

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Martin Jusko

### **Modely volatility ARCH a GARCH**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Šárka Došlá

Studijní program: Matematika, Obecná matematika

2009

Na tomto místě bych rád poděkoval Mgr. Šárce Došlé za množství drahocenných rad a příjemnou spolupráci při psaní bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 28. května 2009

Martin Jusko

# Obsah

<b>1</b>	<b>Základní pojmy a tvrzení</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>ARMA modely</b>	<b>10</b>
2.1	AR modely . . . . .	10
2.2	MA modely . . . . .	17
2.3	ARMA modely . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Modely volatility</b>	<b>24</b>
3.1	Model ARCH . . . . .	26
3.2	Model GARCH . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Aplikace na konkrétní časové řady</b>	<b>38</b>
4.1	Použité funkce v programu R . . . . .	38
4.2	Simulovaná data . . . . .	41
4.3	Kurz české koruny vůči euru . . . . .	46
4.4	Burzovní index PX . . . . .	51
	<b>Literatura</b>	<b>57</b>

Název práce: Modely volatility ARCH a GARCH

Autor: Martin Jusko

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Šárka Došlá

E-mail vedoucího: dosla@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci se věnujeme pojmu volatility a základním modelům volatility ARCH a GARCH. Nejprve jsou popsány ARMA modely, které k modelům volatility přirozeně vedou. Poté jsou představeny modely volatility ARCH a GARCH, jsou zkoumány jejich vlastnosti a metody odhadu. Podstatnou částí práce jsou podrobně popsané aplikace těchto modelů na konkrétní časové řady (na simulovaná a reálná data) v programu R. Analyzována jsou data zachycující vývoj pražského burzovního indexu PX a směnného kurzu české koruny vůči euru. Cílem práce je poskytnout čtenáři vybavenému základními poznatky z pravděpodobnosti a statistiky dostatek teoretických znalostí a praktických dovedností k pochopení modelů a jejich samostatné aplikaci.

Klíčová slova: volatilita, ARCH, GARCH

Title: ARCH and GARCH volatility models

Author: Martin Jusko

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Šárka Došlá

Supervisor's e-mail address: dosla@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: The work is devoted to the concept of volatility and the basic models of volatility ARCH and GARCH. First, ARMA models, which lead naturally to the volatility models, are explained. Then the ARCH and GARCH volatility models are introduced and their properties and estimation methods are discussed. The substantial part of this work is a detailed application of the described models to some particular time series (both simulated and real data) using the R program. We analyze the real data capturing the evolution of Prague stock index PX and exchange rate between Czech crown and Euro. The key aspect of the work is to provide enough theoretical knowledge and practical skills for a reader to fully understand the mentioned models and to be able to apply them in practice.

Keywords: volatility, ARCH, GARCH

# Úvod

Modelování časových řad se ve velké míře využívá například ve finančnictví, pojišтовnictví nebo ekonomii. Volatilita neboli kolísavost časových řad se nejčastěji studuje právě v těchto oborech, neboť určitým způsobem reflektuje například rizikovost cených papírů nebo náladu na trhu. Aplikaci proto nachází například při oceňování opcí nebo řízení rizika.

Cílem této práce je zavést pojem volatility, definovat základní modely ARCH a GARCH pro její modelování a předvést postupy při jejich praktickém použití. K tomu je třeba představit některé základní pojmy a definovat ARMA modely, které se často aplikují na studované řady před vlastním modelováním volatility.

U čtenáře se předpokládají základní znalosti z pravděpodobnosti a statistiky, výhodou mohou být vědomosti z teorie pravděpodobnosti a z teorie náhodných procesů. Po prostudování práce by měl čtenář rozumět podstatě modelů ARMA, ARCH a GARCH a být schopen je aplikovat na konkrétní data.

V kapitole 1 jsou definovány základní pojmy používané v celém textu. Kapitola 2 je věnována ARMA modelům, které jsou hojně používány pro modelování časových řad a jejichž pochopení je zásadní pro porozumění modelům volatility, které jsou studovány v kapitole 3. V kapitole 4 je čtenář nejprve seznámen s některými funkcemi programu R, načež jsou předvedeny aplikace získaných znalostí na konkrétní časové řady. Pro ilustraci vlastností představených modelů a předvedení různých funkcí programu R jsou použita simulovaná data. Praktická aplikace je poté předvedena na reálných datech.

Tato práce, použitá data, obrázky, zdrojové kódy a některé výstupy programu R z kapitoly 4 jsou dostupné na přiloženém CD a na internetové adrese <http://artax.karlin.mff.cuni.cz/~juskm6am/bc>.

# Kapitola 1

## Základní pojmy a tvrzení

V této kapitole definujeme základní pojmy týkající se časových řad potřebné pro pochopení dále probíraného tématu.

**Definice 1.1.** Časovou řadou rozumíme posloupnost náhodných veličin  $\{X_t : t \in T\}$ , kde  $T \subset \mathbb{R}$ . Index  $t$  značí čas, v němž je pozorována hodnota  $X_t$ .

V dalším textu budeme pod označením  $\{X_t\}$  uvažovat  $T \subset \mathbb{N}$ . Budeme také pracovat pouze s reálnými časovými řadami, to jest případ, kdy náhodné veličiny  $X_t$  tvořící řadu  $\{X_t\}$  nabývají pouze reálných hodnot. Poznamenejme, že teorie náhodných procesů obecně pracuje s komplexními časovými řadami, jako je tomu například v [13].

**Definice 1.2.** Necht časová řada  $\{X_t : t \in T\}$  splňuje  $\mathbb{E}X_t^2 < \infty$  pro všechna  $t \in T$ . Pak definujeme *autokovarianční funkci*  $\gamma(\cdot, \cdot)$  řady  $\{X_t\}$  předpisem

$$\gamma(p, r) = \text{cov}(X_p, X_r) = \mathbb{E}(X_p - \mathbb{E}X_p)(X_r - \mathbb{E}X_r), \quad p, r \in T.$$

*Autokorelační funkci (ACF)*  $\rho(\cdot, \cdot)$  řady  $\{X_t\}$  definujeme jako

$$\rho(p, r) = \frac{\text{cov}(X_p, X_r)}{\sqrt{\text{var}(X_p)\text{var}(X_r)}}, \quad p, r \in T.$$

Hodnoty autokorelační funkce se také někdy nazývají *korelační koeficienty*.

**Definice 1.3.** Řekneme, že časová řada  $\{X_t : t \in T\}$  je *striktně stacionární*, jestliže pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$ , pro všechna  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , pro všechna  $t_1, \dots, t_n \in T$  a pro libovolné  $h \in \mathbb{R}$  takové, že  $t_k + h \in T$  pro  $1 \leq k \leq n$ , platí, že

$$P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n) = P(X_{t_1+h} \leq x_1, \dots, X_{t_n+h} \leq x_n).$$

Řečeno slovy, definice striktní stacionarity požaduje, aby libovolná skupina náhodných veličin z časové řady měla v případě libovolného časového posunu stejné rozdělení jako neposunutá. To je poměrně silná podmínka. Zavedeme tedy ještě pojem slabé stacionarity.

**Definice 1.4.** Časová řada  $\{X_t : t \in T\}$  je nazývána *slabě stacionární*, jestliže platí

- (i)  $EX_t^2 < \infty$ ,
- (ii)  $EX_t = \mu$  pro všechna  $t \in T$  a nějaké  $\mu \in \mathbb{R}$ ,
- (iii)  $\text{cov}(X_p, X_r) = \gamma(|p - r|)$  pro všechna  $p, r \in T$ .

Bod (iii) v předchozí definici znamená, že autokovarianční funkce  $\{X_t\}$  závisí pouze na vzdálenosti indexů. U stacionárních časových řad proto autokovarianční funkci píšeme jen s jedním argumentem, který udává tuto vzdálenost:  $\gamma(p, r) \stackrel{\text{ozn.}}{=} \gamma(l)$  pro  $l = |p - r|$ .

**Poznámka 1.5.** Je-li časová řada striktně stacionární s konečnými druhými momenty, pak je zřejmě splněna definice slabé stacionarity.

Stacionární časovou řadou budeme v dalším textu rozumět slabě stacionární řadu. Implicitně tak předpokládáme konečnost prvních dvou momentů. V dalším textu se zabýváme stacionárními časovými řadami. Více informací o nestacionárních časových řadách najde čtenář například v [7].

**Poznámka 1.6.** U stacionární časové řady platí  $\text{var}(X_t) = \text{cov}(X_t, X_t) = \gamma(0)$ . Autokorelační funkce takové řady (definice 1.2) má potom tvar

$$\rho(p, r) = \frac{\gamma(|p - r|)}{\sqrt{\gamma(0)\gamma(0)}} = \frac{\gamma(|p - r|)}{\gamma(0)} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \rho(l), \quad \text{kde } l = |p - r|, \quad p, r \in T.$$

**Definice 1.7.** Nechť  $\{X_t : t \in \mathbb{N}\}$  je stacionární časová řada. Označme  $\widetilde{X}_1$  projekci  $X_1$  do lineárního prostoru  $\mathcal{P}$  generovaného náhodnými veličinami  $\{X_2, \dots, X_k\}$ , kde  $k$  je přirozené číslo. Existují tedy čísla  $c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$  taková, že

$$\widetilde{X}_1 = c_2 X_2 + \dots + c_k X_k \quad \text{a} \quad X_1 - \widetilde{X}_1 \perp X_2, \dots, X_k.$$

Podobně označme  $\widetilde{X}_{k+1}$  projekci  $X_{k+1}$  do lineárního prostoru  $\mathcal{P}$ . *Parciální autokorelační funkci (PACF) časové řady  $\{X_t\}$*  definujeme jako

$$\begin{aligned} \alpha(k) &= \rho(1) & k = 1 \\ &= \text{corr}(X_1 - \widetilde{X}_1, X_{k+1} - \widetilde{X}_{k+1}) & k > 1. \end{aligned}$$

Projekce  $\widetilde{X}_{k+1}$  tedy vyjadřuje  $X_{k+1}$  pomocí veličin  $X_2, \dots, X_k$  a  $\widetilde{X}_1$  rovněž vyjadřuje  $X_1$  pomocí těchto veličin. Protože na  $X_{k+1}$  i  $X_1$  mají vliv ještě jiné náhodné veličiny, nejedná se o přesné vyjádření. Pokud by  $X_1$  byla nekorelovaná s  $X_2, \dots, X_k$ , potom by projekce  $\widetilde{X}_1$  byla nulovým prvkem prostoru  $\mathcal{P}$  a  $X_1 - \widetilde{X}_1 = X_1$ . V opačném případě  $X_1 = \widetilde{X}_1 + E_1$ , kde  $E_1$  je nějaká náhodná veličina nekorelovaná s  $X_2, \dots, X_k$  (a tedy nulový prvek prostoru  $\mathcal{P}$ ). Podobně  $X_{k+1} = \widetilde{X}_{k+1} + E_{k+1}$ . PACF v bodě  $k$  pak vyjadřuje korelační koeficient mezi  $E_1$  a  $E_{k+1}$ , tedy vztah mezi  $X_1$  a  $X_{k+1}$ , který nemůže být vyjádřen skrze  $X_2, \dots, X_k$ . Protože  $\{X_t\}$  je stacionární, platí rovnost

$$\text{corr}(X_1 - \widetilde{X}_1, X_{k+1} - \widetilde{X}_{k+1}) = \text{corr}(X_h - \widetilde{X}_h, X_{k+h} - \widetilde{X}_{k+h})$$

a tedy  $\alpha(k)$  vyjadřuje tento vztah pro každé dvě náhodné veličiny z  $\{X_t\}$ , vzdálené od sebe o čas  $k$ .

**Definice 1.8.** Pro naměřené hodnoty  $X_1, \dots, X_n$  časové řady, u které předpokládáme slabou stacionaritu, definujeme *výběrovou autokorelační funkci*  $\hat{\rho}(\cdot)$  předpisem

$$\hat{\rho}(l) = \frac{\sum_{t=l+1}^n (X_t - \overline{X_n})(X_{t-l} - \overline{X_n})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \overline{X_n})^2}, \quad 0 \leq l \leq n-1$$

kde  $\overline{X_n}$  je *výběrový průměr* definovaný jako  $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t$ .

Výběrová ACF  $\hat{\rho}$  slouží jako odhad ACF  $\rho$ . Za určitých předpokladů lze ukázat, že rozdíl  $\hat{\rho}(l) - \rho(l)$  má asymptoticky normální rozdělení, viz. [13], a to je možné využít pro testování hypotézy  $H_0 : \rho(l) = 0$  pro konkrétní  $l \geq 1$ . Ve speciálním případě, kdy data odpovídají realizaci Gaussovského bílého šumu, leží  $\hat{\rho}(l)$  s pravděpodobností 95 % v intervalu  $(-1, 96/\sqrt{n}, 1, 96/\sqrt{n})$ . Tento interval budeme nazývat *intervalem spolehlivosti* pro hodnoty výběrové ACF. V grafu výběrové ACF bývá zpravidla vyznačen přerušovanou čarou, jak je vidět například na obrázku 2.1. Leží-li výběrová ACF  $\hat{\rho}(l)$  v tomto intervalu, můžeme odpovídající  $\rho(l)$  považovat za nulové.

Předchozí odstavec popisuje testování hypotézy o nulovosti jednotlivých korelačních koeficientů, ovšem v dalších kapitolách budeme při ověřování adekvátnosti modelů často používat Portmanteauův test, který testuje hypotézu o nulovosti většího množství korelačních koeficientů najednou. Uvedeme zde Ljung–Boxovu testovací statistiku publikovanou v [12]. Tato statistika vznikla jako modifikace Box–Piercovy statistiky, odvozené v [3], jež při malé velikosti výběru  $n$  způsobuje menší sílu testu, jak je popsáno v [12].

**Portmanteauův test** (Ljung–Boxova statistika). Nechť  $X_1, \dots, X_n$  jsou pozorované hodnoty časové řady  $\{X_t\}$  s autokorelační funkcí  $\rho(\cdot)$ . Za platnosti hypotézy  $H_0 : \rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(m) = 0$  platí, že

$$Q(m) = n(n+2) \sum_{l=1}^m \frac{\hat{\rho}(l)}{n-l} \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_m^2, \quad m \in \mathbb{N},$$

kde  $\xrightarrow{\mathcal{L}}$  značí konvergenci v distribuci pro  $n \rightarrow \infty$ .

Číslo  $m$  v předchozí větě udává počet korelačních koeficientů, které testujeme. Výsledky simulačních studií ukazují, že optimální volba  $m$  je přibližně  $\ln(n)$ , jak je uvedeno v [15].

**Definice 1.9.** Časová řada  $\{X_t\}$  se nazývá *bílý šum*, jestliže  $\{X_t\}$  je posloupnost nekorelovaných stejně rozdělených náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a s konečným rozptylem  $\sigma^2$ . Bílý šum značíme  $\text{WN}(0, \sigma^2)$  (white noise). Má-li navíc  $X_t$  normální rozdělení  $N(0, \sigma^2)$ , nazývá se  $\{X_t\}$  *Gaussovský bílý šum*.

Při práci s finančními časovými řadami se většinou místo cen aktiv pracuje s jejich výnosy. Z následujících definic uvidíme, že pro investora poskytuje výnos stejnou informaci jako samotná cena aktiva, navíc může být uváděn v procentech a je tak dokonce jasnějším ukazatelem výhodnosti investice.

**Definice 1.10.** Buď  $P_t$  cena aktiva v čase  $t$ . *Hrubým výnosem aktiva* rozumíme číslo

$$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}.$$

Podle této definice je  $R_t P_{t-1}$  částka, kterou vyděláme vlastněním aktiva v časovém intervalu  $(t-1, t)$ . Jinými slovy,  $R_t$  vyjadřuje procentuální zisk z aktiva za časový interval  $(t-1, t)$ . Tato částka se nazývá *čistý výnos aktiva*. V praxi se často používá tzv. logaritmický výnos.

**Definice 1.11.** Přirozený logaritmus hrubého výnosu aktiva nazveme *logaritmický výnos* a označíme ho jako  $r_t$ . Platí pro něj

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) \stackrel{\text{ozn.}}{=} p_t - p_{t-1}.$$

V dalším textu budeme pro obecnost časové řady značit jako  $\{X_t : t \in \mathbb{N}\}$ , ve finančních aplikacích se však často používají řady logaritmických výnosů  $\{r_t : t \in \mathbb{N}\}$ . Pokud si čtenář bude chtít představit aplikaci ve financích, může si místo  $X_t$  dosadit  $r_t$ .

# Kapitola 2

## ARMA modely

U finančních časových řad se často setkáváme s tím, že hodnoty autokorelační funkce nejsou nulové a náhodné veličiny tvořící studovanou řadu jsou tedy korelované. To můžeme interpretovat tak, že hodnota řady v čase  $t$  je ovlivněna hodnotami v předcházejících časech. Této vlastnosti využívají matematické modely k přesnějšímu popisu a předpovídání průběhu časových řad, což jsou dva jejich hlavní úkoly. Mezi často používané modely pro finanční časové řady patří autoregresní (AR – autoregressive) modely a modely s klouzavými součty (MA – moving average) a jejich kombinace, tzv. ARMA modely.

V tomto textu se věnujeme pouze stručnějšímu a spíše prakticky zaměřenému přehledu základních vlastností ARMA modelů. Pro více podrobných informací o ARMA modelech může čtenář nahlédnout například do [10] nebo [13].

### 2.1 AR modely

Autoregresní modely předpokládají, že hodnota časové řady v čase  $t$  se dá až na náhodnou složku vyjádřit jako lineární funkce hodnot v předcházejících časech. V námi probíraných modelech je tato náhodná složka bílý šum.

**Definice 2.1.** Nechtě  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\phi_0, \dots, \phi_p \in \mathbb{R}$ ,  $\phi_p \neq 0$  a  $Y_t$  je bílý šum. Řekneme, že časová řada  $\{X_t\}$  se řídí autoregresním modelem řádu  $p$  (značíme  $\text{AR}(p)$ ), jestliže platí

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Y_t.$$

Jak je ukázáno například v [13], model  $\text{AR}(p)$  je stacionární, jestliže všechny kořeny polynomu

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p$$

jsou v absolutní hodnotě větší než jedna.

Je-li řada  $\{X_t\}$  z předchozí definice stacionární, můžeme provést následující vý-

počet střední hodnoty  $EX_t = \dots = EX_{t-p} = \mu$ :

$$\begin{aligned} EX_t &= \phi_0 + \phi_1 EX_{t-1} + \dots + \phi_p EX_{t-p} \\ \mu &= \phi_0 + \phi_1 \mu + \dots + \phi_p \mu \\ \phi_0 &= \mu(1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p) \\ \mu = EX_t &= \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p}. \end{aligned}$$

Autoregresní modely mají řadu dalších vlastností, které se dají studovat. My se zde budeme zabývat jen těmi, které nám pomohou na cestě k modelům volatility. Zájemce o podrobnější informace o vlastnostech AR modelů budiž odkázán na [13] nebo na [10].

Základní úlohy, které řešíme při aplikaci matematických modelů na časovou řadu, jsou určení (identifikace) modelu a jeho řádu, odhad parametrů v modelu a posouzení adekvátnosti odhadnutého modelu. Ve zbytku této podkapitoly se budeme věnovat těmto úlohám a nastíníme některé z metod, které se používají k jejich řešení.

## Identifikace modelu a určení řádu

Dá se ukázat, že autokorelační funkce  $AR(p)$  modelu je řešením diferenční rovnice  $p$ -tého řádu, viz. [13]. Proto její graf vypadá jako graf klesající exponenciály nebo tlumeného sinu, případně jejich kombinace, což ilustruje obrázek 2.1. Autokorelační funkce tak má nekonečně mnoho nenulových hodnot. Naopak parciální autokorelační funkce AR modelu nabývá jen konečně mnoha nenulových hodnot, což bude ukázáno později. Toho se dá využít v situaci, kdy máme časovou řadu, kterou chceme modelovat, a rozhodujeme se, jaký model použít.

Dejme tomu, že jsme pro studovanou řadu na základě průběhu výběrové ACF a PACF identifikovali AR model a rádi bychom určili řád  $p$ . K tomuto účelu použijeme užitečnou vlastnost parciální autokorelační funkce AR modelu, kterou nyní odvodíme.

Uvažujme AR model řádu  $p$  ve tvaru

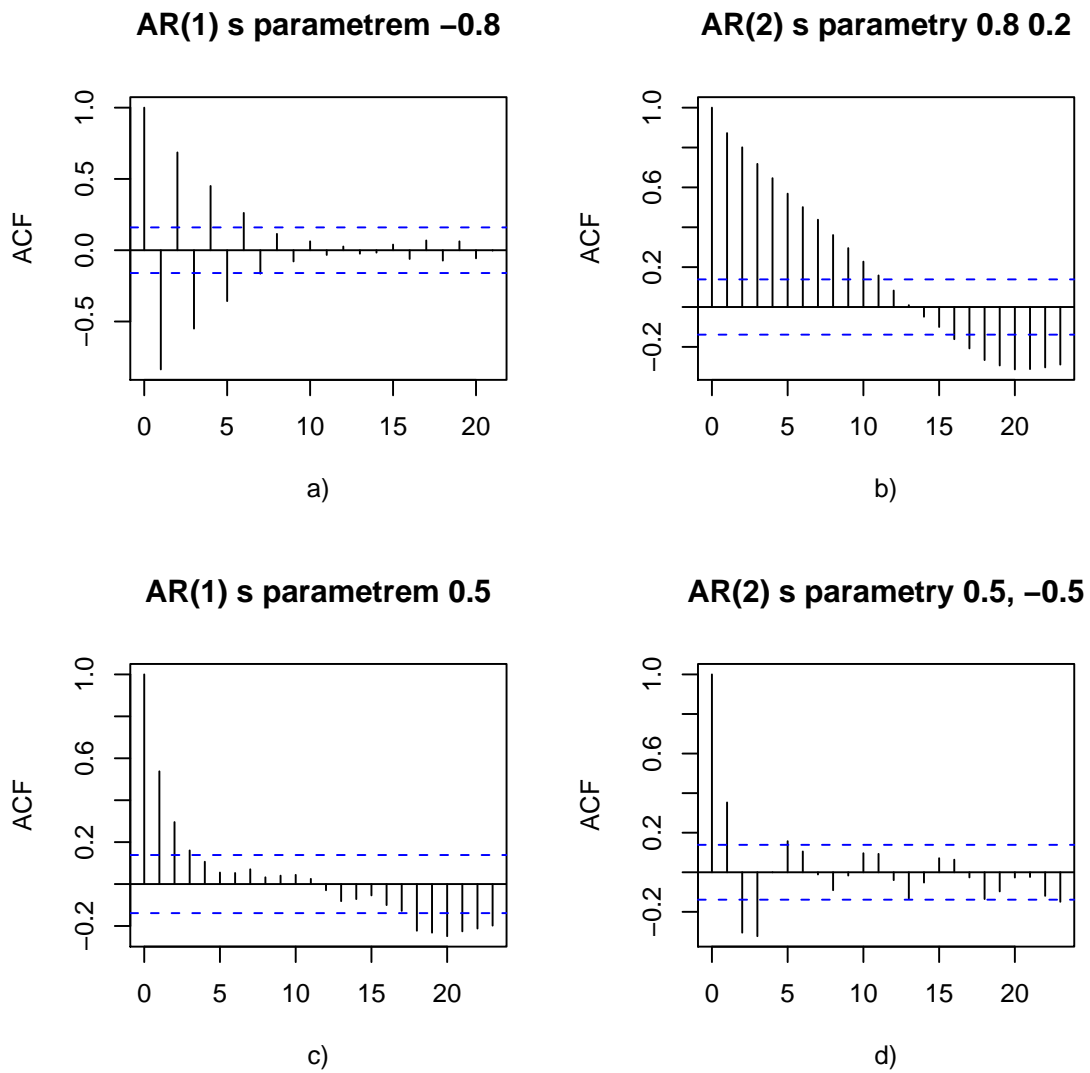
$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Y_t.$$

Zvolme  $n > p$ . Vzhledem k danému modelu je projekce  $X_{n+1}$  do prostoru  $\mathcal{P}$  generovaného  $\{X_2, \dots, X_n\}$  rovna  $\widetilde{X}_{n+1} = \phi_0 + \phi_1 X_n + \dots + \phi_p X_{n-p+1}$ . Dále projekce  $X_1$  do  $\mathcal{P}$  je  $\widetilde{X}_1 = f(X_2, \dots, X_{p+1})$ , pro nějakou lineární funkci  $f$ , neboť  $X_1$  se naposledy (explicitně) vyskytuje v zápisu  $X_{p+1} = \phi_0 + \phi_1 X_p + \dots + \phi_p X_1$ . Potom

$$\alpha(n) = \text{corr}(X_1 - \widetilde{X}_1, X_{n+1} - \widetilde{X}_{n+1}) = \text{corr}(X_1 - f(X_2, \dots, X_{p+1}), Y_{n+1}).$$

Z definice modelu plyne, že veličiny  $X_{p+1}, \dots, X_1$  mohou být (skrže rekurzi) vyjádřeny pomocí  $Y_{p+1}, \dots, Y_1$ , tedy  $X_1 - f(X_2, \dots, X_{p+1})$  můžeme napsat jako nějakou lineární funkci  $g(Y_1, \dots, Y_{p+1})$ . Proto

$$\text{cov}(X_1 - f(X_2, \dots, X_{p+1}), Y_{n+1}) = \text{cov}(g(Y_1, \dots, Y_{p+1}), Y_{n+1}) = 0,$$



Obrázek 2.1: Grafy výběrové ACF simulovaných řad řídicích se modely a) AR(1) s parametrem  $\phi_1 = -0.8$ , b) AR(2) s parametry  $\phi_1 = 0.8$ ,  $\phi_2 = 0.2$ , c) AR(1) s parametrem  $\phi_1 = 0.5$  a d) AR(2) s parametry  $\phi_1 = 0.5$ ,  $\phi_2 = -0.5$ .

neboť  $n > p$  a  $Y_1, \dots, Y_{n+1}$  jsou z definice bílého šumu nekorelované. Pro  $n > p$  je tedy hodnota PACF časové řady řídicí se modelem  $AR(p)$  v bodě  $n$  nulová. Z předchozího postupu vidíme, že pro  $n \leq p$  dostaneme stejným postupem

$$\alpha(n) = \dots = \text{cov}(g(Y_1, \dots, Y_{p+1}), Y_{n+1}) \geq 0.$$

Pro výpočet parciální autokorelační funkce existují metody založené na řešení soustavy rovnic, ve které figuruje autokorelační funkce. Podrobnosti zde nebudeme uvádět, případný zájemce najde bližší informace v [13]. Výběrovou PACF dostaneme dosazením výběrových korelačních koeficientů namísto korelačních koeficientů do zmíněné soustavy rovnic a budeme ji značit  $\hat{\alpha}$ .

Výběrová PACF je odhadem PACF. Podobně jako u ACF, i u PACF lze za určitých podmínek určit asymptotické rozdělení rozdílu  $\hat{\alpha}(n) - \alpha(n)$ , viz. [13], a testovat hypotézu  $H_0 : \alpha(n) = 0$  pro pevné  $n \geq 1$ . Interval  $(-1, 96/\sqrt{n}, 1, 96/\sqrt{n})$  je v grafech výběrové PACF znázorněn stejně jako u ACF, což můžeme vidět na obrázku 2.2. Leží-li výběrová PACF  $\hat{\alpha}(n)$  v tomto intervalu, který budeme nazývat intervalem spolehlivosti, můžeme odpovídající  $\alpha(n)$  považovat za nulové.

Připomeňme, že pro model  $AR(p)$  s autokorelační funkcí  $\rho$  a parciální autokorelační funkcí  $\alpha$  platí, že

$$\begin{aligned} \rho(l) &\neq 0 && \text{pro nekonečně mnoho } l \\ \alpha(l) &= 0 && \text{pro } l > p. \end{aligned}$$

Předchozí výsledky dávají návod pro určení řádu AR modelu. Je-li výběrová PACF zkoumané časové řady, u které jsme podle průběhu výběrové ACF identifikovali AR model, takzvaně *useknutá* v bodě  $p$  (tzn. nenulová v bodě  $p$  a nulová za ním), použijeme  $AR(p)$  model.

## Odhadování parametrů

Pro odhadování parametrů  $\phi_0, \dots, \phi_p$  v  $AR(p)$  modelu se dá použít metoda nejmenších čtverců (LSE – least squares estimate), momentová metoda a v případě, že známe rozdělení bílého šumu  $Y_t$ , také metoda maximální věrohodnosti (MLE – maximum likelihood estimate). Posledně jmenované se budeme podrobněji věnovat v dalších kapitolách, zde jen v krátkosti uvedeme metodu nejmenších čtverců. Více informací čtenář nalezne například v [13] nebo v [7].

**Definice 2.2.** Nechtě  $X_1, \dots, X_T$  jsou pozorované hodnoty časové řady  $\{X_t\}$ , u níž předpokládáme model  $AR(p)$  ve tvaru

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Y_t = X_t(\phi) + Y_t.$$

Odhadem parametru  $\phi = (\phi_0, \dots, \phi_p)$  metodou nejmenších čtverců rozumíme

$$\hat{\phi} = (\hat{\phi}_0, \dots, \hat{\phi}_p) = \arg \min_{\phi} \sum_{t=p+1}^T (X_t - X_t(\phi))^2.$$

Řadu  $\{\hat{X}_t\} = \{X_t(\hat{\phi})\}$  nazveme *odhadnutý model*. Číslo  $\hat{Y}_t = X_t - \hat{X}_t$  nazveme *reziduum odhadnutého modelu v čase t*.



## Testování adekvátnosti modelu

Je vhodné posoudit, zda odhadnutý model správně reflektuje odhadovanou časovou řadu (je *adekvátní*). Odpovídající statistické testy využívají předpokladu, že náhodná veličina  $Y_t$  je bílý šum  $\text{WN}(0, \sigma^2)$ . V ideálním případě by platilo, že  $X_t \approx \hat{X}_t$  a tedy  $Y_t \approx \hat{Y}_t$  pro každé  $t \in \{1, \dots, T\}$ .

Chceme proto testovat, zda  $\hat{Y}_t \approx \text{WN}(0, \sigma^2)$ , tedy zda rezidua  $\hat{Y}_t$ , odhadující chybovou složku  $Y_t$ , mají blízko k bílému šumu. V takovém případě by měly být výběrové korelační koeficienty řady  $\{\hat{Y}_t\}$  statisticky nevýznamné. Pokud z grafu výběrové ACF vidíme, že se významně od nuly liší, usoudíme, že model není adekvátní a musíme ho vylepšit zvětšením řádu nebo použít jiný model.

Leží-li výběrové korelační koeficienty uvnitř intervalu spolehlivosti, znamená to nezamítnutí hypotézy o nulovosti jednotlivých korelačních koeficientů. V takovém případě přistoupíme k testování hypotézy o nulovosti ve sdruženém testu. K tomu můžeme použít Portmanteauův test, uvedený na konci kapitoly 1, ovšem s drobnou modifikací — testová statistika  $Q(m)$  v případě modelu  $\text{AR}(p)$  konverguje v distribuci k  $\chi^2$ -rozdělení o  $m - p$  stupních volnosti, tj.  $\chi_{m-p}^2$ -rozdělení. Je tím reflektována skutečnost, že v modelu bylo odhadováno  $p$  parametrů, viz. [15]. Pokud hypotézu — běžně na hladině  $\alpha = 0.05$  — nezamítneme, znamená to, že korelační koeficienty nejsou od nuly tak daleko, aby to bylo v rozporu s hypotézou o jejich nulovosti. V takovém případě je považujeme za nulové a odhadnutý model za adekvátní.

## Předpovídání

Nechť  $X_1, \dots, X_T$  jsou opět pozorované hodnoty časové řady  $\{X_t\}$ , u níž předpokládáme model  $\text{AR}(p)$  s nyní již známými (v praxi však jen odhadnutými) parametry  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_p$ .

**Definice 2.3.** *Předpovědi  $X_{T+h}$  pomocí nejmenší střední čtvercové chyby (MSE – mean square error) rozumíme*

$$\hat{X}_T(h) = \arg \min_f \text{E} \left( X_{T+h} - f \right)^2,$$

kde  $f$  je funkce pozorovaných hodnot  $X_1, \dots, X_T$ . Číslo  $h$  se nazývá *horizont předpovědi*. Náhodnou veličinu  $e_T(h) = X_{T+h} - \hat{X}_T(h)$  nazveme *chybou v předpovědi*  $X_{T+h}$ .

Předpověď pro  $h = 1$  podle předchozí definice získáme takto: Pro vyjádření  $X_{T+1}$  využijeme znalosti hodnot  $X_1, \dots, X_T$  a parametrů modelu  $\text{AR}(p)$ . Dá se ukázat, že nejmenší střední chyby ve smyslu předchozí definice dosáhneme tehdy, když v předpovědi místo  $Y_{T+1}$  použijeme  $\text{E}Y_{T+1} = 0$ , viz. [10] nebo [13]. Tento postup lze zapsat jako

$$\hat{X}_T(1) = \text{E}(X_{T+1} | X_T, X_{T-1}, \dots, X_{T-p+1}) = \phi_0 + \phi_1 X_T + \dots + \phi_p X_{T-p+1},$$

kde  $\text{E}(X_{T+1} | X_T, X_{T-1}, \dots, X_{T-p+1})$  je střední hodnota  $X_{T+1}$  podmíněná znalostí hodnot  $X_T, X_{T-1}, \dots, X_{T-p+1}$ . Odpovídající chyba v předpovědi je

$$e_T(1) = X_{T+1} - \hat{X}_T(1) = Y_{T+1}.$$

Dosadíme-li proto  $\widehat{X}_T(1)$  do definice předpovědi za  $f$ , je minimalizovaný výraz  $EY_{T+1}^2 = \text{var } Y_{T+1} = \text{var } e_T(1) = \sigma^2$ . Z toho plyne, že lepší předpověď nemůžeme získat, protože rozdíl předpovědi a skutečné hodnoty bude vždy alespoň neznámá složka  $Y_{T+1}$ .

Podobně zkonstruuujeme předpověď pro  $h = 2$ . Místo  $X_{T+1}$  použijeme předpověď  $\widehat{X}_T(1)$  a stejně jako pro  $h = 1$  místo  $Y_{T+2}$  napíšeme  $EY_{T+2}$ . Odhad pak bude

$$\begin{aligned}\widehat{X}_T(2) &= E(X_{T+2}|X_T, X_{T-1}, \dots, X_{T-p+1}) \\ &= \phi_0 + \phi_1 E(X_{T+1}|X_T, X_{T-1}, \dots, X_{T-p+1}) + \phi_2 X_T + \dots + \phi_p X_{T-p+2} \\ &= \phi_0 + \phi_1 \widehat{X}_T(1) + \phi_2 X_T + \dots + \phi_p X_{T-p+2}.\end{aligned}$$

Chyba v předpovědi  $X_{T+2}$  je proto

$$\begin{aligned}e_T(2) &= X_{T+2} - \widehat{X}_T(2) = \phi_0 + \phi_1 X_{T+1} + \phi_2 X_T + \dots + \phi_p X_{T-p+2} + Y_{T+2} \\ &\quad - \phi_0 - \phi_1 \widehat{X}_T(1) - \phi_2 X_T - \dots - \phi_p X_{T-p+2} \\ &= \phi_1 (X_{T+1} - \widehat{X}_T(1)) + Y_{T+2} = \phi_1 e_T(1) + Y_{T+2} = \phi_1 Y_{T+1} + Y_{T+2}.\end{aligned}$$

Provedme nyní tento postup pro přirozené  $h$  splňující  $h < p$ . Pak

$$\widehat{X}_T(h) = \phi_0 + \phi_1 \widehat{X}_T(h-1) + \dots + \phi_{h-1} \widehat{X}_T(1) + \phi_h X_T + \dots + \phi_p X_{T-p+h},$$

pro obecné  $h$  potom

$$\widehat{X}_T(h) = \phi_0 + \sum_{i=1}^{h-1} \phi_i \widehat{X}_T(h-i) + \sum_{j=h}^p \phi_j X_{T+h-j},$$

kde prázdný součet typu  $\sum_{j=p+1}^p$  položíme roven nule.

Tímto postupem jsme zkonstruovali bodové předpovědi hodnot řady  $\{X_t\}$  (to znamená, že předpovědi jsou čísla). Pokud známe rozdělení chyby  $e_T(h)$ , můžeme sestavit intervalovou předpověď pro  $X_{T+h}$  o spolehlivosti  $1 - \alpha$ .

Nechť  $Y_t \sim N(0, \sigma^2)$ . Protože  $\{Y_t\}$  je bílý šum, jsou veličiny  $Y_t$  nekorelované. Jednou z vlastností normálního rozdělení přitom je, že nekorelovanost je ekvivalentní nezávislosti.

Je známo, že pro nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením  $Z_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Z_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  platí, že jejich součet má normální rozdělení  $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ , viz. [1]. Přidáme-li k tomu další vlastnost pravděpodobnostních rozdělení, a sice, že lineární transformace  $(Z - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$ , kde  $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ , zjistíme, že jsme schopni určit rozdělení chyby v předpovědi  $e_T(h)$ .

Pro  $h = 1$  je  $e_T(1) = X_{T+1} - \widehat{X}_T(1) = Y_{T+1} \sim N(0, \sigma^2)$ , proto platí

$$\begin{aligned}P\left(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{X_{T+1} - \widehat{X}_T(1)}{\sigma} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) &= 1 - \alpha, \\ P\left(\widehat{X}_T(1) - \sigma u_{1-\frac{\alpha}{2}} < X_{T+1} < \widehat{X}_T(1) + \sigma u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) &= 1 - \alpha,\end{aligned}$$

kde  $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$  je  $1-\frac{\alpha}{2}$  kvantil  $N(0, 1)$ . Máme tak intervalovou předpověď  $X_{T+1}$ . Podobným způsobem budeme postupovat pro  $h > 1$ . Pro  $h = 2$  a  $h = 3$  dostaneme

$$e_T(2) \sim \phi_1 Y_{T+1} + Y_{T+2} \sim N\left(0, \sigma^2(1 + \phi_1^2)\right),$$

$$e_T(3) \sim \phi_1 e_T(2) + \phi_2 e_T(1) + Y_{T+3} \sim N\left(0, \sigma^2[1 + \phi_1^2(1 + \phi_1^2) + \phi_2^2]\right).$$

Odtud

$$P\left(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{X_{T+2} - \widehat{X}_T(2)}{\sqrt{\sigma^2(1 + \phi_1^2)}} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha,$$

$$P\left(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{X_{T+3} - \widehat{X}_T(3)}{\sqrt{\sigma^2(1 + \phi_1^2(1 + \phi_1^2) + \phi_2^2)}} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha,$$

odkud opět snadno dopočítáme intervalové předpovědi.

V praxi ovšem nemáme přesné hodnoty parametrů  $\phi_0, \dots, \phi_p$ , nýbrž jejich odhady. Protože tyto odhady jsou konzistentní, jak je ukázáno v [13], funguje pro ně předchozí postup asymptoticky pro velikost výběru  $T \rightarrow \infty$ .

## 2.2 MA modely

Druhým modelem, který je rovněž užitečný při modelování časových řad, je model klouzavých součtů (MA – moving average).

**Definice 2.4.** Nechť  $\{Y_t\}$  je bílý šum (viz. definice 1.9). Řekneme, že časová řada  $\{X_t\}$  se řídí MA modelem řádu  $q \in \mathbb{N}$ , jestliže platí

$$X_t = \theta_0 + Y_t - \theta_1 Y_{t-1} - \dots - \theta_q Y_{t-q}, \quad \text{kde } \theta_0, \dots, \theta_q \in \mathbb{R}, \theta_q \neq 0.$$

Uvažujme model MA(1), tedy  $X_t = \theta_0 + Y_t - \theta_1 Y_{t-1}$ . Pak

$$EX_t = \theta_0 + EY_t - \theta_1 EY_{t-1} = \theta_0$$

a díky nekorelovanosti  $\{Y_t\}$

$$\text{var } X_t = \text{var } Y_t + \theta_1^2 \text{var } Y_{t-1} = \sigma^2 + \theta_1^2 \sigma^2 = \sigma^2(1 + \theta_1^2).$$

Podobně pro model MA( $q$ ) dostaneme

$$EX_t = \theta_0 + EY_t - \theta_1 EY_{t-1} - \dots - \theta_q EY_{t-q} = \theta_0,$$

$$\text{var } X_t = \text{var } Y_t + \theta_1^2 \text{var } Y_{t-1} + \theta_2^2 \text{var } Y_{t-2} + \dots + \theta_q^2 \text{var } Y_{t-q}$$

$$= \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2).$$

Jak bude ukázáno dále, každý MA model je stacionární.

## Identifikace modelu a určení řádu

Uvažujme nyní opět model MA(1), tedy  $X_t = \theta_0 + Y_t - \theta_1 Y_{t-1}$ . Potom pro  $l \geq 1$ ,  $l \in \mathbb{N}$  platí

$$X_{t-l}X_t = \theta_0 X_{t-l} + Y_t X_{t-l} - \theta_1 Y_{t-1} X_{t-l}.$$

Pro autokorelační funkci z definice platí

$$\begin{aligned}\gamma(l) &= \mathbb{E}X_{t-l}X_t - \mathbb{E}X_{t-l}\mathbb{E}X_t \\ &= \theta_0 \mathbb{E}X_{t-l} + \mathbb{E}Y_t X_{t-l} - \theta_1 \mathbb{E}Y_{t-1} X_{t-l} - \theta_0^2.\end{aligned}$$

S využitím nekorelovanosti  $X_{t-l}$  a  $Y_t$  dostaneme

$$\begin{aligned}\gamma(l) &= \theta_0 \mathbb{E}X_{t-l} + \mathbb{E}Y_t \mathbb{E}X_{t-l} - \theta_1 \mathbb{E}Y_{t-1} X_{t-l} - \theta_0^2 \\ &= -\theta_1 \mathbb{E}Y_{t-1} X_{t-l}\end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned}\gamma(l) &= 0 & l > 1 \\ &= -\theta_1 \sigma^2 & l = 1.\end{aligned}$$

Pro autokorelační funkci z toho plyne, že

$$\begin{aligned}\rho(l) &= 1 & l = 0, \\ &= \frac{-\theta_1}{(1 + \theta_1^2)} & l = 1, \\ &= 0 & l > 1.\end{aligned}$$

Tento výsledek je možné zobecnit pro model MA( $q$ ), čímž dostaneme

$$\begin{aligned}\rho(l) &\neq 0 & l \leq q, \\ &= 0 & l > q,\end{aligned}$$

viz. například [13].

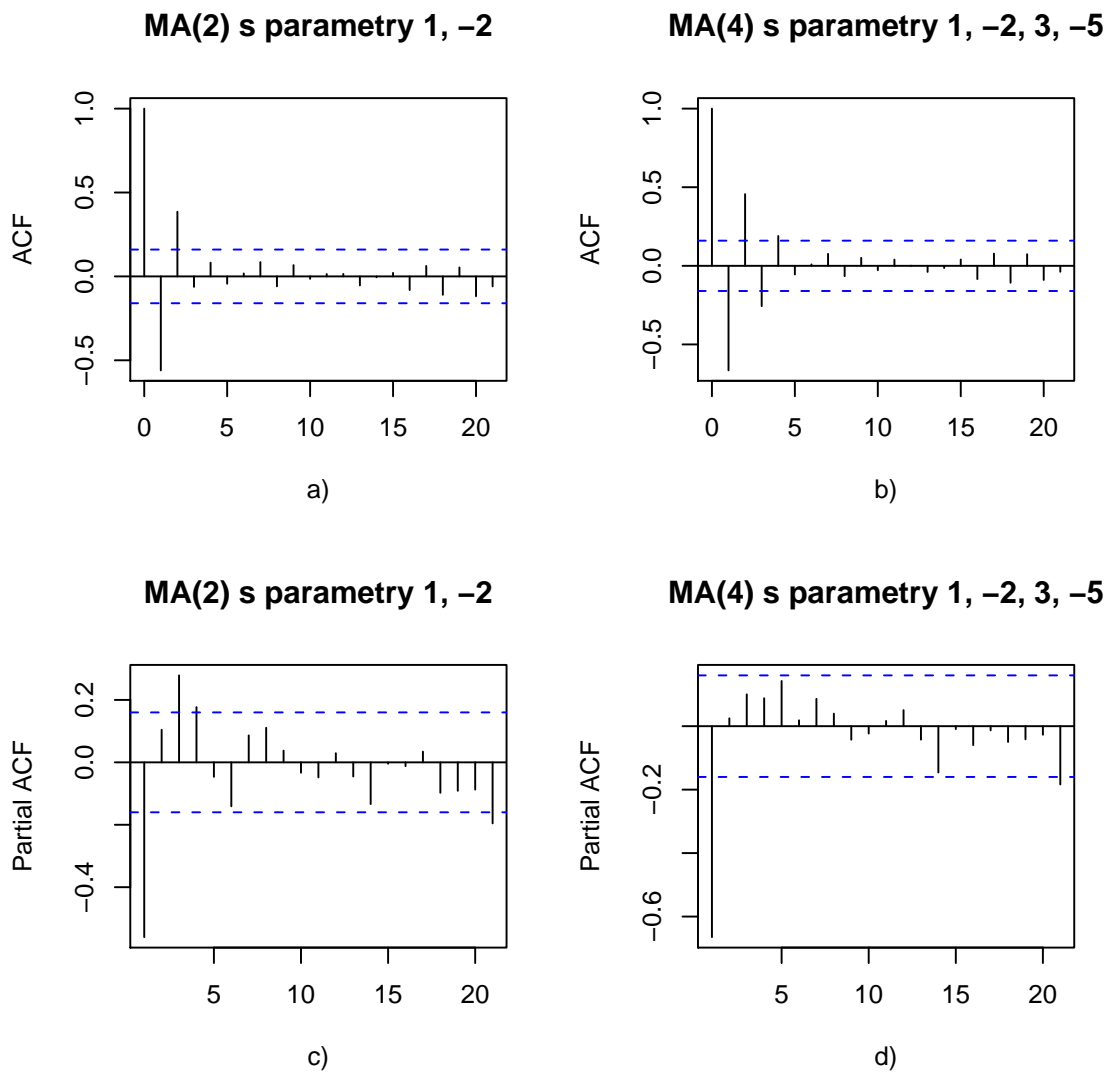
To znamená, že veličina  $Y_t$  ovlivňuje pouze  $q$  hodnot  $X_t, \dots, X_{t+q}$  a model MA má takzvaně *konečnou paměť*. Protože ACF je funkcí rozdílu časů, střední hodnota je konstantní a rozptyl konečný, je každý model MA stacionární.

Parciální autokorelační funkce modelu MA( $q$ ) je řešením diferenční rovnice  $q$ -tého řádu a má proto tvar tlumeného sinu nebo exponenciály, případně jejich kombinace, viz. [13]. Proto nabývá nenulových hodnot v nekonečně mnoho bodech.

Připomeňme, že pro model MA( $q$ ) s autokorelační funkcí  $\rho$  a parciální autokorelační funkcí  $\alpha$  platí, že

$$\begin{aligned}\alpha(l) &\neq 0 & \text{pro nekonečně mnoho } l \\ \rho(l) &= 0 & \text{pro } l > q.\end{aligned}$$

Mají-li tedy výběrové ACF a PACF takovýto průběh, identifikujeme MA model řádu  $q$ .



Obrázek 2.3: Grafy výběrové ACF a PACF simulovaných řad řídicích se modely MA(2) s parametry  $\theta_1 = 1$ ,  $\theta_2 = -2$  a MA(4) s parametry  $\theta_1 = 1$ ,  $\theta_2 = -2$ ,  $\theta_3 = 3$ ,  $\theta_4 = -5$ .

## Odhadování parametrů

V modelech MA se běžně používají odhady metodou maximální věrohodnosti. K tomu je třeba předpokládat, že známe rozdělení bílého šumu  $\{Y_t\}$ . Parametry lze odhadovat také použitím metody nejmenších čtverců, zmíněné v předchozí kapitole. Zde uvedeme metodu maximální věrohodnosti, která je sice náročnější na výpočetní výkon, ale dává přesnější výsledky. Podrobnější informace o používaných metodách může čtenář nalézt například v [13].

Mějme pozorované hodnoty veličin  $X_1, \dots, X_T$  a označme je  $x_1, \dots, x_T$ . Chceme odhadovat parametry  $\theta_0, \dots, \theta_q$  v modelu MA( $q$ ). Ze stacionarity víme, že střední hodnota  $EX_t = \theta_0$  je konstantní. Budeme proto bez újmy na obecnosti předpokládat, že  $\theta_0 = 0$  (jinak bychom odečetli od  $X_t$  výběrový průměr  $\bar{X}_T$ ).

Označme  $\mathcal{F}_{t-1}$   $\sigma$ -algebru generovanou náhodnými veličinami  $X_{t-1}, \dots, X_1$ . Jinými slovy,  $\mathcal{F}_{t-1}$  obsahuje informaci o hodnotách řady  $\{X_t\}$  až do času  $t - 1$ . Označme  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \dots, \theta_q)$  vektor parametrů modelu MA( $q$ ). Rádi bychom na základě znalosti  $\mathcal{F}_{t-1}$  vyjádřili hodnoty  $Y_{t-1}, \dots, Y_1$ . Tyto hodnoty označíme pro názornost  $y_{t-1}, \dots, y_1$ . Díky předpokládanému modelu můžeme potom psát

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= x_2 + \theta_1 y_1, \\ y_3 &= x_3 + \theta_1 y_2 + \theta_2 y_1, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nyní můžeme psát (z vlastností podmíněné hustoty):

$$\begin{aligned} f(y_T, \dots, y_1 | \boldsymbol{\theta}) &= f(y_T, \dots, y_2 | \boldsymbol{\theta}, \mathcal{F}_1) f(y_1 | \boldsymbol{\theta}) \\ &= f(y_T, \dots, y_3 | \boldsymbol{\theta}, \mathcal{F}_2) f(y_2 | \boldsymbol{\theta}, \mathcal{F}_1) f(y_1 | \boldsymbol{\theta}) \\ &\vdots \\ &= f(y_T | \boldsymbol{\theta}, \mathcal{F}_{T-1}) f(y_{T-1} | \boldsymbol{\theta}, \mathcal{F}_{T-2}) \cdots f(y_2 | \boldsymbol{\theta}, \mathcal{F}_1) f(y_1 | \boldsymbol{\theta}), \end{aligned}$$

kde  $f(y_T, \dots, y_1 | \boldsymbol{\theta})$  je sdružená hustota veličin  $Y_T, \dots, Y_1$  podmíněná parametrem  $\boldsymbol{\theta}$  a  $f(y_t | \boldsymbol{\theta}, \mathcal{F}_{t-1})$  je hustota náhodné veličiny  $Y_t$  podmíněná vektorem  $\boldsymbol{\theta}$  a  $\sigma$ -algebrou  $\mathcal{F}_{t-1}$ .

Protože z předpokladů známe rozdělení veličin  $Y_t$  (z definice bílého šumu stejné pro všechna  $t$ ), dosadíme za  $f$  hustotu tohoto rozdělení. Máme tedy sdruženou hustotu veličin  $Y_T, \dots, Y_1$  vyjádřenou pomocí nám známých hodnot  $x_T, \dots, x_1$  a vektoru parametrů  $\boldsymbol{\theta}$ , který neznáme a chceme ho odhadnout. Myšlenka metody maximální věrohodnosti je, že námi pozorované hodnoty  $x_T, \dots, x_1$  a tedy i z nich vypočítané  $y_T, \dots, y_1$  jsou „nejvíce pravděpodobné“. Proto sdružená hustota veličin  $Y_T, \dots, Y_1$  má být pro tyto hodnoty maximální a odhadem  $\boldsymbol{\theta}$  bude takový vektor  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_0, \dots, \hat{\theta}_q)$ , který tuto sdruženou hustotu maximalizuje.

Tento odhad vznikl v situaci, kdy jsme položili  $y_t = 0$  pro  $t \leq 0$ , říká se mu proto *podmíněný odhad metodou maximální věrohodnosti*. Hodnoty  $y_{1-q}, \dots, y_0$  vstupují

do maximalizované hustoty proto, že v modelu MA( $q$ ) platí

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \theta_1 y_0 + \theta_2 y_{-1} + \cdots + \theta_q y_{1-q}, \\ y_2 &= x_2 + \theta_1 y_1 + \theta_2 y_0 + \cdots + \theta_q y_{2-q}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Druhá možnost je odhadnout hodnoty  $y_{1-q}, \dots, y_0$ , které považujeme za neznámé konstanty, společně s parametrem  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \dots, \theta_q)$ .

Označme  $\mathbf{y} = (y_{1-q}, \dots, y_0)$ . Pak podobně jako v předchozím

$$f(y_T, \dots, y_1 | \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) = \dots = f(y_T | \boldsymbol{\theta}, \mathcal{F}_{T-1}, \mathbf{y}) f(y_{T-1} | \boldsymbol{\theta}, \mathcal{F}_{T-2}, \mathbf{y}) \cdots f(y_1 | \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}),$$

což je opět funkce, kterou chceme maximalizovat v argumentech  $\boldsymbol{\theta}$  a  $\mathbf{y}$ . Výsledkem budou odhady  $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = (\widehat{\theta}_0, \dots, \widehat{\theta}_q)$  a  $\widehat{\mathbf{y}} = (\widehat{y}_{1-q}, \dots, \widehat{y}_0)$ , z nichž potřebujeme pouze  $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ , ale parametr  $\mathbf{y}$  nám posloužil ke zpřesnění odhadu, kterému se proto někdy říká *přesný odhad metodou maximální věrohodnosti*.

## Testování adekvátnosti modelu

Testování adekvátnosti modelu je opět založeno na testování nekorelovanosti reziduí  $\{\widehat{Y}_t\}$ , kde  $\widehat{Y}_t = X_t - \widehat{X}_t$ . K tomu lze využít metody popsané u AR modelů v části 2.1. Pokud známe rozdělení bílého šumu, je možné testovat také hypotézu o tom, že rezidua odpovídají tomuto rozdělení. Pokud ji nezamítneme, stejně jako hypotézu o nekorelovanosti, neliší se rezidua závažně od bílého šumu a model pokládáme za adekvátní.

## Předpovídání

Uvažujme pro řadu  $\{X_t\}$  model MA( $q$ ). Nechť  $X_T, \dots, X_1$  jsou opět známé hodnoty  $\{X_t\}$ . Pro horizont předpovědi  $h = 1$  chceme předpovědět  $X_{T+1}$ . V modelu MA( $q$ ), v němž předpokládáme  $EX_t = 0$ , platí

$$X_{T+1} = Y_{T+1} - \theta_1 Y_T - \cdots - \theta_q Y_{T+1-q}.$$

Předpovědi  $X_{T+1}$  pak podobně jako u AR modelů rozumíme

$$\widehat{X}_T(1) = E(X_{T+1} | X_T, \dots, X_1) = -\theta_1 \widehat{Y}_T - \cdots - \theta_q \widehat{Y}_{T+1-q},$$

kde  $\widehat{Y}_t$  je residuum odhadnutého modelu v čase  $t$ , tedy  $\widehat{Y}_t = X_t - \widehat{X}_t$ .

Pro  $h = 2$  potom

$$\begin{aligned} X_{T+2} &= Y_{T+2} - \theta_1 Y_{T+1} - \cdots - \theta_q Y_{T+2-q}, \\ \widehat{X}_T(2) &= E(X_{T+2} | X_T, \dots, X_1) = -\theta_2 Y_T - \cdots - \theta_q Y_{T+2-q}. \end{aligned}$$

Pro obecné  $h$  platí

$$\begin{aligned} X_{T+h} &= \widehat{Y}_{T+h} - \theta_1 \widehat{Y}_{T+h-1} - \cdots - \theta_q \widehat{Y}_{T+h-q}, \\ \widehat{X}_T(h) &= -\theta_h \widehat{Y}_T - \cdots - \theta_q \widehat{Y}_{T+h-q} = -\sum_{i=h}^q \theta_i \widehat{Y}_{T+h-i}, \end{aligned}$$

kde opět prázdný součet dodefinujeme nulou. Vidíme, že pro  $h > q$  je předpověď  $\widehat{X}_T(h) = 0$ , což je  $EX_t$ . Jak víme z průběhu ACF, veličiny  $X_1, \dots, X_T$  nijak neovlivňují veličiny  $X_{T+q+1}, X_{T+q+2}, \dots$ , a proto znalost  $X_1, \dots, X_T$  nemůže nic napovědět o budoucích hodnotách  $X_{T+q+1}, X_{T+q+2}, \dots$ .

## 2.3 ARMA modely

V některých aplikacích se můžeme dostat do situace, kdy při aplikaci AR nebo MA modelu budeme pro adekvátní popis časové řady potřebovat vysoký řád modelu. Z tohoto důvodu se zavádí spojení AR a MA modelů, tzv. ARMA model.

**Definice 2.5.** Nechť  $\{Y_t\}$  je bílý šum a  $\{X_t\}$  je stacionární časová řada. Řekneme, že časová řada  $\{X_t\}$  se řídí ARMA( $p, q$ ) modelem,  $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , jestliže platí

$$X_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} - \sum_{j=1}^q \theta_j Y_{t-j} + Y_t,$$

kde  $\phi_0, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q \in \mathbb{R}$ ,  $\phi_p \neq 0$  a  $\theta_q \neq 0$ .

V literatuře se často používá zápis pomocí operátoru zpětného posunu:

**Definice 2.6.** Operátor  $B : X_t \mapsto X_{t-1}$  se nazývá *operátor zpětného posunu* (back-shift operator).

Model ARMA( $p, q$ ) zapsaný pomocí operátoru zpětného posunu vypadá následovně:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) X_t = \phi_0 + (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) Y_t.$$

Polynom  $\phi(z) = (1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p)$  nazveme *charakteristickým polynomem AR složky* ARMA( $p, q$ ) modelu. Jak je ukázáno například v [13], ARMA( $p, q$ ) model je stacionární, pokud je jeho AR složka stacionární (MA složka je stacionární vždy). To nastává, jestliže jsou všechny kořeny charakteristického polynomu AR složky v absolutní hodnotě větší než jedna.

### Identifikace modelu a určení řádu

Jak už bylo řečeno v úvodu kapitoly, v praxi často používáme ARMA model v situacích, kdy jsme identifikovali AR nebo MA model vysokého řádu. V takových případech ARMA model k adekvátnímu popsání dané časové řady potřebuje tak vysoký řád.

Určování řádů není u ARMA modelu tak jednoduché jako u AR a MA modelů a nepomůže nám s ním ani ACF a PACF. Protože podrobný popis metod použitelných k určení řádů ARMA modelu by nijak nepřispěl k účelu této práce, uvedeme zde pouze stručný popis s odkazem na literaturu, v níž může zájemce nalézt bližší informace. Standardně se uvádí metoda FPE (final prediction error) a AIC (Akaike's information criterion). Metoda FPE vyjádří střední čtvercovou chybu v předpovědi

pro  $h = 1$  pomocí řádů  $p, q$  a za řády odhadovaného ARMA modelu se pak zvolí čísla, která tuto chybu minimalizují. Princip metody AIC spočívá ve vyjádření věrohodnostní funkce pomocí  $p, q$  a za řády modelu ARMA zvolíme čísla, která tuto funkci maximalizují. Více detailů nalezne čtenář například v [7].

### Odhadování parametrů a testování adekvátnosti

V AR a MA modelech se dá k odhadu parametrů použít jak metoda nejmenších čtverců, tak metoda maximální věrohodnosti. Proto se dají tyto metody použít i pro odhady parametrů v ARMA modelu. Nejpřesnější z nich je přesná metoda maximální věrohodnosti, viz. [7]. Protože u ARMA modelů se jedná o poněkud technicky složitější postupy, jejichž myšlenky již byly v předchozích částech vysloveny, nebudeme je zde uvádět. Více informací čtenář nalezne v [7], v [10] nebo v [13].

Testování adekvátnosti modelu spočívá stejně jako v předchozím textu v ověřování nekorelovanosti reziduí odhadnutého modelu  $\{\hat{Y}_t\}$ , která dostaneme jako rozdíl pozorovaných hodnot a hodnot odhadnutého modelu  $X_t - \hat{X}_t$ . Pokud je známo jejich rozdělení, testujeme rovněž, zda rezidua odpovídají tomuto rozdělení.

### Předpovídání

Předpovídání probíhá v ARMA modelech na stejném principu jako v AR a MA modelech. Tedy předpověď  $X_{T+h}$  je

$$\begin{aligned}\hat{X}_T(h) &= \mathbf{E}(X_{T+h} | X_T, \dots, X_1) \\ &= \phi_0 + \sum_{i=1}^{h-1} \phi_i \hat{X}_T(h-i) + \sum_{j=h}^p \phi_j X_{T+h-j} - \sum_{k=h}^q \hat{Y}_{T+h-k},\end{aligned}$$

kde  $\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_T$  jsou rezidua odhadnutého modelu a  $X_1, \dots, X_T$  jsou pozorované hodnoty  $\{X_t\}$ .

# Kapitola 3

## Modely volatility

U finančních časových řad nás často zajímá, jak hodně se jejich hodnoty odlišují od střední hodnoty, jak hodně kolísají. Pro investora je důležité vědět, zda se hodnoty časové řady výnosů budou pohybovat v úzkém nebo širokém intervalu kolem předpovídané střední hodnoty, protože to vypovídá o rizikovosti investice. Ze stejného důvodu může tato kolísavost zajímat emitenta opce, protože cena opce reflektuje míru rizika podkladového aktiva.

V modelech ARMA, probíraných v předchozí části, můžeme za tuto kolísavost považovat rozptyl reziduí, který vyjadřuje střední čtvercovou odchylku hodnot časové řady od střední hodnoty. Jak už ale víme, rezidua v ARMA modelech jsou stacionární, tedy jejich rozptyl je konstantní v každém okamžiku. Ve finančních časových řadách ovšem často pouhým okem pozorujeme různé rozptyly v jednotlivých obdobích. Konstantní rozptyl nám proto nedává příliš užitečnou informaci o tom, jak hodnoty řady v jednotlivých okamžicích kolísají. Rádi bychom našli rozptyl pro každý jednotlivý okamžik.

Buďme nyní v čase  $t - 1$ , známe hodnoty  $X_{t-1}, \dots, X_1$  a rádi bychom s jejich využitím popsali očekávanou hodnotu  $X_t$ , tedy střední hodnotu  $X_t$  podmíněnou hodnotami  $X_{t-1}, \dots, X_1$ . Označme ji

$$\mu_t = E(X_t | \mathcal{F}_{t-1}),$$

kde  $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(X_{t-1}, \dots, X_1)$  je  $\sigma$ -algebra generovaná veličinami  $X_{t-1}, \dots, X_1$ . Jinými slovy řečeno,  $\mathcal{F}_{t-1}$  jsou veškeré informace o hodnotách řady  $\{X_t\}$ , které v čase  $t - 1$  máme.

Pomocí této podmíněné střední hodnoty vyjádříme očekávaný rozptyl  $X_t$  jako

$$\sigma_t^2 = E\left((X_t - \mu_t)^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right).$$

Tento podmíněný rozptyl se nazývá *volatilita časové řady  $\{X_t\}$  v čase  $t$* .

Volatilita má řadu praktických aplikací ve financích, ekonometrii a pojišťovnictví. Znalost vývoje volatility je například nutná při oceňování opcí pomocí Black - Scholesova vzorce, pomůže ke zpřesnění intervalových předpovědí časové řady nebo při počítání hodnoty v riziku (VaR - value at risk).

## Vlastnosti volatility

Zvláštní vlastností volatility je skutečnost, že není přímo pozorovatelná. Známe-li hodnotu časové řady  $\{X_t\}$  v čase  $t$ , nelze z ní nijak určit, jaký rozptyl má jí odpovídající náhodná veličina  $X_t$ . Máme totiž pouze jednu její realizaci, a to je na jakýkoliv odhad rozptylu nedostatečné. Přesto můžeme ve finančních časových řadách pozorovat některé vlastnosti volatility (viz. například [7] a [15]):

- Volatilita vytváří shluky (anglicky clusters). To znamená, že vysoká volatilita v čase  $t$  bývá často následována vysokou volatilitou v čase  $t + 1$  a stejně pro nízké hodnoty.
- Volatilita „reaguje“ jinak na špatné zprávy na trhu (pokles ceny) a jinak na zprávy dobré (zvýšení ceny). Pokud cena podkladového aktiva klesá, volatilita je větší než v případě růstu ceny.

## Obecná struktura modelu

V této části budeme uvažovat časovou řadu  $\{X_t\}$ , která je stacionární a invertibilní<sup>1</sup>. Předpokládejme, že  $\{X_t\}$  se řídí ARMA( $p, q$ ) modelem

$$X_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} - \sum_{j=1}^q \theta_j Y_{t-j} + Y_t.$$

Potom

$$\begin{aligned} \mu_t &= E(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} - \sum_{j=1}^q \theta_j Y_{t-j} \\ \sigma_t^2 &= E((X_t - \mu_t)^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = E(Y_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \text{var}(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}). \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že při modelování volatility v podstatě vyšetřujeme podmíněný rozptyl reziduí ARMA( $p, q$ ) modelu aplikovaného na  $\{X_t\}$ . Tato rezidua budeme nazývat *šoky*. V dalším textu budeme předpokládat, že ARMA( $p, q$ ) model je dán a nebudeme se jím dále zabývat. Proměnlivosti rozptylu náhodných veličin z časové řady v čase se říká *heteroskedasticita*. Protože v naší situaci nastává proměnlivost u podmíněného rozptylu, nazývá se tento jev *podmíněná heteroskedasticita (conditional heteroskedasticity)*.

## Historická volatilita

Spočítáme-li výběrový rozptyl reziduí  $\{Y_t\}$  ARMA modelu, dostaneme odhad jejich nepodmíněného rozptylu, který je v každém čase stejný. To pro nás není nijak užitečné. Na druhou stranu rozptyl veličiny  $Y_t$  v konkrétním čase  $t$  nelze odhadovat výběrovým rozptylem, protože náš výběr (realizace náhodné veličiny  $Y_t$ ) je délky 1. Můžeme ale udělat kompromis mezi těmito dvěma krajními postupy a v čase  $t$  spočítat výběrový rozptyl z hodnot zahrnujících  $p$  předchozích pozorování a pozorování

---

<sup>1</sup>Invertibilita znamená, že pro každé  $t$  může být veličina  $Y_t$  vyjádřena jako lineární kombinace  $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$ . Více informací lze nalézt například v [13].

v čase  $t$

$$h_{p,t}^2 = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^p Y_{t-i}^2.$$

Tento rozptyl se nazývá *historická volatilita*. Historická volatilita je v podstatě vážený průměr druhých mocnin reziduí v období  $(t-p, t)$ , v němž jsou všechny váhy konstantní. Následující model volatility ARCH je rovněž vážený průměr druhých mocnin reziduí z určitého období, jeho váhy ale nejsou konstantní, nýbrž jsou určovány tak, aby co nejvíce odpovídaly dané časové řadě.

### 3.1 Model ARCH

Autoregresní podmíněně heteroskedastický (ARCH - autoregressive conditional heteroscedastic) model publikoval v roce 1982 profesor Engle a jeho použití ilustroval na datech o inflaci Velké Británie, viz. [8]. V roce 2003 mu byla za model ARCH udělena Nobelova cena za ekonomii.

Model ARCH staví na myšlence, že podmíněné rozdělení reziduí v ARMA modelu, známe-li předchozí hodnoty reziduí, je vždy stejné až na rozptyl, který je kvadratickou funkcí předchozích hodnot reziduí.

Model předpokládá splnění dvou základních předpokladů o reziduích  $\{Y_t\}$ . První z nich je nekorelovanost, neboť  $\{Y_t\}$  jsou rezidua ARMA modelu řady  $\{X_t\}$  a měla by proto odpovídat bílému šumu. Druhým předpokladem je, že náhodné veličiny z  $\{Y_t\}$  jsou závislé. Pokud by veličiny z řady  $\{Y_t\}$  byly nezávislé, byla by volatilita

$$\sigma_t^2 = \text{var}(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \text{var} Y_t,$$

což je konstanta, neboť  $\{Y_t\}$  je bílý šum. V takovém případě by zřejmě bylo zbytečné volatilitu modelovat.

**Definice 3.1.** Řekneme, že časová řada  $\{Y_t\}$  se řídí modelem *ARCH řádu*  $m \in \mathbb{N}$ , jestliže platí

$$Y_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m Y_{t-m}^2, \quad (3.1)$$

kde  $\{\epsilon_t\}$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou 0 a rozptylem 1 a koeficienty splňují  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$  pro  $i \geq 1$ .

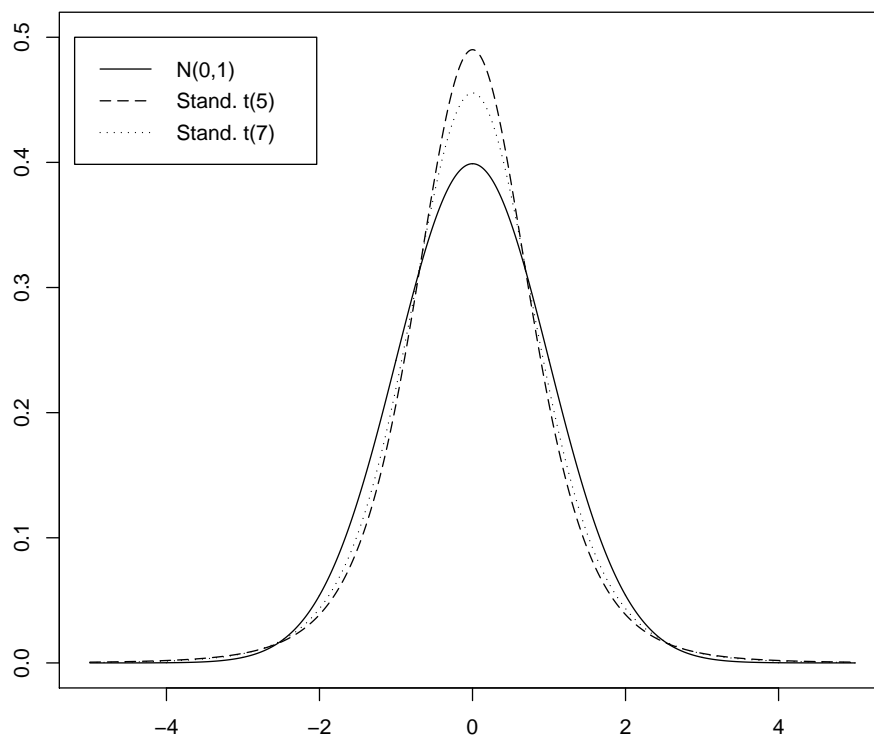
V aplikacích se často za  $\epsilon_t$  volí normované normální rozdělení  $N(0, 1)$  nebo standardizované Studentovo t-rozdělení  $t_\nu$ , jak je uvedeno v [15].

Jak ukážeme později, model ARCH je stacionární, jestliže všechny kořeny polynomu

$$\alpha(z) = 1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_m z^m$$

jsou v absolutní hodnotě větší než jedna. Uvidíme, že postačující a nutná podmínka pro stacionaritu je  $\alpha_1 + \dots + \alpha_m < 1$ .

Hustota rozdělení s tezsími chvosty



Obrázek 3.1: Hustoty standardizovaných Studentových t-rozdělení  $t_5$  a  $t_7$ , která mají těžší chvosty než hustota normovaného normálního rozdělení.

### Vlastnosti modelu

Z rovnice (3.1) vidíme, že velké absolutní hodnoty šoků  $Y_{t-1}, \dots, Y_{t-m}$  v modelu ARCH( $m$ ) způsobují velké hodnoty volatility v čase  $t$ . To reflektuje shlukovitost volatility. Při velké volatilitě v čase  $t$  je větší šance, že šok  $Y_t$  bude rovněž velký, a díky němu i volatilita v čase  $t + 1$ . Nicméně velký rozptyl náhodné veličiny nutně neznamená, že její hodnota bude daleko od střední hodnoty, pouze ukazuje zvýšenou pravděpodobnost, že se tak stane. Díky tomu nejsou shluky zvýšené volatility nekonečně dlouhé a po obdobích s vysokou volatilitou (například období nervozity na trzích) přicházejí zase období s průměrnou nebo nízkou volatilitou (období klidu).

Z rovnice (3.1) ale také vidíme, že v modelu ARCH volatilita reaguje stejně na dobré i špatné zprávy. Špatné zprávy jsou v našem modelu reprezentovány zápornými hodnotami šoků (pokles ceny), dobré zprávy hodnotami kladnými. Protože v modelu ARCH vystupují druhé mocniny, tento rozdíl se maže.

Za nevýhodu modelu ARCH se dá považovat také to, že nevysvětluje, co a proč způsobuje volatilitu, pouze ji matematicky popisuje. Protože v aplikacích nám ale většinou jde právě o popis či předpověď volatility, nepředstavuje to pro nás zásadní problém.

Na modelu ARCH(1) si ukážeme, že šoky  $Y_t$  odhadované modelem ARCH mají takzvané *rozdělení s těžšími chvosty*, viz. obrázek 3.1. To znamená, že pravděpodobnost větší odchylky  $Y_t$  od střední hodnoty (zde  $EY_t = 0$ ) je vyšší než u normálního rozdělení, a proto se častěji vyskytují „odlehlá pozorování“. To odpovídá zkušenostem z reálného světa, v němž se u výnosů aktiv odlehle hodnoty vyskytují častěji, než by odpovídalo normálnímu rozdělení. Model ARCH tak tuto skutečnost reflektuje lépe, než kdybychom položili jednoduše  $Y_t \sim N(0, \sigma^2)$ .

Předpokládejme model ARCH(1)

$$Y_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2.$$

Nepodmíněná střední hodnota  $Y_t$  je díky vlastnostem podmíněné střední hodnoty, probíraným například v [11], a z nezávislosti  $\epsilon_t$

$$\begin{aligned} EY_t &= E\sigma_t \epsilon_t = E\left(E(\sigma_t \epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1})\right) = E\left(\epsilon_t E(\sigma_t | \mathcal{F}_{t-1})\right) \\ &= E\epsilon_t E\left(E(\sigma_t | \mathcal{F}_{t-1})\right) = 0 \cdot E\left(E(\sigma_t | \mathcal{F}_{t-1})\right) = 0. \end{aligned}$$

Druhý moment  $Y_t$  je

$$\begin{aligned} EY_t^2 &= E\left(E(Y_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})\right) = E\left(E(\sigma_t^2 \epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})\right) = E\left(\epsilon_t^2 E(\sigma_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})\right) \\ &= E\epsilon_t^2 E\left(E(\sigma_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})\right) = 1 \cdot E(\alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 EY_{t-1}^2. \end{aligned}$$

Za předpokladu stacionarity  $\{Y_t\}$  a s využitím  $EY_t = 0$  dostaneme

$$\begin{aligned} \text{var } Y_t &= \alpha_0 + \alpha_1 \text{var } Y_t, \\ \text{var } Y_t &= \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že nepodmíněný rozptyl  $Y_t$  je konstantní, což je v souladu s předchozími úvahami. Vidíme také, že koeficienty modelu musí splňovat podmínky  $\alpha_0 > 0$  a  $\alpha_1 \in [0, 1)$ , protože rozptyl náhodné veličiny je konečný a kladný.

Chceme-li počítat vyšší momenty, je třeba znát rozdělení  $\epsilon_t$ . Nechť například  $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ , potom

$$\begin{aligned} E(Y_t^4 | \mathcal{F}_{t-1}) &= E(\sigma_t^4 \epsilon_t^4 | \mathcal{F}_{t-1}) = E\epsilon_t^4 E(\sigma_t^4 | \mathcal{F}_{t-1}) = 3 E(\sigma_t^4 | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= 3 E\left((\alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2)^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right) = 3(\alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2)^2. \end{aligned}$$

Proto nepodmíněný čtvrtý moment  $Y_t$  je

$$\begin{aligned} EY_t^4 &= E\left(E(Y_t^4 | \mathcal{F}_{t-1})\right) = E\left(3(\alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2)^2\right) \\ &= 3(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 EY_{t-1}^2 + \alpha_1^2 EY_{t-1}^4). \end{aligned}$$

Označme  $m_4 = EY_t^4$ . Za předpokladu stacionarity  $Y_t^2$  potom

$$m_4 = 3(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 \text{var } Y_t + \alpha_1^2 m_4) = 3\left(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} + \alpha_1^2 m_4\right).$$

Odtud pak

$$m_4 = \frac{3\alpha_0^2(1 + \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2)}.$$

Protože čtvrtý moment  $Y_t$  má být kladný, musí platit  $\alpha_1^2 \in [0, \frac{1}{3})$ . Špičatost  $Y_t$  je potom

$$\frac{EY_t^4}{(\text{var } Y_t)^2} = \frac{3\alpha_0^2(1 + \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2)} \frac{(1 - \alpha_1)^2}{\alpha_0^2} = \frac{3(1 - \alpha_1^2)}{1 - 3\alpha_1^2} > 3.$$

Ukázali jsme tedy, že rozdělení šoků  $Y_t$  modelovaných ARCH modelem má větší špičatost než normální rozdělení, jedná se tedy o rozdělení s těžšími chvosty.

Vidíme, že parametr  $\alpha_1$  musí splňovat  $\alpha_1 \in [0, 1)$  a  $\alpha_1^2 \in [0, \frac{1}{3})$ . Tato omezení jsou v modelech vyššího řádu ještě přísnější a komplikují proto odhad parametrů.

Nyní ukážeme přepis ARCH modelu do tvaru ARMA modelu pro  $Y_t^2$ . Definujme  $\xi_t = Y_t^2 - \sigma_t^2$ . Protože  $Y_t^2 = \sigma_t^2 \epsilon_t^2$ , dostaneme s využitím nezávislosti  $\epsilon_t$

$$\begin{aligned} \xi_t &= \sigma_t^2(\epsilon_t^2 - 1) \\ E\xi_t &= E\sigma_t^2(\epsilon_t^2 - 1) = E\sigma_t^2(E\epsilon_t^2 - 1) = E\sigma_t^2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Proto pro  $k < t$

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi_t, \xi_k) &= E\xi_t \xi_k = E\sigma_t^2(\epsilon_t^2 - 1)\sigma_k^2(\epsilon_k^2 - 1) \\ &= E(\epsilon_t^2 - 1)E(\epsilon_k^2 - 1)\sigma_t^2\sigma_k^2 = 0 \cdot E(\epsilon_k^2 - 1)\sigma_t^2\sigma_k^2 = 0. \end{aligned}$$

Tedy  $\xi_t$  jsou nekorelované náhodné veličiny se střední hodnotou 0. S využitím rovnice (3.1) dostaneme, že

$$Y_t^2 = \sigma_t^2 + \xi_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m Y_{t-m}^2 + \xi_t. \quad (3.2)$$

Máme tedy AR model pro  $Y_t^2$  až na to, že zde  $\xi_t$  nejsou stejně rozdělené. Jak můžeme vidět v [13], nehraje to roli při určování podmínek stacionarity AR modelu. Proto z tohoto zápisu a s využitím podmínek pro stacionaritu AR modelu uvedených v předchozí kapitole lze odvodit podmínky pro stacionaritu  $Y_t^2$ , kterou jsme předpokládali při odvozování čtvrtého momentu modelu ARCH(1). Jak již bylo uvedeno, model ARCH je stacionární, jestliže všechny kořeny polynomu

$$\alpha(z) = 1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_m z^m$$

jsou v absolutní hodnotě větší než jedna. To je evidentně splněno, jestliže platí  $\alpha_1 + \dots + \alpha_m < 1$ . S přihlédnutím ke vzorci pro střední hodnotu stacionárního AR modelu, uvedenému na straně 11, dostaneme, že pro stacionaritu  $Y_t^2$  je to rovněž podmínka nutná. Jinak by totiž nebyla splněna kladnost a konečnost rozptylu.

## Určení řádu

Jak bylo ukázáno v předchozím odstavci, ARCH model lze přepsat jako AR model pro  $Y_t^2$  až na to, že veličiny  $\xi_t$  v rovnici (3.2) nejsou stejně rozdělené. Jak jsme ale viděli v části 2.1 o AR modelech, při určování PACF to nehraje roli, podstatná je

nekorelovanost, nulová střední hodnota a konečný rozptyl. Proto řád  $m$  určíme stejně jako u AR modelu pomocí PACF řady  $Y_t^2$ . Připomeňme, že pro AR( $m$ ) jsou hodnoty PACF v bodech  $k > m$  nulové a hodnota v bodě  $k = m$  nenulová.

## Odhady parametrů

Protože v aplikacích modelu ARCH se běžně uvažuje normované normální rozdělení ( $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ ) nebo standardizované Studentovo rozdělení ( $\epsilon_t \sim z_t / \sqrt{\text{var } z_t}$ , kde  $z_t \sim t_v$ ), ukážeme zde odhady parametrů modelu pomocí metody maximální věrohodnosti pro tyto dvě situace. Je ale možné pracovat i s jinými rozděleními, stručný přehled s referencemi může čtenář najít v [10].

Nechť nejprve  $\epsilon_t \sim N(0, 1)$  a uvažovaný model ARCH je řádu  $m$ . Předpokládejme, že máme pozorované hodnoty náhodných veličin  $Y_1, \dots, Y_T$ , které označíme  $y_1, \dots, y_T$ . Pak s využitím vlastností podmíněné hustoty máme

$$\begin{aligned} f(y_1, \dots, y_T | \boldsymbol{\alpha}) &= f(y_T, \dots, y_{m+1} | \boldsymbol{\alpha}, \mathcal{F}_m) f(y_m, \dots, y_1 | \boldsymbol{\alpha}) \\ &= f(y_T, \dots, y_{m+2} | \boldsymbol{\alpha}, \mathcal{F}_{m+1}) f(y_{m+1} | \boldsymbol{\alpha}, \mathcal{F}_m) f(y_m, \dots, y_1 | \boldsymbol{\alpha}) \\ &\vdots \\ &= f(y_T | \boldsymbol{\alpha}, \mathcal{F}_{T-1}) \dots f(y_{m+1} | \boldsymbol{\alpha}, \mathcal{F}_m) f(y_m, \dots, y_1 | \boldsymbol{\alpha}), \end{aligned}$$

kde  $f(y_1, \dots, y_T | \boldsymbol{\alpha})$  je sdružená hustota veličin  $Y_1, \dots, Y_T$  v bodě  $y_1, \dots, y_T$ , podmíněná vektorem parametrů  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  a  $f(y_t | \boldsymbol{\alpha}, \mathcal{F}_{t-1})$  je hustota náhodné veličiny  $Y_t$  podmíněná vektorem parametrů  $\boldsymbol{\alpha}$  a  $\sigma$ -algebrou  $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(Y_{t-1}, \dots, Y_1)$  generovanou veličinami  $Y_{t-1}, \dots, Y_1$ .

Protože  $\epsilon_t \sim N(0, 1)$  a  $Y_t = \sigma_t \epsilon_t$ , je podmíněné rozdělení  $Y_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$  a tedy

$$f(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{-\frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}}.$$

Stále jsme v modelu, kde  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m Y_{t-m}^2$ , a tedy  $\sigma_t^2 = \sigma_t^2(\boldsymbol{\alpha})$ . Můžeme potom psát

$$f(y_1, \dots, y_T | \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{t=m+1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{-\frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}} f(y_m, \dots, y_1 | \boldsymbol{\alpha}).$$

Protože vyjádření hustoty  $f(y_m, \dots, y_1 | \boldsymbol{\alpha})$  by bylo složité, podmíníme sdruženou hustotu  $f(y_1, \dots, y_T | \boldsymbol{\alpha})$  hodnotami  $y_1, \dots, y_m$  a budeme je odhadovat společně s  $\boldsymbol{\alpha}$ . Dostaneme potom

$$f(y_1, \dots, y_T | \boldsymbol{\alpha}, y_1, \dots, y_m) = f(y_1, \dots, y_T | \boldsymbol{\alpha}, \mathcal{F}_m) = \prod_{t=m+1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{-\frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}}.$$

Připomeňme, že metoda maximální věrohodnosti staví na myšlence, že náš výběr z rozdělení s hustotou  $f$  je „nejvíce pravděpodobný“, a tedy hustota  $f$  je v bodě určeném naším výběrem maximální. Tato hustota závisí na vektoru parametrů  $\boldsymbol{\alpha}$ ,

kteřé neznáme. Hledáme proto takové jejich hodnoty, aby hustota byla maximální. Takové hodnoty jsou pak odhady metodou maximální věrohodnosti. Výše uvedená metoda je shodná s přesnou metodou maximální věrohodnosti, uvedenou v kapitole o AR modelech.

Podmíněné metodě maximální věrohodnosti by odpovídal postup, kdy bychom stanovili  $y_t = 0$  pro  $t \leq 0$  a z těchto hodnot bychom určovali podmíněný rozptyl  $Y_1, \dots, Y_m$  jako

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= \text{var}(Y_1|\mathcal{F}_0) = \alpha_0, \\ \sigma_2^2 &= \text{var}(Y_2|\mathcal{F}_1) = \alpha_0 + \alpha_1 y_1^2, \\ &\vdots \\ \sigma_m^2 &= \text{var}(Y_m|\mathcal{F}_{m-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 y_{m-1}^2 + \dots + \alpha_{m-1} y_1^2,\end{aligned}$$

díky čemuž bychom byli schopni rozepsat jejich sdruženou hustotu jako

$$\begin{aligned}f(y_m, \dots, y_1|\boldsymbol{\alpha}) &= f(y_m, \dots, y_2|\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{F}_1)f(y_1|\boldsymbol{\alpha}) \\ &\vdots \\ &= f(y_m|\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{F}_{m-1}) \dots f(y_1|\boldsymbol{\alpha}).\end{aligned}$$

Tyto podmíněné hustoty jsme již díky výše uvedenému rozpisu  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2$  schopni vyčíslit, protože známe podmíněné rozdělení veličin  $Y_1, \dots, Y_m$ .

Uvažujme nyní případ, kdy  $\epsilon_t$  má standardizované Studentovo t-rozdělení s počtem stupňů volnosti  $v$ . V takovém případě je  $\epsilon_t$  ve tvaru  $\frac{z_t}{\sqrt{\text{var } z_t}}$ , kde  $z_t$  je veličina s t-rozdělením s počtem stupňů volnosti  $v$ . Z vlastností t-rozdělení víme, že  $\text{var } z_t = \frac{v}{v-2}$  pro  $v > 2$ . Hustotu  $\epsilon_t$  pak získáme jako hustotu lineární transformace  $z_t$  s využitím věty o transformaci náhodných veličin, viz. [1]. Výsledkem je

$$f_{\epsilon_t}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{(v-2)\pi}} \left(1 + \frac{x^2}{v-2}\right)^{-\frac{(v+1)}{2}}, \quad v > 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Připomeňme, že  $\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1}e^{-y} dy$  pro  $x > 0$ . Podobně jako v předchozím případě, kdy  $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ , dostaneme

$$f(y_1, \dots, y_T|\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{F}_m) = \prod_{t=m+1}^T \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{(v-2)\pi\sigma_t^2}} \left(1 + \frac{y_t^2}{(v-2)\sigma_t^2}\right)^{-\frac{(v+1)}{2}}.$$

Je-li počet stupňů volnosti  $v$  zadán, maximalizujeme tuto funkci, neboť jedinými neznámými v jejím předpisu je parametr  $\boldsymbol{\alpha}$ . Pokud počet stupňů volnosti  $v$  zadán není, přidáme ho do podmínky podmíněné hustoty a odhadneme ho spolu s  $\boldsymbol{\alpha}$ . V praxi se ukazuje, že odhadnutý počet stupňů volnosti se nejčastěji pohybuje mezi 3 a 6, jak je uvedeno například v [15]. Pokud ho chceme předem specifikovat, volíme proto číslo v tomto rozpětí.

Odhady parametrů  $\alpha_0, \dots, \alpha_m$  tradičně označme  $\hat{\alpha}_0, \dots, \hat{\alpha}_m$  a odhadnutou volatilitu  $\hat{\sigma}_t = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 Y_{t-1}^2 + \dots + \hat{\alpha}_m Y_{t-m}^2$ .

## Testování ARCH efektu

Jak bylo uvedeno před definicí modelu ARCH, u šoků  $Y_t$  předpokládáme nekorelovanost a kvadratickou závislost  $Y_t$  na hodnotách  $Y_{t-1}, \dots, Y_1$  (tzv. ARCH efekt). Protože předpokládáme, že  $\{Y_t\}$  jsme dostali jako rezidua adekvátního ARMA modelu, nekorelovanost plyne z předchozích kapitol.

Kvadratickou závislost  $Y_t$  testujeme pomocí Lagrangeova multiplikátorového testu, navrženého v [8]:

**Lagrangeův multiplikátorový test.** Nechť  $Y_1, \dots, Y_T$  je realizace časové řady  $\{Y_t\}$ . Předpokládejme model

$$Y_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2 + \alpha_2 Y_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m Y_{t-m}^2 + e_t,$$

kde  $m \in \mathbb{N}$  je libovolně zvolené číslo a  $e_t$  je chybová složka modelu. Definujme součet reziduí čtverců (sum of squares residuals) jako

$$SSR_0 = \sum_{t=m+1}^T (Y_t^2 - \bar{Y}_T), \quad \text{kde } \bar{Y}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t^2.$$

Uvažujme odhadnutý model

$$\hat{Y}_t^2 = \hat{\alpha}_0^2 + \hat{\alpha}_1^2 \hat{Y}_{t-1}^2 + \dots + \hat{\alpha}_m^2 \hat{Y}_{t-m}^2.$$

Definujme reziduum odhadnutého modelu v čase  $t$  a součet kvadrátů těchto reziduí jako

$$\hat{e}_t = Y_t^2 - \hat{Y}_t^2, \quad SSR_1 = \sum_{t=m+1}^T \hat{e}_t^2.$$

Pak za platnosti hypotézy  $H_0 : \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$  platí, že

$$F = \frac{\frac{SSR_0 - SSR_1}{m}}{\frac{SSR_1}{T - 2m - 1}} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \chi_m^2.$$

Zamítneme-li hypotézu  $H_0$ , dá se  $Y_t^2$  vyjádřit jako kvadratická funkce předchozích hodnot  $Y_{t-1}, \dots, Y_1$ , tedy řada  $\{Y_t\}$  vykazuje ARCH efekt.

## Testování adekvátnosti modelu

Definujme standardizovaná rezidua v odhadnutém modelu jako

$$\hat{Y}_t = \frac{Y_t}{\hat{\sigma}_t}, \quad \hat{\sigma}_t = +\sqrt{\hat{\sigma}_t^2}.$$

V ideálním případě je  $\hat{\sigma}_t \approx \sigma_t$  a protože v modelu ARCH je  $Y_t = \sigma_t \epsilon_t$ , požadujeme  $\hat{Y}_t \approx \epsilon_t$ . Budeme proto zjišťovat, zda řada  $\{\hat{Y}_t\}$  odpovídá posloupnosti nezávislých stejně rozdělených veličin. To můžeme posuzovat na základě grafu řady  $\{\hat{Y}_t\}$ , grafu její ACF a grafu ACF kvadrátů  $\{\hat{Y}_t^2\}$ . Autokorelační koeficienty by měly být v případě adekvátního modelu nulové. Rovněž můžeme použít Portmanteauv test pro testování hypotézy o nulovosti autokorelačních koeficientů. Jak již bylo řečeno dříve, v případě nezamítnutí hypotézy o nulovosti považujeme model za adekvátní. Známe-li rozdělení  $\epsilon_t$ , můžeme porovnat výběrové charakteristiky (například empirickou distribuční funkci)  $\{\hat{Y}_t\}$  s charakteristikami rozdělení  $\epsilon_t$ . Je-li nějaký z předchozích výsledků v rozporu s  $\hat{Y}_t \approx \epsilon_t$ , model považujeme za neadekvátní a musíme ho vylepšit, například zvýšením řádu nebo použitím modelu GARCH.

### Předpovídání

Budoucí hodnoty volatility předpovídáme v modelu ARCH stejným způsobem jako v modelu AR. Předpověď  $\sigma_{T+1}^2$  v modelu ARCH( $m$ ) je

$$\begin{aligned}\sigma_T^2(1) &= \mathbb{E}\left(\sigma_{T+1}^2 | Y_T, Y_{T-1}, \dots, Y_1\right) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 Y_T^2 + \dots + \alpha_m Y_{T-m+1}^2.\end{aligned}$$

Předpověď pro  $h = 2$  je

$$\begin{aligned}\sigma_T^2(2) &= \mathbb{E}\left(\sigma_{T+2}^2 | Y_T, Y_{T-1}, \dots, Y_1\right) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \mathbb{E}\left(Y_{T+1}^2 | Y_T, Y_{T-1}, \dots, Y_1\right) + \alpha_2 Y_T^2 + \dots + \alpha_m Y_{T-m+2}^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \mathbb{E}\left(\epsilon_{T+1}^2 \sigma_{T+1}^2 | Y_T, Y_{T-1}, \dots, Y_1\right) + \alpha_2 Y_T^2 + \dots + \alpha_m Y_{T-m+2}^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \mathbb{E}\epsilon_{T+1}^2 \mathbb{E}\left(\sigma_{T+1}^2 | Y_T, Y_{T-1}, \dots, Y_1\right) + \alpha_2 Y_T^2 + \dots + \alpha_m Y_{T-m+2}^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_T^2(1) + \alpha_2 Y_T^2 + \dots + \alpha_m Y_{T-m+2}^2.\end{aligned}$$

Pro obecné  $h$  pak máme odhad  $\sigma_{T+h}^2$

$$\sigma_T^2(h) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{h-1} \alpha_i \sigma_T^2(h-i) + \sum_{j=h}^m \alpha_j Y_{T+h-j}^2,$$

kde dodefinujeme prázdný součet  $\sum_{j=p+r}^r \dots = 0$ , pro nějaká  $p, r \in \mathbb{N}$ .

## 3.2 Model GARCH

U některých časových řad je k modelování volatility pomocí modelu ARCH zapotřebí vysokého řádu. U AR modelu se v takové situaci přidává MA složka, čímž vzniká ARMA model. Jak bylo ukázáno v předchozí kapitole v odstavci o určování řádu modelu ARCH, model ARCH( $m$ ) s koeficienty  $\delta_0, \dots, \delta_m$  se dá zapsat jako modifikovaný AR model pro  $Y_t^2$

$$Y_t^2 = \sigma_t^2 + \xi_t = \delta_0 + \delta_1 Y_{t-1}^2 + \dots + \delta_m Y_{t-m}^2 + \xi_t,$$

kde  $\xi_t = Y_t^2 - \sigma_t^2$  není bílý šum, ale pouze nekorelované náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou. Přidáme-li k tomuto modifikovanému AR modelu MA složku řádu  $s$  ve tvaru

$$\begin{aligned} & -\beta_1\xi_{t-1} - \beta_2\xi_{t-2} - \dots - \beta_s\xi_{t-s} \\ & = -\beta_1Y_{t-1}^2 - \beta_2Y_{t-2}^2 - \dots - \beta_sY_{t-s}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 + \beta_2\sigma_{t-2}^2 + \dots + \beta_s\sigma_{t-s}^2, \end{aligned}$$

dostaneme pro  $Y_t^2$  model

$$\begin{aligned} Y_t^2 &= \delta_0 + \sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\delta_i - \beta_i)Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j\sigma_{t-j}^2 + \xi_t, \\ Y_t^2 &\stackrel{\text{ozn.}}{=} \omega_0 + \omega_1Y_{t-1}^2 + \dots + \omega_rY_{t-r}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 + \beta_2\sigma_{t-2}^2 + \dots + \beta_s\sigma_{t-s}^2 + \xi_t, \end{aligned}$$

kde  $r = \max(m, s)$  a koeficienty  $\delta_i, \beta_j$  dodefinujeme nulou pro  $i > m$  a  $j > s$ . Tímto způsobem, ovšem s drobnými technickými úpravami v AR modelu, ze kterého jsme vycházeli, bychom se dopracovali k modelu definovanému v následujícím odstavci.

Model ARCH se tedy zobecní přidáním vlivu minulých hodnot volatility. Vzniklý model se nazývá *GARCH model* (GARCH – generalized autoregressive conditional heteroscedastic) a byl poprvé publikován profesorem Bollerslevem v roce 1986 v práci [2]. Model GARCH( $m, s$ ) aplikovaný na řadu šoků  $\{Y_t\}$  předpokládá, že

$$Y_t = \sigma_t\epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

kde  $\{\epsilon_t\}$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a rozptylem 1 a koeficienty  $\alpha_0, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_s$  splňují

$$\begin{aligned} \alpha_0 &> 0, \\ \alpha_i &\geq 0 \quad i \leq m, \\ \beta_j &\geq 0 \quad j \leq s, \\ \sum_{k=1}^{\max(m,s)} (\alpha_k + \beta_k) &< 1, \end{aligned}$$

kde dodefinujeme  $\alpha_i = 0$  pro  $i > m$  a  $\beta_j = 0$  pro  $j > s$ .

Podobně jako u modelu ARCH i zde se nejčastěji za  $\epsilon_t$  volí normované normální rozdělení nebo standardizované Studentovo t-rozdělení.

## Vlastnosti modelu

Podobně jako v modelu ARCH dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbb{E} Y_t &= \mathbb{E} \sigma_t \epsilon_t = \mathbb{E} \left( \mathbb{E}(\sigma_t \epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) \right) = \mathbb{E} \left( \epsilon_t \mathbb{E}(\sigma_t | \mathcal{F}_{t-1}) \right) \\ &= \mathbb{E} \epsilon_t \mathbb{E} \left( \mathbb{E}(\sigma_t | \mathcal{F}_{t-1}) \right) = 0 \cdot \mathbb{E} \left( \mathbb{E}(\sigma_t | \mathcal{F}_{t-1}) \right) = 0. \end{aligned}$$

Podívejme se nyní na autokovarianční funkci  $Y_t$ . Bez újmy na obecnosti položíme  $k < t$  (pokud je  $k > t$ , zaměníme značení). S využitím nezávislosti  $\epsilon_t$  dostaneme

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_t, Y_k) &= E(\sigma_t \epsilon_t \sigma_k \epsilon_k) = E\left(E(\sigma_t \epsilon_t \sigma_k \epsilon_k | \mathcal{F}_{t-1})\right) \\ &= E_{\epsilon_t} E\left(E(\sigma_t \sigma_k \epsilon_k | \mathcal{F}_{t-1})\right) = 0 \cdot E\left(E(\sigma_t \sigma_k \epsilon_k | \mathcal{F}_{t-1})\right) = 0. \end{aligned}$$

Model GARCH lze podobně jako model ARCH přepsat do formy modifikovaného ARMA modelu. Jak bylo ukázáno v kapitole 3.1, veličiny  $\xi_t = Y_t^2 - \sigma_t^2$  jsou nekorelované s nulovou střední hodnotou. Dosazením do vztahu

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

dostaneme

$$Y_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j Y_{t-j}^2 - \sum_{j=1}^s \beta_j \xi_{t-j} + \xi_t,$$

což je ARMA model až na to, že veličiny  $\xi_t$  nejsou stejně rozdělené. Jak už ale bylo řečeno v kapitole 3.1, při rozhodování o stacionaritě to nehraje roli. Charakteristický polynom AR složky tohoto modelu je

$$P(z) = 1 - (\alpha_1 + \beta_1)z - \dots - (\alpha_r + \beta_r)z^r,$$

kde  $r = \max(m, s)$  a koeficienty  $\alpha_i, \beta_j$  dodefinujeme nulou pro  $i > m$  a  $j > s$ . Jak již bylo řečeno v kapitole 2.5, ARMA model je stacionární, jestliže jsou všechny kořeny charakteristického polynomu jeho AR složky v absolutní hodnotě větší než 1. Pro polynom  $P(z)$  je toto zřejmě splněno, jestliže platí  $\sum_{k=1}^{\max(m,s)} (\alpha_k + \beta_k) < 1$ .

U stacionárního modelu GARCH můžeme stejně jako u stacionárního ARMA modelu určit střední hodnotu  $Y_t^2$  jako

$$EY_t^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_m - \beta_1 - \dots - \beta_s} = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{k=1}^{\max(m,s)} (\alpha_k + \beta_k)}.$$

Zde vidíme, že podmínka  $\sum_{k=1}^{\max(m,s)} (\alpha_k + \beta_k) < 1$  zajistí konečnost rozptylu  $Y_t$  a spolu s podmínkou  $\alpha_0 > 0$  také jeho kladnost. Podmínka je tedy postačující a zároveň nutná.

Z předchozího plyne, že při splnění určitých podmínek je model GARCH stacionární s nulovou korelací řady  $\{Y_t\}$ , což odpovídá našim předpokladům, uvedeným na začátku kapitoly. Protože model ARCH( $m$ ) je speciálním případem modelu GARCH (s řády  $(m, 0)$ ), platí toto i pro něj.

Uvažujme nyní model GARCH(1,1), tedy

$$Y_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \text{kde } \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2.$$

Provedeme výpočet rozptylu pomocí rekurzivního dosazování. S využitím nezávislosti  $\epsilon_t$  dostaneme

$$\begin{aligned}
E Y_t^2 &= E(\sigma_t^2 \epsilon_t^2) = E\left(E(\sigma_t^2 \epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})\right) = E\left(\epsilon_t^2 E(\sigma_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})\right) \\
&= E \epsilon_t^2 E\left(E(\sigma_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})\right) = 1 \cdot E\left(\alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2\right) \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 E Y_{t-1}^2 + \beta_1 E \sigma_{t-1}^2 \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 E Y_{t-1}^2 + \beta_1 (\alpha_0 + \alpha_1 E Y_{t-2}^2 + \beta_1 \sigma_{t-2}^2) \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 E Y_{t-1}^2 + \beta_1 (\alpha_0 + \alpha_1 E Y_{t-2}^2) + \beta_1^2 E \sigma_{t-2}^2 \\
&\vdots \\
&= \alpha_0 (1 + \beta_1 + \beta_1^2 + \dots) + \alpha_1 (E Y_{t-1}^2 + \beta_1 E Y_{t-2}^2 + \beta_1^2 E Y_{t-3}^2 + \dots).
\end{aligned}$$

Ze stacionarity modelu máme  $E Y_t^2 = E Y_{t-1}^2 = E Y_{t-3}^2 = \dots$ , a proto

$$E Y_t^2 = \alpha_0 \sum_{i=0}^{\infty} \beta_1^i + E Y_t^2 \cdot \alpha_1 \sum_{i=0}^{\infty} \beta_1^i.$$

Z toho plyne

$$E Y_t^2 (1 - \alpha_1 \sum_{i=0}^{\infty} \beta_1^i) = \alpha_0 \sum_{i=0}^{\infty} \beta_1^i$$

Protože máme omezení  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$  a oba parametry jsou kladné, je  $\beta_1 < 1$  a geometrické řady v předchozí rovnici konvergují. Sečteme-li je, dostaneme rovnici

$$\text{var} Y_t = E Y_t^2 = \frac{\frac{\alpha_0}{1-\beta_1}}{1 - \frac{\alpha_1}{1-\beta_1}} = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}.$$

Tento výsledek odpovídá předchozímu pro obecné řady  $(m, n)$ .

Při pohledu na model GARCH vidíme, že modeluje volatilitu podobně jako model ARCH. Velké hodnoty šoků způsobují velkou volatilitu a šoky se záporným znaménkem vnímá GARCH stejně jako šoky s kladným znaménkem. Podobně jako u modelu ARCH i zde se dá ukázat, že špičatost rozdělení  $Y_t$  je větší než 3, tedy větší než špičatost normálního rozdělení, a šoky  $Y_t$  v modelu GARCH mají tedy rovněž rozdělení s těžšími chvosty, což vysvětluje častější výskyt „odlehklých pozorování“ než u šoků s normálním rozdělením, viz. [15].

## Aplikace modelu GARCH

Určení řádů je u modelu GARCH poměrně obtížné. Většinou se používají modely nízkých řádů, jako (1,1), (1,2) nebo (2,1), viz. [15].

Odhady parametrů probíhají stejným způsobem jako v modelu ARCH. Nicméně podmíněná hustota, která se maximalizuje, potřebuje v modelu GARCH( $m, s$ ) ještě  $s$  počátečních hodnot volatility  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_s^2$ . Tyto hodnoty buď můžeme odhadovat společně s ostatními parametry (přesná metoda maximální věrohodnosti), nebo je

pevně stanovit (podmíněná metoda maximální věrohodnosti). Protože přesná metoda je výpočetně náročnější a řady modelu GARCH bývají malé, ukazuje se jako dobré řešení použít podmíněnou metodu a za  $\sigma_1^2$  zvolit výběrový rozptyl řady  $\{Y_t\}$ , definovaný jako

$$S_T^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y}_T)^2, \quad \text{kde } \bar{Y}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t,$$

jak je navrženo například v [15]. Ověřování adekvátnosti odhadnutého modelu a předpovídání probíhá stejným způsobem jako u modelu ARCH.

## Modifikace modelu GARCH

Existuje poměrně velké množství modifikací modelu GARCH. Ve stručnosti zde zmíníme pouze tři z nich. Více informací nalezne čtenář například v [10] nebo v [15].

IGARCH( $m, s$ ) (integrated GARCH) model je GARCH( $m, s$ ) model, ve kterém je součet koeficientů  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m + \beta_1 + \dots + \beta_s = 1$ . V takovém případě pak vliv  $Y_t$  na budoucí hodnoty volatility přetrvává pro všechny časy. Ze vzorce pro nepodmíněný rozptyl  $Y_t$  v modelu GARCH (viz. strana 35) pak plyne, že v modelu IGARCH je tento nepodmíněný rozptyl nekonečný a model je proto nestacionární.

GARCH-M (GARCH in mean) model počítá s volatilitou nejen jako s rozptylem reziduí v ARMA modelu, ale zahrnuje ji i do modelu střední hodnoty. Zatímco v modelu GARCH( $m, s$ ) platí vztahy ze stran 25 a 34

$$X_t = \mu_t + Y_t, \quad Y_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

v modelu GARCH( $m, s$ )-M platí následující

$$X_t = \mu_t + p \sigma_t^2 + Y_t, \quad Y_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

kde  $p$  je reálný parametr. Tento model bychom mohli použít například pro aktivum, jehož výnosy z části závisí na jeho volatilitě. Parametr  $p$  pak řídí snižování nebo zvyšování výnosu aktiva v závislosti na volatilitě. Složka  $p \sigma_t^2$  způsobí v řadě  $\{X_t\}$  silnější autokorelace. Vykazují-li proto výnosy nějakého aktiva významnější autokorelace, může to znamenat, že se řídí tímto modelem.

EGARCH (exponential GARCH) model modifikuje rovnici pro volatilitu z modelu GARCH tím způsobem, že místo symetrické druhé mocniny  $Y_t^2$  používá nějakou nesymetrickou funkci. Model EGARCH proto reaguje jinak na kladné a jinak na záporné šoky  $Y_t$  a lépe tak reflektuje stejnou vlastnost volatility.

# Kapitola 4

## Aplikace na konkrétní časové řady

V této kapitole ukážeme, jak využít teoretické znalosti z předchozích kapitol k modelování volatility konkrétních časových řad. Veškeré postupy budeme provádět v programu R, viz. [14], který je volně ke stažení na internetové adrese [www.r-project.org](http://www.r-project.org). První část této kapitoly tvoří krátké seznámení s používanými balíčky a funkcemi, které při modelování budeme používat. V dalších částech pak budeme pracovat s konkrétními daty, která jsou spolu se zdrojovými kódy a vybranými výstupy k dispozici na <http://artax.karlin.mff.cuni.cz/~juskm6am/bc>. Vše je též na přiloženém CD.

### 4.1 Použití funkce v programu R

V této části se seznámíme se základními funkcemi z balíčků programu R, které budeme v dalších částech používat. Půjde jen o stručné informace o vybraných funkcích, které se vyskytují v použitých zdrojových kódech. Úplný seznam funkcí v balíčku čtenář nalezne v nápovědě k danému balíčku, která se zobrazuje příkazem `?název_balíčku`. Podrobné informace o jednotlivých funkcích jsou rovněž dostupné v nápovědě (příkaz `?název_funkce`). Ne všechny zmiňované balíčky jsou k dispozici ve standardní instalaci programu R, dají se do něj ale doinstalovat skrze menu `Packages->Install packages`.

**Balíček base** (viz. [14])

`diff(x)`

Funkce `diff` volaná na řadu  $\{X_t\}$  vrátí jednu diferencovanou řadu  $\{X_t\}$ . Pro řadu  $\{X_t\} = \{X_1, X_2, \dots, X_T\}$  tedy vrátí řadu  $\{\Delta X_t\} = \{X_2 - X_1, X_3 - X_2, \dots, X_T - X_{T-1}\}$ .

**Balíček stats** (viz. [14])

`acf(x)`

Funkce `acf`, volaná na řadu  $x = \{X_t\}$ , spočítá výběrovou autokorelační funkci časové

řady  $\{X_t\}$  a nakreslí její graf.

`pacf(x)`

Funkce `pacf`, volaná na řadu  $x = \{X_t\}$ , spočítá výběrovou parciální autokorelační funkci řady  $\{X_t\}$  a nakreslí její graf.

`arima(x,order)`

Funkce `arima`, volaná na řadu  $x = \{X_t\}$  s parametrem `order = c(p,d,q)`, odhadne ARMA( $p, q$ ) model pro  $d$ -krát diferencovanou řadu  $\{X_t\}$ . Model pro řadu  $\{X_t\}$  (v případě  $d = 0$ ) je ve tvaru

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + Y_t + \beta_1 Y_{t-1} + \dots + \beta_q Y_{t-q}.$$

Je důležité si všimnout, že znaménka u MA koeficientů jsou oproti značení v předchozím textu kladná. Funkce vrací objekt (vektorové pole). Informace o sloupcích tohoto objektu vypíšeme funkcí `summary`, ke konkrétním sloupcím pak můžeme přistupovat příkazem ve tvaru `objekt["nazev_sloupce"]`.

`residuals(model)`

Funkce `residuals`, volaná na libovolný odhadnutý model, vrací řadu reziduí tohoto modelu.

`coef(model)`

Funkce `coef`, volaná na libovolný odhadnutý model, vrací odhadnuté koeficienty modelu.

`arima.sim(model,n,innov)`

Funkce `arima.sim` vygeneruje simulovanou časovou řadu délky  $n$ , která se řídí modelem zadaným v parametru `model`. Tento parametr je ve tvaru `list(ar=vektor1, ma=vektor2)`, kde `vektor1` je vektor s parametry autoregresní složky, tedy  $\phi_0, \phi_1, \dots$  a `vektor2` je vektor s parametry  $\theta_1, \theta_2, \dots$ . Parametr `innov` je volitelný a zadává se do něj časová řada, která má být použita jako chybová složka ARMA modelu. Není-li zadán, je chybová složka náhodně vygenerována z normovaného normálního rozdělení.

`Box.test(x,type,fitdf)`

Funkce `Box.test(x)` s argumentem  $x = \{X_t\}$  provede Portmanteaův test na řadě  $\{X_t\}$  a vypíše jeho výsledek. Parametr `type` může být "Ljung-Box" či "Box-Pierce" a určuje, jaká testovací statistika bude použita. Parametr `fitdf` zadáváme při testování reziduí modelu. Udává počet odhadovaných parametrů modelu (podle toho se mění asymptotické rozdělení testové statistiky, viz. strana 15).

**Balíček `tseries`** (viz. [4])

`garch(y,order)`

Tato funkce, volaná na řadu  $y = \{Y_t\}$  s parametrem `order=c(n,m)`, odhadne model GARCH( $m, n$ ) pro řadu  $\{Y_t\}$ . Zdůrazněme, že pořadí, v jakém zadáváme řády, je opačné, než odpovídá běžnému značení. První zadávaný řád je řád MA složky,

druhý zadávaný řád odpovídá AR složce. Model ARCH( $m$ ) bychom tedy volali jako `garch(y, order=c(0,m))`. Funkce `garch` vrací objekt, na který můžeme volat například funkce `residuals()`, `coef()`, `fitted.values()` (vrátí odhadnuté standardní odchylky, v našem značení  $\sigma_t$ ) nebo `summary()` (vypíše stručný přehled odhadnutých koeficientů a analýzy reziduí).

### Balíček TSA (viz. [6])

```
garch.sim(arch,garch,n,rnd)
```

Funkce `garch.sim()` vygeneruje simulovanou časovou řadu délky  $n$ , která se řídí modelem GARCH( $m, n$ ) s parametry `arch`=( $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ ) a `garch`=( $\beta_1, \dots, \beta_n$ ). Volitelný parametr `rnd` udává rozdělení složky  $\epsilon_t$ , standardně je nastaven na normované normální rozdělení.

### Balíček fGarch (viz. [5])

```
garchFit(formula,data,cond.dist)
```

Funkce `garchFit` provádí sdružený odhad ARMA( $p, q$ )-GARCH( $m, n$ ) modelu. Argument `formula` udává požadovanou formu odhadovaného modelu. Požadujeme-li pouze model GARCH( $m, n$ ), zadáme `formula=~garch(m,n)`. Chceme-li zároveň odhadnout i ARMA( $p, q$ ) model pro střední hodnotu, zadáme `formula=~arma(p,q)+garch(m,n)`.

Při volbě podmíněného rozdělení máme na výběr z většího množství možností, budeme ale používat pouze normované normální rozdělení, které zadáme jako `cond.dist="norm"`, a standardizované Studentovo t-rozdělení, které se zapíše jako `cond.dist="std"`. V případě standardizovaného Studentova t-rozdělení se bude počet stupňů volnosti odhadovat s ostatními parametry metodou maximální věrohodnosti.

Funkce vrací objekt, k jehož složkám můžeme přistoupit pomocí syntaxe `objekt@složka`. Podobně jako v předchozím se nám jedná hlavně o rezidua ARMA modelu (`objekt@residuals`), odhadnutou volatilitu (`objekt@h.t`), případně standardní odchylku (`objekt@sigma.t`). Standardizovaná rezidua pak snadno dostaneme jako `objekt@residuals/objekt@sigma.t`.

Souhrnné informace o odhadnutém modelu zobrazíme příkazem `summary(model)`. Výstupem jsou informace o zadání modelu, odhadnutých koeficientech, výsledcích testování statistické významnosti koeficientů, výsledcích testování standardizovaných reziduí a další údaje, kterými se ale nebudeme zabývat. Podívejme se podrobněji na dvě posledně zmíněné části souhrnu.

V části nazvané **Error Analysis** jsou uvedeny výsledky testování statistické významnosti koeficientů. Ve sloupci `Pr(>|t|)` je uvedena  $p$ -hodnota testu hypotézy o nulovosti příslušného koeficientu. Nezamítáme-li hypotézu o nulovosti koeficientu na hladině  $\alpha$ , pak je tento koeficient považován za statisticky nevýznamný na hladině  $\alpha$ .

V části s nadpisem **Standardised Residuals Tests** nalezneme výsledky testování standardizovaných reziduí. V jednotlivých sloupcích je uveden název provede-

ného testu, zda byla testována řada reziduí nebo jejich kvadrátů, označení testové statistiky, hodnota testové statistiky a jí odpovídající  $p$ -hodnota.

**Jarque-Bera Test** a **Shapiro-Wilk Test** testují hypotézu o normalitě reziduí. **Ljung-Box Test** je Portmanteauův test s Ljung-Boxovou testovací statistikou. Je proveden jak na řadu reziduí, čímž je testována adekvátnost odhadnutého modelu ARMA, tak na řadu kvadrátů reziduí, čímž testuje adekvátnost odhadnutého modelu GARCH. Nevýhodou zde vypsáných výsledků Portmanteauova testu je skutečnost, že neberou v potaz počet odhadovaných parametrů v modelu. To můžeme snadno ověřit voláním funkce `Box.test()` s parametrem `fitdf=0`. Tímto je dosahováno poměrně velkých  $p$ -hodnot, přičemž při přihlédnutí k počtu odhadovaných parametrů již výsledky tak nadějně nejsou a model se může ukázat jako neadekvátní.

Poslední provedený test, **LM Arch Test**, je Lagrangeův multiplikátorový test, uvedený na straně 32. Protože testuje hypotézu o nepřítomnosti ARCH efektu u standardizovaných reziduí, chtěli bychom, aby nulovou hypotézu nezamítl.

`predict(model, n.ahead)`

Tato funkce provede předpověď střední hodnoty a standardní odchylky pro `n.ahead` období v odhadnutém modelu, který je specifikován parametrem `model`. V následujících praktických aplikacích se ale nebudeme předpovídání věnovat, neboť pro nás nebude příliš zajímavé.

**Balíček FinTS** (viz. [9])

`ArchTest(data, lags)`

Funkce `ArchTest()` provede Lagrangeův multiplikátorový test na časovou řadu `data`, viz. strana 32. Volitelný parametr `lags` udává počet testovaných koeficientů  $m$  a implicitně je nastaven na 12.

## 4.2 Simulovaná data

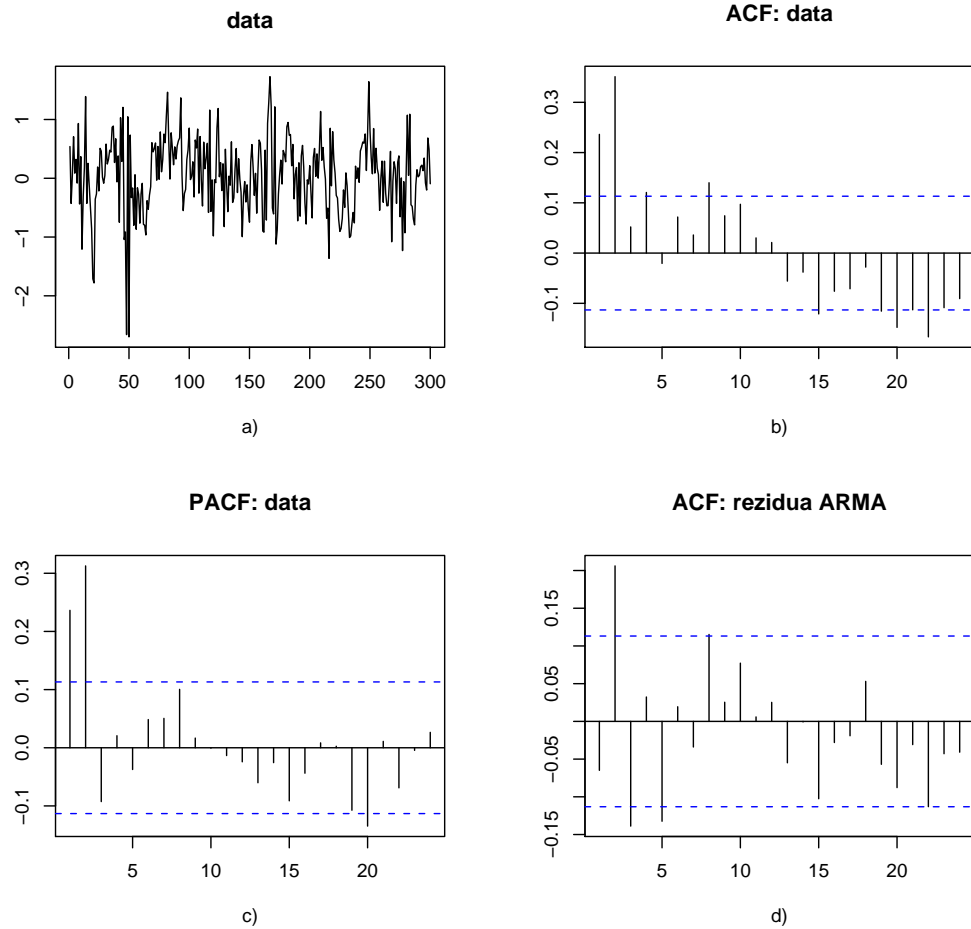
V této části použijeme dříve zmíněné funkce na simulovaná data. Generátor náhodných čísel nastavíme příkazem `set.seed(323)` na počáteční hodnotu 323. Nejdříve simulujeme řadu šoků, které se řídí stacionárním modelem GARCH(1,1) s parametry

$$\alpha_0 = 0.1, \quad \alpha_1 = 0.4, \quad \beta_1 = 0.3, \quad (4.1)$$

o délce 300. K tomu použijeme funkci `garch.sim`. Řadu takto simulovaných šoků označíme `soky` a použijeme ji jako chybovou složku při simulaci stacionárního modelu ARMA(2,1) s parametry

$$\phi_0 = 0, \quad \phi_1 = 0.4, \quad \phi_2 = 0.2, \quad \theta_1 = 0.2. \quad (4.2)$$

Získanou řadu označíme jako `data`. Nyní začneme řadu `data` modelovat. Z jejího grafu na obrázku 4.1 a) vidíme, že není třeba používat žádnou transformaci, neboť řada vypadá jako stacionární. Graf výběrové ACF na obrázku 4.1 b) vypadá jako

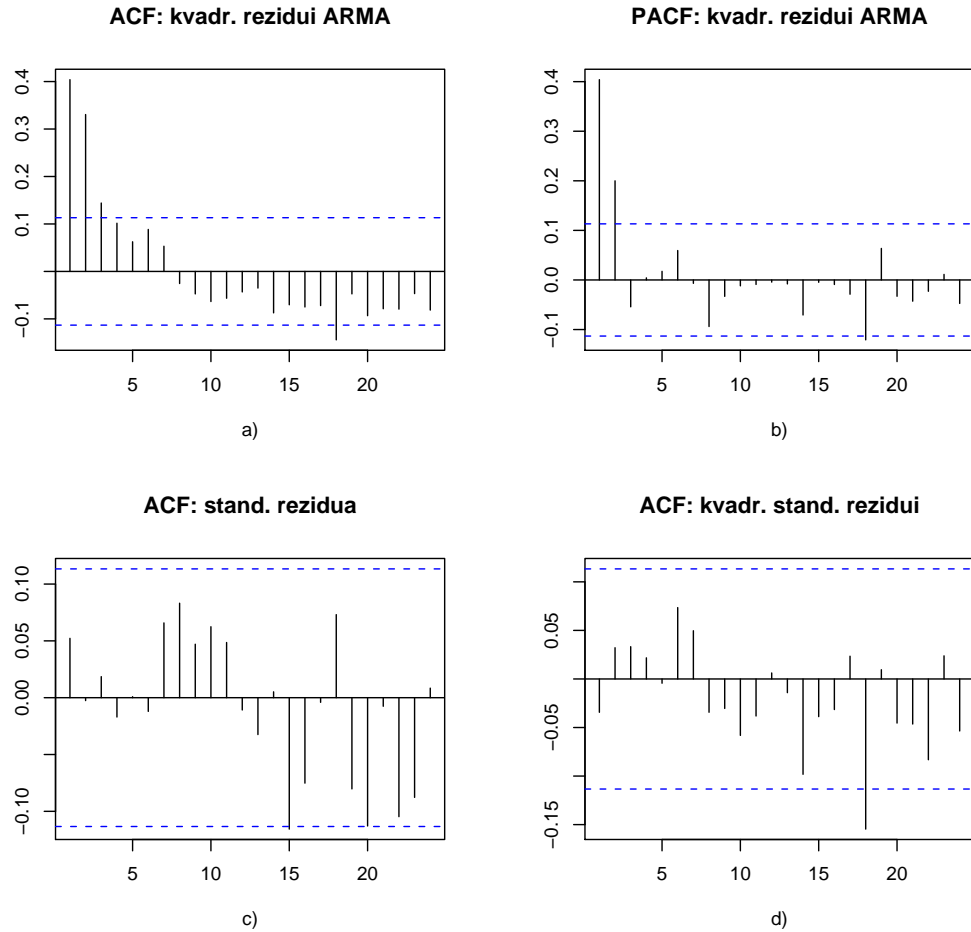


Obrázek 4.1: a) Graf simulované řady **data**, řídicí se ARMA(2,1)–GARCH(1,1) modelem s parametry uvedenými v rovnicích (4.1) a (4.2). b) Graf výběrové ACF řady **data**. c) Graf výběrové PACF řady **data**. d) Graf výběrové ACF řady reziduí po odhadu ARMA(1,1) modelem.

typický graf ACF AR modelu. Výběrová PACF, zobrazená na obrázku 4.1 c), se ale nezdá být useknutá. Odhadneme proto ARMA model.

Začneme s ARMA(1,1) modelem. Graf výběrové ACF reziduí odhadnutého modelu, zobrazený na obrázku 4.1 d), naznačuje korelovanost reziduí. Rovněž Portmanteaův test pro  $m = 6$  (neboť  $\ln 300 \doteq 5.7$ ) hypotézu o nekorelovanosti reziduí na hladině  $\alpha = 0.05$  zamítá s  $p$ -hodnotou  $3.321 \times 10^{-5}$ . Zvýšíme proto řád ARMA modelu na (2,1) a testujeme rezidua odhadnutého modelu. Portmanteaův test pro  $m = 5$  již hypotézu o nekorelovanosti reziduí nezamítá s  $p$ -hodnotou 0.8812, proto budeme tento model považovat za adekvátní.

Z grafu řady **data** na obrázku 4.1 a) můžeme pozorovat nesterjnoměrné odchylky dat od střední hodnoty v různých časech, což je motivace pro modelování volatility. Výběrová ACF kvadrátů reziduí, jejíž graf je na obrázku 4.2 a), naznačuje přítomnost podmíněné heteroskedasticity, neboli ARCH efektu. Provedeme tedy Lagrangeův



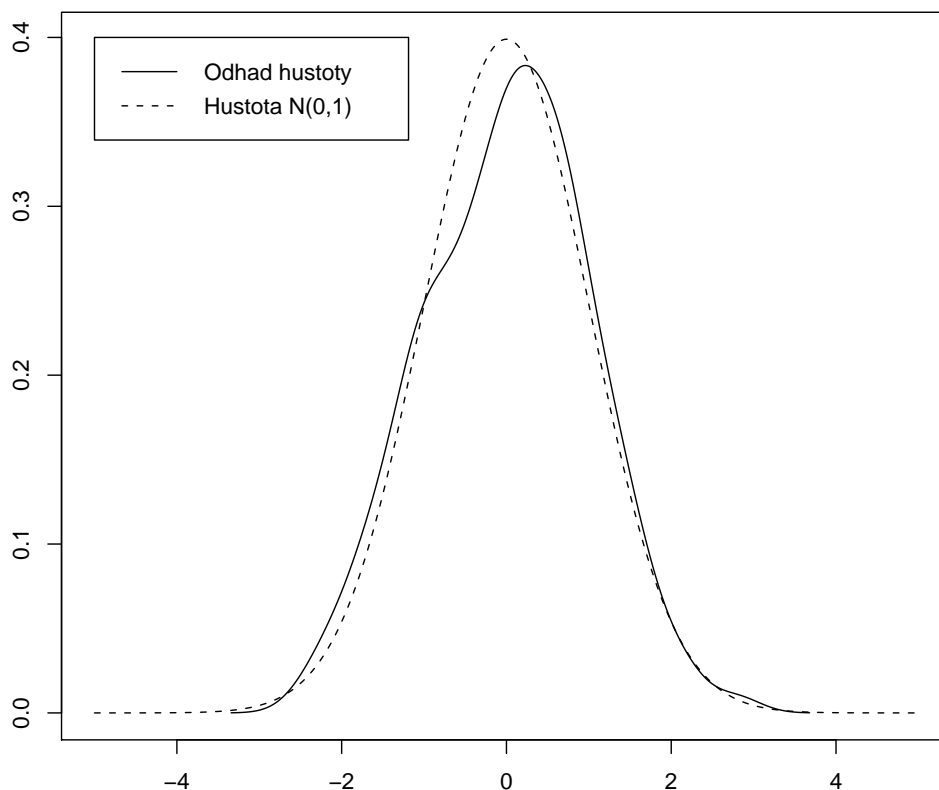
Obrázek 4.2: Graf výběrové a) ACF kvadrátů reziduí po odhadu ARMA(2,1) modelu, b) PACF kvadrátů reziduí, c) ACF standardizovaných reziduí po odhadu GARCH(1,1) modelu, d) ACF kvadrátů standardizovaných reziduí.

multiplikátorový test, který testuje nulovou hypotézu o nepřítomnosti ARCH efektu, viz. strana 32. Výsledná  $p$ -hodnota je  $5.383 \times 10^{-9}$ , nulovou hypotézu tedy zamítáme a přítomnost ARCH efektu považujeme za potvrzenou.

Protože z grafu výběrové PACF kvadrátů reziduí na obrázku 4.2 b) vidíme, že je nenulová ještě v bodě 18, nelze identifikovat ARCH model rozumného řádu a odhadneme proto model GARCH(1,1). Výběrové ACF standardizovaných reziduí a jejich kvadrátů jsou na obrázcích 4.2 c) a d) a naznačují úspěšnost modelování. Nekorelovanost standardizovaných reziduí testujeme Portmanteauovým testem, výsledkem je  $p$ -hodnota 0.3024. Pro jejich kvadráty dostaneme  $p$ -hodnotu 0.0934. Z hlediska nekorelovanosti reziduí proto považujeme odhadnutý model za adekvátní.

Ověřme ještě předpoklad, že  $\epsilon_t$  odpovídá normovanému normálnímu rozdělení. Podíváme-li se na graf odhadu hustoty pomocí funkce `density` srovnaný s hustotou normovaného normálního rozdělení (obrázek 4.3), vidíme, že se od sebe liší, hlavně na intervalu  $[-1, 0]$ . Tento rozdíl však nemusí být dostatečně velký, abychom zamítl

### Srovnání hustot



Obrázek 4.3: Graf odhadu hustoty standardizovaných reziduí sestavený funkcí `density` a hustota  $N(0,1)$  rozdělení.

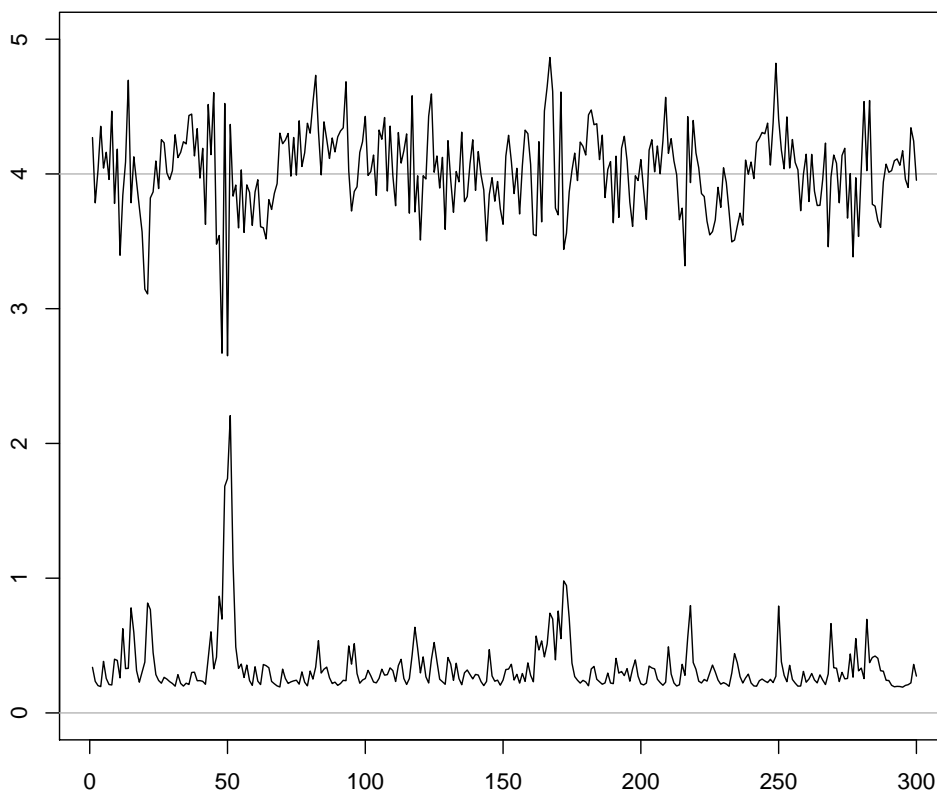
hypotézu  $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ , kterou otestujeme Kolmogorovovým–Smirnovovým testem pro rovnost distribučních funkcí. Výsledná  $p$ -hodnota je 0.8720, tedy hypotézu nezamítáme. Ve shrnutí odhadnutého modelu, které zobrazíme funkcí `summary`, je také výsledek Jarque–Bera testu, který tuto hypotézu nezamítá s  $p$ -hodnotou 0.4973. Odhadnutý model proto považujeme za adekvátní.

Odhadneme nyní model ARMA(2,1)–GARCH(1,1) sdruženým odhadem pomocí funkce `garchFit`. Při testování nekorelovanosti standardizovaných reziduí a jejich kvadrátů Portmanteauovým testem dostaneme  $p$ -hodnotu 0.2083, respektive 0.0454, která je na hranici zamítání. Normalita standardizovaných reziduí není KS testem zamítnuta s  $p$ -hodnotou 0.8576, model tedy budeme považovat za adekvátní.

Srovnáme nyní koeficienty odhadnutých modelů, zaokrouhlené na čtyři desetinná místa. Nejdříve jsme odhadovali ARMA(2,1) model a GARCH(1,1) model zvlášť, výsledkem čehož jsou koeficienty

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 0.0440, & \phi_1 &= -0.1239, & \phi_2 &= 0.3776, & \theta_1 &= -0.3199, \\ \alpha_0 &= 0.1607, & \alpha_1 &= 0.2894, & \beta_1 &= 0.2234. \end{aligned}$$

Simulovana data a odhadnuta volatilita



Obrázek 4.4: Graf odhadnuté volatility srovnaný s transformovanou řadou `data`.

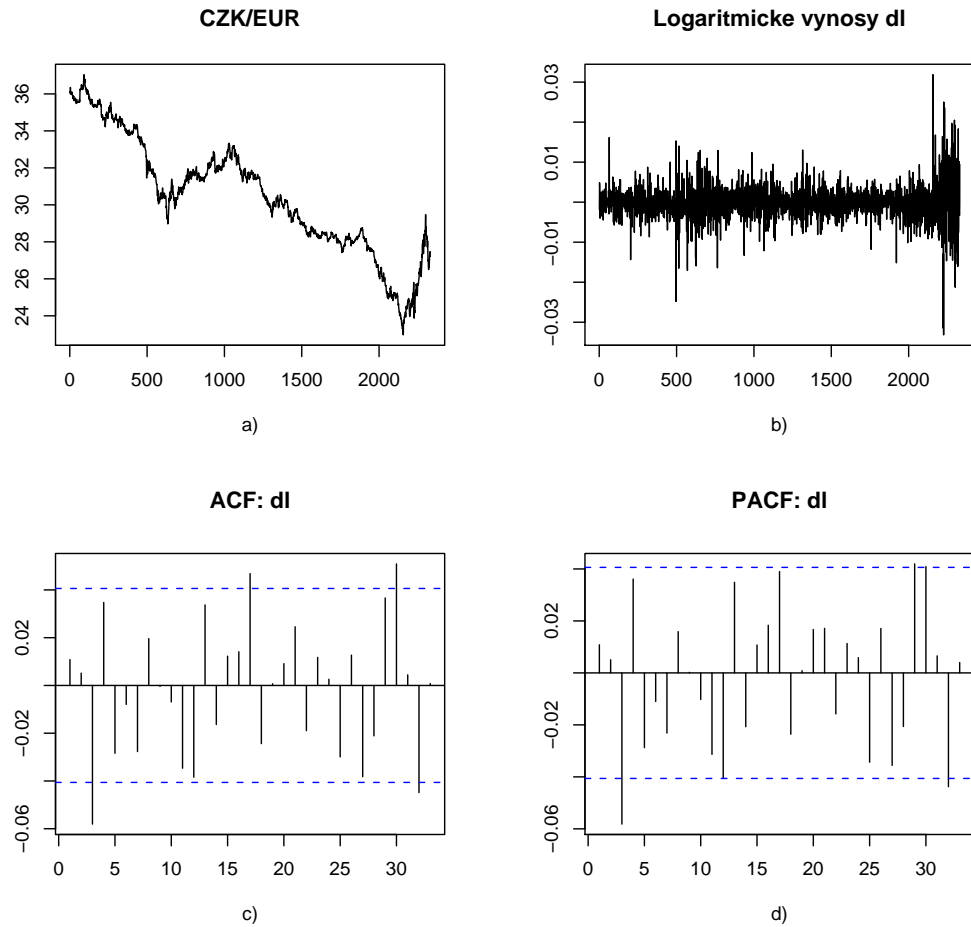
Sdruženým odhadem jsme dospěli ke koeficientům

$$\begin{aligned}\phi_0 &= 0.0370, & \phi_1 &= 0.1461, & \phi_2 &= 0.3096, & \theta_1 &= -0.1141, \\ \alpha_0 &= 0.1313, & \alpha_1 &= 0.2961, & \beta_1 &= 0.3047.\end{aligned}$$

Modelovali jsme přitom řadu `data`, která vznikla simulací ARMA(2,1) a GARCH(1,1) modelů s koeficienty

$$\begin{aligned}\phi_0 &= 0, & \phi_1 &= 0.4, & \phi_2 &= 0.2, & \theta_1 &= 0.2, \\ \alpha_0 &= 0.1, & \alpha_1 &= 0.4, & \beta_1 &= 0.3.\end{aligned}$$

Vidíme, že odhady prvním a druhým způsobem se od sebe zdatelně liší, hlavně u koeficientů ARMA modelu. Zarážející je odlišnost v odhadu koeficientu  $\phi_1$ . Vidíme také, že koeficientům použitým při simulaci se více blíží sdružený odhad funkcí `garchFit`, přičemž oba modely byly poměrně úspěšné v odhadu koeficientů modelu GARCH. Dále proto budeme pro odhad modelu GARCH preferovat sdružený odhad funkcí `garchFit`.



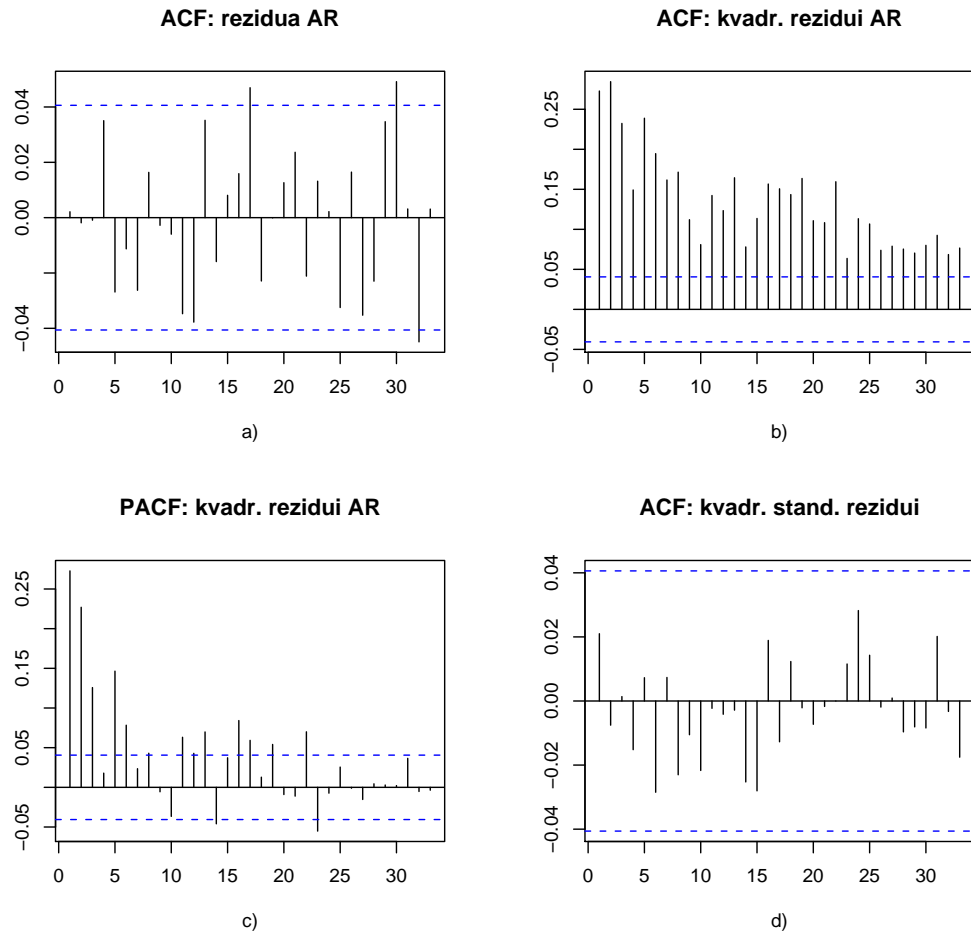
Obrázek 4.5: a) Graf směnného kurzu CZK/EUR. b) Graf logaritmických výnosů d1. c) Graf výběrové ACF řady d1. d) Graf výběrové PACF řady d1.

Na závěr můžeme na obrázku 4.4 porovnat odhadnutou volatilitu s průběhem studované řady `data`, kterou jsme pro přehlednost transformovali vydělením číslem 2 a přičtením 4.

### 4.3 Kurz české koruny vůči euru

V této části budeme studovat časovou řadu zachycující kurz české koruny k euru v pracovních dnech v období 3. 1. 2000 až 30. 3. 2009. Data byla získána z webových stránek České národní banky. Datový soubor pro R má název `czk_eur.RData` a je dostupný na internetové adrese uvedené v úvodu kapitoly 4. Obsahuje objekty `czk_eur`, což jsou hodnoty směnného kurzu CZK/EUR, a `datумы`, což jsou datумы, odpovídající těmto hodnotám.

Na obrázku 4.5 a) vidíme průběh řady `czk_eur`. Řada je zřejmě nestacionární ve střední hodnotě a rádi bychom tuto nestacionaritu odstranili diferencováním. Protože intuitivnější význam než diferencovaná řada má řada logaritmických vý-



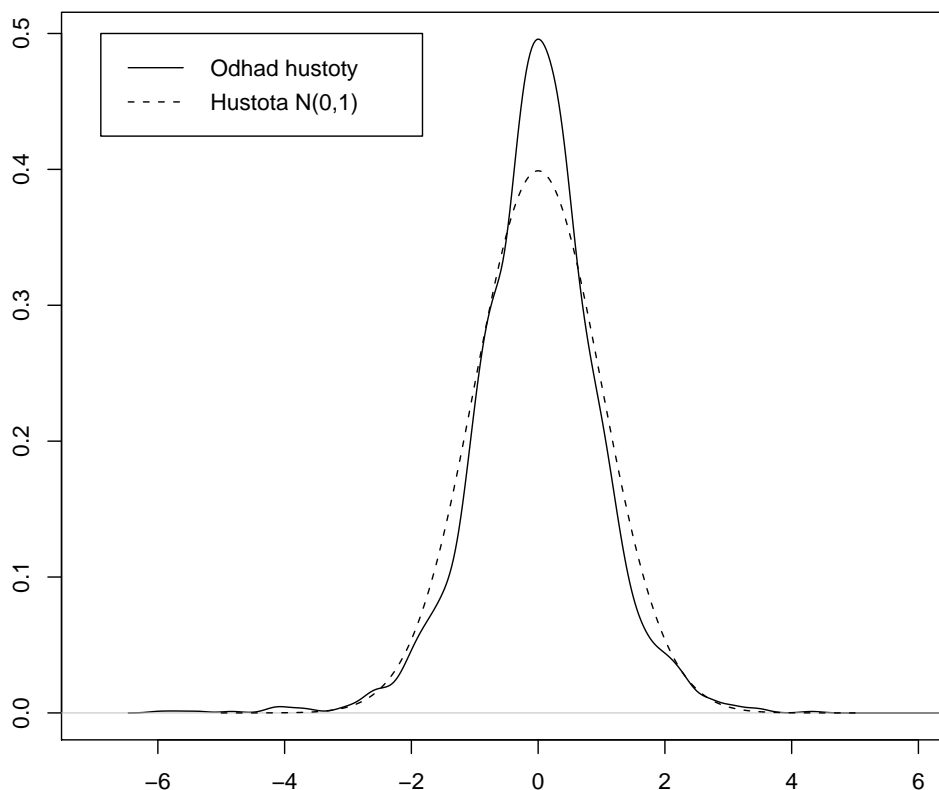
Obrázek 4.6: a) Graf výběrové ACF reziduí odhadnutého AR(3) modelu. b) Graf výběrové ACF kvadrátů reziduí AR modelu. c) Graf výběrové PACF kvadrátů reziduí AR modelu. d) Graf výběrové ACF kvadrátů standardizovaných reziduí.

nosů, které vznikne diferencováním logaritmované řady, sestrojíme řadu logaritmických výnosů a označíme ji  $d1$ . Graf řady  $d1$  vidíme na obrázku 4.5 b) a může nám připomínat bílý šum. Rovněž jeho výběrová ACF, která je k vidění na obrázku 4.5 c), napovídá o slabé korelovanosti hodnot řad  $d1$ .

Otestujeme proto hypotézu o nekorelovanosti Portmanteauovým testem. V řadě  $d1$  máme 2330 hodnot. Přírozený logaritmus tohoto čísla je 7.7536, proto provedeme Portmanteauův test pro  $m = 8$ . Výsledkem je  $p$ -hodnota 0.0461, což je na hranici zamítání. Abychom ilustrovali postup při odhadu ARMA modelu, hypotézu o nekorelovanosti zamítneme a budeme pro řadu  $d1$  odhadovat ARMA model.

Podíváme-li se na graf výběrové PACF řady  $d1$ , který je na obrázku 4.5 d), vidíme, že až na hodnoty v bodech 29,30 a 32, které jen těsně překračují vyznačený interval spolehlivosti, je PACF useknutá v bodě 3. Pro řadu  $d1$  proto identifikujeme model AR(3). Ve zprávě o odhadnutém modelu vidíme, že odhady koeficientů jsou  $\phi_1 = 0.0110$ ,  $\phi_2 = 0.0057$ ,  $\phi_3 = -0.0583$ , zatímco standardní odchylka odhadů je

Stand. rezidua srovnaná s  $N(0,1)$



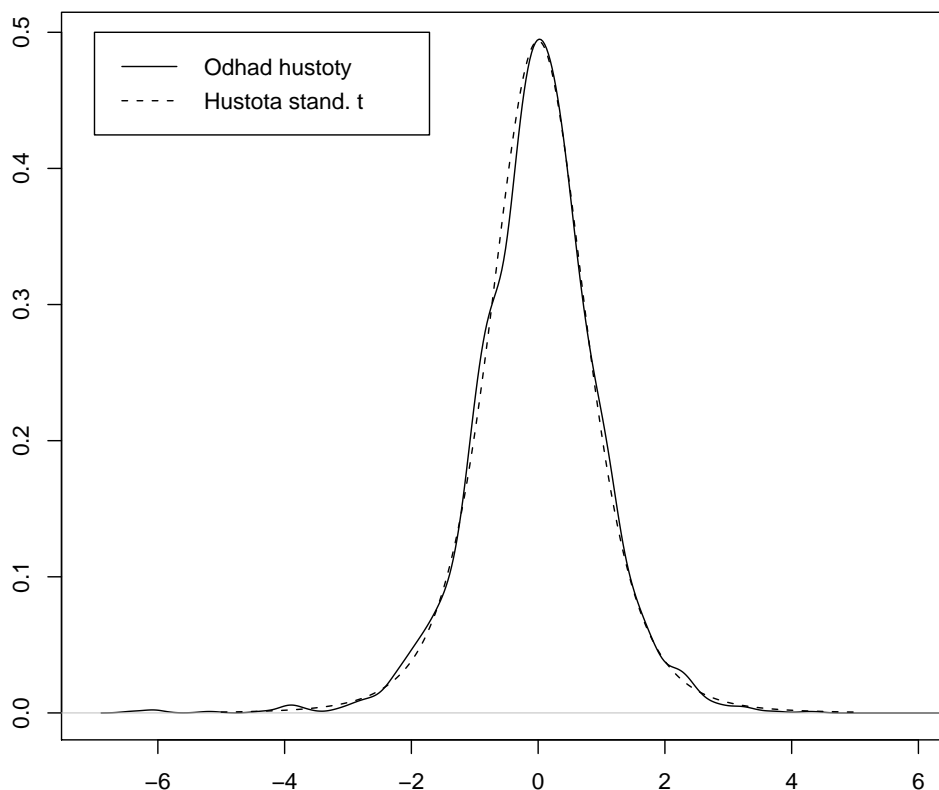
Obrázek 4.7: Graf odhadu hustoty standardizovaných reziduí provedeného funkcí `density` srovnáný s grafem hustoty rozdělení  $N(0,1)$ .

0.0207. Koeficienty  $\phi_1, \phi_2$  proto můžeme považovat za statisticky nevýznamné. To odpovídá tvaru výběrové ACF řady `d1`, která má hodnoty v bodech 1 a 2 téměř nulové. Z výběrové ACF reziduí odhadnutého modelu na obrázku 4.6 a) vidíme, že významný korelační koeficient v bodě 3 se podařilo odstranit. Testování Portmanteauovým testem pro  $m = 8$  dává  $p$ -hodnotu 0.2123, tedy hypotéza o nekorelovanosti reziduí není zamítnuta a model považujeme za adekvátní.

Pohledem na graf řady `d1` na obrázku 4.5 a) zjistíme, že rozptyl náhodných veličin tvořících časovou řadu není v každém okamžiku stejný (je větší například v období kolem času 500 a na konci řady), což je pro nás důvod k modelování volatility. Přítomnost podmíněné heteroskedasticity (ARCH efekt) otestujeme Lagrangeovým multiplikátorovým testem, který vrátí téměř nulovou  $p$ -hodnotu, čímž zamítáme hypotézu o nepřítomnosti ARCH efektu. Pohledem na grafy výběrové ACF a PACF kvadrátů reziduí AR(3) modelu, které jsou na obrázcích 4.6 b) a c), zjistíme, že ani jedna z nich se nezdá být useknutá. Identifikujeme proto GARCH(1,1) model.

K odhadu použijeme funkci `garchFit`, kterou na základě srovnání odhadů v před-

Stand. rezidua srovnaná s t-rozdelením



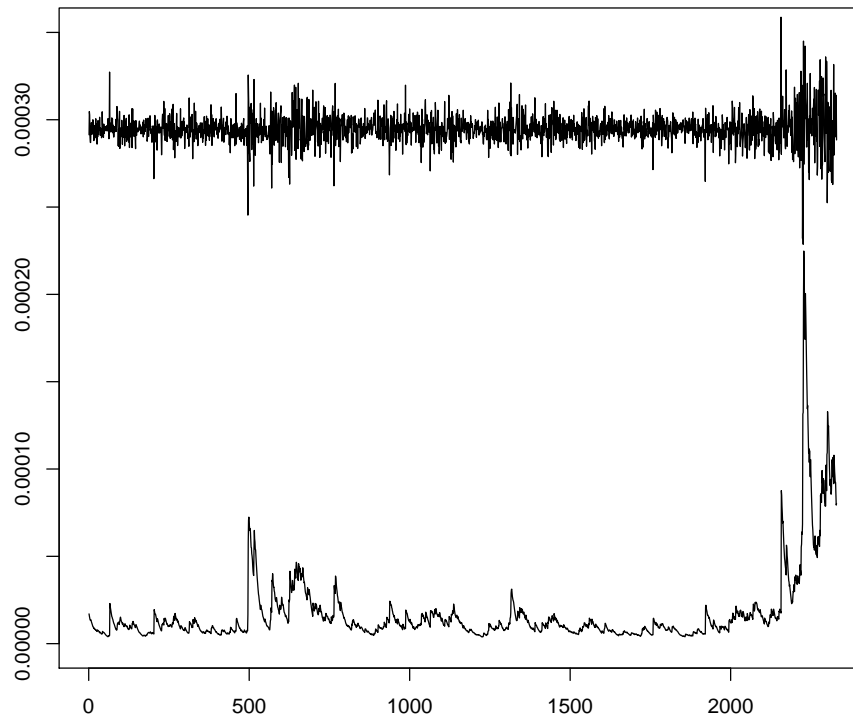
Obrázek 4.8: Graf odhadu hustoty standardizovaných reziduí provedeného funkcí *density* a graf hustoty standardizovaného t-rozdělení s 4.8748 stupňů volnosti.

chozí části preferujeme. Provedeme sdružený odhad AR(3)–GARCH(1,1) modelu na řadu  $d1$ .

Z grafu výběrové ACF kvadrátů standardizovaných reziduí na obrázku 4.6 d) vidíme, že silnou korelaci kvadrátů se podařilo odstranit. Testujeme-li Portmanteauovým testem nekorelovanost standardizovaných reziduí, dostaneme pro  $m = 8$   $p$ -hodnotu 0.2303 a pro  $m = 10$   $p$ -hodnotu 0.3433. Otestujeme-li ještě kvadráty standardizovaných reziduí, dostaneme pro stejná  $m$   $p$ -hodnoty 0.1663, respektive 0.2667. Hypotéza o nekorelovanosti standardizovaných reziduí a jejich kvadrátů není zamítnuta. Model z tohoto pohledu považujeme za adekvátní.

Při odhadování modelu jsme předpokládali, že  $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ . Srovnajme nyní na obrázku 4.7 graf odhadu hustoty standardizovaných reziduí, získaný funkcí *density*, s grafem hustoty  $N(0,1)$ . Vidíme, že rozdělení reziduí má větší špičatost. Provedeme proto odhad s předpokladem Studentova t-rozdělení. Výsledkem jsou odhadnuté ko-

Odhadnuta volatilita logaritmickych vynosu



Obrázek 4.9: Odhadnutá volatilita srovnaná s vhodně transformovanou řadu logaritmických výnosů.

eficienty

$$\begin{aligned}\phi_0 &= -0.0002, \phi_1 = 0.0058, \phi_2 = 0.0043, \phi_3 = -0.0180, \\ \alpha_0 &= 0, \alpha_1 = 0.0698, \beta_1 = 0.9233, v = 4.8748\end{aligned}$$

Podívejme se nyní, zda rozdělení standardizovaných reziduí odpovídá předpokládanému Studentovu  $t$ -rozdělení. V modelu jsme odhadovali počet stupňů volnosti tohoto rozdělení a výsledkem je číslo 4.8748, které je ve shrnutí modelu (funkce **summary**) označeno jako **shape**. Pohledem na obrázek 4.8, na kterém je graf odhadu hustoty standardizovaných reziduí získaný funkcí **density** a graf hustoty  $t$ -rozdělení s počtem stupňů volnosti 4.8748, zjistíme, že náš předpoklad byl nejspíš správný. Toto otestujeme Kolmogorovovým-Smirnovovým testem pro rovnost distribučních funkcí. Výsledkem je  $p$ -hodnota 0.9290, tedy hypotéza o tom, že standardizovaná rezidua pocházejí ze Studentova  $t$ -rozdělení s počtem stupňů volnosti 4.8748, není zamítnuta a model považujeme za adekvátní.

Nakonec můžeme vykreslit odhadnutou volatilitu a pro srovnání přidat do grafu vhodným způsobem transformovanou řadu logaritmických výnosů **d1**, kterou jsme studovali. Výsledek vidíme na obrázku 4.9, kde můžeme pozorovat zvýšenou volati-

litu kolem času 500 a na konci řady. V těchto místech vidíme utvořené shluky vyšší volatility, které by mohly být předmětem zkoumání z ekonomického hlediska.

## 4.4 Burzovní index PX

V této části se budeme věnovat modelování volatility burzovního indexu PX, což je index Pražské burzy cenných papírů. Data pocházejí z období 7. 9. 1993 až 30. 3. 2009 a jedná se o denní hodnoty měřené vždy na konci obchodovacího dne. Datový soubor pro R má název `px.RData` a je dostupný na internetové adrese uvedené v úvodu kapitoly 4. Datový soubor obsahuje objekty `px_val`, `px_change` a `datumy`. Jak naznačují jejich jména, `px_val` je časová řada hodnot indexu PX, `px_change` je časová řada vyjadřující procentuální změnu a `datumy` obsahuje odpovídající datumy.

Na obrázku 4.10 a) vidíme průběh řady `px_val`. Očividně se nejedná o stacionární časovou řadu, protože z grafu je zřejmé, že řada není stacionární ve střední hodnotě. Budeme proto tuto řadu diferencovat funkcí `diff`, což je často používaná transformace pro odstranění nestacionarity ve střední hodnotě. Průběh diferencované řady, kterou označíme jako `dpx`, vidíme na obrázku 4.10 b). Graf již nesvědčí proti stacionaritě, budeme proto dále pracovat s diferencovanou řadou `dpx`.

Podíváme se nyní na průběh ACF a PACF (čímž budeme dále rozumět jejich výběrové protějšky) řady `dpx` na obrázku 4.10 c) a d).

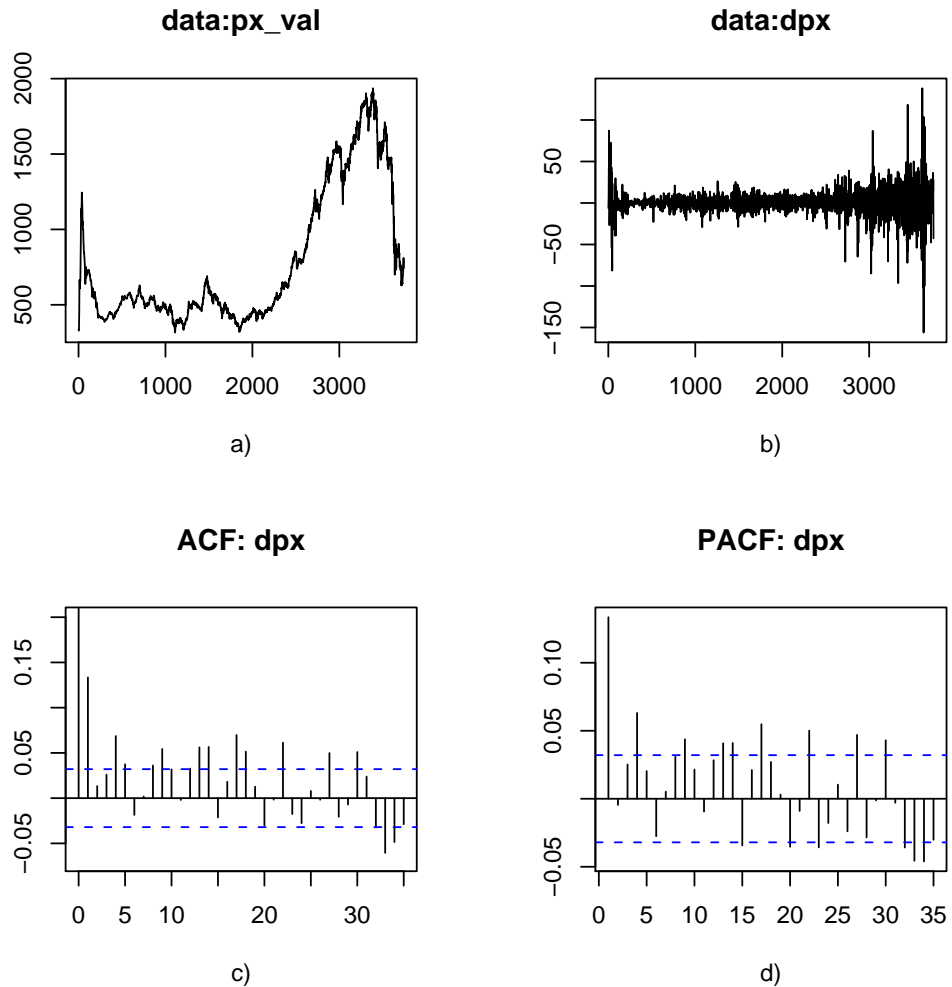
Ani jedna funkce se nezdá být useknutá, použijeme proto ARMA model. Začneme-li modelem  $ARMA(1, 1)$ , uvidíme již z grafu ACF, že rezidua jsou korelovaná. Výrazná změna v korelovanosti nastane až u řádů (3,4), kde je již většina hodnot uvnitř intervalu spolehlivosti. Přistoupíme proto k testování reziduí modelu  $ARMA(3,4)$  pomocí Portmanteauova testu.

Portmanteauův test provedeme pro  $m = 10$  a  $m = 15$ . V prvním případě je hodnota testovací statistiky  $Q(10) = 7.3922$  s  $p$ -hodnotou 0.0604. V případě  $m = 15$  je  $Q(15) = 12.961$  a  $p$ -hodnota je 0.1132. Hypotéza o nulovosti korelačních koeficientů reziduí se proto na hladině  $\alpha = 0.05$  nezamítá a odhadnutý  $ARMA(3,4)$  model s koeficienty

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 0.1398, & \phi_1 &= 1.1473, & \phi_2 &= -1.1718, & \phi_3 &= 0.9061, \\ \theta_1 &= 1.0202, & \theta_2 &= -1.0404, & \theta_3 &= 0.7619, & \theta_4 &= 0.0675. \end{aligned}$$

můžeme považovat za adekvátní. Zdůrazněme, že tyto koeficienty platí pro zápis ARMA modelu z definice 2.5. Výstup z programu R má tedy opačná znaménka u koeficientů  $\theta_1 \dots, \theta_4$ .

Na obrázku 4.10 b) vidíme, že řada `dpx` vykazuje v různých časových obdobích různé různé rozptyly. Proto přistoupíme k modelování volatility. Předpokládejme, že rozdělení  $\epsilon_t$  odpovídá  $N(0,1)$ . Označme `res1` řadu reziduí odhadnutého ARMA modelu. Na obrázku 4.11 a) vidíme graf ACF řady druhých mocnin `res1*res1`, která vykazuje silné korelace. To napovídá o přítomnosti ARCH efektu, tj. kvadratické závislosti reziduí. Lagrangeovým multiplikátorovým testem otestujeme hypotézu, že v řadě `res1` tato kvadratická závislost není. Výsledná  $p$ -hodnota je téměř nulová a proto zamítáme hypotézu o nepřítomnosti ARCH efektu.



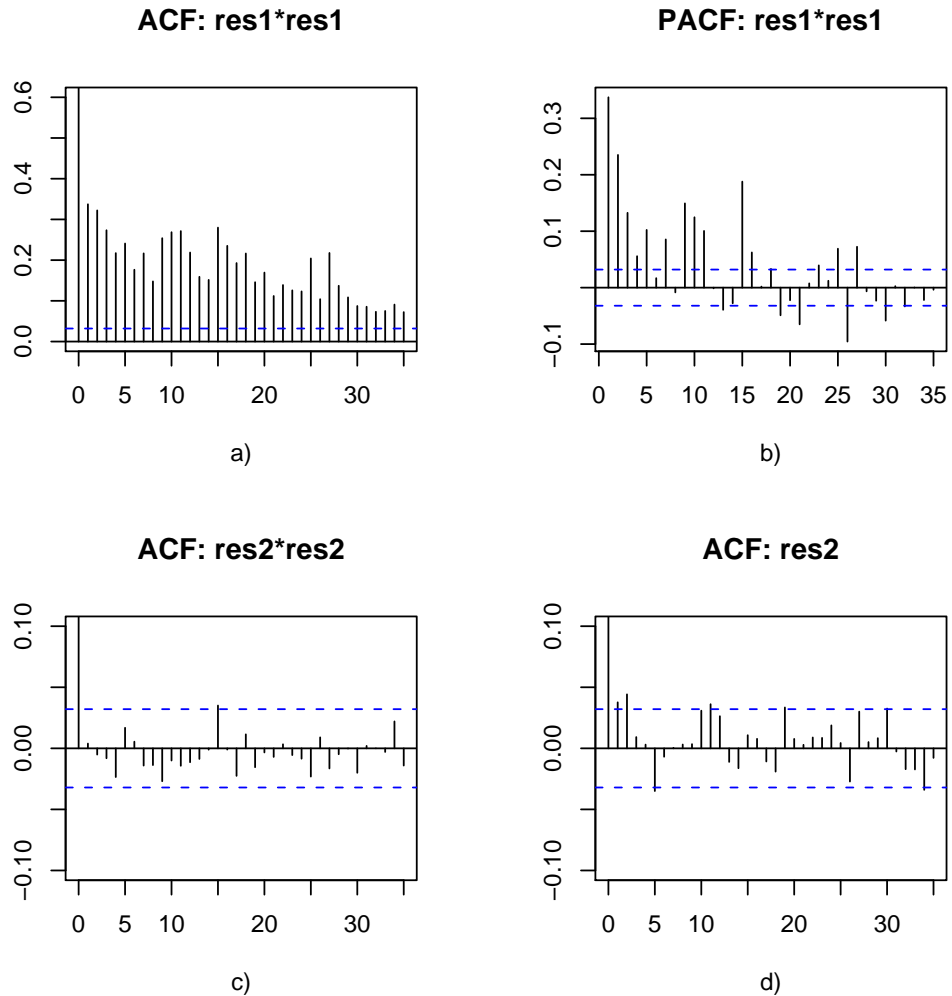
Obrázek 4.10: a) Graf hodnot indexu `px_val`. b) Graf diferencované řady `dpx`. c) Graf výběrové ACF řady `dpx`. d) Graf výběrové PACF řady `dpx`.

PACF řady `res1*res1` na obrázku 4.11 b) není useknutá, proto můžeme usoudit, že se řada `res1` neřídí modelem ARCH, nýbrž GARCH. Odhadněme tedy pro tuto řadu model GARCH(1,1), nejprve funkcí `garch`. Odhadnuté koeficienty jsou

$$\alpha_0 = 0.4444, \quad \alpha_1 = 0.1504, \quad \beta_1 = 0.8608.$$

Označme `res2` řadu standardizovaných reziduí po odhadu modelem GARCH. Grafy ACF řady `res2` i řady kvadrátů `res2*res2` na obrázku 4.11 c) a d) nevykazují významné hodnoty korelačních koeficientů.

Testujme proto hypotézu o jejich nulovosti pomocí Portmanteauova testu. Pro řadu kvadrátů `res2*res2` jsou  $p$ -hodnoty 0.6105, respektive 0.5002 (pro  $m = 10$ , respektive  $m = 15$ ). Hypotézu proto na hladině  $\alpha = 0.05$  nezamítáme. Hůře dopadneme při testování řady `res2`. Zde jsou  $p$ -hodnoty 0.0186, resp. 0.0095. Vidíme, že zatímco nestandardizovaná rezidua po odhadu ARMA modelem byla nekorelovaná,



Obrázek 4.11: a) Graf ACF řady kvadrátů  $res1*res1$ . b) Graf PACF řady kvadrátů  $res1*res1$ . c) Graf ACF řady kvadrátů  $res2*res2$ . d) Graf ACF řady reziduí  $res2$ .

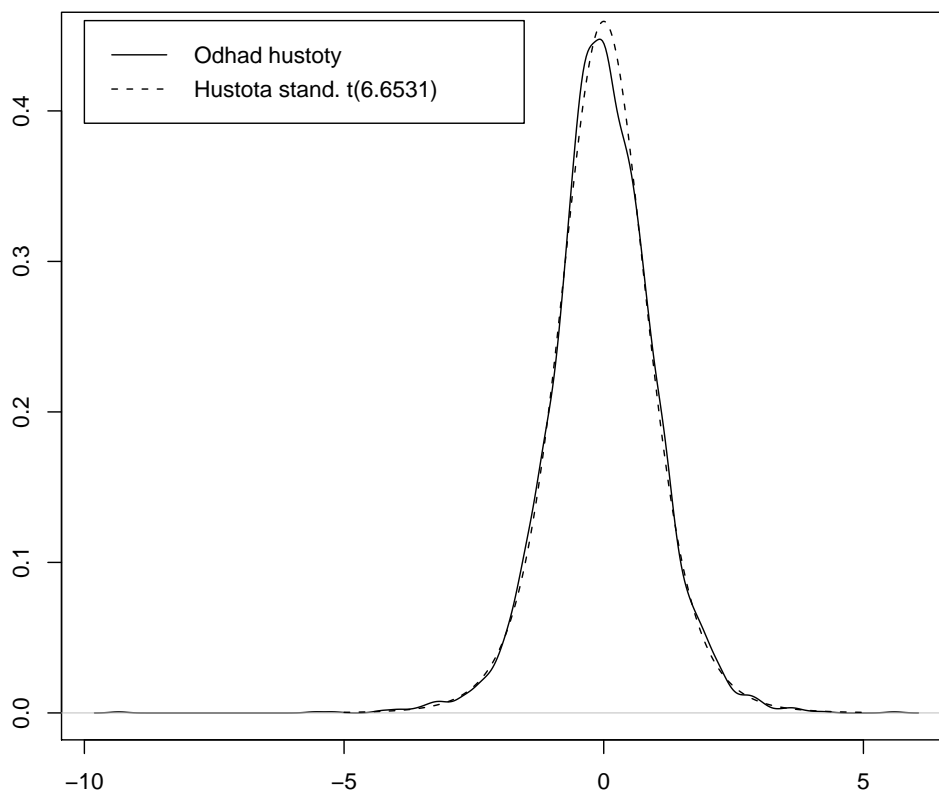
vydělení odhadnutou standardní odchylkou, která je počítána právě z těchto reziduí, způsobilo korelaci. Zvýšíme-li řády modelu GARCH, nedojdeme k podstatně lepším výsledkům, se kterými bychom mohli být spokojeni.

Zatímco ARMA model odstranil korelaci z řady  $dpx$ , výsledkem čehož jsou rezidua  $res1$ , model GARCH vnese korelaci do standardizovaných reziduí skrze standardní odchylku, kterou jsou vydělena nekorelovaná rezidua ARMA modelu. Pokud by odhad těchto dvou modelů probíhal společně, mohli bychom dospět k lepšímu výsledku. K tomu použijeme funkci `fGarch`, která umožňuje sdružený odhad modelu. Při sdruženém odhadu navíc často stačí nižší řády ARMA modelu.

Odhadneme-li ARMA(1,1)–GARCH(1,1), zjistíme ze shrnutí odhadnutého modelu (příkaz `summary(model)`), že ARMA model není adekvátní, neboť je pomocí Portmanteauova zamítnuta hypotéza o nekorelovanosti standardizovaných reziduí.

Zvýšíme-li řád MA složky na 2 a odhadneme tak model ARMA(1,2)–GARCH(1,1),

### Srovnání hustot



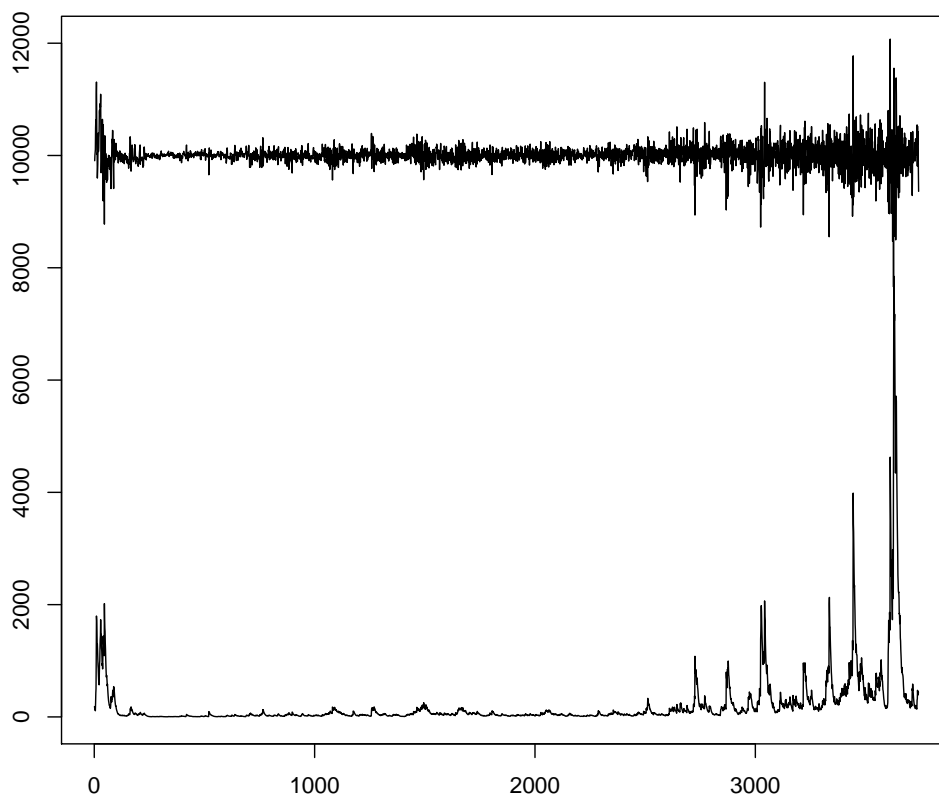
Obrázek 4.12: Graf standardizovaného t-rozdělení s 6.6531 stupni volnosti srovnaný s grafem odhadu hustoty reziduí odhadnutého modelu.

mohli bychom se ze shrnutí modelu domnívat, že byl tento problém vyřešen, neboť Portmanteauův test vrací velké  $p$ -hodnoty. Připomeňme ale, že Portmanteauův test, jeho výsledky jsou zobrazeny, nepočítá s počtem odhadovaných parametrů v modelu. Těchto parametrů je 5 (3 v ARMA modelu a 2 v modelu GARCH). Provedeme-li Portmanteauův test s přidáním parametrem `fitdf=5`, zjistíme, že hypotéza o nekorelovanosti standardizovaných reziduí je pro  $m=10$  zamítnuta s  $p$ -hodnotou 0.0211.

Budeme-li zvyšovat řády odhadovaného modelu, zjistíme, že výsledky se nelepší. Je to tím, že studovaná řada má složitější strukturu a pro adekvátní modelování by bylo třeba použít nějakou z modifikací modelu GARCH. Protože se jedná o data z burzy, která reaguje rozdílně na růst a na pokles, mohli bychom navrhnout použití modelu EGARCH. Protože to však není účelem této práce, tento nedostatek přejdeme a model budeme považovat z hlediska nerorelovanosti za adekvátní. Zbývá potom ověřit předpoklad  $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ .

Ve shrnutí odhadnutého modelu, v části analyzující standardizovaná rezidua, je proveden Jarque–Bera test, který testuje hypotézu o normalitě výběru na základě

Odhadnuta volatilita dpx



Obrázek 4.13: Graf odhadnuté volatility srovnaný s transformovaným grafem diferencované řady dpx.

výběrové šikmosti a špičatosti, a Shapiro–Wilk test, který rovněž testuje hypotézu o normalitě výběru.

Oba tyto testy dávají nulovou  $p$ -hodnotu a proto zamítají hypotézu o normalitě standardizovaných reziduí. Zvyšováním řádů modelu zjistíme, že v tomto ohledu se výsledky nelepší. Změňme proto předpokládané rozdělení  $\epsilon_t$  na standardizované Studentovo  $t$ -rozdělení a znovu odhadněme model ARMA(1,2)–GARCH(1,1). Dostaneme

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 0.0156, & \phi_1 &= 0.9589, & \theta_1 &= -0.8072, & \theta_2 &= -0.1124, \\ \alpha_0 &= 0.2204, & \alpha_1 &= 0.1570, & \beta_1 &= 0.8617, & v &= 6.6531. \end{aligned}$$

Testy nekorelovanosti standardizovaných reziduí a jejich kvadrátů mají podobné výsledky jako v předchozím případě. Mezi odhadovanými parametry je i parametr  $v$ , který udává odhadnutý počet stupňů volnosti  $t$ -rozdělení. Otestujme tedy pomocí Kolmogorovova-Smirnovova testu pro rovnost distribučních funkcí hypotézu o tom, že standardizovaná rezidua odpovídají  $t$ -rozdělení o 6.65 stupních volnosti. Výsled-

kem je  $p$ -hodnota 0.7383, tedy hypotézu na hladině  $\alpha = 0.05$  nezamítáme a odhadnutý model můžeme prohlásit za adekvátní.

Pro srovnání vykreslíme graf hustoty standardizovaného  $t$ -rozdělení o 6.65 stupních volnosti a srovnáme ho s grafem odhadu hustoty standardizovaných reziduí, který provedeme funkcí `density`. Výsledek je na obrázku 4.12.

U sdruženého odhadu funkcí `garchFit` jsme vystačili s nižšími řády ARMA modelu a dosáhli jsme vyšších  $p$ -hodnot v testech nekorelovanosti reziduí. Přesto v tomto případě není ani jeden z modelů adekvátní. Srovnáme-li parametry v modelu GARCH odhadnuté funkcí `garch` a sdruženým odhadem, vidíme, že se podstatně liší jen u parametru  $\alpha_0$ , u druhých dvou parametrů jsou rozdíly v řádu tisícín. Jak jsme ale viděli v příkladu se simulovanými daty, hlavní rozdíl mezi sdruženým a odděleným odhadem byl v parametrech ARMA modelu, přičemž sdružený odhad byl o poznání bližší skutečným parametrům. Můžeme proto usoudit, že sdružené odhady funkcí `garchFit` jsou pro praktické využití výhodnější, neboť při odhadu ARMA modelu berou v úvahu přítomnost ARCH efektu a výsledný model má potom blíže k realitě.

Nakonec můžeme nakreslit graf odhadnuté volatility, do kterého pro srovnání umístíme vhodně transformovanou řadu `dpx`. Na obrázku 4.13 vidíme, že odhadnutá volatilita je skutečně větší v obdobích větší kolísavosti cen a nižší v klidnějších obdobích. Nemůžeme si rovněž nevšimnout největší volatility na konci pozorovaných dat, která se kryje s velkým poklesem pražské burzy způsobeným ekonomickou krizí. Na počátku a konci řady můžeme pozorovat shluky vyšší volatility.

# Literatura

- [1] Anděl J.: *Matematická statistika*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1985.
- [2] Bollerslev T.: Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* **31**, 307–327, 1986.
- [3] Box G. E. P., Pierce David A.: Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive-Integrated Moving Average Time Series Models, *Journal of the American Statistical Association* **65**, 1509-1526, 1970.
- [4] Hornik K., Trapletti A.: tseries: Time Series Analysis and Computational Finance, R package version 0.10-18, 2009.
- [5] Chalabi Y., Miklovic M., Wuertz D.: fGarch: Rmetrics - Autoregressive Conditional Heteroskedastic Modelling. R package version 290.76, 2008.
- [6] Chan K.S.: TSA: Time Series Analysis. R package version 0.97, 2008.
- [7] Chan N.H.: *Time series: applications to finance*, Wiley, New York, 2002.
- [8] Engle R.F.: Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflations, *Econometrica* **50**, 987 – 1008, 1982.
- [9] Graves S.: FinTS: Companion to Tsay (2005) Analysis of Financial Time Series. R package version 0.3-9., 2009.
- [10] Hamilton J.D.: *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1994.
- [11] Lachout P.: *Teorie pravděpodobnosti*, Karolinum, Praha, 2004.
- [12] Ljung G., Box G.E.P.: On a measure of lack of fit in time series models, *Biometrika* **65**, 297–303, 1978.
- [13] Prášková Z.: *Základy náhodných procesů II*, Karolinum, Praha, 2007.
- [14] R Development Core Team: R: A Language and Environment for Statistical Computing, R Foundation for Statistical Computing, Vídeň, 2008.
- [15] Tsay R.S.: *Analysis of financial time series*, Wiley, New York, 2002.