

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Rastislav Olhava

Absolutní spojitost normy na Banachově prostoru funkcí

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc.
Studijní program: Matematika, obecná matematika

Rád by som vyjadril svoje poďakovanie vedúcemu mojej bakalárskej práce Doc. Lubošovi Pickovi za návrh témy, podnetné konzultácie, motiváciu, a tiež za hodnotné rady pri samotnom spisovaní. Najmä, chcem však poďakovať svojim rodičom, ktorí mi umožnili štúdium na vysokej škole.

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu napísal samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa 25. V. 2009

Rastislav Olhava

Obsah

Úvod	5
1 Banachov priestor funkcií	6
2 Distribučná funkcia a nerastúce prerovnanie	9
3 Hardyova-Littlewoodova nerovnosť	12
4 Charakterizácia funkcií s absolútne spojitou normou na slabom Lebesgueovom priestore	14
Literatúra	25

Názov práce: Absolutná spojitosť normy na Banachovom priestore funkcií
Autor: Rastislav Olhava
Katedra: Katedra matematickej analýzy
Vedúci bakalárskej práce: Doc. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc.
e-mail vedúceho: pick@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Zameriame sa na slabé Lebesgueove priestory $L^{p,\infty}$, ktoré sú súčasťou väčšej rodiny Lorentzových priestorov, predstavujú jeden zo základných typov priestorov funkcií. V matematickej analýze majú široké využitie. Na týchto priestoroch môžeme skúmať viacero rôznych vlastností. V tejto práci sa budeme venovať charakterizácii podpriestorov funkcií s absolútne spojitou normou. Táto vlastnosť je zovšeobecnením pojmu absolútne spojitej funkcie, známeho už zo základných kurzov, ktorý je ekvivalentný tvrdeniu, že funkcia sa dá zapísať ako Lebesgueov integrál. V tejto abstraktnejšej forme má tiež svoje využitie. Pomocou nej môžeme napríklad určiť, či je daný priestor reflexívny. Naším cieľom je popis funkcií zo slabého Lebesgueovho priestoru s absolútne spojitou normou, definovaných na všeobecnom priestore s mierou, pomocou nerastúceho prerovňania, ktorý nám vďaka svojim vlastnostiam umožní podstatne ľahšie overiť túto vlastnosť.

Kľúčové slová: slabý Lebesgueov priestor, absolútna spojitosť normy, priestor s mierou

Title: Absolute continuity of norm on a Banach function space
Author: Rastislav Olhava
Department: Department of Mathematical analysis
Supervisor: Doc. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc.
Supervisor's e-mail address: pick@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: We focus on weak Lebesgue spaces, a part of a larger class of Lorentz spaces, which represent one of the basic types of function spaces. Weak Lebesgue spaces are of great use to mathematical analysis. They provide a number of distinct properties to study. This thesis is concerned with the characterization of the subspaces of functions with absolute continuous norm. The mentioned property is a generalization of the notion of absolute continuity of functions, already known from the introductory courses, equivalent to the statement that a function can be written as a Lebesgue integral. The concept is useful even in its more abstract form. For instance, we can determine whether a given space is reflexive or not. Our aim is to specify the functions from weak Lebesgue space with absolute continuous norm, defined on a measure space, using decreasing rearrangement enabling us to verify the property in question more easily.

Keywords: weak Lebesgue spaces, absolute continuity of norm, measure space

Úvod

Táto práca je členená na štyri kapitoly, pričom tvoria dva celky.

Úlohou prvých troch kapitol je zaviesť pojmy a odvodiť ich základné vlastnosti, ktoré budú potrebné v hlavnej časti mojej práce, v štvrtej kapitole.

V prvej kapitole si zavedieme všeobecnú štruktúru, Banachov priestor funkcií generovaný svojou funkčnou normou. K nemu pripojíme asociovaný priestor s asociovanou normou a duálne vyjadrenie normy prvkov z asociovaného priestoru. Nakoniec uvedieme pre našu prácu najpodstatnejšie pojmy – absolútnu spojitosť normy a slabé Lebesgueove priestory.

V druhej kapitole zadefinujeme distribučnú funkciu a pomocou nej aj nerastúce prerovnanie, pričom pre oba pojmy uvedieme ich aplikáciu na jednoduché funkcie. Tiež si rozvineme základné vlastnosti týchto funkcií, ktoré predovšetkým mapujú vzťahy medzi pôvodnými funkciami a ich distribučnými funkciami, príp. nerastúcimi prerovnaniami.

Tretia kapitola naväzuje na druhú a venuje sa Hardyovej-Littlewoodovej nerovnosti, ktorá objasňuje základný vzťah medzi súčinnami funkcií a súčinnami ich nerastúcich prerovnaní.

Takmer všetky dôkazy v prvých troch kapitolách sú vynechané a môžete ich nájsť v publikácii Bennett, Sharpley [1], ktorá je zároveň hlavným zdrojom informácií, uvedených v tomto celku.

Štvrtá kapitola pozostáva zo štyroch tvrdení, ktoré prinášajú charakterizáciu funkcií s absolútne spojitou normou v slabých Lebesgueových priestoroch, čo bolo hlavným cieľom tejto práce.

Kapitola 1

Banachov priestor funkcií

V úvodnej kapitole sa zoznámime s Banachovými priestormi funkcií a ich základnými vlastnosťami, ktoré budeme potrebovať v tejto práci. Banachove priestory funkcií sú Banachove priestory pozostávajúce z merateľných funkcií, v ktorých norma určitým spôsobom súvisí s mierou v priestore, na ktorom sú funkcie definované. Napriek tomu, že našim cieľom sú slabé Lebesgueove priestory, ktoré nie sú Banachovými priestormi funkcií, definované pojmy budú dávať zmysel aj pre ne.

Pre našu prácu budeme potrebovať priestor s mierou, na ktorom budú definované funkcie, s ktorými budeme pracovať. V ďalšom texte ho budeme vždy, ak nepoviemme inak, považovať za σ -konečný priestor s úplnou mierou.

Definícia 1.1. Nech (R, μ) je priestor s mierou taký, ako sme ho opísali vyššie. Nech $\mathcal{M}^+(R, \mu)$ (skrátene \mathcal{M}^+) je podmnožina všetkých μ -merateľných funkcií na R takých, že ich hodnoty ležia v $[0, \infty]$. Charakteristickú funkciu μ -merateľnej podmnožiny E priestoru R značíme χ_E . Hovoríme, že zobrazenie $\rho : \mathcal{M}^+ \rightarrow [0, \infty]$ je *Banachova funkčná norma* (alebo jednoducho *funkčná norma*), ak pre všetky $f, g, f_n, n = 1, 2, 3, \dots$, z \mathcal{M}^+ , pre všetky konštanty $a \geq 0$ a pre všetky μ -merateľné podmnožiny E priestoru R platia nasledujúce vlastnosti:

$$(V1) \quad \rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ } \mu\text{-s.v.}, \quad \rho(af) = a\rho(f), \\ \rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g);$$

$$(V2) \quad 0 \leq g \leq f \text{ } \mu\text{-s.v.} \Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f);$$

$$(V3) \quad 0 \leq f_n \uparrow f \text{ } \mu\text{-s.v.} \Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f);$$

$$(V4) \quad \mu(E) < \infty \Rightarrow \rho(\chi_E) < \infty;$$

$$(V5) \quad \mu(E) < \infty \Rightarrow \int_E f d\mu \leq C_E \rho(f);$$

pre nejakú konštantu C_E , $0 < C_E < \infty$, ktorá závisí na E a ρ , ale nezávisí na f .

Označme $\mathcal{M}(R, \mu)$ množinu všetkých μ -merateľných reálnych (alebo komplexných) funkcií na R a $\mathcal{M}_0(R, \mu)$ tie z nich, ktoré sú konečné μ -s.v. Zápisy týchto množín budeme skracovať na \mathcal{M} a \mathcal{M}_0 . Tak ako zvyčajne, namiesto funkcií pracujeme z triedami funkcií, pričom jedna trieda zahŕňa funkcie, ktoré sa navzájom líšia len na množine miery nula.

Definícia 1.2. Nech ρ je funkčná norma. Súbor $X = X(\rho)$ všetkých funkcií z \mathcal{M} , pre ktoré platí $\rho(|h|) < \infty$, nazývame *Banachov priestor funkcií* a pre $f \in X$ definujeme

$$\|f\|_X = \rho(|f|).$$

Definícia 1.3. Nech ρ je funkčná norma, jej *asociovaná norma* ρ' je zobrazenie definované na \mathcal{M}^+ predpisom

$$\rho'(g) = \sup \left\{ \int_R fg \, d\mu : f \in \mathcal{M}^+, \rho(f) \leq 1 \right\}, \quad \text{pre } g \in \mathcal{M}^+. \quad (1.1)$$

Tvrdenie 1.4. Nech ρ je funkčná norma, potom jej *asociovaná norma* ρ' je tiež funkčná norma.

Definícia 1.5. Nech ρ je funkčná norma, $X = X(\rho)$ je Banachov priestor funkcií určený ρ (ako v Definícii 1.2) a ρ' je asociovaná norma ρ . Banachov priestor funkcií $X(\rho')$ určený ρ' nazývame *asociovaný priestor* k X a značíme X' .

Poznámka 1.6. Z definície asociovanej normy a definície Banachovho priestoru funkcií plynie, že norma funkcie g v asociovanom priestore X' je daná

$$\|g\|_{X'} = \sup \left\{ \int_R |fg| \, d\mu : f \in X, \|f\|_X \leq 1 \right\}. \quad (1.2)$$

Poznámka 1.7. Platí tvrdenie, že každý Banachov priestor funkcií X je zhodný s jeho druhým asociovaným priestorom X'' . Teda, že f patrí do X práve vtedy, ak patrí do X'' a platí

$$\|f\|_X = \|f\|_{X''}.$$

Toto tvrdenie nie je jednoduché dokázať, ale návod môžeme nájsť v Bennett, Sharpley [1] s. 10.

Poslednú vlastnosť abstraktných Banachových priestorov funkcií, ktorú si zavedieme bude absolútna spojitosť normy. Pri tom budeme používať $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť μ -merateľných podmnožín R . Ďalej použijeme zápis $E_n \rightarrow \emptyset$ μ -s.v., ak charakteristická funkcia χ_{E_n} konverguje bodovo k 0 μ -s.v. Nie je ťažké vidieť, že $E_n \rightarrow \emptyset$ μ -s.v. práve vtedy, ak limes superior

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} E_n$$

postupnosti $\{E_n\}$ je množina miery nula.

Definícia 1.8. Hovoríme, že funkcia f v Banachovom priestore funkcií X má *absolútne spojitú normu* v X , ak $\|f\chi_{E_n}\| \rightarrow 0$ pre každú postupnosť množín $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ spĺňajúcu $E_n \rightarrow \emptyset$ μ -s.v. Množinu všetkých funkcií s absolútne spojitou normou značíme X_a . Ak $X = X_a$ hovoríme, že priestor X má *absolútne spojitú normu*.

Na záver tejto kapitoly zdefinujeme priestory, ktorým sa budeme venovať v hlavnej časti tejto práce – slabé Lebesgueove priestory.

Definícia 1.9. Slabý Lebesgueov priestor $L^p(R, \mu)$ značíme $L^{p,\infty}(R, \mu)$ a pre $p \in [1, \infty)$ definujeme

$$L^{p,\infty}(R, \mu) := \{f \in M(R, \mu); \|f\|_{p,\infty} := \sup_{0 < \lambda < \infty} \lambda \mu(\{|f| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

Poznámka 1.10. Keď bude zrejmé, o ktorý priestor s mierou sa jedná, budeme písať $L^{p,\infty}$ namiesto $L^{p,\infty}(R, \mu)$.

Poznámka 1.11. „Norma“ $\|\cdot\|_{p,\infty}$, pomocou ktorej sme definovali slabý Lebesgueov priestor $L^{p,\infty}$ (značíme tiež $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$), nie je v skutočnosti norma. Pre zaujímavosť, pre $p > 1$, v priestore $L^{p,\infty}$ je „norma“ $\|\cdot\|_{p,\infty}$ ekvivalentná norme (tentoraz už skutočnej norme) $\|\cdot\|_{(p,\infty)}$, pričom priestor $L^{1,\infty}$ už ekvivalentne normovateľný nie je. V tejto kapitole sme zdefinovali pojmy pre Banachove priestory funkcií. Slabé Lebesgueove priestory nie sú Banachovými priestormi funkcií, napriek tomu pojmy ako asociovaný priestor a absolútna spojitosť normy majú pre ne zmysel, pretože spôsob akým „norma“ $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ generuje priestor $L^{p,\infty}$ je rovnaký (funkcia do neho patrí ak je jeho norma konečná), akým generujú funkčné normy svoje Banachove priestory funkcií. Pre jednoduchosť budeme v ďalšom texte úvodzovky vynechávať.

Kapitola 2

Distribučná funkcia a nerastúce prerovnanie

V tejto kapitole zdefinujeme *distribučné funkcie* a pomocou nich *nerastúce prerovnanie*. Slovo prerovnanie nám môže dávať zmysel napríklad pre konečné postupnosti, keď prerovnaním myslíme novú postupnosť, ktorá vznikla permutáciou poradia členov pôvodnej postupnosti. Podobný pojem potrebujeme zdefinovať pre funkcie, ktoré sú dané na všeobecnom priestore s mierou. Vytvoríme ho tak, aby distribučná funkcia funkcie po prerovnaní bola zhodná s distribučnou funkciou pôvodnej funkcie. Teda aby funkcie boli *súmerateľné*, pričom tento pojem bude dávať zmysel aj medzi funkciami definovanými na rôznych priestoroch.

Nech (R, μ) značí, ako v predošlom, σ -konečný priestor s úplnou mierou.

Definícia 2.1. Pre funkciu $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$ definujeme jej *distribučnú funkciu* predpisom:

$$\mu_f(\lambda) := \mu(\{x \in R \mid |f(x)| > \lambda\}), \quad \lambda \in [0, \infty).$$

Distribučná funkcia μ_f popisuje mieru úrovnňových množín funkcie f , pričom závisí len na absolútnej hodnote $|f|$ a jej hodnoty môžu zahrňovať aj hodnotu $+\infty$.

Definícia 2.2. Nech $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$ a $g \in \mathcal{M}_0(S, \rho)$. Hovoríme, že funkcie f a g sú *súmerateľné*, ak $\mu_f(\lambda) = \rho_g(\lambda)$ pre všetky $\lambda \geq 0$, čiže ak majú rovnakú distribučnú funkciu.

Tvrdenie 2.3. *Predpokladajme, že f, g a $f_n, (n = 1, 2, \dots)$, patria do $\mathcal{M}_0(R, \mu)$ a α je nenulové reálne číslo. Potom distribučná funkcia μ_f je nezáporná, nerastúca, zprava spojitá a ďalej platí*

- (i) $|g| \leq |f|$ μ -s.v. $\Rightarrow \mu_g \leq \mu_f$;
- (ii) $\mu_{\alpha f}(\lambda) = \mu_f\left(\frac{\lambda}{|\alpha|}\right)$, pre $\lambda \geq 0$;
- (iii) $\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2)$, pre $\lambda_{1,2} \geq 0$;
- (iv) $|f| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n|$ μ -s.v. $\Rightarrow \mu_f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_{f_n}$
a špeciálne, $|f_n| \uparrow |f|$ μ -s.v. $\Rightarrow |\mu_{f_n}| \uparrow |\mu_f|$.

Príklad 2.4. Bude užitočné vyjadriť distribučnú funkciu nezápornej jednoduchej funkcie. Nech

$$f(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(x),$$

kde E_j sú po dvoch disjunktné podmnožiny R konečnej miery a $a_1 > a_2 > \dots > a_n > 0$. Potom dostávame predpis distribučnej funkcie μ_f funkcie f :

$$\mu_f(\lambda) = \sum_{j=1}^n m_j \chi_{(a_{j+1}, a_j)}(x), \quad \text{kde } m_j = \sum_{i=1}^j \mu(E_i)$$

a a_{n+1} je definované ako nula.

Definícia 2.5. Nech $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$, potom *nerastúcim prerovnaním* f nazývame funkciu f^* definovanú na $[0, \infty)$ predpisom

$$f^*(t) := \inf\{\lambda > 0, \mu_f(\lambda) \leq t\}, \quad \text{pre } t \geq 0. \quad (2.1)$$

Poznámka 2.6. Nerastúce prerovnanie f^* je niečo ako „zovšeobecnená inverzia k μ_f “. V prípadoch keď μ_f je ostro klesajúca a spojitá platí $f^* = \mu_f^{-1}$. Funkcia f^* je definovaná na nezáporných reálnych číslach, pričom ak je priestor (R, μ) konečný, platí $f^*(t) = 0$ pre všetky $t \geq \mu(R)$. Všimnime si, že ak pre všeobecnú f vytvoríme jej distribučnú funkciu μ_f , a potom vytvoríme ν_{μ_f} distribučnú funkciu k μ_f (ν je klasická Lebesgueova miera), dostaneme presne nerastúce prerovnanie f^* . To je priamym dôsledkom rovnosti

$$f^*(t) = \sup\{\lambda, \mu_f(\lambda) > t\} = \nu_{\mu_f}(t), \quad \text{pre } t \geq 0, \quad (2.2)$$

ktorá plynie z definície distribučnej funkcie, nerastúceho prerovnaní a faktu, že μ_f je nerastúca funkcia.

S nerastúcim prerovnaním sme získali silný nástroj, pretože napriek tomu, že môže byť nerastúce prerovnanie oproti pôvodnej funkcii silne zjednodušené (je definované na nezáporných reálnych číslach, kde sa bude pravdepodobne lepšie pracovať ako na všeobecnom priestore (R, μ)), stále nám, ako uvidíme ďalej, poskytuje o pôvodnej funkcii dostatok informácií. Odvoďme si niektoré jeho vlastnosti, ale predtým ešte uveďme dva príklady.

Príklady 2.7. (a) Vyjadrime tvar nerastúceho prerovnaní jednoduchéj funkcie f z Príkladu 2.4. Podľa (2.1) a tvaru funkcie f môžeme vidieť, že $f^*(t) = 0$, ak $t \geq m_n$. Ďalej, ak $m_n > t \geq m_{n-1}$, potom $f^*(t) = a_n$, ak $m_{n-1} > t \geq m_{n-2}$, potom $f^*(t) = a_{n-1}$, a tak ďalej. Podľa toho máme

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{[m_{j-1}, m_j)}(t), \quad \text{pre } t \geq 0,$$

kde $m_0 = 0$. V tomto prípade sme si funkciu vyjadrili pomocou „zvislých blokov“.

(b) Niekedy je užitočnejšie rozdeliť funkciu na „vodorovné bloky“ namiesto zvislých. Takže jednoduchú funkciu z príkladu 2.4. môžeme zapísať v tvare

$$f(x) = \sum_{k=1}^n b_k \chi_{F_k}(x), \quad (2.3)$$

kde koeficienty b_k sú kladné, množiny F_k majú konečnú mieru a vytvárajú postupnosť $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n$. Porovnanie s Príkladom 2.4. ukazuje, že

$$b_k = a_k - a_{k+1}, \quad F_k = \bigcup_{j=1}^k E_j, \quad \text{pre } k = 1, 2, \dots, n.$$

Takže vyjadrením dostaneme

$$f^* = \sum_{k=1}^n b_k \chi_{[0, \mu(f_k))}. \quad (2.4)$$

Tvrdenie 2.7. *Predpokladajme, že f , g a f_n , ($n = 1, 2, \dots$), patria do $\mathcal{M}_0(R, \mu)$ a a je ľubovoľné reálne číslo. Nerastúce prerovnanie f^* je nezáporná, nerastúca, zprava spojitá funkcia na $[0, \infty)$. Ďalej platí*

- (i) $|g| \leq |f|$ μ -s.v. $\Rightarrow g^* \leq f^*$;
- (ii) $(af)^* = |a|f^*$;
- (iii) $(f+g)^*(t_1+t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$, pre $t_{1,2} \geq 0$;
- (iv) $|f| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n|$ μ -s.v. $\Rightarrow f^* \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n^*$
špeciálne, $|f_n| \uparrow |f|$ μ -s.v. $\Rightarrow f_n^* \uparrow f^*$;
- (v) $f^*(\mu_f(\lambda)) \leq \lambda$, pre $\mu_f(\lambda) < \infty$;
- (vi) $\mu_f(f^*(t)) \leq t$, pre $f^*(t) < \infty$;
- (vii) f a f^* sú súmerateľné;
- (viii) $(|f|^p)^* = (f^*)^p$, pre $p \in (0, \infty)$.

Poznámka 2.8. Keďže podľa predchádzajúceho tvrdenia je funkcia f súmerateľná so svojím nerastúcim prerovnaním f^* , bude $f \in L^{p,\infty}(R, \mu)$ práve vtedy, ak bude $f^* \in L^{p,\infty}([0, \infty), \nu)$. Tento fakt plynie priamo z definície slabých Lebesgueho priestorov.

Kapitola 3

Hardyova-Littlewoodova nerovnosť

V tejto kapitole uvidíme nerovnosť, ktorá je výsledkom práce G. H. Hardyho a J. E. Littlewooda. Táto integrálna nerovnosť popisuje základný vzťah medzi súčinnami funkcií a súčinnami ich nerastúcich prerovnaní, a preto sa nám v ďalšej časti určite zide. Táto nerovnosť je zovšeobecnením elementárnej nerovnosti

$$\sum_{j=1}^n a_j b_j \leq \sum_{j=1}^n a_j^* b_j^*,$$

kde (a_1, a_2, \dots, a_n) a (b_1, b_2, \dots, b_n) sú konečné postupnosti nezáporných reálnych čísel a $\{a_j^*\}_{j=1}^n$ je postupnosť prvkov a_j usporiadaných zostupne (podobne $\{b_j^*\}_{j=1}^n$). Inými slovami, suma nadobudne svoje maximum ak sú obe postupnosti usporiadané rovnako. Začnime pomocným tvrdením.

Lemma 3.1. *Nech g je nezáporná jednoduchá funkcia na (R, μ) a nech E je ľubovoľná μ -merateľná podmnožina R . Potom*

$$\int_E g d\mu \leq \int_0^{\mu(E)} g^*(s) ds. \quad (3.1)$$

Veta 3.2 (Hardy & Littlewood) *Nech f a g patria do $\mathcal{M}_0(R, \mu)$, potom*

$$\int_R |fg| d\mu \leq \int_0^\infty f^*(s)g^*(s) ds. \quad (3.2)$$

Pri integrovaní sa môže stať, že nebudeme potrebovať integrovať cez celý priestor, a tak uveďme ešte tvrdenie, v ktorom sa integruje na množine konečnej miery. Tým získame tvar, ktorý neskôr použijeme. Dôkaz získame jednoduchou modifikáciou pôvodného dôkazu.

Tvrdenie 3.3 *Nech f a g patria do $\mathcal{M}_0(R, \mu)$ a A je podmnožina R tak, že $\mu(A) < a$ pre nejaké kladné reálne číslo a . Potom*

$$\int_A |fg| d\mu \leq \int_0^a f^*(s)g^*(s) ds. \quad (3.3)$$

Dôkaz. Keďže f^* a g^* závisia len na absolútnych hodnotách f a g , stačí tvrdenie dokázať pre nezáporné funkcie f a g . Dokonca, stačí dokazovať pre f

a g jednoduché, pretože potom stačí použiť vlastnosť (iv) z Tvrdenia 2.7. a Leviho vetu. Takže v tomto prípade, môžeme písať

$$f(x) = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{E_j}(x),$$

kde $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_m$ a $a_j > 0$, pre $j = 1, 2, \dots, m$ (ako v 2.3). Takže podľa 2.4 platí

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{[0, \mu(E_j))}(t).$$

A nakoniec podľa Lemmy 3.1. máme

$$\begin{aligned} \int_A |fg| d\mu &= \sum_{j=1}^m a_j \int_{E_j \cap A} g d\mu \leq \sum_{j=1}^m a_j \int_0^{\mu(E_j \cap A)} g^*(s) ds \\ &= \int_0^\infty \sum_{j=1}^m a_j \chi_{[0, \mu(E_j \cap A))}(s) g^*(s) ds \\ &= \int_0^a \sum_{j=1}^m a_j \chi_{[0, \mu(E_j \cap A))}(s) g^*(s) ds \\ &\leq \int_0^a \sum_{j=1}^m a_j \chi_{[0, \mu(E_j))}(s) g^*(s) ds = \int_0^a f^*(s) g^*(s) ds. \quad \square \end{aligned}$$

Dôkaz tohto tvrdenia je jednoduchou modifikáciou dôkazu Hardyovej-Littlewoodovej nerovnosti, ktorý je uvedený v Bennett, Sharpley [1].

Poznámka 3.4. Ďalším okamžitým dôsledkom Hardyovej-Littlewoodovej nerovnosti je

$$\int_A |f\tilde{g}| d\mu \leq \int_0^a f^*(s) g^*(s) ds, \quad (3.4)$$

pre každú funkciu \tilde{g} definovanú na A a súmerateľnú s g .

Kapitola 4

Charakterizácia funkcií s absolútne spojitou normou na slabom Lebesgueovom priestore

Tak ako to už býva, niektoré definície sú krajne nepraktické. Vlastnosť absolútnej spojitosti normy je medzi nimi, čo je motiváciou na vznik jednoduchšej charakterizácie, pomocou ktorej by sme mohli rozhodnúť, či daná funkcia má alebo nemá absolútne spojitú normu. Ako vhodný nástroj sa ponúka nerastúce prerovnanie, ktoré zachováva mieru úrovnových množín, ale pracuje sa s ním omnoho jednoduchšie. Podľa definície (1.7.) máme overiť, že pre každú postupnosť množín $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ (pre všetky n je $E_n \subset R$) spĺňajúcu $E_n \rightarrow \emptyset$ μ -s.v. platí $\|f\chi_{E_n}\|_{p,\infty} \rightarrow 0$. Ak číselná postupnosť $\mu(E_n)$ konverguje k nule, môže byť problémom, ak hodnoty funkcie f na E_n dosahujú „rýchlo“ vysoké hodnoty, čiže nás zaujíma okolie nuly nerastúceho prerovnaní f^* . Lenže $E_n \rightarrow \emptyset$ μ -s.v. nemusí vždy znamenať, že miera členov tejto postupnosti konverguje k nule. Túto podmienku spĺňa aj postupnosť množín, ktorej prvky tvoria doplnok ku guli, ktorej polomer rastie. Tento popis slúži len pre predstavu, pretože vo všeobecnom priestore s mierou (R, μ) vôbec nemusíme mať k dispozícii metriku, a teda hovoriť o nejakej guli či dokonca jej polomere nemusí mať zmysel. Predstava je však jasná a z nej je zrejmé, že nás na nerastúcom prerovnaní f^* bude zaujímať okolie nekonečna. Ďalšou dobrou myšlienkou je, že pre daný priestor $L^{p,\infty}$ je funkcia s nerastúcim prerovnaním $f^*(x) = \frac{1}{x^{1/p}}$ v určitom zmysle hraničnou, pretože pre takúto funkciu sa supremum v definícii normy $\|\cdot\|_{p,\infty}$ nadobúda všade a je konštantne rovné jednotke. Takže našou hypotézou je, že funkcia f bude mať absolútne spojitú normu práve vtedy, ak na okolí nuly resp. nekonečna bude jej nerastúce prerovnanie rásť pomalšie resp. klesať rýchlejšie. V reči Landanových smybolov

$$f^*(x) = o\left(\frac{1}{x^{1/p}}\right), \quad \text{pre } x \rightarrow 0;$$
$$f^*(x) = o\left(\frac{1}{x^{1/p}}\right), \quad \text{pre } x \rightarrow \infty.$$

Podme túto hypotézu dokázať. Začneme nutnosťou podmienky.

Veta 4.1. *Nech f je ľubovoľná funkcia z $\mathcal{M}_0(R, \mu) \cap L^{p,\infty}(R, \mu)$ s absolútne spojitou normou. Potom platí*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f^*(t)t^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Dôkaz. Definujme postupnosť množín $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ predpisom $E_n := \{x \in R : |f(x)| > n\}$ a pomocou E_n postupnosť $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ nezáporných reálnych čísel

tak, že $t_n = \mu(E_n)$. Keďže $f \in L^{p,\infty}$, musí platiť $E_n \rightarrow \emptyset$ μ -s.v. a $t_n \rightarrow 0$. Poďme dokazovať:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f \chi_{E_n}\|_{L^{p,\infty}} \quad (4.1a)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 < \lambda < \infty} \lambda \mu(\{|f \chi_{E_n}| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \quad (4.1b)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 < \lambda < \infty} \lambda \nu(\{f^* \chi_{(0,t_n)} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \quad (4.1c)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{n < \lambda < \infty} \lambda \nu(\{f^* \chi_{(0,t_n)} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \quad (4.1d)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{n < \lambda < \infty} \lambda \nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}}. \quad (4.1e)$$

Vysvetlime si jednotlivé kroky podrobnejšie:

(4.1a) Keďže f má absolútne spojitú normu, podľa definície $E_n \rightarrow \emptyset$ μ -s.v. rovnosť platí.

(4.1b) Rozpísali sme definíciu normy $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$.

(4.1c) V tomto kroku sme prešli ku klasickej Lebesgueovej miere ν a k nerastúcemu prerovnaniu f^* . Pričom rovnosť nastáva, pretože

(4.1ca) pre všetky $\lambda \leq n$ sa oba výrazy v suprémе rovnajú $\lambda \mu(E_n)^{\frac{1}{p}}$

(4.1cb) a pre všetky $\lambda > n$ sa rovnajú $\lambda \mu(\{|f| > \lambda\})^{\frac{1}{p}}$.

(4.1d) Podľa (4.1ca) je pre všetky $\lambda \leq n$ výraz $\nu(\{f^* \chi_{(0,t_n)} > \lambda\})^{\frac{1}{p}}$ konštantný, a teda celý výraz v suprémе rastie spolu s λ . Tým pádom takýmto zmenšením definičného oboru supréma sa jeho hodnota nemení.

(4.1e) Vieme, že $\lambda > n$. Nech $x \in \{f^* > \lambda\}$, potom $\chi_{(0,t_n)}(x) = 1$, a teda $x \in \{f^* \chi_{(0,t_n)} > \lambda\}$. Opačná inklúzia je zrejma. Takže miery spomínaných množín sa rovnajú.

Označme $t_\lambda := \nu(\{f^* > \lambda\})$ a pokračujme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{n < \lambda < \infty} \lambda \nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{n < \lambda < \infty} \lambda t_\lambda^{\frac{1}{p}} \quad (4.1f)$$

$$\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{n < \lambda < \infty} f^*(t_\lambda) t_\lambda^{\frac{1}{p}} \quad (4.1g)$$

$$= \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} f^*(t_\lambda) t_\lambda^{\frac{1}{p}}. \quad (4.1h)$$

(4.1f) Využili sme práve zavedené označenie.

(4.1g) Funkcia f^* je nerastúca a zprava spojitá, takže sme použili nerovnosť $f^*(t_\lambda) \leq \lambda$.

(4.1h) Definícia limes superior.

Zistili sme, že $\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} f^*(t_\lambda) t_\lambda^{\frac{1}{p}}$ je zhora ohraničený nulou. Lenže limes inferior z toho istého výrazu je nezáporný, keďže samotný výraz je vždy nezáporný. Takže tieto dve hodnoty sú obe rovné nule a dostávame existenciu limity, ktorá je pochopiteľne tiež rovná nule.

V poslednom kroku už len prevedieme substitúciu a získame dokazované tvrdenie:

$$0 = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f^*(t_\lambda) t_\lambda^{\frac{1}{p}} = \lim_{t_\lambda \rightarrow 0_+} f^*(t_\lambda) t_\lambda^{\frac{1}{p}}. \quad \square$$

Veta 4.2. *Nech f je ľubovoľná funkcia z $\mathcal{M}_0(R, \mu) \cap L^{p, \infty}(R, \mu)$ s absolútne spojitou normou. Potom platí*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f^*(t) t^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Dôkaz. Definujme postupnosť množín $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ predpisom $E_n := \{x \in R : |f(x)| < 1/n\}$. Keďže $f \in L^{p, \infty}$, platí $E_n \rightarrow \emptyset$ μ -s.v. Ďalej definujme postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ nezáporných reálnych čísel tak, že $s_n = \mu(|f| \geq 1/n)$. Táto postupnosť je neklesajúca, pretože $\mu(|f| \geq 1/n) = \nu(f^* \geq 1/n)$ a f^* je nerastúca. Ak by bola ohraničená, bola by f^* od nejakého bodu nulová, a teda by tvrdenie platilo triviálne. Nech naopak nie je ohraničená. Poďme dokazovať:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f \chi_{E_n}\|_{L^{p, \infty}} \tag{4.2a}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 < \lambda < \infty} \lambda \mu(\{|f \chi_{E_n}| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \tag{4.2b}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 < \lambda < \infty} \lambda \nu(\{f^* \chi_{(s_n, \infty)} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \tag{4.2c}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 < \lambda < \frac{1}{n}} \lambda \nu(\{f^* \chi_{(s_n, \infty)} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \tag{4.2d}$$

$$= \limsup_{\lambda \rightarrow 0_+} \lambda \nu(\{f^* \chi_{(s_n, \infty)} > \lambda\})^{\frac{1}{p}}. \tag{4.2e}$$

Vysvetlime si jednotlivé kroky:

(4.2a) Podobne ako v predošlom dôkaze využívame predpoklad, ktorý nám spolu s $E_n \rightarrow \emptyset$ μ -s.v. dáva rovnosť.

(4.2b) Rozpísali sme definíciu normy $\|\cdot\|_{L^{p, \infty}}$.

(4.2c) V tomto kroku sme vykonali prechod k nerastúcemu prerovnaniu f^* . Pričom rovnosť nastáva, pretože:

(4.2ca) Pre všetky $\lambda \geq 1/n$ sú množiny $\{f^* \chi_{(s_n, \infty)} > \lambda\}$ a $\{|f \chi_{E_n}| > \lambda\}$ prázdne.

(4.2cb) Pre $\lambda < 1/n$ je to zložitejšie. Množina $\{|f \chi_{E_n}| > \lambda\}$ je množina prvkov x priestoru R , pre ktoré platí $\lambda < |f(x)| < 1/n$. Množina $\{f^* \chi_{(s_n, \infty)} > \lambda\}$ je množina nezáporných reálnych čísel y takých, že $\lambda < f^*(y) < f^*(s_n)$. Vieme, že f a f^* sú súmerateľné, a teda rozdiel veľkostí týchto množín, v príslušných

mierach je $\nu(\{f^*(s_n) < f^* < 1/n\})$. Lenže s_n sme si definovali tak, aby platilo $s_n = \mu(|f| \geq 1/n) = \nu(f^* \geq 1/n)$, a teda $\nu(\{f^*(s_n) < f^* < 1/n\}) = 0$.

(4.2d) Ako sme videli v (4.2ca), na množine $\{\lambda \geq 1/n\}$ je výraz v suprémе, ktorý je vždy nezáporný, nulový, a teda vypustením tejto množiny z definičného oboru supréma sa hodnota supréma nezmení.

(4.2e) Definícia limes superior.

Podobne ako v predošlom dôkaze nám z toho, že limes superior z nezáporného výrazu je nekladné číslo vyplýva, že limita existuje a je nulová. Pokračujme

$$0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0_+} \lambda \nu(\{f^* \chi_{(s_n, \infty)} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0_+} \lambda \nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}}.$$

Poslednú rovnosť dokážeme osobitne. Odhadnime rozdiel výrazov vo vnúri limít

$$\begin{aligned} & |\lambda \nu(\{f^* \chi_{(s_n, \infty)} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} - \lambda \nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}}| = \\ & = \lambda |\nu(\{f^* \chi_{(s_n, \infty)} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} - \nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}}| = \lambda s_n \rightarrow 0, \end{aligned}$$

pre λ idúce k 0 zprava.

Rovnosť platí a môžeme pokračovať

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0_+} \lambda \nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0_+} \lambda t_\lambda^{\frac{1}{p}} \quad (4.2f)$$

$$\geq \lim_{\lambda \rightarrow 0_+} f^*(t_\lambda) t_\lambda^{\frac{1}{p}} \quad (4.2g)$$

$$= \lim_{t_\lambda \rightarrow \infty} f^*(t_\lambda) t_\lambda^{\frac{1}{p}}. \quad (4.2h)$$

(4.2f) Značenie z predošlého dôkazu.

(4.2g) Analogicky ako v minulom dôkaze, keďže funkcia f^* je nerastúca a zprava spojitá, platí nerovnosť $f^*(t_\lambda) \leq \lambda$

(4.2h) A na záver substitúcia v argumente limity. \square

Postačujúcosť podmienky je trochu zložitejšia, a tak si najprv dokážeme, že z platností limít plynie, že f^* má absolútne spojitú normu a odtiaľ potom, že to isté tvrdenie platí aj pre f .

Veta 4.3. *Nech f je ľubovoľná funkcia z $\mathcal{M}_0(R, \mu) \cap L^{p, \infty}(R, \mu)$ a nech platia limity*

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} f^*(t) t^{\frac{1}{p}} = 0 \quad a \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f^*(t) t^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Potom nerastúce prerovnanie f^ má absolútne spojitú normu.*

Dôkaz. Nech E_n je ľubovoľná postupnosť množín taká, že $E_n \rightarrow \emptyset$ ν -s.v. Zvoľme $\varepsilon > 0$ ľubovoľné a ukážme, že $\|f^* \chi_{E_n}\|_{L^{p, \infty}} < \varepsilon$ pre n dostatočne veľké.

Podľa predpokladov vieme, že

$$\begin{aligned} \exists \delta_1 > 0 : f^*(t)t^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}, & \quad \text{pre } t \in (0, \delta_1); \\ \exists \delta_2 > 0 : f^*(t)t^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}, & \quad \text{pre } t \in (\delta_2, \infty). \end{aligned}$$

Bez ujmy na všeobecnosti (BUNV) predpokladajme, že $\delta_1 < \delta_2$. Poďme odhadovať

$$\begin{aligned} \|f^* \chi_{E_n}\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{0 < \lambda < \infty} \lambda \nu(\{f^* \chi_{E_n} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} = \\ &= \max\left\{ \sup_{f^*(\delta_1) < \lambda < \infty} \lambda \nu(\{f^* \chi_{E_n} > \lambda\})^{\frac{1}{p}}, \sup_{f^*(\delta_2) \leq \lambda \leq f^*(\delta_1)} \dots, \sup_{0 < \lambda < f^*(\delta_2)} \dots \right\}. \end{aligned}$$

Použili sme definíciu normy $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ a definičný obor supréma sme rozdelili na tri oblasti. Ak bude suprémum cez každú z týchto troch množín ohraničené ε , potom aj suprémum cez ich zjednotenie bude ohraničené ε a dostaneme to, čo sme chceli dokázať.

1. $\lambda \in (f^*(\delta_1), \infty)$: Platí

$$\sup_{f^*(\delta_1) < \lambda < \infty} \lambda \nu(\{f^* \chi_{E_n} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{f^*(\delta_1) < \lambda < \infty} \lambda \nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Prvá nerovnosť je jednoduchá, ale vysvetlime si podrobnejšie druhú nerovnosť. Zafixujme λ . Ak existuje t tak, že $f^*(t) = \lambda$, potom je $t < \delta_1$, a platí

$$\lambda \nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}} = f^*(t)t^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pri prechode k suprému sa nám síce ostrá nerovnosť môže zmeniť na neostrú, ale to nevadí, pretože $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Nech naopak také t neexistuje (ide o „schod“). Označme

$$\begin{aligned} \hat{t} &:= \sup\{t, f^*(t) > \lambda\}, \\ \hat{\lambda} &:= \lim_{t \rightarrow \hat{t}_-} f^*(t). \end{aligned}$$

Z vlastností nerastúceho prerovnanania máme $\hat{\lambda} \geq \lambda$ a $\hat{t} \leq \delta_1$, a teda

$$\lambda \nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}} = \lambda \hat{t}^{\frac{1}{p}} \leq \hat{\lambda} \hat{t}^{\frac{1}{p}} = \lim_{t \rightarrow \hat{t}_-} f^*(t)t^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Posledná nerovnosť naozaj platí, pretože ak sa limitne blížíme k \hat{t} zľava, potom je $t < \hat{t} \leq \delta_1$, a teda výraz v limite je vždy menší ako $\frac{\varepsilon}{2}$. Limitným prechodom dostaneme opäť neostrú nerovnosť, ale podobne ako vyššie už len použijem $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

2. $\lambda \in (0, f^*(\delta_2))$: Pokračujme druhou oblasťou

$$\sup_{0 < \lambda < f^*(\delta_2)} \lambda \nu(\{f^* \chi_{E_n} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{0 < \lambda < f^*(\delta_2)} \lambda \nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom prípade. Ak existuje t tak, že $f^*(t) = \lambda$, potom je $t > \delta_2$, a platí

$$\lambda \nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}} = f^*(t)t^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prechodom k suprému dostaneme neostrú nerovnosť a $\frac{\varepsilon}{2}$ odhadneme ε . Nech naopak také t neexistuje (opäť ide o „schod“). Označme

$$\begin{aligned}\tilde{t} &:= \sup\{t, f^*(t) > \lambda\}, \\ \tilde{\lambda} &:= \lim_{t \rightarrow \tilde{t}_-} f^*(t).\end{aligned}$$

Z vlastností nerastúceho prerovnaní máme $f^*(\delta_2) > \tilde{\lambda} \geq \lambda$ a $\tilde{t} > \delta_2$, a teda

$$\lambda \nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}} = \lambda \tilde{t}^{\frac{1}{p}} \leq \tilde{\lambda} \tilde{t}^{\frac{1}{p}} = \lim_{t \rightarrow \tilde{t}_-} f^*(t)t^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Pretože pre t dostatočne blízko \tilde{t} je $t > \delta_2$, a teda $f^*(t)t^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}$.

3. $\lambda \in [f^*(\delta_2), f^*(\delta_1)]$: V tejto množine už nemáme problém so žiadnou „singularitou“, a tak tvrdenie nie je ťažké dokázať. Pozrime sa na to:

$$\sup_{f^*(\delta_2) \leq \lambda \leq f^*(\delta_1)} \lambda \nu(\{f^* \chi_{E_n} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{f^*(\delta_2) \leq \lambda \leq f^*(\delta_1)} f^*(\delta_1) \nu(\{f^* \chi_{E_n} > \lambda\})^{\frac{1}{p}}.$$

V tomto kroku sme odhadli λ najväčšou možnou hodnotou. V ďalšom kroku využijeme jednu zo základných vlastností miery, ktorú si tu pre kompletnosť uvedieme.

Tvrdenie 4.4. (vetička z miery) *Nech (X, S, μ) je priestor s mierou. Majme postupnosť množín $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, pričom $A_k \in S$; $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ a $\mu(A_1) < \infty$. Potom platí*

$$\mu\left(\bigcap_k A_k\right) = \lim_k \mu(A_k).$$

V našom prípade budú množiny A_k predstavovať množiny $\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \cap (0, \delta_2)$. Ukážme, že oba predpoklady vetičky sú splnené

$$\begin{aligned}\bigcup_{n=k+1}^{\infty} E_n \cap (0, \delta_2) &\subset \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \cap (0, \delta_2), \quad \text{pre všetky } k \in \mathbb{N} \\ \text{a } \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cap (0, \delta_2)\right) &\leq \nu((0, \delta_2)) < \infty.\end{aligned}$$

Keďže $E_n \rightarrow \emptyset$ μ -s.v., je zrejmé, že aj $E_n \cap (0, \delta_2) \rightarrow \emptyset$ μ -s.v. Použijeme definíciu tejto konvergenzie a aplikujeme vetičku

$$0 = \nu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \cap (0, \delta_2)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \cap (0, \delta_2)\right) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(E_k \cap (0, \delta_2)).$$

Dokázali sme, že miera množín E_n , ktoré sú podmnožinou množiny konečnej miery, v našom prípade interval $(0, \delta_2)$, konverguje k 0. Takže existuje n_0 tak, že pre všetky $n \geq n_0$ platí

$$\nu(E_n \cap (0, \delta_2)) < \left(\frac{\epsilon}{f^*(\delta_1)}\right)^p.$$

Pokračujme posledným krokom

$$\begin{aligned} \sup_{f^*(\delta_2) \leq \lambda \leq f^*(\delta_1)} f^*(\delta_1) \nu(\{f^* \chi_{E_n} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} &\leq \\ &\leq \sup_{f^*(\delta_2) \leq \lambda \leq f^*(\delta_1)} f^*(\delta_1) \nu(\{f^* \chi_{E_n} > f^*(\delta_2)\})^{\frac{1}{p}} \quad (4.3a) \end{aligned}$$

$$= f^*(\delta_1) \nu(\{f^* \chi_{E_n} > f^*(\delta_2)\})^{\frac{1}{p}} \quad (4.3b)$$

$$\leq f^*(\delta_1) \nu(E_n \cap (0, \delta_2))^{\frac{1}{p}} < \epsilon. \quad (4.3c)$$

(4.3a) Odhad platí, pretože miera množiny $\{f^* \chi_{E_n} > \lambda\}$ sa so znižujúcim sa λ zväčšuje alebo nanaajvýš nemení.

(4.3b) Supremum môžeme vynechať, pretože výraz vo vnútri už nezávisí na λ .

(4.3c) Prvá nerovnosť nastáva, pretože ak reálne číslo $x \geq 0$ patrí do množiny $\{f^* \chi_{E_n} > f^*(\delta_2)\}$, potom musí x patriť do E_n a zároveň musí byť $f^*(x) > f^*(\delta_2)$. Keďže f^* je nerastúca funkcia, druhá podmienka je ekvivalentná tomu, že x je menšie ako δ_2 , a teda dokopy, x patrí do množiny $E_n \cap (0, \delta_2)$. Posledný odhad platí pre všetky $n \geq n_0$.

Zhrnutím všetkých troch krokov dostávame, že pre všetky $n \geq n_0$ je

$$\|f^* \chi_{E_n}\|_{L^{p,\infty}} < \epsilon. \quad \square$$

Na záver nás čaká posledný krok, a to uzavretie kruhu implikácii návratom k absolútnej spojitosti funkcie f .

Veta 4.5. *Nech f je ľubovoľná funkcia z $\mathcal{M}_0(R, \mu) \cap L^{p,\infty}(R, \mu)$. Ak má jej nerastúce prerovnanie f^* absolútne spojitú normu, má absolútne spojitú normu aj samotná funkcia f .*

Dôkaz. Vezmime ľubovoľnú postupnosť množín E_n takú, že $E_n \rightarrow \emptyset$ μ -s.v. V prvom kroku vyrobíme rozklad týchto množín a pomocou tohto rozkladu dokážeme, že $\|f \chi_{E_n}\|_{L^{p,\infty}}$ konverguje k nule.

KONŠTRUKCIA ROZKLADU: Definujme pomocné úrovňové množiny v priestore (R, μ)

$$H_{(a,b)} := \{x \in R : f^*(b) \leq |f(x)| < f^*(a)\}, \quad \text{pre } 0 \leq a < b \leq \infty,$$

pričom hodnotami $f^*(0)$ a $f^*(\infty)$ sa myslia limity $\lim_{t \rightarrow 0} f^*(t)$ a $\lim_{t \rightarrow \infty} f^*(t)$. Platí $\lim_{t \rightarrow \infty} f^*(t) = 0$, pretože $f \in L^{p,\infty}$. Všimnime si, že pre všetky $b < \infty$ je $\mu(H_{(a,b)}) < \infty$. Opak by bol v spore s predpokladom $f \in L^{p,\infty}$.

Na množinách konečnej miery splýva konvergencia k prázdnej množine s konvergenciou v miere k nule (Tvrdenie 4.4.). Takže pre všeobecný interval $(k-1, k)$ môžeme odhadnúť

$$(\forall \ell \geq k)(\exists n_{k\ell})(\forall n \geq n_{k\ell}) : \mu(H_{(k-1,k)} \cap E_n) < \frac{k}{\ell^3}, \quad (4.4a)$$

pričom za $n_{k\ell}$ budeme vždy brať najmenšie vyhovujúce číslo.

Postupnosť $n_{k\ell}$ je v premennej ℓ neklesajúca, pretože $\mu(H_{(k-1,k)} \cap E_n) \rightarrow 0$ pre $n \rightarrow \infty$. Nech je k pevné. BUNV môžeme predpokladať, že $\lim_{\ell \rightarrow \infty} n_{k\ell} = \infty$. Inak by muselo platiť $H_{(k-1,k)} \cap E_n = \emptyset$ od nejakého n . V tom prípade by sme každý člen postupnosti $n_{k\ell}$ porovnali s ℓ a ak by bolo ℓ väčšie, tak by sme ním tento člen postupnosti nahradili. Tým by sme získali novú postupnosť $n_{k\ell}$, ktorá by spĺňala nerovnosti (4.4a) a navyše by rástla do nekonečna s rastúcim ℓ .

Definujme $n_\ell := \max\{n_{1\ell}, n_{2\ell}, \dots, n_{\ell\ell}\}$. Keďže $\lim_{\ell \rightarrow \infty} n_{k\ell} = \infty$ a postupnosť $n_{k\ell}$ je v premennej ℓ neklesajúca, je aj postupnosť n_ℓ neklesajúca a platí $\lim_{\ell \rightarrow \infty} n_\ell = \infty$. Ďalej pre všetky $n \geq n_\ell$ platí

$$\mu(H_{(0,\ell)} \cap E_n) = \sum_{k=1}^{\ell} \mu(H_{(k-1,k)} \cap E_n) < \sum_{k=1}^{\ell} \frac{k}{\ell^3} = \frac{\ell+1}{2\ell^2}. \quad (4.4b)$$

Využili sme len fakt, že miera zjednotenia disjunktných množín je rovná súčtu ich mier a kolekciu nerovností (4.4a).

Veźmeme pevné $n \geq n_1$ ¹ a preň definujme ℓ_n tak, že platí $n_{\ell_n} \leq n < n_{\ell_n+1}$. Keďže n_ℓ tvorí neklesajúcu postupnosť, ℓ_n je dobre definované. Z definície nám vyplýva platnosť limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{\ell_n \rightarrow \infty} n = \infty.$$

Teraz prejdime k samotnej definícii rozkladu množiny E_n

$$F_n := E_n \cap H_{(0,\ell_n)},$$

$$G_n := E_n \setminus F_n.$$

Tento rozklad je už z definície disjunktný a navyše platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = \lim_{\ell_n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = \lim_{\ell_n \rightarrow \infty} \mu(E_n \cap H_{(0,\ell_n)}) < \lim_{\ell_n \rightarrow \infty} \frac{\ell_n + 1}{2\ell_n^2} = 0.$$

¹Pre $n < n_1$ nemáme definovaný rozklad, ale ani nám ho netreba, pretože nás zaujímajú len „velké“ n .

V prvom kroku sme vymenili argument n za ℓ_n . Tento krok je korektný, vďaka tomu, že $n \rightarrow \infty$ práve vtedy, keď $\ell_n \rightarrow \infty$. To platí vďaka definícii ℓ_n , konkrétne kvôli nerovnostiam $n_{\ell_n} \leq n < n_{\ell_n+1}$. Ďalej sme rozpísali F_n podľa definície a použili (4.4b).

Množina G_n má tiež peknú vlastnosť. Ak zafixujeme n , každý prvok z G_n bude mimo množiny $H_{(0,\ell_n)}$. To znamená, že hodnoty funkcie f na G_n nepresiahnu $f^*(\ell_n)$. Táto hodnota navyše s rastúcim n klesá k 0, pretože $f \in L^{p,\infty}$. To znamená, že funkcia f konverguje na G_n rovnomerne k nule

$$x \in G_n \Rightarrow x \notin H_{(0,\ell_n)} \Rightarrow \sup_{x \in G_n} |f(x)| < f^*(\ell_n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in G_n} |f(x)| = 0.$$

HLAVNÁ ČASŤ: Zvoľme $\varepsilon > 0$ ľubovoľné. Zafixujme najprv n . Preň máme ℓ_n podľa vyššie uvedenej definície. Rozpíšme definíciu odhadovaného výrazu

$$\begin{aligned} \|f\chi_{E_n}\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{0 < \lambda < \infty} \lambda \mu(\{|f\chi_{E_n}| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \\ &= \max\left\{ \sup_{0 < \lambda < f^*(\ell_n)} \dots, \sup_{f^*(\ell_n) \leq \lambda < \infty} \dots \right\}. \end{aligned}$$

V poslednom kroku sme rozdelili definičný obor supréma na dve oblasti, pričom v ďalšom slede bude naším cieľom odhadnúť pomocou ε supréma cez obe tieto oblasti. Tieto odhady nám stačí previesť pre dostatočne veľké n .

1. Odhad pre $\lambda \in [f^*(\ell_n), \infty)$: Začnime

$$\sup_{f^*(\ell_n) \leq \lambda < \infty} \lambda \mu(\{|f\chi_{E_n}| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} = \sup_{f^*(\ell_n) \leq \lambda < \infty} \lambda \mu(\{|f\chi_{F_n}| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \quad (4.4c)$$

$$\leq \sup_{0 < \lambda < \infty} \lambda \mu(\{|f\chi_{F_n}| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \quad (4.4d)$$

$$= \|f\chi_{F_n}\|_{L^{p,\infty}}. \quad (4.4e)$$

Vysvetlime si jednotlivé kroky:

(4.4c) Pre $\lambda \in [f^*(\ell_n), \infty)$ sa hodnoty $\mu(\{|f\chi_{E_n}| > \lambda\})$ a $\mu(\{|f\chi_{F_n}| > \lambda\})$ rovnajú, pretože skúmame tie body množiny E_n , v ktorých je hodnota f väčšia ako $f^*(\ell_n)$, a teda tie, ktoré patria množine $H_{(0,\ell_n)}$, čiže aj F_n .

(4.4d) Rozšírením definičného oboru supréma sa jeho hodnota mohla zväčšiť alebo nanajvýš ostať rovnaká.

(4.4e) Použili sme definíciu normy $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$.

V ďalšom využijeme predpoklad $f^* \in (L^{p,\infty})_a$, podľa ktorého existuje $a > 0$ tak, že $\|f\chi_{(0,a)}\|_{L^{p,\infty}} < \varepsilon$. Ďalej keďže $\mu(F_n)$ konverguje k 0, existuje index \hat{n} taký, že pre všetky $n \geq \hat{n}$ je $\mu(F_n) < a$. Teraz môžeme pokračovať v odhadovaní

$$\begin{aligned} \|f\chi_{F_n}\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{\|g\|_{(L^{p,\infty})'} \leq 1} \int_{F_n} |fg| d\mu \\ &\leq \sup_{\|g\|_{(L^{p,\infty})'} \leq 1} \int_0^a f^*(x)g^*(x) dx \\ &= \|f^*\chi_{(0,a)}\|_{L^{p,\infty}} < \varepsilon, \end{aligned}$$

pričom sme použili dvakrát duálne vyjadrenie normy pomocou prvkov z asociovaného priestoru (Poznámky 1.6. a 1.7.) a Hardyovu-Littlewoodovu nerovnosť (3.4). Tým je odhad na prvej oblasti hotový.

2. Odhad pre $\lambda \in (0, f^*(\ell_n))$: Pokračujme druhou oblasťou

$$\begin{aligned} \sup_{0 < \lambda < f^*(\ell_n)} \lambda \mu(\{|f\chi_{E_n}| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} &= \\ &= \sup_{0 < \lambda < f^*(\ell_n)} \lambda [\mu(F_n) + \mu(\{|f\chi_{G_n}| > \lambda\})]^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (4.4f)$$

$$\leq f^*(\ell_n) \mu(F_n) + \sup_{0 < \lambda < f^*(\ell_n)} \lambda \mu(\{|f\chi_{G_n}| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \quad (4.4g)$$

$$= \sup_{0 < \lambda < \infty} \lambda \mu(\{|f\chi_{G_n}| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} + f^*(\ell_n) \mu(F_n) \quad (4.4h)$$

$$= \|f\chi_{G_n}\|_{L^{p,\infty}} + f^*(\ell_n) \mu(F_n). \quad (4.4i)$$

Opäť rozoberme jednotlivé kroky:

(4.4f) Množinu $\{|f\chi_{E_n}| > \lambda\}$ sme rozdelili na dve časti. Tam kde platí $f \geq f^*(\ell_n)$ a kde platí $f < f^*(\ell_n)$. V prvom prípade je zahrnutá celá množina F_n , pretože $\lambda < f^*(\ell_n)$, a teda do množiny $\{|f\chi_{E_n}| > \lambda\}$ automaticky patria všetky body F_n . Zvyšok bude patriť množine G_n .

(4.4g) V jednom zo sčítancov sme odhadli λ pomocou $f^*(\ell_n)$ a vybrali ho von zo suprema. Môžeme tak urobiť, pretože už nie je závislý na λ .

(4.4h) Rovnosť nastáva, pretože pre všetky $\lambda > f^*(\ell_n)$ platí rovnosť $\mu(\{|f\chi_{G_n}| > \lambda\}) = 0$. Teda pridaním takýchto prípustných hodnôt pre λ sa hodnota suprema nezmení.

(4.4i) Definícia normy $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$.

Druhý člen súčtu odhadneme hodnotou $\frac{\varepsilon}{2}$. Je to hračka, pretože aj $\mu(F_n)$, aj $f^*(\ell_n)$ konvergujú k 0 pre n idúce do ∞ . Prvú konvergenciu sme odvodili vyššie a druhá plynie z predpokladu $f^* \in L^{p,\infty}$. Takže existuje index \tilde{n} taký, že pre všetky $n \geq \tilde{n}$ je $\mu(F_n) f^*(\ell_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

A nakoniec

$$\begin{aligned} \|f\chi_{G_n}\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{0 < \lambda < \infty} \lambda \mu(\{|f\chi_{G_n}| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{0 < \lambda < \infty} \lambda \mu(\{f^*(\ell_n) > |f(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (4.4j)$$

$$= \sup_{0 < \lambda < \infty} \lambda \mu(\{f^* \chi_{(\ell_n, \infty)} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \quad (4.4k)$$

$$= \|f^* \chi_{(\ell_n, \infty)}\|_{L^{p,\infty}},$$

kde sme znovu použili dvakrát definíciu normy $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ a zvyšné dva kroky si vysvetlíme:

(4.4j) Vieme, že hodnoty funkcie f v bodoch množiny $\{|f\chi_{G_n}| > \lambda\}$ sú v intervale $(\lambda, f^*(\ell_n))$, pretože tak sme si definovali G_n . Takže keď si vezmem všetky body priestoru, ktoré patria do tohto intervalu dostanem množinu s rovnakou alebo väčšou mierou.

(4.4k) V tomto kroku sme použili fakt, že f a f^* sú súmerateľné a nerastúcosť nerastúceho prerovnaní f^* .

Na odhad posledného výrazu môžeme použiť absolútnu spojitost' normy f^* . Keďže $(\ell_n, \infty) \rightarrow \emptyset$ μ -s.v., existuje index \bar{n} taký, že pre všetky $n \geq \bar{n}$ je $\|f^* \chi_{(\ell_n, \infty)}\|_{L^{p, \infty}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Takže dokopy máme:

$$\sup_{0 < \lambda < f^*(\ell_n)} \lambda \mu(|f \chi_{E_n}| > \lambda)^{\frac{1}{p}} = \|f \chi_{G_n}\|_{L^{p, \infty}} + \mu(F_n) f^*(\ell_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

A teda $\|f \chi_{E_n}\|_{L^{p, \infty}} < \varepsilon$ pre všetky $n \geq \max\{\hat{n}, \tilde{n}, \bar{n}\}$. \square

Zhrnutie 4.6. *Nech f je ľubovoľná funkcia z $\mathcal{M}_0(R, \mu) \cap L^{p, \infty}(R, \mu)$, potom funkcia f má absolútne spojitú normu práve vtedy, ak platia limity*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f^*(t) t^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f^*(t) t^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Literatúra

- [1] Bennett C., Sharpley R. (1988): Interpolation of operators. Academic Press, Boston.