Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Marie Dostálová

Projektivní oktonionová rovina

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D.
Studijní program: Matematika, obecná matematika

2009

Děkuji RNDr. Svatopluku Krýslovi, Ph.D., za hodnotné rady a odborné vedení během mé práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 28.5.2009 Marie Dostálová

Obsah

Název práce: Projektivní oktonionová rovina
Autor: Marie Dostálová
Katedra (ústav): Matematický ústav UK
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D.
e-mail vedoucího: krysl@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci je vysvětlena souvislost platnosti Desarguesova axiomu a malého Desarguesova axiomu v dané projektivní rovině s algebraickými vlastnostmi souřadnicového okruhu této roviny. Jsou představeny pojmy postačující k formulaci této souvislosti ve větu. Mezi tyto pojmy patří např. projektivní rovina, ternární okruh projektivní roviny a asociativnost a alternativnost ternárního okruhu. Je známo, že platnost (malého) Desarguesova axiomu úzce souvisí s (alternativností) asociativností souřadnicového okruhu. Jelikož oktoniony tvoří neasociativní algebru, lze očekávat jejich souvislost s projektivními rovinami, jež Desarguesův axiom nesplňují. Projektivní rovinou, na níž ilustrujeme nedesarguesovskost, je tzv. Moufangové rovina. V práci je explicitně zkonstruován protipříklad k platnosti Desarguesova axiomu v této rovině. Za definici Moufangové roviny volíme Freudenthalovu definici.
Klíčová slova: Desarguesův axiom, malý Desarguesův axiom, asociativnost, alternativnost, Moufangové rovina

Title: Projective octonion plane
Author: Marie Dostálová
Department: Mathematical Institute of Charles University
Supervisor: RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: krysl@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In this thesis, a relation between the (little) Desargues axiom and algebraic aspects of coordinate rings is explained. We introduce notions usually needed to formulate this relation explicitly, i.e., as a theorem. The notions of projective plane, ternary ring, associativity and alternativity of the coordinate ring are examples of such notions. It is well known that the (little) Desargues axiom is intimately related to the (alternativity) associativity of the studied projective plane. Because the algebra of octonions is not associative, one can expect its connection to the planes, in which the Desargues axiom is not satisfied. One of these planes is the so called Moufang plane. We use the Freudenthal definition and approach to introduce this plane.We also explicitly construct a counterexample to the validity of the Desargues axiom in this plane.
Keywords: Desargues axiom, little Desargues axiom, associativity, alternativity, Moufang plane

Kapitola 1

Úvod

Snaha zjistit logickou strukturu axiomů různých geometrií provází geometrii téměř od jejích počátků. V rámci Euklidovy geometrie představoval, jak známo, po dlouhou dobu základní obtíž problém tzv. Pátého postulátu (Postulátu o rovnoběžkách), ideově vyřešený Bernhardem Riemannem a z logicky rigorózního hlediska až Davidem Hilbertem. V projektivní geometrii, která až do konce 19. století představuje po Euklidově druhou nejvíce studovanou geometrickou strukturu, se vynořovaly podobné otázky. Tak jako byla například zkoumána souvislost Archimédova axiomu právě s Axiomem o rovnoběžnosti v Euklidově geometrii, v geometrii projektivní byl studován vztah tzv. Desarguesova axiomu k axiomům ostatním (především axiomům incidence). Speciálně bylo zkoumáno, zda Desarguesův axiom nelze z ostatních vyvodit. Zmiňme se krátce o Desarguesově axiomu. Zhruba řečeno Desarguesův axiom z existence dvou trojúhelníků ABC a $A'B'C'$, pro něž průsečík AA' a BB' koinciduje s průsečíkem V přímek AA' a CC', postuluje, že průsečíky AB s $A'B'$, AC s $A'C'$ a BC s $B'C'$ leží na jedné přímce q.

Zatímco existuje velmi jednoduchý způsob, jak tento teorém dokázat pro projektivní roviny nad tělesy, jeho vyvození v obecné, pouze axiomy dané, projektivní geometrii, nasnadě není a ve skutečnosti, jak je známo a jak dokážeme v této práci, z ostatních axiomů neplyne. Důkaz pro projektivní roviny vytvořené z vektorových prostorů je velmi snadný a, dovolili bychom si říci, i velmi hezký. Situaci v rovině nahlédneme jako projekci situace prostorové. Představíme-li si totiž, že trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou rovinnými řezy čtyřstěnu s vrcholem V a podstavou ABC, celý postulát je redukován na fakt, že v prostoru se dvě roviny (a sice ABC a $A'B'C'$) protínají v jedné přímce, která je právě postulovanou přímkou q.

Kromě více méně logicky orientovaného přístupu k projektivní geometrii, tj. například hledání minimálního souboru axiomů nebo uspořádávání axiomů do skupiny podle „příbuznosti“, začal se projevovat i přístup započatý Maxem Dehnem na konci 19. století. Tento přístup spočíval v převedení axiomů do zákonů algebraické povahy. Pro formulaci těchto algebraických zákonů bylo potřeba vytvořit "číselný" obor, v kterém budou formulovány. Velmi přirozené je vzít za tento obor „obor souřadnic“. Hilbert byl schopen za předpokladu platnosti Desarguesova axiomu zavést souřadnicový okruh s dvěma operacemi (sčítáním a násobením) a ukázat jeho komutativnost a asociativnost. Ruth Moufangová ve své práci [6, „Alternative Körper und der Satz vom vollständingen Vierseit“] dokázala tvrzení o tom, že pokud je splněna věta o úplném čtyřrohu, lze zavést souřadnicový okruh R, jehož souřadnice splňují tzv. alternativitu, tj. pro každé a, b z okruhu platí $(aa)b = a(ab), (ab)a = a(ba)$ a $(ba)a = b(aa)$.

Jelikož oktoniony představují alternativní algebru, která není asociativní, není překvapující, že pro konstrukci Moufangové roviny použijeme právě oktoniony. Oktoniony, konstruované v druhé kapitole, budou zavedeny pomocí tzv. Cayley-Dicksonova procesu, pomocí kterého lze z algebry dimenze n zkonstruovat algebru dimenze $2n$. Konkrétně z reálných čísel jsou tímto procesem zkonstruována čísla komplexní, z kterých pak tímtéž postupem zkonstruujeme kvaterniony a nakonec oktoniony. Explicitně dokážeme, že z komplexních čísel obdržíme kvaterniony, a oktoniony zavedeme touto konstrukcí definitoricky. Na závěr kapitoly o oktonionech uvedeme několik známých a slavných vět o klasifikaci podílových a normovaných algeber.

Ve třetí kapitole uvedeme základní definice týkající se projektivních rovin a definujeme projektivní rovinu nad tělesem. Na závěr této kapitoly se zmíníme o tzv. ternárním okruhu, což je okruh, pomocí kterého se roviny koordinizují, a spočteme, jak vypadá ternární operace v případě projektivní roviny vzniklé projektivizací $\mathbb{R}^3$.

Ve čtvrté kapitole budeme formulovat Desarguesův axiom a malý Desarguesův axiom. V této kapitole bude Desarguesův, a proto i malý Desarguesův axiom, který je jeho důsledkem, dokázán v projektivních rovinách nad tělesem.

V kapitole 5 budeme definovat Moufangové rovinu. Za definici této roviny vezmeme Freudenthalovu definici, v níž je použita Jordanova algebra hermitovských matic 3 x 3. Freudenthal zavedl body, přímky a incidenční relaci v této rovině prostřednictvím jedné lineární, jedné kvadratické a jedné kubické formy. Podstatnou výhodou Freudenthalova přístupu je povšimnutí si invariance těchto forem vůči unitárním transformacím, která umožňuje použití vždy takové souřadné soustavy, v níž má alespoň jeden objekt jednoduché souřadnicové vyjádření, a tak zjednodušit jinak velmi technicky obtížné, byť multilineární, výpočty. V této kapitole je také explicitně dokázána existence dvou trojúhelníků, které sice splňují předpoklad Desarguesova axiomu, ale nesplňují jeho závěr. Toto tvrzení je tedy ověřením citovaného výsledku Hilberta pro speciální případ Moufangové roviny.

Kapitola 2

Oktoniony

Oktoniony představují číselný obor se sedmi imaginárními jednotkami, který je nekomutativní a neasociativní. Algebru oktonionů objevil v roce 1843 John T. Graves. V roce 1898 dokázal A. Hurwitz, že oktoniony představují normovanou podílovou algebru nejvyšší možné dimenze.

V této kapitole se čtenář seznámí s podílovými algebrami, jejich základními vlastnostmi a Cayley-Dicksonovým procesem, jímž se oktoniony dají vytvořit z reálných čísel. Jsou zde také uvedeny vlastnosti oktonionů a na závěr se čtenář seznámí s Jordanovou algebrou hermitovských matic.

2.1 Podílové algebry

Definice 2.1.1. *Reálná algebra* A je reálný vektorový prostor s jednotkou 1 a bilineárním zobrazením $m : A \times A \to A$, zvaným *násobení*, splňujícím $m(1, a) = a = m(a, 1)$ pro každé $a \in A$. Násobení $m(a, b)$ budeme značit ab.

Definice 2.1.2. Reálná algebra A se nazývá *podílová algebra*, pokud pro každé dva její prvky a, b platí: $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ nebo $b = 0$.

Definice 2.1.3. Buď $\mathbb{V}$ reálný vektorový prostor se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$. *Normu* $| \cdot |$ na $\mathbb{V}$ indukovanou skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definujeme předpisem $|v| := \sqrt{\langle v, v \rangle}, v \in \mathbb{V}$. Dále budeme značit *kvadrát normy* příslušnou kvadratickou formu $\|v\| := \langle v, v \rangle, v \in \mathbb{V}$.

Definice 2.1.4. Nechť $\mathbb{V}$ je vektorový prostor s normou $| \cdot |$, pak

$$\langle v, w \rangle := \frac{1}{2}(|v + w|^2 - |v|^2 - |w|^2),$$

kde $v, w \in \mathbb{V}$, nazveme *skalární součin indukovaný normou*. Předchozí formule se nazývá *polarizací*. Vektorový prostor vybavený normou budeme automaticky uvažovat vybavený indukovaným skalárním součinem.

Definice 2.1.5. Algebra A se nazývá *asociativní*, pokud pro každé tři její prvky $a, b, c \in A$ platí $a(bc) = (ab)c$.
Algebra A se nazývá *komutativní* pokud pro každé dva prvky $a, b \in A$ platí $ab = ba$.
Algebra A se nazývá *alternativní*, pokud pro každé dva prvky $a, b \in A$ platí $(aa)b = a(ab), (ab)a = a(ba)$ a $(ba)a = b(aa)$.

Definice 2.1.6. Algebra A se nazývá *normovaná algebra*, pokud na A jako vektorovém prostoru je dána norma taková, že kvadrát normy $\| \cdot \|$ pro všechny $a, b \in A$ splňuje $\|ab\| = \|a\|\|b\|$.

Poznámka.

1. Každá normovaná algebra A je podílovou algebrou. Vezměme $a, b \in A$ takové, že $ab = 0$. Pak $0 = \|ab\| = \|a\|\|b\|$. Ze skutečnosti, že reálná čísla jsou podílovou algebrou, plyne, že $\|a\| = 0$ nebo $\|b\| = 0$. Pozitivní definitnost skalárního součinu dává $a = 0$ nebo $b = 0$.

2. Dále platí $\|1\| = \|1 \cdot 1\| = \|1\|\|1\|$ a díky pozitivní definitnosti $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je $\|1\| = 1$.

Definice 2.1.7. Buď A normovaná algebra. Pak značíme ReA vektorový podprostor A nad $\mathbb{R}$ generovaný jednotnou $1 \in A$. ReA se nazývá *reálná část* A. Ortogonální doplněk k ReA značíme ImA a nazývá se *imaginární část* A.

Poznámka.

1. Každý prvek $a \in A$ lze jednoznačně rozložit dle vztahu

   $$a = a_R + a_I, \text{ kde } a_R \in ReA \text{ a } a_I \in ImA.$$

   Označíme $Re(a) := a_R$ (tzv. *reálná část* a) a $Im(a) := a_I$ (tzv. *imaginární část* a).

2. Imaginární část A tvoří nadrovinu v A.

Definice 2.1.8. Buď A normovaná algebra. Zobrazení

$$\bar{\cdot} : A \to A$$
$$A \ni a = Re(a) + Im(a) \mapsto \overline{a} := Re(a) - Im(a)$$

se nazývá *konjugace* na A.

Následující lemma shrnuje některé základní vlastnosti konjugace v normovaných algebrách.

Lemma 2.1.1. Buď A normovaná algebra se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a konjugací $\bar{\cdot}$. Pak pro každé $a, b \in A$ platí vztahy

1. $\overline{(\overline{a})} = a$,
2. $\langle a, b \rangle = \langle \overline{a}, \overline{b} \rangle$ a
3. $Re(a) = \frac{1}{2}(a + \overline{a})$, $Im(a) = \frac{1}{2}(a - \overline{a})$.

Důkaz. Nechť $a, b \in A$, pak $a = Re(a) + Im(a)$ a $b = Re(b) + Im(b)$.

1. První identita plyne z toho, že konjugace je reflexe podle nadroviny nebo přímo $\overline{(\overline{a})} = \overline{Re(a) - Im(a)} = Re(a) + Im(a) = a, a \in A$.
2. Proveďme výpočet. Na levé straně máme pro $a, b \in A$
$$\begin{aligned}\langle a, b \rangle = \langle Re(a) + Im(a), Re(b) + Im(b) \rangle \\ = \langle Re(a), Re(b) \rangle + \langle Im(a), Im(b) \rangle,\end{aligned}$$
neboť $ImA \perp ReA$. Na pravé straně dostáváme
$$\begin{aligned}\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle = \langle Re(a) - Im(a), Re(b) - Im(b) \rangle \\ = \langle Re(a), Re(b) \rangle + \langle Im(a), Im(b) \rangle,\end{aligned}$$
neboť $ImA \perp ReA$. Obě strany se rovnají, z čehož identita plyne.
3. Pro $a \in A$ dostáváme rovnosti $2Re(a) = Re(a) + Im(a) + Re(a) - Im(a) = a + \overline{a}$ a $2Im(a) = Re(a) + Im(a) - Re(a) + Im(a) = a - \overline{a}$, odkud tvrzení plyne.

$\square$

2.2 Cayley-Dicksonova konstrukce a oktoniony

Věta 2.2.1. Buď A normovaná algebra. Položme $A' := A \oplus A$ (ve smyslu direktního součtu vektorových prostorů; sčítance považujeme za formálně různé kopie A). Vektorový prostor A' s následujícími vlastnostmi a zobrazeními je normovaná algebra.

1. Pro $a, b, c, d, \in A$ definujeme násobení na A' předpisem $(a, b)(c, d) := (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c})$ a jednotku $(1, 0) \in A'$.

2. Algebra A je přirozeným způsobem vložena do A', a to zobrazením $A \ni a \mapsto (a, 0)$.

3. Kvadrát normy $\| \cdot \|'$ na A' je dán předpisem $\|(a, b)\|' := \|a\| + \|b\|$, pro všechna $a, b \in A$. Skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na A' je dán polarizací, tj.

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{2}(\|x + y\| - \|x\| - \|y\|),$$

   kde $x, y \in A'$.

4. Konjugace $\bar{\cdot}'$: $A' \to A'$ je dána předpisem $A' \ni (a, b) \mapsto (\bar{a}, -b)$, $a, b \in A$.

5. Reálná a imaginární část čísla a je

$$Re(a) = \frac{1}{2}(a + \bar{a}),$$

$$Im(a) = \frac{1}{2}(a - \bar{a}).$$

Důkaz. Viz Harvey [3]. □

Definice 2.2.1. Popsaná konstrukce normované algebry A' z normované algebry A se nazývá *Cayley-Dicksonova* nebo též *Cayley-Dicksonův proces*. Algebra A' se nazývá *Cayleyho iterace* A.

Poznámka. Kopie A jsou v A' ortogonální.

Poznámka. Lze snadno ověřit, že $\mathbb{R}' \simeq \mathbb{C}$ (komplexní čísla) a $\mathbb{C}' \simeq \mathbb{H}$ (kvaterniony).

Příklad. Ověříme, že $\mathbb{C}' \simeq \mathbb{H}$.
Zkonstruujeme izomorfismus vektorových prostorů $\mathbb{C}' \simeq \mathbb{H}$ daný na bázi

$$\begin{array}{rclcrcl} \mathbb{C}' \ni (1,0) & \mapsto & 1 \in \mathbb{H}, & & (i,0) & \mapsto & i, \\ (0,1) & \mapsto & j, & & (0,i) & \mapsto & k \end{array}$$

a lineárně rozšířený na celé $\mathbb{C}'$. Dokážeme, že tento izomorfismus zachovává násobící strukturu.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 \cdot 1 & \mapsto & (1,0)(1,0) & = & (1,0) & \mapsto & 1 \\ 1 \cdot i & \mapsto & (1,0)(i,0) & = & (i,0) & \mapsto & i \\ 1 \cdot j & \mapsto & (1,0)(0,1) & = & (0,1) & \mapsto & j \\ 1 \cdot k & \mapsto & (1,0)(0,i) & = & (0,i) & \mapsto & k \\ i \cdot i & \mapsto & (i,0)(i,0) & = & (-1,0) & \mapsto & -1 \\ j \cdot j & \mapsto & (0,1)(0,1) & = & (-1,0) & \mapsto & -1 \\ k \cdot k & \mapsto & (0,i)(0,i) & = & (-1,0) & \mapsto & -1 \\ i \cdot j & \mapsto & (i,0)(0,1) & = & (0,i) & \mapsto & k \\ j \cdot k & \mapsto & (0,1)(0,i) & = & (i,0) & \mapsto & i \\ k \cdot i & \mapsto & (0,i)(i,0) & = & (0,1) & \mapsto & j \end{array}$$

Analogicky se ověří identity pro opačné pořadí činitelů. Vložení $\mathbb{C}$ do $\mathbb{H}$ je přirozené, stejně tak i kvadrát normy. Konjugovaný prvek k $(a+bi, c+di) \in \mathbb{C}'$, kde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, je $(\overline{a+bi}, -c-di) = (a-bi, -c-di)$, který odpovídá $a-bi-cj-dk \in \mathbb{H}$, tj. konjugovanému prvku k $a+bi+cj+dk \in \mathbb{H}$.

Definice 2.2.2. Definujme $\mathbb{O} := \mathbb{H}'$ normovanou algebru *oktonionů*.

Příklad. Vypočítáme součiny prvků báze $\{(1,0),(i,0),(j,0),(k,0),(0,1),(0,i),(0,j),(0,-k)\}$ algebry $\mathbb{H}'$ podle vzorce $(a,b)(c,d) = (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c})$ v Cayley-Dicksonově konstrukci. Viz tabulku 2.1. (Násobení je v pořadí řádek krát sloupec.)

Zaveďme symboly

$$\begin{array}{rlcrl} 1 := & (1,0) & \in \mathbb{H}' & e_1 := & (i,0) \\ e_2 := & (j,0) & & e_3 := & (0,1) \\ e_4 := & (k,0) & & e_5 := & (0,j) \\ e_6 := & (0,-k) & & e_7 := & (0,i). \end{array}$$

Vložení $\mathbb{H}$ do $\mathbb{O}$ a kvadrát normy jsou dány přirozeně. Konjugovaný prvek k $(a+bi+cj+dk, f+gi+hj+lk) \in \mathbb{H}', a,b,c,d,f,g,h,l \in \mathbb{R}$, je $(\overline{a+bi+cj+dk}, -f-gi-hj-lk) = (a-bi-cj-dk, -f-gi-hj-lk)$, který odpovídá prvku $a - be_1 - ce_2 - fe_3 - de_4 - he_5 + le_6 - ge_7 \in \mathbb{O}$ konjugovanému prvku k $a + be_1 + ce_2 + fe_3 + de_4 + he_5 - le_6 + ge_7 \in \mathbb{O}$.

$\cdot$	$(1,0)$	$(i,0)$	$(j,0)$	$(0,1)$	$(k,0)$	$(0,j)$	$(0,-k)$	$(0,i)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(i,0)$	$(j,0)$	$(0,1)$	$(k,0)$	$(0,j)$	$(0,-k)$	$(0,i)$
$(i,0)$	$(i,0)$	$(-1,0)$	$(k,0)$	$(0,i)$	$(-j,0)$	$(0,-k)$	$(0,-j)$	$(0,-1)$
$(j,0)$	$(j,0)$	$(-k,0)$	$(-1,0)$	$(0,j)$	$(i,0)$	$(0,-1)$	$(0,i)$	$(0,k)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,-i)$	$(0,-j)$	$(-1,0)$	$(0,-k)$	$(j,0)$	$(-k,0)$	$(i,0)$
$(k,0)$	$(k,0)$	$(j,0)$	$(-i,0)$	$(0,k)$	$(-1,0)$	$(0,i)$	$(0,1)$	$(0,-j)$
$(0,j)$	$(0,j)$	$(0,k)$	$(0,1)$	$(-j,0)$	$(0,-i)$	$(-1,0)$	$(i,0)$	$(k,0)$
$(0,-k)$	$(0,-k)$	$(0,j)$	$(0,-i)$	$(k,0)$	$(0,-1)$	$(-i,0)$	$(-1,0)$	$(j,0)$
$(0,i)$	$(0,i)$	$(0,1)$	$(0,-k)$	$(-i,0)$	$(0,j)$	$(-k,0)$	$(-j,0)$	$(-1,0)$

Tabulka 2.1: Násobení prvků báze $\mathbb{H}'$

Následující věta uvádí některé podstatné vlastnosti algeber zkonstruovaných Cayley-Dicksonovým procesem.

Věta 2.2.2. Buď A normovaná algebra a A' její Cayleyho iterace. Pak platí

1. A' je komutativní právě tehdy, když $A = \mathbb{R}$.
2. A' je asociativní právě tehdy, když A je komutativní a asociativní.
3. A' je alternativní právě tehdy, když A je asociativní.

Důkaz. Viz např. práce Wienbergové [8]. $\square$

Na závěr kapitoly uveďme tři významné věty o podílových normovaných algebrách. První z nich pochází od A. Hurwitze z roku 1898 [4], druhá se objevila v článku M. Zorna v roce 1930 [9]. Třetí věta byla nezávisle objevena M. Kervairem [5] a R. Milnorem v roce 1958 [1].

Věta 2.2.3. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ a $\mathbb{O}$ jsou jediné normované podílové algebry.

Věta 2.2.4. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ a $\mathbb{O}$ jsou jediné alternativní podílové algebry.

Věta 2.2.5. Všechny podílové algebry mají dimenzi 1, 2, 4 nebo 8.

2.3 Vlastnosti oktonionů

Oktoniony $\mathbb{O}$ tvoří alternativní algebru, jak plyne např. z příkladu za definicí 2.2.2. Pro přehlednost tabulku násobení 2.1 vyjádříme ve výše zavedených symbolech pro prvky báze oktonionů $\{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Viz tabulku 2.2

$\cdot$	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Tabulka 2.2: Násobení prvků báze $\mathbb{O}$

Z tabulky je patrné, že oktoniony nejsou ani asociativní (například $(e_1e_2)e_3 = e_6$ a $e_1(e_2e_3) = -e_6$), ani „antiantiasociativní“ (tj. $(ab)c \neq -a(bc)$ pro nějaká $a, b, c \in \mathbb{O}$; například $(e_1e_2)e_4 = -1$ a $e_1(e_2e_4) = -1$).

Dále platí, že „násobení následníků se zachovává“ v následujícím smyslu

$$\forall i, j, k \in \mathbb{Z}_7 : e_ie_j = e_k \Rightarrow e_{i+1}e_{j+1} = e_{k+1}.$$

Násobení se zachovává také při „zdvojování indexu“

$$\forall i, j, k \in \mathbb{Z}_7 : e_ie_j = e_k \Rightarrow e_{2i}e_{2j} = e_{2k}.$$

Poznámka. Předchozí dvě rovnosti spolu s jedním netriviálním vztahem, například $e_1e_2 = e_4$, určují již jednoznačně tabulku násobení oktonionů.

Příklad. Zkusme například vynásobit e_1e_5. Vycházíme z rovnosti $e_1e_2 = e_4$. Přičteme k indexům jedničku, dostaneme $e_2e_3 = e_5$. Zdvojnásobením indexů obdržíme $e_4e_6 = e_3$. Opětovným zdvojnásobením indexů dostaneme požadovaný vztah $e_1e_5 = e_6$. (Operace s indexy jsou prováděny v $\mathbb{Z}_7$.)

Poznámka. V literatuře se někdy objevuje pro oktoniony název oktávy nebo Cayleyho čísla.

2.4 Jordanova algebra hermitovských 3x3 matic nad oktoniony

Definice 2.4.1. Algebrou hermitovských 3×3 matic nad oktoniony $\mathbb{O}$ míníme

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_3(\mathbb{O}) &:= \{A \in M(3,\mathbb{O}); \overline{A}^T = A\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & \xi_3 \end{pmatrix}; (\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{R}^3, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{O}^3 \right\}\end{aligned}$$

se součinem $A \circ B := \frac{1}{2}(AB + BA)$.

Poznámka. Algebra $\mathfrak{J}_3(\mathbb{O})$ je příkladem tzv. Jordanovy algebry.

Následující věta, která je analogem věty o diagonalizaci pro matice nad komutativními tělesy, nám usnadní provádění některých úvah v Moufangové rovině, která bude definována v 5. kapitole.

Věta 2.4.1. Pro každou $A \in \mathfrak{J}_3(\mathbb{O})$ existuje unitární transformace $B \in \mathfrak{J}_3(\mathbb{O})$ ($\overline{B^T}B = B\overline{B^T} = I$), že BAB^* je diagonální matice. (Tradičně se značí $B^* := \overline{B^T}$. Toto značení budeme dále v textu používat.)

Důkaz. Viz Freudenthal [2]. $\square$

Kapitola 3

Projektivní roviny

3.1 Základní definice

Definice 3.1.1. *Projektivní rovina* je trojice $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R})$, kde $\mathcal{P}, \mathcal{L}$ jsou neprázdné množiny ($\mathcal{P}$ se nazývá *množina bodů* a $\mathcal{L}$ *množina přímek*) a $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ je relace (pokud $(P, l) \in \mathcal{R}$, kde $P \in \mathcal{P}, l \in \mathcal{L}$ říkáme, že P *leží* na l nebo též l *prochází* P), která splňuje

1. Pro každé dva různé body P_1, P_2 existuje právě jedna přímka l, která prochází oběma body P_1, P_2. (Takovou přímku budeme značit P_1P_2.)

2. Pro každé dvě různé přímky l_1, l_2 existuje právě jeden bod P, který leží na obou přímkách. (Takový bod nazýváme *průsečík přímek* l_1, l_2 a značíme $P = l_1 \cap l_2$. Poznamenejme, že $l_1 \cap l_2$ nemusí formálně ležet v $\mathcal{P}$, jedná se tedy o označení dávající význam $\cap$.)

3. Existuje čtveřice bodů taková, že žádné tři z nich neleží na jedné přímce.

4. Existuje čtveřice přímek taková, že žádné tři z nich neprocházejí stejným bodem.

Definice 3.1.2. Množina bodů $\{P_1, ..., P_n\} \subset \mathcal{P}$, $n \in \mathbb{N}$, se nazývá *kolineární*, jestliže všechny body z množiny leží na jedné přímce.

Poznámka.

1. Uvedené axiomy projektivní roviny implikují dualitu jistých pojmů v projektivní rovině. Lze zaměnit výrazy „bod“ s „přímka“ a „leží na“

s „prochází“, aniž by se změnila množina axiomů. Tj. i ve výrocích lze simultánně zaměnit výrazy „bod“ s „přímka“ a „leží na“ s „prochází“, aniž by se změnila jejich pravdivost.

2. Z podmínek 3. a 4. v definici projektivní roviny lze ukázat, že projektivní rovina obsahuje nejméně sedm bodů a sedm přímek. Nejmenší projektivní rovina se nazývá *Fanova rovina*, viz oddíl 3.1.1.

3. Relaci $\mathcal{R}$ nazýváme *incidenční struktura*.

Definice 3.1.3. Množina D uzavřená na dvě binární operace $\cdot$ a $+$ se nazývá *těleso*, pokud pro každé $a, b, c \in D$ operace splňují následující podmínky.

1. Existuje prvek $1 \in D$ takový, že $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
2. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
3. $\exists a^{-1} \in D$ takové, že $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.
4. $a + b = b + a$.
5. Existuje prvek $0 \in D$ takový, že $a + 0 = a$.
6. $a + (b + c) = (a + b) + c$.
7. $\exists -a \in D$ takové, že $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
8. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
9. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Dále budeme psát ab místo $a \cdot b$.

Poznámka. Povšimněme si, že nepožadujeme, aby operace $\cdot$ byla komutativní, jak bývá u těles obyčejně zvykem požadovat.

Definice 3.1.4. Buď D libovolné těleso. Pro $(x, y, z) \in D^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ zavedeme označení $[x : y : z] := \{(rx, ry, rz); r \in D^\times\}$ a $\langle a : b : c\rangle := \{(sx, sy, sz); s \in D^\times\}$, kde $D^\times := D \setminus \{0\}$.

Definice 3.1.5. Pro těleso D nazýváme *projektivní rovinou nad tělesem D* trojici $\mathbb{P}(D) := (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R})$, kde

$\mathcal{P} := \{[x : y : z]; x, y, z \in D, (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\},$

$$\mathcal{L} := \{\langle a:b:c\rangle; a,b,c \in D, (x,y,z) \neq (0,0,0)\} \text{ a}$$

$$\mathcal{R} := \{([x:y:z], \langle a:b:c\rangle) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}; ax+by+cz = 0\}.$$

Trojici $[x:y:z] = \{(rx,ry,rz); r \in D^\times\}$ nazýváme *homogenní souřadnice bodu*; analogicky nazýváme $\langle a:b:c\rangle$ *homogenní souřadnice přímky.*

Tvrzení 3.1.1. Nechť D je těleso. Pak množina $\mathbb{P}(D) = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R})$, definovaná výše, je projektivní rovina.

Důkaz. Ověříme axiomy projektivní roviny.

1. Nechť $P = [x:y:z]$ a $P' = [x':y':z']$ jsou dva různé body. Protože $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $x \neq 0$, a protože bod P je zapsán v homogenních souřadnicích, můžeme položit $x = 1$. Důležitý je poznatek, že $yx' - y' \neq 0$ nebo $zx' - z' \neq 0$, protože jinak by bylo $x'1 = x', x'y = y'$ a $x'z = z'$, což by znamenalo, že $P = P'$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $yx' - y' \neq 0$.

   (a) Nejdříve ukážeme, že existuje přímka spojující body P, P'. Nechť $q = \langle a:b:c\rangle$, kde $b = (zx'-z')(y'-yx')^{-1}$, $a = -(by+z)$ a $c = 1$. Jelikož $ax+by+cz = -(by+z)\cdot 1+by+z\cdot 1 = 0$, je $P \in q$, a jelikož $ax'+by'+cz' = -(by+z)x'+by'+z' = b(y'-yx')-zx'+z' = (zx'-z')(y'-yx')^{-1}(y'-yx')-zx'+z' = 0$, je $P' \in q$, a proto přímka q spojuje body P, P'.

   (b) Dále ukážeme jednoznačnost přímky. Nechť $q' = \langle a':b':c'\rangle$ je přímka, která též spojuje body P, P'. Kdyby $c' = 0$, pak by $a'x'+b'y' = 0$ a $a'+b'y = 0$. Odečtením pravého x' násobku druhé rovnice od první rovnice bychom dostali rovnost $0 = (a'x'+b'y')-(a'+b'y)x' = -b'yx'+b'y' = b'(y'-yx') = 0$. Jelikož $y'-yx' \neq 0$, je $b' = 0$, z čehož $a' = 0$, což dává spor s definicí přímky. Tedy $c \neq 0$ a můžeme předpokládat, že $c' = 1$. (Tímto výběrem zvolíme právě jednu trojici (a',b',c') určující přímku $q' = \langle a':b':c'\rangle$.) Protože $P, P' \in q$ a $P, P' \in q'$, dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} a+by+z &= 0, & a'+b'y+z &= 0,\\ ax'+by'+z' &= 0, & a'x'+b'y'+z' &= 0. \end{aligned}$$

   První dvě rovnice implikují $a+by = a'+b'y$. Z druhých dvou rovnic plyne, že $ax'+by' = a'x'+b'y'$. Celkově dostáváme $a-a' =$

$(b-b')y$ a $(a-a')x' = (b-b')y'$. Z posledních dvou rovnic získáme, že $(b'-b)yx' = (b'-b)y'$.Pro spor předpokládejme, že $b \neq b'$. Pak ale dostáváme $yx' - y' = 0$, což je ve sporu s $yx' - y' \neq 0$. Tedy $b = b'$, což implikuje $a = a'$ díky rovnosti $a - a' = (b - b')y$, tj. přímka q' je totožná s q, což znamená, že dané dva body spojuje právě jedna přímka.

2. Důkaz toho, že každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě, je obdobný důkazu toho, že každé dva body spojuje právě jedna přímka. (Jen se vymění role bodů $[x : y : z]$ a přímek $\langle a : b : c\rangle$.)

3. Body $A = [1 : 0 : 0], B = [0 : 1 : 0], C = [0 : 0 : 1], D = [1 : 1 : 1]$ jsou čtyři po třech nekolineární body. Přímky spojující body jsou tyto následovné

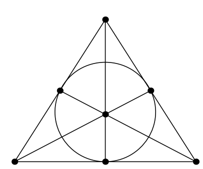
$$\begin{aligned} AB &= \langle 0:0:1\rangle, & AC &= \langle 0:1:0\rangle, & AD &= \langle 0:1:-1\rangle,\\ BC &= \langle 1:0:0\rangle, & BD &= \langle 1:0:-1\rangle, & CD &= \langle 1:-1:0\rangle. \end{aligned}$$

4. Pro přímky $a = \langle 1 : 0 : 0\rangle, b = \langle 0 : 1 : 0\rangle, c = \langle 0 : 0 : 1\rangle$ a $d = \langle 1 : 1 : 1\rangle$ platí, že se žádné tři z nich se neprotínají v jednom bodě, což se ukáže stejně jako v předchozím bodě, tj. výpočtem.

□

3.1.1 Fanova rovina

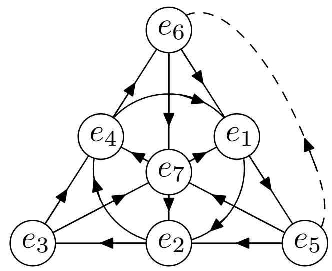
Definice 3.1.6. *Fanova rovina* je projektivní rovina se sedmi body a sedmi přímkami. Viz obrázek 3.1, pomocí nějž nyní konstituenty a relaci vysvětlíme přesněji.



Obrázek 3.1: Fanova rovina.

Body $\mathcal{P}$ jsou „vrcholy“, „středy stran“ a „těžiště trojúhelníka“. Přímkami $\mathcal{L}$ jsou „strany trojúhelníka“, „těžnice“ a „kružnice vepsaná“.

Poznámka. Fanova rovina souvisí s multiplikativní strukturou oktonionů. Všechny vrcholy $\{e_i; i = 1, ..., 7\}$ spolu s 1 tvoří bázi oktonionů. Na každé přímce je šipkou naznačen směr. „Kružnice“, všechny „strany“ a všechny „těžnice“ chápeme jako „uzavřené křivky“, jak je naznačeno čárkovanou čarou, byť pouze u jedné ze stran na obrázku 3.2.



Obrázek 3.2: Multiplikativní struktura $\mathbb{O}$.

Všechny dvojice (různých) bodů (e_i, e_j) leží právě na jedné přímce, která obsahuje právě jeden další bod e_k. Bod e_k pak odpovídá součinu e_i a e_j až na znaménko: $e_i \cdot e_j = \varepsilon e_k$, kde $\varepsilon \in \{+1, -1\}$. Pokud v diagramu e_i předchází e_j je $\varepsilon = +1$, jinak je $\varepsilon = -1$.

Přidáme-li, že 1 je neutrální prvek a $\forall i \in \{1, ..., 7\} : e_i^2 = -1$, popíšeme pomocí Fanovy roviny násobení na bázi oktonionů.

3.2 Ternární okruhy

Definice 3.2.1. *Ternární okruh* T je dvojice (R, t), kde R je množina a t je ternární operace, $t : R \times R \times R \to R$, splňující:

(T1) Existují prvky $0, 1 \in R$ takové, že $0 \neq 1$ a $t(1, a, 0) = t(a, 1, 0) = a$ pro všechna $a \in R$ a $t(a, 0, c) = t(0, a, c) = c$ pro všechna $a, c \in R$.

(T2) Nechť $a, b, c, d \in R$ takové, že $a \neq c$, pak existuje právě jedno $x \in R$, že $t(x, a, b) = t(x, c, d)$.

(T3) Nechť $a, b, c \in R$, pak existuje právě jedno $x \in R$ takové, že $t(a, b, x) = c$.

(T4) Nechť $a, b, c, d \in R$ takové, že $a \neq c$, pak existuje právě jedna dvojice $(x, y) \in R \times R$, že $t(a, x, y) = b$ a $t(c, x, y) = d$.

Tvrzení 3.2.1. Nechť D spolu s operacemi $\cdot$ a $+$ je těleso, pak (D, t) je ternární okruh, pokud t je definováno předpisem $t(a, b, c) = a \cdot b + c$, kde $a, b, c \in D$.

Důkaz.

1. 0 a 1 z tělesa splňují $t(1, a, 0) = t(a, 1, 0) = a \cdot 1 + 0 = 1 \cdot a + 0 = a$ a $t(a, 0, c) = t(0, a, c) = 0 \cdot a + c = a \cdot 0 + c = c$ pro všechna $a, c \in D$.

2. Nechť $a, b, c, d \in D$ jsou takové, že $a \neq c$. Rovnost z T2 je ekvivalentní $xa+b = xc+d$, odtud $x(a-c) = d-b$. Takové x je jediné díky definici tělesa.

3. Nechť $a, b, c \in D$. $t(a, b, x) = c$ je splněna pro $x = c - ab$, které je jediné díky definici tělesa.

4. Nechť $a, b, c, d \in D$ jsou dané takové, že $a \neq c$. Podmínky $ax + y = b$ a $cx + y = d$ implikují $(c - a)x = d - b$, odkud z definice tělesa plyne jednoznačnost x, a sice $x = (c-a)^{-1}(d-b)$. Odtud a z $ax+y = b$ plyne jednoznačnost y, a sice $y = b - a(c - a)^{-1}(d - b)$. Přímým výpočtem se ověří, že výše nalezené x a y splňují uvažované rovnice.

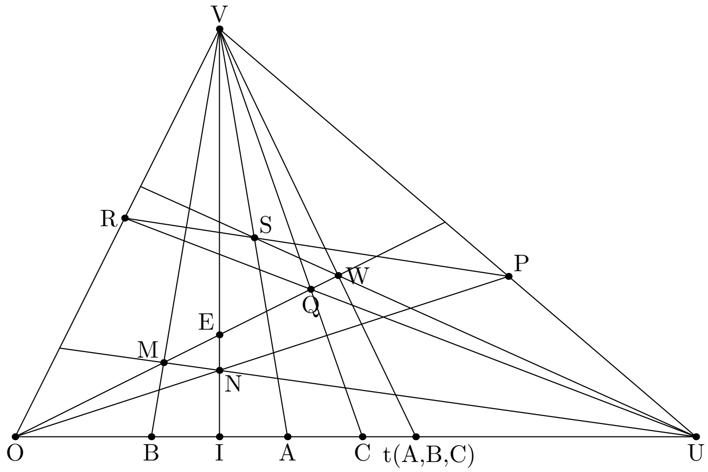
$\square$

Na přímce v projektivní rovině zavedeme souřadnice pomocí následující konstrukce převzaté z knihy Stevenson [7, konstrukce 9.2.4, s. 276].

Konstrukce 3.2.2. Buď $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R})$ projektivní rovina a mějme čtyři různé po třech nekolineární body U, V, O, E. Definujme $R := OU - \{U\}$ a $t : R \times R \times R \to R$ pro $A, B, C \in R$ předpisem $t(A, B, C) = VW \cap OU$, kde W je definováno následovně:

$$\begin{aligned} M &:= VB \cap OE & N &:= UM \cap VE \\ P &:= ON \cap UV & Q &:= CV \cap OE \\ R &:= UQ \cap OV & S &:= PR \cap AV \\ W &:= SU \cap OE. \end{aligned}$$

Podmínkou korektnosti konstrukce souřadnic je, že každý z bodů a každá z přímek v projektivní rovině existuje, což je zajištěno právě definicí projektivní roviny.



Obrázek 3.3: Konstrukce ternárního okruhu

Příklad. Proveďme konstrukci pro reálnou projektivní rovinu $\mathbb{P}(\mathbb{R})$. Položme $O = [0:0:1], V = [1:0:0], U = [0:1:0], E = [1:1:1]$, pak $R = \langle 1:0:0\rangle - \{[0:1:0]\}$. Body $A, B, C \in R$ nechť mají souřadnice $A = [0:a:1], B = [0:b:1], C = [0:c:1]$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Body potřebné ke konstrukci $t(A, B, C)$ vycházejí následovně:

$$\begin{array}{llll}
M = VB \cap OE: & VB = \langle 0:1:-b\rangle, & OE = \langle 1:-1:0\rangle & M = [b:b:1] \\
N = UM \cap VE: & UM = \langle 1:0:-b\rangle, & VE = \langle 0:-1:1\rangle & N = [b:1:1] \\
P = ON \cap UV: & ON = \langle 1:-b:0\rangle, & UV = \langle 0:0:1\rangle & P = [b:1:0] \\
Q = CV \cap OE: & CV = \langle 0:1:-c\rangle, & OE = \langle 1:-1:0\rangle & Q = [c:c:1] \\
R = UQ \cap OV: & UQ = \langle 1:0:-c\rangle, & OV = \langle 0:1:0\rangle & R = [c:0:1] \\
S = PR \cap AV: & PR = \langle 1:-b:-c\rangle, & AV = \langle 0:1:-a\rangle &
\end{array}$$

$$S = [ba + c : a : 1]$$

$W = SU \cap OE : SU = \langle 1:0:-(ba+c)\rangle, OE = \langle 1:-1:0\rangle$

$$W = [ba + c : ba + c : 1]$$

$t(A, B, C) = VW \cap OU : VW = \langle 0:1:-(ba+c)\rangle,\ OU = \langle 1:0:0\rangle$.
Cekově dostaneme $t(A, B, C) = [0 : ba + c : 1]$, tj. můžeme vágně říci, že ternární struktura t zachycuje jistým způsobem lineární operace v $\mathbb{R}$.

Tvrzení 3.2.3. Dvojice (R, t) popsaná v konstrukci 3.2.2 je ternární okruh.

Důkaz. Zvolme pevně body U, V, O, E splňující předpoklady konstrukce a ověřme axiomy ternárního okruhu.

1. Ukážeme, že O plní roli nuly a $I = VE \cap OU$ plní roli jedničky. Buď $A = O$. Pak $S = PR \cap AV = R$ a $W = RU \cap OE = Q$, takže $t(O, B, C) = VQ \cap OU = C$.
   Buď $B = O$. Pak $M = VO \cap OE = O, N = UO \cap VE, P = ON \cap UV = U$, protože $N \in OU$. Dále definujme $S = UR \cap AV, W = SU \cap OE = Q$, protože $S \in RU$, a tak $t(A, O, C) = VQ \cap OU = C$.
   Buď $C = O$ a $A = I$. Pak $Q = OV \cap OE = O, R = UO \cap OV = O, S = PO \cap IV = PO \cap EV = N$ a $W = NU \cap OE = M$, tedy $t(I, B, O) = VM \cap OU = B$.
   Buď $C = O$ a $B = I$. Pak $M = VI \cap OE = VE \cap OE = E, N = UE \cap VE = E, P = OE \cap UV, Q = R = O, S = PO \cap AV = OE \cap AV$, protože $P \in OE$. Definujme $W = SU \cap OE = S$, z čehož $t(A, I, O) = VW \cap OU = VS \cap OU = AV \cap OU = A$.

2. Mějme $B, C, B', C' \in R$ dané takové, že $B \neq B'$. Odpovídající zkonstruované body budeme nebo nebudeme označovat čárkou podle toho, zda pocházejí z konstrukce vycházející z „čárkovaných“ nebo „nečárkovaných“ bodů. Jelikož konstrukce P' závisí jen na B' a R' na C', stejně jako P na B a R na C, snadno se ověří, že $PR \neq P'R'$. Buď $S' := PR \cap P'R'$ a buď $A := VS' \cap OU$. Jelikož je $t(A, B', C')$ definováno pomocí S' ve stejném smyslu jako je $t(A, B, C)$ definováno pomocí S, je $t(A, B, C) = t(A, B', C')$. Navíc z definice t plyne, že A je jediný bod splňující tuto rovnost, a proto tedy T2.

3. Mějme $A, B, D \in R$ dané. Body W, S, R, Q a X definujme následovně. $W = DV \cap OE, S = WU \cap AV, R = PS \cap OV$, kde P je určen konstrukcí, neboť jeho definice v konstrukci závisí jen na již zvoleném B. Definujme $Q = RU \cap OE$ a $X = VQ \cap OU$. Pokud body Q, R, S, W hrají stejnou roli jako v konstrukci, pak je zřejmé, že $t(A, B, X) = D$. Navíc X je určeno jednoznačně, jak plyne z definice t. Tímto jsme dokázali podmínku $T3$.

4. Zvolme $A, A', X, X' \in R$ takové, že $A \neq A'$. Buď $W = XV \cap OE, W' = X'V \cap OE, S = UW \cap AV$ a $S' = UW' \cap A'V$. Podle konstrukce $S \neq S'$, takže můžeme definovat body P, R, Q, C, N, M, B rovnostmi $P = SS' \cap VU, R = SS' \cap OV, Q = RU \cap OE, C = VQ \cap OU, N = PO \cap VE, M = UN \cap OE, B = VM \cap OU$. Tyto body hrají stejnou roli jako v konstrukci, a proto $t(A, B, C) = X$ a $t(A', B, C) = X'$. Opět z definice t plyne, že dvojice bodů (B, C) je jediná, která tyto rovnosti

splňuje, čímž je platnost T4 ověřena.

$\square$

Definice 3.2.2. Dvojici (R, t) popsanou v konstrukci 3.2.2 pro projektivní rovinu $\mathbb{P}$ nazveme *souřadnicový okruh roviny* $\mathbb{P}$.

V následující definici zavedeme některé pojmy pro ternární okruhy.

Definice 3.2.3. Pro ternární okruh (R, t) definujme $a + b := t(1, a, b)$ a $a.b := t(a, b, 0)$ pro všechna $a, b \in R$. Ternární okruh (R, t) nazveme *asociativní*, pokud $(R, +, .)$ je těleso. Ternární okruh nazveme *alternativní*, pokud platí:

1. $(R, +)$ je grupa a 0 je její neutrální prvek,
2. $(R, +, .)$ splňuje $(a+b).c = a.c+b.c$ a $a.(b+c) = a.b+a.c$ pro všechna $a, b, c \in R$ a navíc 1 je neutrální prvek $(R \setminus \{0\}, .)$,
3. $(a.a).b = a.(a.b)$, $(a.b).b = a.(b.b)$ a $(a.b).a = a.(b.a)$ pro všechna $a, b \in R$,
4. (R, t) je souřadnicovým oborem nějaké projektivní roviny.

Kapitola 4

Desarguesovskost a asociativita

V této kapitole uvedeme základní pojmy umožňující nám formulovat souvislost Desarguesových axiomů s algebraickými vlastnostmi souřadnicových okruhů projektivních rovin.

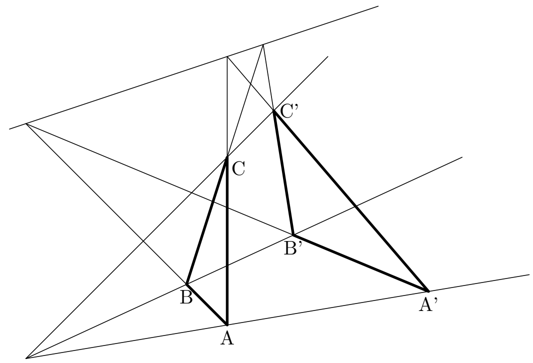
4.1 Desarguesův axiom a Malý Desarguesův axiom

V této sekci formulujeme Desarguesův a malý Desarguesův axiom a demonstrujeme je pomocí obrázků.

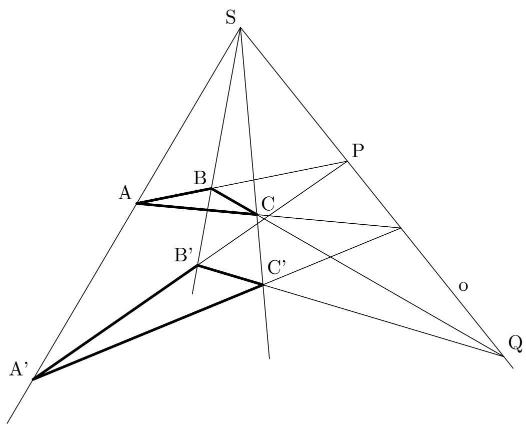
Poznámka. Pro jednoduchost budeme nazývat trojici nekolineárních bodů v nějaké projektivní rovině trojúhelníkem.

Definice 4.1.1 (Desarguesův axiom)**.** Řekneme, ze projektivní rovina $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R})$ splňuje *Desarguesův axiom*, pokud platí: Jestliže existují dva trojúhelníky A, B, C a A', B', C' takové, že se přímky AA', BB' a CC' protínají v jednom bodě, pak průsečíky přímek $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$ a $CA \cap C'A'$ leží na jedné přímce. Projektivní rovina, která splňuje Desarguesův axiom, se nazývá *desarguesovská.*

Definice 4.1.2 (Malý Desarguesův axiom)**.** Nechť $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R})$ je projektivní rovina, nechť bod S leží na přímce o. Mějme dány dva trojúhelníky A, B, C a A', B', C' takové, že přímky AA', BB' a CC' procházejí bodem S, přímky AB a $A'B'$ se protínají v bodě $P \in o$ a přímky BC a $B'C'$ v bodě $Q \in o$. Pak se přímky AC a $A'C'$ protínají v bodě ležícím na přímce o.



Obrázek 4.1: Desarguesův axiom



Obrázek 4.2: Malý Desarguesův axiom

Poznámka. Desarguesův axiom mluví o jakékoli poloze bodu $S \in \mathcal{P}$ a přímky $o \in \mathcal{L}$, a nikoli jen o $S \in o$. Malý Desarguesův axiom mluví o speciálním případu $S \in o$, a proto projektivní rovina splňuje malý Desarguesův axiom, pokud splňuje („velký“) Desarguesův axiom.

Poznámka. Projektivní rovina, která nesplňuje Desarguesův axiom se nazývá *Moufangové rovina* na počest Ruth Moufangové, která jako první zkonstruovala příklad nedesarguesovské roviny. Existuje reálná a komplexní verze Moufangové roviny, reálnou se budeme více zabývat v kapitole 5.

4.2 Desarguesův axiom v projektivní rovině nad tělesem

Nejprve uvedeme dvě pomocná tvrzení.

Tvrzení 4.2.1. Nechť D je těleso. Nechť $P = [x : y : z] \neq P' = [x' : y' : z']$ a $P'' = [x'' : y'' : z'']$ jsou body $\mathbb{P}(D)$. Pak body P, P', P'' jsou kolineární právě tehdy, když existují $r, s \in D$ ne obě nulové takové, že $x'' = xr + x's$, $y'' = yr + y's$ a $z'' = zr + z's$.

Důkaz.

Nejdříve dokážeme implikaci „$\Leftarrow$“. Nechť $s \neq 0$ nebo $r \neq 0$ a označme $PP' =: \langle a : b : c \rangle$. Položme $x'' := xr + x's$, $y'' := yr + y's$ a $z'' := zr + z's$ a pišme $ax'' + by'' + cz'' = a(xr + x's) + b(yr + y's) + c(zr + z's) = axr + byr + czr + ax's + by's + cz's = (ax + by + cz)r + (ax' + by' + cz')s = 0$, neboť z incidence P a P' s $PP' = \langle a : b : c \rangle$ plyne $ax + by + cz = 0$ a $ax' + by' + cz' = 0$. Ze srovnání levé a pravé strany posledního řetězce rovností dostáváme $P'' = [x'' : y'' : z''] \in PP' = \langle a : b : c \rangle$, což bylo dokázat.

2. Nyní dokážeme implikaci „$\Rightarrow$“. Nechť body $P = [x : y : z]$, $P' = [x' : y' : z']$ a $P'' = [x'' : y'' : z'']$ jsou tři různé body. Neboť $x = y = z = 0$ nenastane z definice, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $x \neq 0$. Navíc protože bod P máme vyjádřený v homogenních souřadnicích, můžeme položit $x = 1$. Víme, že $yx' - y' \neq 0$ nebo $zx' - z' \neq 0$, protože jinak by bylo $x'1 = x', x'y = y'$ a $x'z = z'$, což by znamenalo, že $P = P'$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $yx' - y' \neq 0$. Položme $r := x'' - x's$ a $s := (yx' - y')^{-1}(yx'' - y'')$. Nechť body P, P', P'' leží na přímce $q = \langle a : b : c \rangle$, tj.

$$a + by + cz = 0, \tag{4.1}$$
$$ax' + by' + cz' = 0, \tag{4.2}$$
$$ax'' + by'' + cz'' = 0. \tag{4.3}$$

Rovnici 4.1 vynásobíme zprava r a přičteme k ní rovnici 4.2 vynásobenou zprava s. Dostaneme $0 = ar + byr + ax's + by's + c(zr + z's) = a(x'' - x's) + by(x'' - x's) + ax's + by's + c(zr + z's) = ax'' + byx'' + by's - byx's + c(zr + z's) = ax'' + byx'' - b(yx' - y')s + c(zr + z's) =$

$ax'' + byx'' - b(yx' - y')(yx' - y')^{-1}(yx'' - y'') + c(zr + z's) = ax'' + byx'' - byx'' + by'' + c(zr + z's) = ax'' + by'' + c(zr + z's)$. Od této rovnosti odečteme rovnici 4.3 a dostáváme $zr + z's = z''$. Dopočtením získáme $x'' = r + x's$ a $y'' = yr + y's$, jak plyne ze vztahů pro r a s. Kdyby $r = s = 0$, pak by $x'' = y'' = z'' = 0$, jak plyne ze tří vztahů před touto rovností, a tak by P'' nebyl bod. Proto je alespoň jedno z r, s nenulové, jak bylo dokázat.

$\square$

Tvrzení 4.2.2. Nechť D je těleso a $\mathbb{P}(D)$ je projektivní rovina nad tímto tělesem. Pak tři různé body P, Q, R této roviny jsou kolineární právě tehdy, když existují homogenní souřadnice $[p_1 : p_2 : p_3]$ a $[q_1 : q_2 : q_3]$ bodů P a Q v tomto pořadí takové, že $[r_1 : r_2, r_3]$, kde $r_i := p_i + q_i, i = 1, 2, 3$, jsou homogenní souřadnice bodu R.

Důkaz. Implikace „$\Leftarrow$“ plyne z předchozího tvrzení 4.2.1. Pro opačnou implikaci předpokládejme, že $P = [p'_1 : p'_2 : p'_3]$, $Q = [q'_1 : q'_2 : q'_3]$ a $R = [r'_1 : r'_2 : r'_3]$. Jelikož tyto body jsou kolineární, existují opět dle tvrzení 4.2.1 prvky $s, t \in D$, že $r'_i = p'_i s + q'_i t$ pro $i = 1, 2, 3$. Pokud by t nebo s bylo nula, pak by $R = Q$ nebo $R = P$, což je vyloučeno z předpokladu. Definujme $r_i := r'_i s^{-1}$, $q_i := q'_i t s^{-1}$ a $p_i := p'_i$ pro $i = 1, 2, 3$. Zjevně $[p_1 : p_2 : p_3]$, $[q_1 : q_2 : q_3]$ a $[r_1 : r_2 : r_3]$ jsou homogenní souřadnice P, Q a R v tomto pořadí. Pro $i = 1, 2, 3$ proveďme výpočet $p_i + q_i = p_i + q'_i t s^{-1} = p_i + (r'_i - p_i s)s^{-1}$, jak plyne z volby s a t. Úpravou posledního výrazu dostáváme $p_i + r'_i s^{-1} - p_i = r'_i s^{-1} = r_i$, $i = 1, 2, 3$. Tj. celkem $p_i + q_i = r_i$, $i = 1, 2, 3$, což bylo dokázat. $\square$

Poznámka. Záměnami bodů z předchozího tvrzení snadno získáme, že homogenní souřadnice bodu R jsou např. i tvaru $[p_1 - q_1 : p_2 - q_2 : p_3 - q_3]$.

Následující věta hovoří o tom, že projektivní rovina nad tělesem je desarguesovská.

Tvrzení 4.2.3. Buď D těleso, potom projektivní rovina $\mathbb{P}(D)$ nad tělesem D splňuje Desarguesův axiom.

Důkaz. Nechť P, Q, R a P', Q', R' jsou dva trojúhelníky takové, že přímky PP', QQ' a RR' se protínají v jednom bodě S. Nechť homogenní souřadnice bodů jsou: $P = [p_1 : p_2 : p_3]$, $Q = [q_1 : q_2 : q_3]$, $R = [r_1 : r_2 : r_3]$, $S = [s_1 : s_2 : s_3]$, $P' = [p'_1 : p'_2 : p'_3]$, $Q' = [q'_1 : q'_2 : q'_3]$, $R' = [r'_1 : r'_2 : r'_3]$. Protože S, P, P' jsou kolineární body můžeme předpokládat podle tvrzení 4.2.2, že souřadnice P a P' jsou takové, že $p'_i = p_i + s_i, i = 1, 2, 3$. Podobně pro Q, Q' a R, R', $q'_i = q_i + s_i$, $r'_i = r_i + s_i$, $i = 1, 2, 3$. Buď $A = PQ \cap P'Q'$, $B = PR \cap P'R'$ a $C = QR \cap Q'R'$. Bod $[p'_1 - q'_1 : p'_2 - q'_2 : p'_3 - q'_3]$ dle poznámky pod tvrzením 4.2.2 leží na $P'Q'$. Dosazením $p'_i = p_i + s_i$ a $q'_i = q_i + s_i$, $i = 1, 2, 3$, do naposled napsaných homogenních souřadnic dostáváme, že tento bod je roven $[p_1 - q_1 : p_2 - q_2 : p_3 - q_3]$, tj. dle poznámky pod tvrzením 4.2.2 leží na PQ. Z definice projektivní roviny a definice A plyne, že $A = [p_1 - q_1 : p_2 - q_2 : p_3 - q_3]$. Analogicky získáme $B = [p_1 - r_1 : p_2 - r_2 : p_3 - r_3]$ a $C = [q_1 - r_1 : q_2 - r_2 : q_3 - r_3]$. Z těchto tvarů bodů A, B a C však již plyne z tvrzení 4.2.2, že jsou kolineární, což bylo dokázat. $\square$

Kapitolu ukončíme dvěma větami, v nichž je uvedena souvislost Desarguesova axiomu s asociativností souřadnicového okruhu a souvislost splnění malého Desarguesova axiomu s alternativností.

Věta 4.2.4. V projektivní rovině $\mathbb{P}$ je splněn Desarguesův axiom právě tehdy, když je její souřadnicový okruh asociativní ternární okruh.

Důkaz. Viz Stevenson [7, 9.2.12 s. 282]. $\square$

Věta 4.2.5. V projektivní rovině $\mathbb{P}$ je splněn malý Desarguesův axiom právě tehdy, když je její souřadnicový okruh alternativní ternární okruh.

Důkaz. Viz Stevenson [7, 14.2.5 s. 379]. $\square$

Kapitola 5

Projektivní Moufangové rovina

V této kapitole nejprve zavedeme potřebné pojmy, abychom mohli zkonstruovat reálnou projektivní Moufangové rovinu a popsat body, přímky a relaci incidence této roviny.

Definice 5.0.1. Nechť X je matice z $\mathfrak{J}_3(\mathbb{O})$, tj. $X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & \xi_3 \end{pmatrix}$ pro nějaké $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{O}$. (Často budeme psát stručně $X = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, x_1, x_2, x_3)$.) Zaveďme formu

$$\chi : X \mapsto \chi(X) := \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = Tr(X),$$

kde Tr značí stopu matice X, a formu

$$\det : X \mapsto \det X := \xi_1\xi_2\xi_3 - (\xi_1\|x_1\| + \xi_2\|x_1\| + \xi_3\|x_1\|) + Re(x_1x_2x_3).$$

Dodejme, že definujeme $Re(x_1x_2x_3) := Re((x_1x_2)x_3) = Re(x_1(x_2x_3)) = Re((x_2x_3)x_1)$.

Poznámka.

1. Forma $\mathfrak{J}_3(\mathbb{O}) \ni X \mapsto \chi(X^2)$ je kvadratická forma splňující předpis

$$\chi(X^2) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + 2\|x_1\| + 2\|x_1\| + 2\|x_1\|, \tag{5.1}$$

   jak lze snadno nahlédnout.

2. Forma det je kubická forma. Ze vztahu pro χ a det lze odvodit vztah

$$\det X = \frac{1}{3}\chi(X^3) - \frac{1}{2}\chi(X^2)(\chi(X)) + \frac{1}{6}\chi(X)^3. \tag{5.2}$$

Definice 5.0.2. Definujme trilineární formu

$$(\cdot,\cdot,\cdot) : \mathfrak{J}_3(\mathbb{O}) \times \mathfrak{J}_3(\mathbb{O}) \times \mathfrak{J}_3(\mathbb{O}) \to \mathbb{R}$$

, která je polarizací kubické formy det. Dále definujeme bilineární formu $(\cdot,\cdot) : \mathfrak{J}_3(\mathbb{O}) \times \mathfrak{J}_3(\mathbb{O}) \to \mathbb{R}$, která je polarizací kvadratické formy 5.1.

Poznámka.

1. $(\cdot,\cdot) : \mathfrak{J}_3(\mathbb{O}) \times \mathfrak{J}_3(\mathbb{O}) \to \mathbb{R}$ je nedegenerovaná bilineární forma, což lze odvodit ze vztahu 5.1 a z toho, že $(\cdot,\cdot)$ je polarizace $X \mapsto \chi(X^2)$, kde $X \in \mathfrak{J}_3(\mathbb{O})$.

2. Polarizace $(\cdot,\cdot)$ splňuje

$$(X,Y) = \frac{1}{2}\chi(XY + YX) \tag{5.3}$$

pro každé $X, Y \in \mathfrak{J}_3(\mathbb{O})$.

3. Pro každou matici X z $\mathfrak{J}_3(\mathbb{O})$ platí

$$(X,X) = \chi(X^2) \text{ a}$$

$$(X,X,X) = \det X,$$

jak plyne z definice polarizace

Definice 5.0.3. Pro $X, Y \in \mathfrak{J}_3(\mathbb{O})$ řekneme, že $U \in \mathfrak{J}_3(\mathbb{O})$ je $X \times Y$ právě tehdy, když pro všechna $Z \in \mathfrak{J}_3(\mathbb{O})$ platí, že $(U,Z) = (X,Y,Z)$. (Definice je korektní, neboť $(\cdot,\cdot)$ je nedegenerovaná.)

Poznámka. Pro $X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & \xi_3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} \eta_1 & y_3 & \overline{y_2} \\ \overline{y_3} & \eta_2 & y_1 \\ y_2 & \overline{y_1} & \eta_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{J}_3(\mathbb{O})$ lze pracným, ale přímým výpočtem odvodit vzorec
$X \times Y =$

$$\begin{pmatrix} \xi_2\eta_3 + \xi_3\eta_2 - 2Re(x_1\overline{y}_1) & \overline{x}_2\overline{y}_1 + \overline{x}_2\overline{y}_1 - \xi_3 y_3 - \eta_3 x_3 & x_3y_1 + x_3y_1 - \xi_2\overline{y}_2 - \eta_2\overline{x}_2 \\ x_1y_2 + x_1y_2 - \xi_3\overline{y}_3 - \eta_3\overline{x}_3 & \xi_3\eta_1 + \xi_1\eta_3 - 2Re(x_2\overline{y}_2) & \overline{x}_2\overline{y}_3 + \overline{x}_2\overline{y}_3 - \xi_1 y_1 - \eta_1 x_1 \\ \overline{x}_1\overline{y}_3 + \overline{x}_1\overline{y}_3 - \xi_2 y_2 - \eta_2 x_2 & x_2y_3 + x_2y_3 - \xi_1\overline{y}_1 - \eta_1\overline{x}_1 & \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 - 2Re(x_3\overline{y}_3) \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Poznámka. Vztah $X \times X = 0$ platí právě tehdy, když prvky matice X splňují.

$$\begin{aligned} &\xi_2\xi_3 = \|x_1\|, && \xi_3\xi_1 = \|x_2\|, && \xi_1\xi_2 = \|x_3\|, \\ &\xi_3\overline{x_3} = x_1x_2, && \xi_1\overline{x_1} = x_2x_3, && \xi_2\overline{x_2} = x_3x_1, \end{aligned} \tag{5.5}$$

jak bezprostředně plyne přímo z rovnosti 5.4.

Věta 5.0.6. Formy $X \mapsto \chi(X), X \mapsto \chi(X^2)$ a $X \mapsto \det(X)$ pro $X \in \mathfrak{J}_3(\mathbb{O})$ jsou invariantní vůči unitárním transformacím.

Důkaz. Viz Freudenthal [2]. □

Poznámka.

1. Formy $(\cdot,\cdot)$ a $(\cdot,\cdot,\cdot)$ jsou invariantní vůči unitárním transformacím, protože jsou polarizacemi invariantů $X \mapsto \chi(X^2)$ a $X \mapsto \det(X)$.

2. Pro $X, Y \in \mathfrak{J}_3(\mathbb{O})$ a matici B unitární transformace platí $B(X \times Y)B^* = BXB^* \times BYB^*$, jak plyne z věty 5.0.6.

Nyní již můžeme přistoupit k definici Moufangové roviny.

Definice 5.0.4. *Reálná Moufangové rovina* $\mathbb{OP}^2$ je trojice $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R})$, kde prvky $\mathcal{P}$, prvky $\mathcal{L}$ a relace $\mathcal{R}$ jsou definovány následovně

1. $P \subset \mathfrak{J}_3(\mathbb{O})$ je prvkem $\mathcal{P}$, pokud existuje $P' \in \mathfrak{J}_3(\mathbb{O}), P' \neq 0$ takový, že $P' \times P' = 0$ a $P = \{rP'; r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$; element P' nazveme reprezentantem P.

2. $q \subset \mathfrak{J}_3(\mathbb{O})$ je prvkem $\mathcal{L}$, pokud existuje $Q' \in \mathfrak{J}_3(\mathbb{O}), Q' \neq 0$ takový, že $Q' \times Q' = 0$ a $q = \{rQ'; r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$; element Q' nazveme reprezentantem q.

3. Prvek $(P, q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ leží v $\mathcal{R}$ právě tehdy, když $(P', Q') = 0$ pro libovolného reprezentanta P' bodu P a Q' přímky q.

Poznámka.

1. Definice incidence nezávisí na volbě reprezentanta, neboť pro každé $r, s \in \mathbb{R}$ je $(rP', sQ') = rs(P', S')$, jak plyne z bilinearity $(\cdot,\cdot)$.

2. Přímky a body jsou stejné objekty, ale formálně je odlišujeme. Fakt, že jsou reprezentovány stejnou strukturou, ukazuje na dualitu těchto objektů.

3. Někdy budeme namísto reprezentantů do forem nebo jejich polarizací dosazovat přímo prvky $\mathcal{P}$ nebo $\mathcal{L}$. Jelikož se budeme zabývat pouze nulovostí takovýchto výrazů, je toto ospravedlněno bodem 1. této poznámky. Totéž platí i pro operaci $\times$, budeme-li uvažovat výsledky této operace až na reálný násobek. Oprávněnost těchto a podobných přístupů bude zřejmá vždy ze souvislostí.

Než ověříme, že právě zadefinovaná struktura je projektivní rovina, dokážeme dvě pomocná tvrzení.

Tvrzení 5.0.7. Nechť $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}) = \mathbb{OP}^2$. Pak pro každé $X \in \mathcal{L}$ a $U \in \mathcal{P}$ relace $(X, U) = 0$ platí právě tehdy, když existuje $V \in \mathcal{P}$ takové, že $X = U \times V$.

Důkaz.

1. Nechť $X = U \times V$ pro $U, V \in \mathcal{P}$. Pak $(X, U) = (U \times V, U) = (U, V, U) = (U, U, V) = (U \times U, V) = (0, V)$, neboť U je bod, tj. z definice $U \times U = 0$, a $(\cdot, \cdot, \cdot)$ je symetrická forma.

2. Naopak nechť $(X, U) = 0$ pro $X \in \mathcal{L}$ a $U \in \mathcal{P}$. Podle věty 2.4.1 existuje unitární transformace B taková, že $D := BUB^*$ je diagonální matice. Pro všechna $Z \in \mathfrak{J}_3(\mathbb{O})$ platí $(D \times D, Z) = (D, D, Z) = (B^*UB, B^*UB, B^*ZB) = (U, U, B^*ZB) = (U \times U, B^*ZB) = 0$, protože U je/reprezentuje bod a $(\cdot, \cdot, \cdot)$ je invariantní vůči unitárním transformacím podle věty 5.0.6. Tudíž je $D \times D = 0$, tj. D je přímka (nenulovost D je zřejmá). Reprezentujme diagonální matici D šesticí $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, d_1 = 0, d_2 = 0, d_3 = 0)$. Ze vztahů $\delta_2\delta_3 = \|d_1\|, \delta_3\delta_1 = \|d_3\|, \delta_1\delta_2 = \|d_2\|$, viz (5.5), užitých pro D dostáváme pro diagonální matici D, že nejméně dvě čísla na diagonále D jsou rovna nule. Protože D je nenulová a jelikož body uvažujeme až na reálný násobek, můžeme bez újmy na obecnosti položit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dík předpokladu a invariantnosti $(\cdot, \cdot)$ můžeme psát $0 = (X, U) = (BXB^*, D) = (X', D)$, kde $X' = BXB^*$. Dosadíme-li do vzorce $(X', D) = \frac{1}{2}\chi(X'D + DX')$

konkrétní tvar D a $X' = \begin{pmatrix} \xi_1' & x_3' & \overline{x_2}' \\ \overline{x_3}' & \xi_2' & x_1' \\ x_2' & \overline{x_1}' & \xi_3' \end{pmatrix}$, dostaneme, že $\xi_1' = 0$. Protože $X' \times X' = (BXB^*) \times (BXB^*) = B(X \times X)B^* = 0$, jak plyne z invariance $(\cdot, \cdot)$ a z předpokladu $X \times X = 0$, plyne po dosazení rovnosti $\xi_1' = 0$ do vztahů 5.5, že $x_2' = x_3' = 0$. Celkově získáváme, že X' nabývá tvaru

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2' & x_1' \\ 0 & \overline{x_1}' & \xi_3' \end{pmatrix}.$$

Snadno ověříme, že

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2' & x_1' \\ 0 & \overline{x_1}' & \xi_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_3' & -x_1' \\ 0 & -\overline{x_1}' & \xi_2' \end{pmatrix}.$$

Zvolíme-li za V' matici na pravé straně předchozí rovnosti za znakem $\times$, dostaneme pro $V := B^*V'B$, že $X = U \times V$, což bylo dokázat.

□

Tvrzení 5.0.8. Nechť $X, Y \in \mathfrak{J}_3(\mathbb{O})$ splňují $X \times X = 0$ a $Y \times Y = 0$, pak $(X \times Y) \times (X \times Y) = 0$.

Důkaz. Podle věty 2.4.1 existuje unitární transformace B taková, že $D := BXB^*$ je diagonální matice. Podle výpočtů v důkazu věty 5.0.7 můžeme položit $D = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$. Dále položme $Z := BYB^*$. Nechť $Z = \begin{pmatrix} \zeta_1 & z_3 & \overline{z_2} \\ \overline{z_3} & \zeta_2 & z_1 \\ z_2 & \overline{z_1} & \zeta_3 \end{pmatrix}$.
Zřejmě $Z \times Z = (BYB^*) \times (BYB^*) = B(Y \times Y)B^* = 0$, neboť $\times$ je invariantní a $Y \times Y = 0$ dle předpokladu. Podle vzorce 5.4 je $D \times Z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_3 & z_1 \\ 0 & -\overline{z_1} & \zeta_2 \end{pmatrix} =: W$. Jak plyne z relací 5.5, je $W \times W = 0$, pokud $\zeta_3\zeta_2 = \|z_1\|$ (ostatní relace jsou splněny triviálně). Poslední rovnost plyne z relací 5.5, neboť $Z \times Z = 0$, jak jsme ukázali výše. Tj. máme skutečně $W \times W = 0$ Proveďme výpočet $B[(X \times Y) \times (X \times Y)]B^* = [B(X \times Y)B^*] \times [B(X \times Y)B^*] = [(BXB^*) \times (BYB^*)] \times [(BXB^*) \times (BYB^*)] = (D \times Z) \times (D \times Z) = W \times W = 0$, jak plyne z invariantnosti $\times$ a z předchozího výpočtu výrazu $W \times W$. Celkově tedy $B[(X \times Y) \times (X \times Y)]B^* = 0$. Jelikož B je nesingulární, je i $(X \times Y) \times (X \times Y) = 0$, což bylo dokázat.

□

Nyní dokážeme, že reálná Moufangové rovina je projektivní rovina. V důkazu této věty se již vždy nebudeme explicitně odvolávat na používaná tvrzení, neboť jsme, jak si myslíme, tak dostatečně činili v předchozích dvou tvrzeních.

Věta 5.0.9. $\mathbb{OP}^2 := (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R})$ je projektivní rovina.

Důkaz. Ověříme axiomy projektivní roviny. Axiomy stačí ověřit jen pro body, protože přímky jsou stejné objekty (i když je formálně odlišujeme) a splňují stejné vztahy.

1. (a) Nejdříve dokažme existenci. Nechť U, V jsou dva různé body, pak přímka jimi procházející je $U \times V$, neboť jak vyplývá z tvrzení 5.0.7, je $(U, U \times V) = 0$ a $(V, U \times V) = 0$, a jak vyplývá z tvrzení 5.0.8, je $(U \times V) \times (U \times V) = 0$. (Fakt, že $U \times V \neq 0$, plyne z toho, že U a V jsou různé.)

   (b) Nyní se věnujme jednoznačnosti. Nechť u je přímka procházející body X a Y. Podle věty 2.4.1 existuje unitární transformace B taková, že $D := BuB^*$ je diagonální matice. Podle výpočtů provedených v důkazu věty 5.0.7 můžeme položit $D = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$. Pišme $0 = (X, u) = (BXB^*, BuB^*) = (BXB^*, D)$. Označme $X' := BXB^*$ a položme $X = (\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, x'_1, x'_2, x'_3)$. Dosazením konkrétního tvaru D a X' do vše odvozené rovnice $(X', D) = 0$ dostaneme užitím vztahu pro $(\cdot, \cdot)$, že $X' = (0, \xi'_2, \xi'_3, x'_1, 0, 0)$. Analogicky užitím $0 = (Y, u)$ dostaneme, že $BYB^* =: Y' = (0, \eta'_2, \eta'_3, y'_1, 0, 0)$. Dle formule 5.4 obdržíme

$$X' \times Y' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi'_2\eta'_3 + \xi'_3\eta'_2 - 2Re(x'_1\overline{y_1}') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   tj. $X' \times Y' = rD$ pro příslušné reálné r. Můžeme psát (v rámci třídy ekvivalence) díky invarianci $\times$ a předchozí rovnosti $rD = X' \times Y'$ vztahy $rBuB^* = rD = X' \times Y' = (BXB^*) \times (BYB^*) = B(X \times Y)B^*$. Srovnáním prvního a posledního členu posledního řetězce rovností dostaneme, že $ru = X \times Y$, tj. u a $X \times Y$ jsou stejné přímky, čímž je unicita dokázána.

2. Existence čtyř nekolineárních bodů. Snadno ověříme, že $A, B, C, D \in$

$\mathfrak{J}_3(\mathbb{O})$ jsou 4 různé body Moufangové roviny.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Elementy A, B, C, D jsou body, protože splňují vztahy 5.5, a jsou různé, protože nejsou svými reálnými násobky. Užívajíce toho, že přímka procházející body A, B je dána formulí $A \times B$ a analogicky pro další body, snadno zjistíme následující rovnosti

$$\begin{aligned} A \times B &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \times C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ A \times D &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B \times C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \\ B \times D &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C \times D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že žádné dvě přímky nejsou svými reálnými násobky. Tedy v $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ existuje čtveřice po třech nekolineárních bodů.

$\square$

Nyní dokážeme, že v Moufangové rovině není splněn Desarguesův axiom. Dokázali-li bychom, že souřadnicový okruh Moufangové roviny není asociativní ternární okruh, plynula by její nedesarguesovskost dle tvrzení 4.2.4. My se však obrátíme k jednoduchému důkazu tohoto faktu, a sice dokážeme neplatnost Desarguesova axiomu konstrukcí explicitního protipříkladu. (Přirozeně lze očekávat, že neasociativnost souřadnicového oboru souvisí s neasociativností Jordanovy algebry $\mathfrak{J}_3(\mathbb{O})$.) Naopak tímto způsobem dostáváme dle tvrzení 4.2.4, že souřadnicový obor je neasociativní. Jelikož je důkaz velmi výpočetně náročný, uvádíme jen některé nutné výpočty; viz též poznámku pod důkazem.

Věta 5.0.10. Moufangové rovina nesplňuje Desarguesův axiom.

Důkaz. Zkonstruujeme příklad dvou trojúhelníků A, B, C a A', B', C', jejichž vrcholy leží na třech přímkách procházejících bodem S, ale jejichž odpovídající si strany se neprotínají na jedné přímce. Zvolme bod S a tři přímky p, q, r, které jím procházejí.

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e_1 - e_3 - e_4 \\ 0 & -e_1 + e_3 + e_4 & 3 \end{pmatrix}, \\ p &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -e_1 \\ 0 & e_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & e_1 - e_3 \\ 0 & -e_1 + e_3 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ověřme například, že přímka p prochází bodem S.

$$(S, p) = \frac{1}{2}\chi(Sp + pS) =$$

$$\frac{1}{2}\chi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -e_1 \\ 0 & e_1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -e_1 \\ 0 & e_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0.$$

Zvolme body A, A' na přímce p, body $B, B' \in q$ a $C, C' \in r$ následovně:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & e_2 & -e_4 \\ -e_2 & 1 & e_1 \\ e_4 & -e_1 & 1 \end{pmatrix}, \\ A' &= \begin{pmatrix} 1 & e_3 & -e_7 \\ -e_3 & 1 & e_1 \\ e_7 & -e_1 & 1 \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} 1 & e_1 + e_4 + e_5 & -e_2 \\ -e_1 - e_4 - e_5 & 3 & -e_1 + e_3 + e_4 \\ e_2 & e_1 - e_3 - e_4 & 1 \end{pmatrix}, \\ B' &= \begin{pmatrix} 1 & -e_3 + e_4 - e_5 & -e_6 \\ e_3 - e_4 + e_5 & 3 & -e_1 + e_3 + e_4 \\ e_6 & e_1 - e_3 - e_4 & 1 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -e_1 + e_3 \\ 1 & 1 & -e_1 + e_3 \\ e_1 - e_3 & e_1 - e_3 & 2 \end{pmatrix}, \\ C' &= \begin{pmatrix} 1 & e_1 & 1 + e_7 \\ -e_1 & 1 & -e_1 + e_3 \\ 1 - e_7 & e_1 - e_3 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ověříme například, že A je skutečně bod. Stačí použít podmínky 5.5, které jsou v tomto případě

$$\begin{array}{ccc} 1\cdot 1 = \|e_1\|, & 1\cdot 1 = \|e_2\|, & 1\cdot 1 = \|e_4\|, \\ 1\cdot \overline{e_2} = e_1e_4, & 1\cdot \overline{e_1} = e_4e_2, & 1\cdot \overline{e_4} = e_2e_1. \end{array}$$

Tyto podmínky jsou zřejmě splněny. Nyní ověřme, že např. bod A' leží na přímce p výpočtem

$$(A',p) = \frac{1}{2}\chi(Sp+pS) =$$

$$\frac{1}{2}\chi\left(\begin{pmatrix} 1 & e_2 & -e_4 \\ -e_2 & 1 & e_1 \\ e_4 & -e_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -e_1 \\ 0 & e_1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -e_1 \\ 0 & e_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & e_2 & -e_4 \\ -e_2 & 1 & e_1 \\ e_4 & -e_1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(0+1+e_1e_1+(-e_1)(-e_1)+1+0+1+e_1e_1+(-e_1)(-e_1)+1)$$

$$= \frac{1}{2}(1-1-1+1+1-1-1+1) = 0.$$

Definujme přímky $a := BC$, $a' := B'C'$, $b := AC, b' := A'C', c := AB$ a $c' := A'B'$. Přímky určíme podle vzorce 5.4.

Matice, které mají tvar $\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & \xi_3 \end{pmatrix}$, budeme nyní zapisovat pro lepší přehlednost po složkách. Prvky na diagonále budeme psát jako uspořádanou trojici (ξ_1, ξ_2, ξ_3) a prvky mimo diagonálu x_1, x_2, x_3 pod sebe.

$$\begin{array}{rl} a: & (3,3,4) \\ x_1 = & -1+2e_1+e_2-2e_3-e_4-e_7 \\ x_2 = & 1-2e_1+e_2+2e_3-e_4-e_7 \\ x_3 = & 1-2e_1-e_2-e_4-e_5-e_6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} a': & (3,3,4) \\ x_1 = & 3e_1-e_3-e_4+e_5 \\ x_2 = & -1+e_2+e_6+3e_7 \\ x_3 = & e_1+2e_3-2e_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} b: & (5,3,2) \\ x_1 = & -e_3-2e_4-e_5 \\ x_2 = & -2e_1+e_3-2e_4-e_5 \\ x_3 = & -2-3e_2-e_6+e_7 \end{array}$$

$$\begin{aligned} b' : \quad & (5,5,2) \\ x_1 = \ & -e_1 - 3e_3 \\ x_2 = \ & -3 - e_7 \\ x_3 = \ & -3e_1 - 4e_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c : \quad & (6,2,4) \\ x_1 = \ & -2 - e_2 - e_3 - e_4 - e_7 \\ x_2 = \ & -1 - e_1 - 2e_2 - 4e_4 - e_5 + e_6 \\ x_3 = \ & -1 - e_1 - 2e_2 - 2e_4 - e_5 - e_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c' : \quad & (6,2,6) \\ x_1 = \ & -e_1 - e_3 - 3e_4 - e_5 \\ x_2 = \ & -1 - e_2 - 3e_6 - 5e_7 \\ x_3 = \ & -e_1 - e_3 - e_4 + 3e_5 \end{aligned}$$

Průsečíky sobě odpovídajících přímek vycházejí následovně.

$$\begin{aligned} L = a \cap a' : \quad & (6,30,18) \\ x_1 \ = \ & -18e_1 - 3e_2 + 12e_3 + 3e_4 - 3e_5 + 3e_6 + 6e_7 \\ x_2 \ = \ & 6 + 2e_1 + 3e_2 - 4e_3 - 3e_4 + 5e_5 + 3e_6 \\ x_3 \ = \ & 6 + 6e_1 + 2e_2 - 6e_3 + 6e_4 + 4e_6 - 4e_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M = b \cap b' : \quad & (10,20,40) \\ x_1 \ = \ & 5 + 5e_1 - 10e_2 + 20e_3 + 10e_4 + 5e_5 + 5e_6 - 10e_7 \\ x_2 \ = \ & 5 + 5e_1 + 2e_2 - 10e_3 + 10e_4 - 5e_5 - 11e_6 \\ x_3 \ = \ & 5 + 5e_1 + 5e_2 + 5e_3 - 7e_4 - e_5 - 5e_6 + 5e_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N = c \cap c' : \quad & (2,10,4) \\ x_1 \ = \ & 1 + e_1 + e_2 + e_3 + 5e_4 - e_5 - e_6 + 3e_7 \\ x_2 \ = \ & -1 - e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 \\ x_3 \ = \ & -2 + 2e_1 + 2e_2 + 2e_4 - 2e_7 \end{aligned}$$

Podle Desarguesova axiomu by měly body L, M a N ležet na jedné přímce, což by znamenalo $L \times M = M \times N$. (Rovnost je v rámci třídy ekvivalence.) Tato rovnost ale zřejmě neplatí, protože matice přímek svými reálnými násobky nejsou, jak plyne z následujících rovností.

$$
\begin{array}{rcl}
L \times M: & & (630, 212, 252) \\
x_1 & = & -43 + 43e_1 - 7e_2 - 165e_3 - 131e_4 - 13e_5 - 19e_6 - 69e_7 \\
x_2 & = & -101 - 153e_1 - 19e_2 + 159e_3 - 207e_4 - 81e_5 + 137e_6 - 177e_7 \\
x_3 & = & -3 - 151e_1 - 233e_2 - 23e_3 - 145e_4 + 45e_5 - 181e_6 - 11e_7
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
M \times N: & & (630, 252, 252) \\
x_1 & = & -99 + 3e_1 - 45e_2 - 165e_3 - 141e_4 - 33e_5 - 15e_6 - 57e_7 \\
x_2 & = & -99 - 237e_1 - 51e_2 + 111e_3 - 165e_4 - 45e_5 + 123e_6 - 183e_7 \\
x_3 & = & -27 - 219e_1 - 255e_2 + 3e_3 - 165e_4 + 75e_5 - 75e_6 + 81e_7
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
N \times L: & & (63, 17, 18) \\
x_1 & = & -6 + e_1 - e_2 - 15e_3 - 5e_4 - e_5 + e_6 - 4e_7 \\
x_2 & = & 2 - 17e_1 - 7e_2 + 11e_3 - 13e_4 - 15e_5 + 9e_6 - 14e_7 \\
x_3 & = & 1 - 19e_1 - 22e_2 + 3e_3 - 8e_4 + 4e_5 - 10e_6 + 6e_7
\end{array}
$$

Ověřili jsme, že $\mathbb{OP}^2$ nesplňuje Desarguesův axiom. $\square$

Poznámka. Poznamenejme, že všechny výpočty nutné v důkazu výše, včetně těch, které v důkazu explicitně uvedeny nejsou, byly provedeny a navíc zkontrolovány pomocí softwarového programu Maple, package Octonions.

Literatura

[1] Bott R., Milnor J.: *On the parallelizability of the spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958) 87-89.

[2] Freudenthal H.: *Zur ebenen Oktavengeometrie*, Indag. Math. 15 (1953) 195–200.

[3] Harvey F. R.: *Spinors and Calibrations*, Academic Press, San Diego, 1990.

[4] Hurwitz A.: *Über eine Klasse nichtassociativer hyperkomplexer Algebren*, Nachr. Ges. Wiss. Götingen (1898) 309-316.

[5] Kervair M.: *Non-parallelizability of the n sphere for* $n > 7$, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 44 (1958) 280-283.

[6] Moufang R.: *Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 9 (1933) 207-222.

[7] Stevenson F. W.: *Projective planes*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1972.

[8] Wienberg E.: *Das Spektrum des Diracoperators auf der Moufang-Ebene OP2*, diplomová práce, Universität Hamburg, 2005.

[9] Zorn M.: *Theorie der alternativen Ringe*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 8 (1930) 123-147.