h(z_0 + \varphi(\alpha), \alpha) = 0 \text{ pro každé } |\alpha| < \sigma.$$

Položme

$$p(\alpha) = \varphi(\alpha) + \frac{q(z_0 + \varphi(\alpha), \alpha)}{\alpha} = \varphi(\alpha) + \frac{\tilde{x}_2(\alpha z_0 + \alpha\varphi(\alpha), \alpha^{s-1})}{\alpha}.$$

Zobrazení $p(\alpha)$ splňuje požadavky tvrzení věty ($p(0) = 0$ a platí $[\alpha z_0 + \alpha p(\alpha), \alpha s - 1] \in S$ pro $\alpha \in (-\sigma, \sigma)$), čímž je věta dokázána.

$\blacksquare$

Pozorování 7. [17] *Řešení z_0 se nazývá* vlastní směr *(v anglicky psaných textech* eigenray*). Pokud vlastní směr splňuje předpoklad 3), pak se nazývá* nedegenerovaný*.*

Pokud je z_0 nedegenerovaný vlastní směr, pak z věty 13 o lokálním difeomorfismu (viz Dodatky) dostáváme, že z_0 je izolované řešení rovnice $M_s(z) = 0$. Pro aplikaci právě dokázané věty je užitečné si povšimnout, že

$$M_s'(z)v = PC(0)v + \frac{1}{(s-1)!} P \frac{\partial^s R}{\partial x^s}(0, 0) z^{s-1} v \text{ pro všechna } z, v \in \mathrm{Ker}(L),$$

kde $\frac{\partial^s R}{\partial x^s}(0, 0) z^{s-1} v$ je s-tý totální diferenciál R, tedy s-lineární zobrazení s proměnných, do kterého dosazujeme $(s-1)$-krát vektor z a jako s-tou proměnnou vektor v.

Pozorování 8. *V případě, že s je liché, můžeme využít transformaci proměnných*

$$v = \alpha z \text{ a } \lambda = -\alpha^{s-1}.$$

Nechť $\hat{M}_k = -PC(0) + PN_k$.

Dostáváme tak další tvrzení:

Věta 3. [18] *Nechť jsou splněny předpoklady věty 2 s $\hat{M}_k$ místo M_k.*

Pak $\lambda = 0$ je bod bifurkace a

$$[\alpha z_0 + \alpha p(\alpha), -\alpha^{s-1}] \in S \text{ pro } 0 < |\alpha| < \sigma.$$

---

[17] [6], str. 136

[18] [6], str. 137.

Další užitečné bifurkační věty pro rovnice

V následujícím odstavci najdete několik vět a jejich důsledků, které se týkají teorie bifurkací. Uvádíme je bez důkazů, čtenář je však může snadno nalézt v literatuře. Jsou zde pro doplnění představy o teorii bifurkací, tak trochu pro „ochutnání“.

Definice 4. *Nechť $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Pak definujeme spektrum zobrazení T jako $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},$ zobrazení $(T - \lambda I)$ není prosté nebo není na$\}$, kde I značí identitu $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^n$.*

Pokud je F speciálního tvaru, bývá někdy snažší najít body bifurkace. Jeden z těchto speciálních případů řeší následující tvrzení:

Věta 4. [19] *Nechť $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení. Nechť $F(x, \lambda) = \lambda x - Tx$ pro $[x, \lambda] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.*

Pak λ_0 je bodem bifurkace rovnice (1) právě tehdy, když $\lambda_0 \in \sigma(T) \cap \mathbb{R}$.

Poznámka 3. *K další větě bychom potřebovali definici stupně $\deg(F, \Omega, p)$ zobrazení F vzhledem k množině Ω a bodu p a následně definici Leray-Schauderova indexu zobrazení $\mathrm{i}(x_0)$ vzhledem k bodu p. Tyto definice jsou poměrně složité a proto přesahují rámec tohoto textu. Přesto zde tuto větu vyslovíme, neboť je důležitá a další uvedené věty na ni navazují. Neznalý čtenář může tyto definice nalézt v literatuře, například v [5].*

Věta. [20] *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, nechť je $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ definováno následovně:*

$$F(x, \lambda) = x - h(x, \lambda) \text{ pro } [x, \lambda] \in \Omega.$$

Předpokládejme, že h je spojité zobrazení z Ω do $\mathbb{R}^n$, $h(0, \lambda) = 0$ pro každé $[0, \lambda] \in \Omega$, $[0, \lambda_0] \in \Omega$.

Nechť pro každé $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon_0, \lambda_0 + \varepsilon_0)$, kde $\varepsilon_0 > 0$ je dostatečně malé, je Leray-Schauderův index 0 vzhledem k $F(\cdot, \lambda)$ a bodu 0 dobře definován (označme ho $\mathrm{i}_\lambda(0)$).

Předpokládejme, že $\mathrm{i}_{\lambda_0 - \varepsilon}(0) \neq \mathrm{i}_{\lambda_0 + \varepsilon}(0)$ pro všechna $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Potom bod λ_0 je bodem bifurkace rovnice (1).

Výše uvedená věta má poměrně silné předpoklady. Proto zde uvádíme i lemma (a k němu potřebnou definici), které říká, kdy je předpoklad $\mathrm{i}_{\lambda_0 - \varepsilon}(0) \neq \mathrm{i}_{\lambda_0 + \varepsilon}(0)$ splněn.

Definice 5. *Algebraická násobnost vlastního čísla λ zobrazení $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je definována*

$$n_\lambda = \dim \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Ker}(I - T)^k.$$

[19] [1], str. 12.
[20] [1], str. 31.

Lemma. [21] *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ otevřená. Předpokládejme, že $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení, $G\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení, $\lim_{|x|\to 0} \frac{G(x,\lambda)}{|x|} = 0$ stejnoměrně vzhledem k λ z omezených podmnožin $\mathbb{R}$, $\lambda_0 \neq 0$, $[0,\lambda_0] \in \Omega$.*

Buď $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ vlastním číslem T liché algebraické násobnosti. Nechť

$$F(x,\lambda) = \lambda x - Tx + G(x,\lambda) = \lambda(x - h(x,\lambda)),$$

kde $h(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda}(Tx - G(x,\lambda))$.

Pro každé $\varepsilon > 0$ dostatečně malé je index 0 vzhledem k $\frac{1}{\lambda_0 \pm \varepsilon} F(\cdot, \lambda_0 \pm \varepsilon)$ a k bodu 0 (označíme ho $\mathrm{i}_{\lambda_0 \pm \varepsilon}(0)$) dobře definován a navíc

$$\mathrm{i}_{\lambda_0-\varepsilon}(0) \neq \mathrm{i}_{\lambda_0+\varepsilon}(0).$$

Krasnoselského [22] nepotenciální věta řeší lokálně případ, kdy F je lineární s malou perturbací G pro vlastní čísla s lichou násobností.

Věta 5. ***(Krasnoselského lokální nepotenciální bifurkační věta)***[23] *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ otevřená. Nechť*

$$F(x,\lambda) = \lambda x - Tx + G(x,\lambda) \quad \forall [x,\lambda] \in \Omega.$$

Předpokládejme dále, že $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení, $G\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení, $G(x,\lambda) = o(|x|)$ pro $|x| \to 0$ vzhledem k λ z omezených podmnožin $\mathbb{R}$, $[x,\lambda] \in \Omega$, λ_0 je nenulové reálné vlastní číslo zobrazení T s lichou algebraickou násobností.

Pak λ_0 je bodem bifurkace rovnice (1).

Rabinowitzova[24] věta je speciální tím, že pro určitý tvar zobrazení F dává globální výsledky.

Věta 6. ***(Rabinowitzova globální bifurkační věta)***[25] *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ otevřená, $[0,\mu_0] \in \Omega$, $\mu_0 \neq 0$.*

Nechť $F(x,\lambda)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ je tvaru

$$F(x,\lambda) = x - \mu Tx + G(x,\mu).$$

[21] [1], str. 32.

[22] Jeho výsledky najdete v Krasnoselskij M. A.: *Topological methods in the theory of non-linear integral equations*, Pergamon, London, 1964.

[23] [1], str. 35.

[24] P. H. Rabinowitz publikoval výsledky týkající se globálních bifurkačních vět v Rabinowitz P. H.: *A global theorem for non-linear eigenvalue problem and applications*, Contribution Nonlinear Functional Analysis, Academic Press, New York, 1971, a v *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Functional Analysis 7, 1971.

[25] [1], str. 40.

Nechť $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení, $G\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení, $G(x,\mu) = o(|x|)$ pro $|x| \to 0$ vzhledem k μ z omezených podmnožin $\mathbb{R}$, $\lambda_0 = \frac{1}{\mu_0}$ je reálné vlastní číslo zobrazení T s lichou algebraickou násobností.

Označme uzávěr množiny všech netriviálních řešení rovnice (1)

$$\overline{S} = \overline{\{[x,\mu] \in \Omega; x \neq 0, F(x,\mu) = 0\}},$$

a nechť $\mathcal{C}$ je komponenta $\overline{S}$ obsahující bod $[0,\mu_0]$.

Pak nastane jedna z následujích dvou možností:

(*i*) *$\mathcal{C}$ není kompaktní množina v Ω,*

(*ii*) *$\mathcal{C}$ obsahuje sudý počet bodů $[0,\mu]$, kde $\mu \neq 0$ a $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$ je vlastním číslem zobrazení T s lichou algebraickou násobností.*

Důsledek 1. [26] *Pokud je $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ a jsou splněny předpoklady předchozí věty, pak nastane jedna z možností:*

(*i*) *$\mathcal{C}$ není omezená podmnožina $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$,*

(*ii*) *$\mathcal{C}$ obsahuje sudý počet bodů $[0,\mu]$, kde $\mu \neq 0$ a $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$ je vlastním číslem zobrazení T s lichou algebraickou násobností.*

Pro Dancerovu[27] větu potřebujeme ještě nějaké nástroje:

Nechť je nyní T samoadjungované zobrazení (v konečně dimenzionálním prostoru to znamená, že matice, se kterou je zobrazení T ztotožněno, je symetrická), λ_0 vlastní číslo zobrazení T násobnosti 1 (to jest $n_{\lambda_0} = 1$) a nechť v, $|v| = 1$, je vlastní vektor T přidružený k λ_0. Pro $\varepsilon \in (0,1)$ definujme

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= \{[x,\mu] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; |\langle x, v\rangle| > \varepsilon |x|\}, \\ K_\varepsilon^+ &= \{[x,\mu] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \langle x, v\rangle > \varepsilon |x|\}, \\ K_\varepsilon^- &= \{[x,\mu] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; -\langle x, v\rangle > \varepsilon |x|\}. \end{aligned}$$

Nechť $S = \overline{\{[x,\mu] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; x \neq 0, F(x,\mu) = 0\}}$ a nechť $\mathcal{C}$ je komponenta S obsahující bod $[0,\mu_0]$.

[26] [1], str. 45.

[27] Najdete v Dancer E. N.: *On the structure of solution of nonlinear eigenvalue problems*, Indiana University Journal 23, 1974

Pak je možné dokázat, že existuje $t_0 > 0$ takové, že $S\backslash\{[0,\mu_0]\}) \cap \overline{B([0,\mu_0],t_0)} \subset K_\varepsilon$, kde $B([0,\mu_0],t_0)$ je koule o středu $[0,\mu_0]$ a poloměru t_0.

Pro $t \in (0,t_0]$ definujeme

$$D_t^+ = \{[0,\mu_0]\} \cup (S \cap \overline{B([0,\mu_0],t)} \cap K_\varepsilon^+),$$
$$D_t^- = \{[0,\mu_0]\} \cup (S \cap \overline{B([0,\mu_0],t)} \cap K_\varepsilon^-).$$

Nechť $\mathcal{C}_t^+$ je komponenta $\overline{\mathcal{C}\backslash D_t^-}$ obsahující bod $[0,\mu_0]$ a analogicky $\mathcal{C}_t^-$ je komponenta $\overline{\mathcal{C}\backslash D_t^+}$ obsahující bod $[0,\mu_0]$. Konečně definujeme

$$\mathcal{C}^+ = \overline{\bigcup_{0<t\le t_0} \mathcal{C}_t^+} \text{ a } \mathcal{C}^- = \overline{\bigcup_{0<t\le t_0} \mathcal{C}_t^-}.$$

Potom $\mathcal{C}^+$ a $\mathcal{C}^-$ jsou souvislé množiny a navíc $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^- \subset \mathcal{C}$.

Nyní jsme připraveni na další větu.

Věta 7. *(**Dancerova věta**)*[28] *Nechť $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ je tvaru $F(x,\mu) = x - \mu Tx + g(x,\mu)$, kde $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení, $g\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ je spojité a $\lim_{|x|\to 0} \frac{g(x,\mu)}{|x|} = 0$ stejnoměrně na omezených množiných v $\mathbb{R}$.*

Množiny $\mathcal{C}^+$ a $\mathcal{C}^-$ jsou buď obě neomezené, nebo

$$\mathcal{C}^+ \cap \mathcal{C}^- \neq \{[0,\mu_0]\}.$$

Poslední věta se zabývá případem, kde je zobrazení F potenciální.

Definice 6. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $F(x)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$.*

Řekneme, že F je potenciální *na Ω, pokud existuje funkce $G\colon \Omega \to \mathbb{R}$, která je diferencovatelná na Ω, a pro každé $x \in \Omega$ platí $F(x) = G'(x)$.* [29]

Věta 8. *(**Krasnoselského bifurkační věta pro potenciální zobrazení**)*[30] *Buď G spojité zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$. Předpokládejme, že G je dvakrát diferencovatelné na nějakém okolí $\mathcal{U}$ počátku v $\mathbb{R}^n$, G' je spojité na $\mathcal{U}$ (G' je tedy potenciální), existuje $G''(0) = A$, $G(0) = 0$ a $G'(0) = 0$.*

Pak $\lambda_0 \neq 0$ je bodem bifurkace rovnice $\lambda x - G'(x) = 0$ právě tehdy, když λ_0 je vlastním číslem zobrazení A.

[28] [5], str. 104–107.
[29] [1], str. 50.
[30] [1], str. 50–51.

Variační nerovnice

Omezíme se na podmnožiny $\mathbb{R}^n$, které jsou konvexní, uzavřené a s každým bodem x obsahují i odpovídající paprsek $\{tx; t \geq 0\}$.

Definice 7. *Buď K neprázdná podmnožina $\mathbb{R}^n$.*

Řekneme, že množina K je (uzavřený) kužel *s vrcholem v počátku v prostoru $\mathbb{R}^n$, jestliže splňuje následující podmínky:*

$$\begin{aligned} &\textit{(i)}\ K = \overline{K}, \\ &\textit{(ii)}\ K \textit{ je konvexní}, \\ &\textit{(iii)}\ \forall t \in [0, \infty), \forall x \in K : tx \in K. \end{aligned}$$

Předpokládejme, že $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je (obecně nelineární) zobrazení splňující $F(0) = 0$. Budeme se zabývat závislostí množiny řešení

$$x \in K : \quad \langle \lambda x - F(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K, \tag{25}$$

kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalární součin v $\mathbb{R}^n$, na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$.

Předpoklad $F(0) = 0$ zajišťuje, že $x = 0$ je jedním řešením rovnosti (25).

Lemma 1. [31] *Buď $K \subset \mathbb{R}^n$ kužel, $z \in \mathbb{R}^n$. Bod $x \in K$ splňuje nerovnost*

$$\langle z, y - x \rangle \geq 0 \ \forall y \in K \tag{26}$$

právě tehdy, když platí současně

$$\langle z, x \rangle = 0, \tag{27}$$

$$\langle z, y \rangle \geq 0 \ \forall y \in K. \tag{28}$$

Důkaz. *Z* (27) *a* (28)

$$0 \leq \langle z, y \rangle = \langle z, y \rangle - \langle z, x \rangle = \langle z, y - x \rangle.$$

Zvolíme-li postupně v (26) $y = 2x$ *a* $y = 0$*, dostaneme* $\langle z, x \rangle \geq 0$ *a* $-\langle z, x \rangle \geq 0$*. Máme tedy* (27)*.*

Z (26) *a* (27) *již zřejmě plyne* (28)*.*

■

[31] [5], str. 124.

Definice 8. *Buď $K \subset \mathbb{R}^n$ kužel, $F\colon K \to \mathbb{R}^n$, $F(0) = 0$.*

Řekneme, že $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ je bodem bifurkace *variační nerovnosti* (25)*, jestliže v každém okolí $\mathcal{U}$ bodu $[0, \lambda_0]$ v $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ existuje bod $[x, \lambda]$, $x \neq 0$, $x \in K$, který splňuje nerovnost* (25)*.*[32]

Definice 9. *Buď $K \subset \mathbb{R}^n$ kužel, $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineární zobrazení.*

Řekneme, že $\lambda \in \mathbb{R}$ je vlastním číslem *a $x \in K$, $x \neq 0$,* vlastním vektorem *variační nerovnosti se zobrazením A na kuželi K, jestliže*

$$\langle \lambda x - Ax, y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K. \tag{29}$$

Lemma 2. [33] *Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je kužel, $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(0) = 0$. Předpokládejme dále, že existuje diferenciál $F'(0)$.*

Je-li $\lambda_0 > 0$ bodem bifurkace nerovnice (25)*, pak je vlastním číslem nerovnice* (29) *se zobrazením $A = F'(0)$.*

Důkaz. *Buď $\lambda_0 > 0$ bodem bifurkace. Označme $\mathcal{U}_n = \{[x, \lambda]; |x| < \frac{1}{n}, |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{n}\}$. Dále označme $[x_n, \lambda_n] \in \mathcal{U}_n$ bod splňující $x_n \neq 0$, $x_n \in K$ a*

$$\langle \lambda_n x_n - F(x_n), y - x_n \rangle \geq 0 \ \forall y \in K.$$

Položme $v_n = \frac{x_n}{|x_n|}$. Díky diferencovatelnosti F je $F(x_n) = F(x_n) - F(0) = F'(0)x_n + r(x_n)$, kde $\lim_{n\to\infty} \frac{r(x_n)}{|x_n|} = 0$.

Vydělením nerovnosti (25) *$|x_n|$ přejdeme na*

$$\langle \lambda_n v_n - F'(0)v_n - \frac{r(x_n)}{|x_n|}, y - x_n \rangle \geq 0 \ \forall y \in K. \tag{30}$$

Z posloupnosti $\{v_n\} \subset S(0,1)$ lze vybrat podposloupnost (pro jednoduchost ji budeme značit stejně), která je konvergentní v $\mathbb{R}^n$ k prvku $v \in K$ (neboť $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená posloupnost z kompaktní množiny).

Limitním přechodem v (30) *dostáváme*

$$\langle \lambda_0 v - F'(0)v, y \rangle \geq 0 \ \forall y \in K. \tag{31}$$

Podle lemmatu 1 máme z (30)

$$\langle \lambda_n v_n - F'(0)v_n - \frac{r(x_n)}{|x_n|}, x_n \rangle = 0$$

[32] [5], str. 123.
[33] [5], str. 125.

a po vydělení $|x_n|$

$$\lambda_n |v_n|^2 = \langle F'(0)v_n, v_n\rangle + \frac{\langle r(x_n), v_n\rangle}{|x_n|}. \tag{32}$$

Protože $\lambda_0 \neq 0$ a $\lambda_n \to \lambda_0$, můžeme předpokládat, že $\lambda_n \neq 0$.
Ze spojitosti $F'(0)$ a konvergence v_n plyne $\langle F'(0)v_n, v_n\rangle \to \langle F'(0)v, v\rangle$.
Díky limitnímu přechodu v (32) máme

$$\frac{\langle F'(0)v, v\rangle}{\lambda_0} = |v|^2,$$

to jest

$$\langle \lambda_0 v - F'(0)v, v\rangle = 0$$

a to spolu s nerovností (31) zaručuje podle lemmatu 1, že v je vlastním směrem a λ_0 vlastním číslem nerovnosti (29) se zobrazením $A = F'(0)$.

■

Příklad 3. [34] *Buď $K = \{[x_1, x_2]; x_1 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$, $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,*

$$F(x_1, x_2) = 2x_1x_2^2 - x_1^2 - 2x_2^2.$$

Položme $f(x) = F'(x)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Potom

$$f(x) = [2x_2^2 - 2x_1, 4x_1x_2 - 4x_2]. \tag{33}$$

Diferenciál $f'(x)$ je reprezentován maticí

$$f'(x) = \begin{pmatrix} -2 & 4x_2 \\ 4x_2 & 4x_1 - 4 \end{pmatrix}$$

a tedy v bodě 0

$$A = f'(0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Matice A má vlastní vektor $u_1 = (1, 0)$ odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = -2$ a vlastní vektor $u_2 = (0, 1)$ odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = -4$. Vektory u_1 a u_2 leží v kuželi K a jsou vlastními směry nerovnosti.

Nerovnost

$$\langle \lambda x - Ax, y - x\rangle \geq 0 \ \forall y \in K \tag{34}$$

[34][5], str. 127–129.

nemá v $K \times \mathbb{R}$ žádné další řešení s $[x_1, x_2] \neq [0,0]$, tj. vlastní čísla matice A jsou všemi vlastními čísly nerovnosti (34).

Hledejme $x \in K$, $x \neq 0$ a $\lambda \in \mathbb{R}$, která řeší nerovnici

$$\langle \lambda x - f(x), y - x \rangle \geq 0 \ \forall y \in K. \tag{35}$$

Rozepíšeme-li do složek skalární součin na levé straně nerovnosti (35), *zjistíme, že $x \in K$ je řešením právě tehdy, je-li*

$$\lambda x_2 - f_2(x) = 0 \tag{36}$$

a současně platí jedna z podmínek

$$x_1 = 0 \quad \& \quad - f_1(x) \geq 0, \tag{I}$$

$$x_1 > 0 \quad \& \quad \lambda x_1 - f_1(x) = 0. \tag{II}$$

Dosazením do (36) *dostáváme*

$$x_2\big(\lambda - (4x_1 - 4)\big) = 0, \tag{37}$$

$$\textit{tj. } x_2 = 0 \textit{ nebo } x_1 = \frac{1}{4}(\lambda + 4).$$

Nechť platí (I). *Dosadíme-li $x_1 = 0$ do $f_1(x)$, dostáváme*

$$-f_1(x) = -2x_2^2 \leq 0.$$

Má-li být splněno (I), *je $x_2 = 0$ a $x = [x_1, x_2] = [0,0]$.*

Nechť platí (II). *Je-li $x_2 = 0$, je $\lambda x_1 - f_1(x) = (\lambda + 2)x_1$ a řešením je polopřímka*

$$P_1\colon \lambda = -2,\ x_1 > 0,\ x_2 = 0.$$

Je-li $x_2 \neq 0$, plyne z (37)

$$x_1 = \frac{1}{4}(\lambda + 4)$$

a z (II)

$$x_2^2 = \frac{1}{2}(\lambda + 2)x_1 = \frac{1}{8}(\lambda + 2) \cdot (\lambda + 4).$$

Řešení vyplní křivku

$$P_2\colon \lambda \in [-2, \infty),\ x_1 = \frac{1}{4}(\lambda + 4),\ x_2^2 = \frac{1}{8}(\lambda + 2) \cdot (\lambda + 4).$$

V blízkosti bodu $x = [0,0]$, $\lambda = -4$ nemá nerovnice (35) *žádné netriviální řešení.*

V tomto případě je f potenciální zobrazení — vidíme, že neplatí analogie Krasnoselského potenciální věty.

Příklad 4. [35] *Budeme pracovat na* $\mathbb{R}^2$*. Buď*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pak vlastní čísla matice A *jsou* $\lambda_1 = 5$ *a* $\lambda_2 = 0$*, odpovídající jednotkové vlastní vektory jsou* $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$ *a* $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$.

Zvolme $K = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$*. Vektor* v_2 *patří do* K *a tedy* λ_2 *je vlastním číslem a vektor* v_2 *vlastním směrem nerovnosti* (29).

Snadno spočítáme, že

$$\mu_1 = \max_{x \in S(0,1) \cap K} \langle Ax, x \rangle = \langle Au_1, u_1 \rangle = 4, \text{ kde } u_1 = (1, 0).$$

Přímým výpočtem zjistíme, že nerovnost (29) *má v tomto případě tři vlastní čísla:*

$$\begin{aligned} &\mu_1 = 4 \text{ s vlastním vektorem } u_1 = (1, 0), \\ &\mu_2 = 1 \text{ s vlastním vektorem } u_2 = (0, 1), \\ &\mu_3 = \lambda_2 = 0 \text{ s vlastním vektorem } u_3 = v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2). \end{aligned}$$

[35] [5], str. 133–134.

Užitečné věty pro nerovnice

Opět uvedeme pro představu dvě bifurkační věty pro nerovnice, bez důkazů, s odkazy na literaturu.

Věta 9. [36] *Buď $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nezáporný samoadjungovaný lineární operátor. Buď $\{0\} \neq K \subset \mathbb{R}^n$ kužel. Označme $S(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$.*

Pak existuje vektor $u \in S(0,1) \cap K$ a číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\lambda = \max_{x \in S(0,1)\cap K} \langle Ax, x\rangle, \tag{38}$$

$$\langle \lambda u - Au, y - u\rangle \geq 0 \ \forall y \in K. \tag{39}$$

Je-li μ vlastním číslem nerovnosti

$$\langle \mu u - Au, y - u\rangle \geq 0 \ \forall y \in K,$$

pak $\mu \leq \lambda$.

Poznámka 4. [37] *Buď λ_1 největším vlastním číslem operátoru A, a nechť λ je vlastním číslem nerovnosti* (39)*, které splňuje podmínku* (38)*.*

Zřejmě platí

$$\lambda \leq \lambda_1,$$

λ však nemusí být vlastním číslem operátoru A (viz příklad 4).

Věta 10. [38] *Buď $K \neq \{0\}$ kužel v prostoru $\mathbb{R}^n$. Buď $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojité zobrazení. Předpokládejme, že na jistém okolí $\mathcal{U}$ bodu 0 je F diferencovatelné a F' je spojité zobrazení prostoru $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$.*

Předpokládejme dále, že $F(0) = 0$, $F'(0) = 0$, $F(x) \geq 0$ na $\mathcal{U}$, F není identicky nulové na žádné z množin $\mathcal{V} \cap K$, kde $\mathcal{V}$ je okolí bodu 0 v $\mathbb{R}^n$, existuje diferenciál $F''(0) = A$.

Buď λ_0 největší vlastní číslo nerovnosti

$$\langle \lambda x - Ax, y - x\rangle \geq 0 \ \forall y \in K.$$

Potom je λ_0 bodem bifurkace nerovnosti

$$\langle \lambda x - F'(x), y - x\rangle \geq 0 \ \forall y \in K.$$

[36] [5], str. 131.
[37] [5], str. 133.
[38] [5], str. 146.

Dodatky

Aby nebohý čtenář nemusel hledat předpoklady a přesná znění dobře známých vět, nalezne je zde v Dodatku, ovšem bez důkazů.

Věta 11. ***(O implicitní funkci)***[39] *Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F\colon G \to \mathbb{R}$, $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n] \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí:*

$$
\begin{aligned}
(i)\ & F \in C^1(G),\\
(ii)\ & F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0,\\
(iii)\ & \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0.
\end{aligned}
$$

Pak existuje okolí $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$ bodu $\tilde{y}$, že pro $\forall x \in \mathcal{U}$ existuje právě jedno $y \in \mathcal{V}$, že $F(x, y) = 0$.

Označíme-li toto y symbolem $y(x)$, pak $y \in C^1(\mathcal{U})$ a

$$
\frac{\partial y}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))},
$$

kde $j \in \{1, ..., n\}$, $x \in \mathcal{U}$.

Věta 12. ***(O implicitních funkcích)***[40] *Nechť $n, m \in \mathbb{N}$. Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F_j\colon G \to \mathbb{R}$, $j = 1, ..., m$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] = [\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_m] \in G$ a nechť platí:*

$$
\begin{aligned}
(i)\ & F_j \in C^1(G) \text{ pro } j \in \{1, ..., m\},\\
(ii)\ & F_j(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \text{ pro } j \in \{1, ..., m\},\\
(iii)\ & \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{vmatrix} \neq 0.
\end{aligned}
$$

Pak existuje okolí $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ bodu $\tilde{y}$ takové, že pro každé $x \in \mathcal{U}$ existuje právě jedno $y \in \mathcal{V}$ s vlastností $F_j(x, y) = 0$ pro $\forall j \in \{1, .., m\}$. Označíme-li souřadnice tohoto bodu y jako $\varphi_j(x)$, $j = 1, ..., m$, pak $\varphi_j \in C^1(\mathcal{U})$.

[39] [4], 126.
[40] [4], 127.

Poznámka 5. *Předpoklad na nenulový determinant je ekvivalentní požadavku, že zobrazení dané maticí*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{x},\tilde{y}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{x},\tilde{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{x},\tilde{y}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{x},\tilde{y}) \end{pmatrix}$$

je izomorfismus.

Znění věty o implicitních funkcích s předpokladem, že $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y})$ je spojitý izomorfismus, najde čtenář například v [2], str. 148–149.

Definice 10. [41] *Nechť f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do prostoru $\mathbb{R}^n$.*

Zobrazení f nazveme difeomorfismus *na otevřené množině $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, jestliže:*

(i) f *je prosté,*

(ii) $\mathcal{W} = f(\mathcal{U})$ *je otevřená podmnožina prostoru* $\mathbb{R}^n$*,*

(iii) $f \in C^1(\mathcal{U})$*,*

(iv) $f^{-1} \in C^1(\mathcal{W})$*.*

Věta 13. ***(O lokálním difeomorfismu)***[42] *Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je třídy C^1 na nějakém okolí $\mathcal{V}$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Předpokládejme, že $f'(x_0)$ je spojitý izomorfismus prostoru $\mathbb{R}^n$ na prostor $\mathbb{R}^n$.*

Potom existuje okolí $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ bodu x_0 tak, že zobrazení f zúžené na $\mathcal{U}$ je difeomorfismus.

Navíc, je-li $f \in C^p(\mathcal{U})$, pak inverzní zobrazení $f^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je třídy C^p na otevřené množině $\mathcal{W} = f(\mathcal{U})$.

Následující tvrzení uvádíme proto, že úzce souvisí s Crandall-Rabinowitzovou větou (Věta 1). Morseovo lemma umožňuje transformaci proměnných. Pomocí tohoto lemmatu je možné dokázat Větu 14, která po splnění svých předpokladů dává řešení na okolí 0 v $\mathbb{R}^2$ jako dvě hladké křivky. Důsledky této věty dokonce popisují tyto křivky. Druhý důsledek navíc zachycuje bifurkaci a používá se v důkazu Věty 1.

Lemma 3. ***(A. P. Morse)***[43] *Nechť $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná na nějakém okolí 0, $F \in C^p$, $p > 2$. Nechť $F(0) = 0$, $F'(0) = 0$ a $F''(0)$ je regulární $m \times m$ matice.*

Pak existuje nějaké (malé) okolí $\mathcal{U}$ bodu $0 \in \mathbb{R}^m$ a zobrazení $\xi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, $\xi \in C^p$, splňující

$$\xi(0) = 0,\ \xi'(0) = I,$$
$$F(x) = \frac{1}{2}\big(F''(0)\xi(x), \xi(x)\big).$$

[41] [2], str. 155
[42] [2], str. 155
[43] [1], str. 16

Důsledek Morseova lemmatu se bez újmy na obecnosti zabývá okolím bodu $[0,0] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, to jest případem $\lambda = 0$.

Věta 14. [44] *Nechť $\mathcal{U}$ je nějaké okolí bodu $[0,0] \in \mathbb{R}^2$, nechť $F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je třídy $C^p(\mathcal{U})$, $p > 2$. Předpokládejme, že $F(0,0) = 0$, $F'(0,0) = 0$ a $F''(0,0)$ je symetrická, regulární a indefinitní matice.*

Pak množina řešení S rovnice $F(x,\lambda) = 0$ je na nějakém (malém) okolí $[0,0]$ sjednocením dvou C^{p-2} křivek Γ_1, Γ_2, které se protínají transverzálně (tj. úhel tečen křivek Γ_1, Γ_2 v bodě $[0,0]$ je nenulový), a to právě v počátku.

Tato věta je obecnější, než jsme dosud v textu požadovali — nemusí nutně splňovat předpoklad $F(0,\lambda) = 0$; případ, kdy je přímka $\{[0,\lambda]; \lambda \in \mathbb{R}\}$ řešením rovnice (1) je jen speciálním případem tvrzení této věty. Věta dává předpoklady pro existenci dvou různých křivek řešení rovnice (1)(žádná z těchto křivek však nemusí být přímka), to jest pro nejednoznačnost řešení rovnice.

Důsledek 2. [45] *Nechť $F(x,\lambda)\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F \in C^p(\mathcal{U})$, $p > 2$, $\mathcal{U}$ je nějaké okolí $[0,0] \in \mathbb{R}^2$. Nechť*

$$F(0,0) = F_1'(0,0) = F_2'(0,0) = 0,$$

$$F_{2,2}''(0,0) = 0,\ F_{1,2}''(0,0) \neq 0.$$

Pak množina řešení rovnice (1) na nějakém okolí $[0,0]$ sestává ze dvou C^{p-2} křivek

$$\Gamma_1 = \{[x,\lambda]; x = \tilde{x}(\lambda), \lambda \in (-\varepsilon,\varepsilon)\},\ \tilde{x}(0) = \tilde{x}'(0) = 0,$$

$$\Gamma_2 = \{[x,\lambda]; \lambda = \hat{\lambda}(x),\ x \in (-\varepsilon,\varepsilon)\},\ \hat{\lambda}(0) = 0.$$

Důsledek 3. [46] *Nechť $F(x,\lambda)\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F \in C^p(\mathcal{U})$, $p > 2$, kde $\mathcal{U}$ je nějaké okolí $[0,\lambda_0] \in \mathbb{R}^2$, nechť F splňuje předpoklad (2) a navíc*

$$F_1'(0,\lambda_0) = 0,\ F_{1,2}''(0,\lambda_0) \neq 0.$$

Pak λ_0 je bodem bifurkace rovnice (1). Na nějakém (malém) okolí bodu $[0,\lambda_0]$ má netriviální řešení tvar $\Gamma\backslash\{[0,\lambda_0]\}$, kde $\Gamma = \{[x,\lambda]; \lambda = \hat{\lambda}(x), x \in (-\varepsilon,\varepsilon)\}$, $\hat{\lambda}(\cdot) \in C^{p-2}((-\varepsilon,\varepsilon))$, $\hat{\lambda}(0) = \lambda_0$.

[44] [1], str. 17
[45] [1], str. 19
[46] [1], str. 20

Literatura

[1] Drábek P.: *Introduction to Bifurcation Theory*, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 2002.

[2] Fučík S., Milota J.: *Matematická analýza II: Diferenciální počet funkcí více proměnných*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1980.

[3] Golubitsky M., Schaeffer D. G.: *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[4] Hájková V., John O., Zelený M.: *Matematika*, Nakladatelství Karolinum, Praha, 2000.

[5] Stará J., John O.: *Funkcionální analýza: Nelineární úlohy*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1986.

[6] Stuart C. A.: *Three Fundamental Theorems on Bifurcation*, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, 1977.