Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jan Končel

Využití internetu ve výuce analytické geometrie na střední škole

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: *RNDr. Jarmila Robová, CSc.*

Studijní program: *Matematika, Učitelství matematiky-informatiky pro střední školy*

Rád bych na tomto místě poděkoval **RNDr. Jarmile Robové, CSc.**, za vedení diplomové práce, a také její podporu, trpělivost, cenné rady a inspiraci.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne *3. 8. 2009* *Jan Končel*

Obsah

Abstrakt

Název práce: *Využití internetu ve výuce analytické geometrie na střední škole*
Autor: *Jan Končel*
Katedra (ústav): *Katedra didaktiky matematiky*
Vedoucí diplomové práce: *RNDr. Jarmila Robová, CSc.*
e-mail vedoucího: *jarmila.robova@mff.cuni.cz*
Abstrakt:
Diplomová práce ve své první části hledá, zkoumá a hodnotí existující české a anglické webové stránky věnované výuce analytické geometrie. Na základě tohoto šetření jsou v druhé části vytvořeny nové webové stránky, jež jsou zaměřené na výuku analytické geometrie na střední škole. Ty se snaží vyhýbat nalezeným chybám a naopak se inspirují tím co bylo kvalitní a zajímavé. Učební text pokrývá kapitoly: souřadnice, vektory, geometrie v rovině, geometrie v prostoru, kuželosečky a kulová plocha. Stránky obsahují mimo jiné definice pojmů, věty a jejich důkazy. Vše je doplněno desítkami názorných obrázků, křížových odkazů, rejstříkem pojmů a dynamickými Java applety. Student si své znalosti může ověřit přímo v appletech, ve sbírkách řešených úloh nebo v generovaných testech.

Klíčová slova: *Analytická geometrie, přímka, rovina, prostor, kuželosečky*

Title: *Secondary school analytic geometry with internet*
Author: *Jan Končel*
Department: *Department of Mathematics Education*
Supervisor: *RNDr. Jarmila Robová, CSc.*
Supervisor's e-mail address: *jarmila.robova@mff.cuni.cz*
Abstract:
The first part of the Thesis looks at, examins and evaluates existing czech and english web pages dedicated to coordinate geometry studies. Based on this research, in the second part new web pages are created, which focus on coordinate geometry studies of secondary school level. They try to overlook any mistakes found and on the contrary look for inspiration in what was valuable and interesting. The text covers the following topics: Cartesian coordinates, vectors, coordinate geometry in 2D, coordinate geometry in 3D, conic sections and sphere. The web pages above all contain definitions, statements and their proofs. All is supported by tens of schematic pictures, cross references, index of definitions and dynamic Java applets. Students can test their knowledge directly in Java applets, through selection of solved exercises or by using generated tests.

Keywords: *Coordinate geometry, vectors, straight line, plane, space, conic sections*

Úvod

Využití internetu ve výuce analytické geometrie je další z řady podobných prací vznikající pod vedením RNDr. Jarmily Robové, CSc. na Katedře didaktiky matematiky MFF UK v Praze. Cílem práce je vytvoření webových stránek, zaměřených na výuku analytické geometrie na střední škole. Práce vychází z důkladného rozboru již existujících, podobných prací. V první části práce je seznam nalezených webových stránek, které se zabývají stejným tématem, jejich stručný popis a souhrnné hodnocení. Na základě tohoto šetření byly vytvořené webové stránky nové, jež se snaží vyhýbat nalezeným chybám a naopak se inspirují tím, co na zkoumaných stránkách bylo kvalitní a zajímavé.

Cílem bylo vytvořit moderní, interaktivní a pro středoškoláka atraktivní webové stránky, protože co je hezké a zajímavé, lépe přitáhne a udrží pozornost. To vše, spolu se snahou o zachování přesnosti a správnosti matematického textu. Výklad analytické geometrie pokrývá témata: souřadnice, vektory, geometrie v rovině, geometrie v prostoru, kuželosečky a kulová plocha.

Učební text je rozčleněn do definic, vět, důkazů a je doplněn ukázkovými příklady a řešenými úlohami. Definice pojmů jsou v souladu s tím, jak je uvádějí Kočandrle a Boček [4]. Aby byl text srozumitelný a názorný, je doplněn celou řadou původních obrázků, křížových odkazů a poznámek. V textu jsou navíc obsaženy interaktivní Java applety, které umožňují propojit algebraicky vykládané pojmy s jejich geometrickou interpretací ještě lépe, než to dokážou statické obrázky. Čtenáři mají možnost otestovat si své znalosti přímo v appletech nebo ve sbírce řešených úloh či v dynamicky generovaných testech. Vyhodnocení testů dává studentům zpětnou vazbu, kterou mohou využít pro další studium. Protože stránky jsou vytvořené v PHP, nelze je spouštět bez webového serveru. Jsou proto umístěny na adrese www.geometrie.php5.cz, kde budou k dispozici do doby, než budou vystaveny na webových stránkách Katedry didaktiky matematiky. Některé použité příklady a zadání úloh v práci, jsou ze sbírek příkladů Bušek [3], Petáková [5] a Boucník, Herman, Krupka, Šimša [7].

Vytvořené webové stránky jsou určeny jak pro středoškolské studenty, kteří se s analytickou geometrií teprve seznamují, tak pro ty, kteří si ji chtějí zopakovat, ať už k maturitě nebo na vysoké škole.

Vzhledem k rozsahu a formě práce, byla vedle její webové podoby vytvářena i její textová reprezentace. Ta je jednodušeji editovatelná a i lépe čitelná. Textová forma práce neobsahuje interaktivní prvky[1] a má jiný formát, ale má stejný obsah jako její internetová verze. Vytištěna a odevzdána je textová forma práce.

[1] Všechny interaktivní prvky na webových stránkách jsou v textu označeny. O jaký prvek se jedná je uvedeno v poznámce pod čarou.

1. Hodnocení

1.1 Analytická geometrie na Internetu

Tato kapitola obsahuje přehled a hodnocení internetových stránek, věnujících se analytické geometrii. Při hledání odkazů na tyto stránky jsem využil vyhledávače: Google, Yahoo, Seznam, Centrum a Atlas. Použitá klíčová slova byla: „analytická geometrie“, „geometrie“, „matematika“, „učebnice geometrie“, „analytical geometry“, „geometry“, „geometry lessons“ a „mathematics“. Adresy většiny níže uvedených stránek jsem získal právě díky těmto vyhledávačům, některé z nich ale vyhledávače nenalezly. Jejich získání mi umožnily až matematické rozcestníky a prohledávané stránky, kde se analytická geometrie sice nenalézala, ale na nichž autoři uvedli odkazy na další zdroje. Vzhledem k tempu, v jakém internetové stránky vznikají a zanikají, je možné, že v době dokončení této práce, některé odkazy nemusejí být funkční. Kvůli rozsahu Internetu je také možné, že některé stránky jsem opomněl a nenalezl. Jsem ale přesvědčen, že následující seznam je dostatečným reprezentantem toho, co lze na webu nalézt.

V mé práci jsem hledal a hodnotil jen stránky české a anglické (nebo neanglické v anglickém jazyce). Seznam odkazů, které jsem při svém hledání nalezl a ohodnotil, obsahuje jak stránky dobré, tak špatné. Mou představu, jak by měla má internetová učebnice vypadat, ovlivnily oba typy stránek. Ty dobré přinesly některé nové nápady a ty špatné jasně ukázaly, čemu se vyhnout a čeho se vyvarovat. Na následujících řádcích je uveden popis a zhodnocení jednotlivých stránek a na závěr je doplněna tabulka, ve které je toto ohodnocení přehledně shrnuto.

1.1.1 Hodnocení

Stránky byly hodnoceny v několika kategoriích na stupnici 1, 2, 3 (výborný, uspokojivý, nedostatečný). Stránky s celkovým dojmem ohodnoceným jako 1 rozhodně stojí za shlédnutí, naopak stránky s ohodnocením 3 nejsou vhodné pro výuku a je lepší se jim vyhnout. Hodnocení celkového dojmu je subjektivní a není aritmetickým průměrem ohodnocení ostatních kritérií.

Kritéria byla následující:

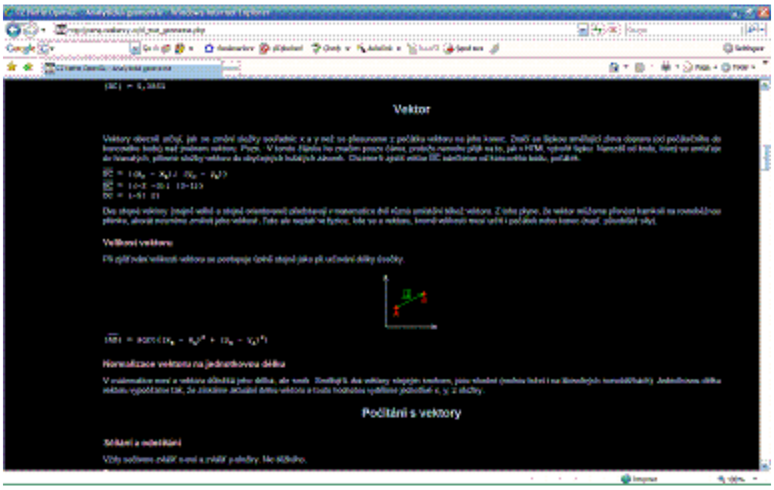
- obsah látky (pokrývá celou středoškolskou látku nebo jen část);
- odborná správnost (správný nebo naopak chybný výklad matematické látky);
- názornost (použití prvků, které zvyšují názornost probírané látky – obrázky, cvičení, scripty, java applety aj.);
- využití možností internetu (nakolik se daná stránka liší od klasické papírové učebnice);
- celkový dojem.

Celkem bylo hodnoceno 18 internetových stránek – 7 českých a 11 zahraničních. Nejprve jsou uvedeny české stránky, poté ty zahraniční. U každé hodnocené stránky je odkaz, na kterém ji naleznete, malý obrázek (náhled) a hodnocení. To je uvedeno ve tvaru: 1/1/2/2/1. Tento zápis znamená, že obsah látky byl ohodnocen jako 1, odborná správnost jako 1, názornost 2, využití možností internetu 2 a celkový dojem 1. Pokud by u některého kritéria byl uveden znak „–“, znamená to, že dané kritérium nebylo hodnoceno.

1.1.2 České stránky

CZ NeHe OpenGL

Odkaz: http://nehe.ceskehry.cz/cl_mat_geometrie.php

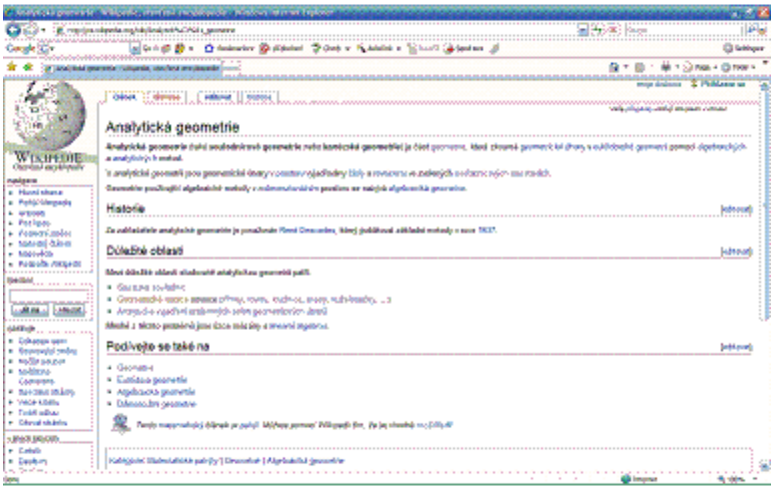


Stránka, která není určena přímo k výuce matematiky, ale zabývá se počítačovou grafikou. Protože počítačová grafika s analytickou geometrií úzce souvisí, přidali autoři také část, která se analytickou geometrií zabývá a ve které zájemci najdou některé potřebné základní informace. Výklad na první pohled připomíná výpisky ze školního sešitu matematiky a autor tento dojem na konci sám potvrzuje. V textu není mnoho obrázků a autor nevyužívá žádnou z možností, které internet nabízí, aby své zápisky obohatil a přidal jim něco navíc. Celkový dojem nevylepší ani rozsah učiva, který pokrývá přibližně polovinu středoškolské látky a stránky tak zůstávají použitelné jako zdroj informací, ale rozhodně se nezařadí mezi to nejlepší, co můžete na Internetu nalézt.

Hodnocení: 2/2/2/3/2

Wikipedie

Odkaz: http://cs.wikipedia.org/wiki/Analytick%C3%A1_geometrie

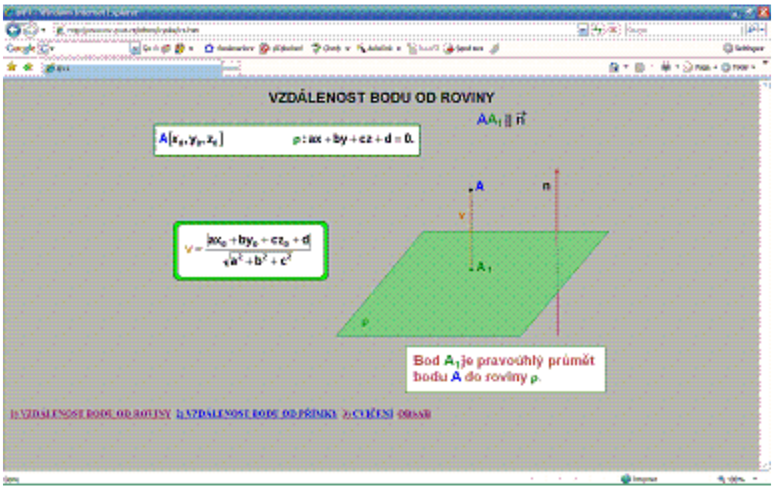


Jedná se o české stránky věnované heslu „Analytická geometrie“, známé internetové encyklopedie. Svým rozsahem patří mezi nejlepší, ale tato výhoda je provázena některými výraznými problémy – ty plynou právě z toho, že se jedná o výklad hesla v internetové encyklopedii. Těmito problémy jsou především neuspořádanost a nepřehlednost. Místo souvislého výkladu o analytické geometrii, jsou jednotlivé pojmy vysvětlovány pod svými vlastními hesly. Někdy jsou tyto pojmy propojeny velmi přímočaře, jindy musí uživatel hledat, aby našel to, co potřebuje. Pochopení látky pak znesnadňuje i to, že jednotlivá hesla vykládají různí lidé a styl vysvětlování se pak liší. Právě kvůli nepřehlednosti, nekompaktnosti a nesourodosti nelze studentům, kteří se s analytickou geometrií teprve seznamují, Wikipedii pro výuku doporučit.

Hodnocení: 1/1/3/3/2

ČVUT

Odkaz: http://www.civ.cvut.cz/others/vyuka/

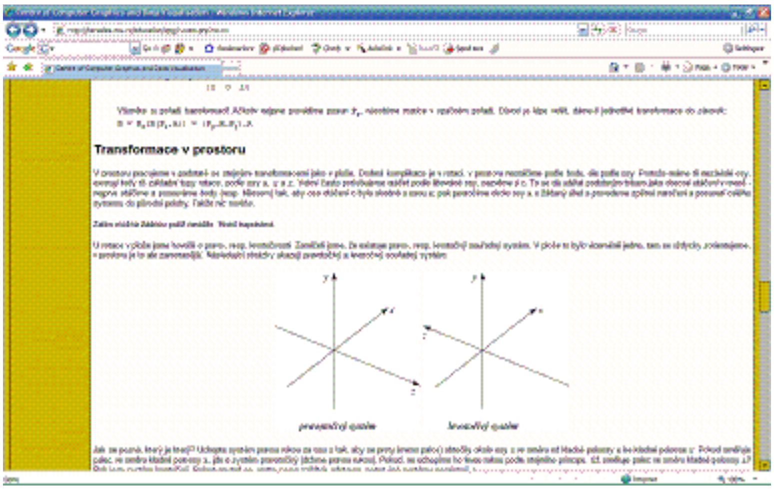


Na stránkách Centra Intenzivních Výpočtů ČVUT lze nalézt tuto velice hezkou práci. Jedná se o učebnici geometrie převedenou do internetové podoby ve formě java appletů. Autor se na rozdíl od jiných tvůrců appletů věnuje výkladu analytické geometrie v prostoru. Velkou zajímavostí je, že aplikace je namluvená a látka vysvětlována jak hlasem, tak za pomoci obrázků a animací, které jej doplňují. Za každou kapitolou se nacházejí příklady na procvičení, a tak lze této učebnici vytknout jen máloco. Snad jen kdyby na stránkách byly i applety dynamické, aby si student mohl nově nabyté vědomosti vyzkoušet a „ohmatat“.

Hodnocení: 2/1/1/2/1

ZČU – Centrum Počítačové Grafiky a Vizualizace Dat

Odkaz: http://herakles.zcu.cz/education/zpg/cviceni.php?no=1

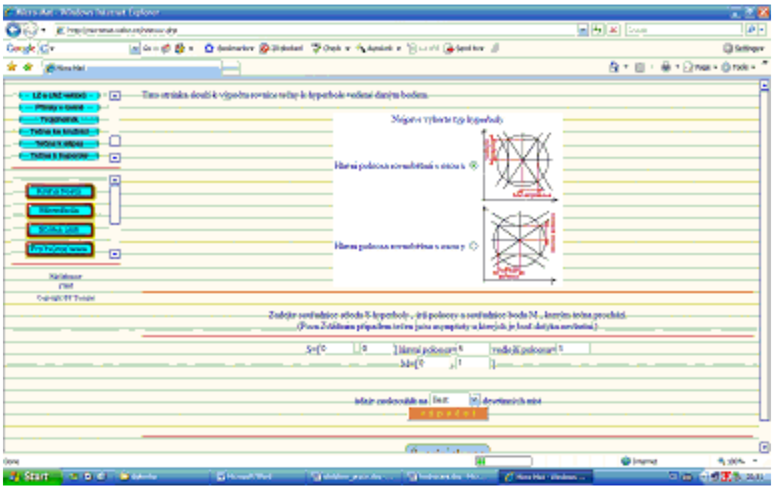


Další stránka, která se zabývá především počítačovou grafikou, avšak v rámci její výuky vysvětluje i některé partie analytické geometrie. Při srovnání s CZ NeHe OpenGL, která se výukou počítačové grafiky také zabývá, nám tato vyjde o mnoho horší. Rozsah je nedostatečný a podaná látka je pro začátečníka nestravitelná. Autor nepostupuje systematicky a vybírá z analytické geometrie jen některé pojmy a metody řešení úloh. Až na výjimky nejsou obsaženy žádné obrázky nebo cokoliv jiného než prostý text. Celkově špatný dojem nezmění ani několik příkladů na procvičení, které můžete nalézt na konci. Na autorovu obhajobu je třeba říci, že stránky nejsou určeny pro středoškoláky a ani si nekladly za cíl suplovat středoškolskou učebnici.

Hodnocení: 3/3/3/3/3

Micromat

Odkaz: http://micromat.webz.cz/index.php

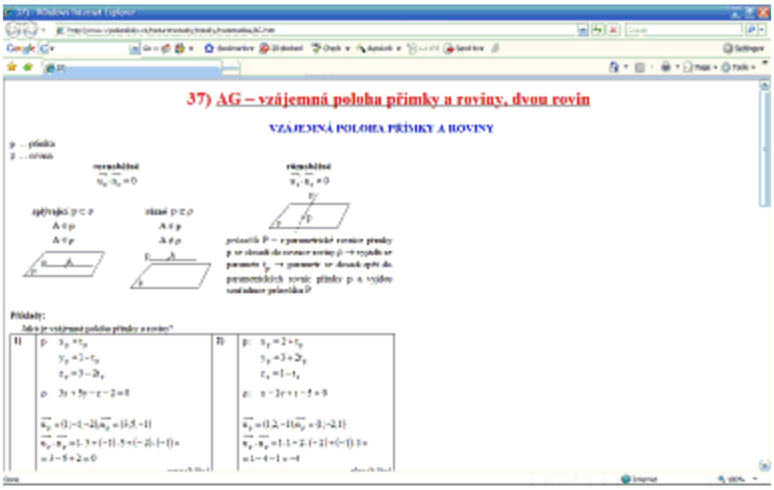


Malé internetové centrum rovnic a matematiky vůbec mladoboleslavského učitele Františka Tumajera je poměrně zajímavým projektem. Na stránkách najdete algoritmy řešící některé časté středoškolské problémy. Stačí vyplnit zadání a výstupem je jak správný výsledek, tak postup k němu vedoucí. Autor neuvádí žádný teoretický výklad k daným úlohám, ale umožňuje jejich zadání různými způsoby. U vzájemné polohy přímek si můžete vybrat, zda je zadáte parametricky nebo rovnicí obecnou (nebo kombinovaně) a v závislosti na zadání bude vygenerováno i řešení této úlohy. Zajímavostí je fórum, kde lze publikovat úlohy a hledat pomoc od zkušenějších uživatelů, toto fórum ale naneštěstí není příliš často využíváno.

Hodnocení: 3/1/1/2/2

Vysoké Školy

Odkaz: http://www.vysokeskoly.cz/system/?clanek=1104

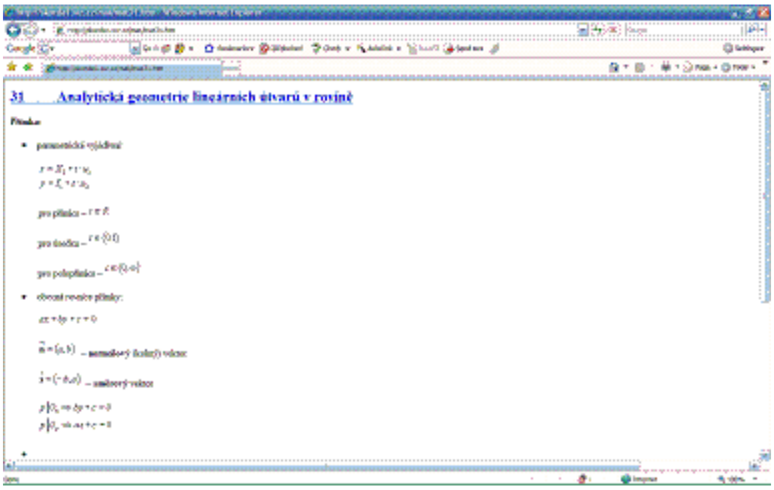


Stránky, které jsou věnované maturitním otázkám a přípravě na vysokou školu. Najdete na nich celou středoškolskou analytickou geometrii, rozdělenou do mnoha kapitol. Ty jsou na učebnici dosti stručné a strohé, jako přehled ale mohou posloužit velmi dobře. V rámci jednotlivých kapitol jsou uváděny řešené konkrétní i obecné příklady. A u těch obecných je postup řešení navíc krokován a různé možnosti jsou přehledně roztříděné do tabulek. Autoři pro každou takovouto možnost uvádějí jeden konkrétní příklad, který pomáhá studentům pochopit obecné řešení a jeho jednotlivé varianty. Stránky nevyužívají více možností internetu a tak jejich výhodou zůstává jen rozsah a simultánní zobrazení několika možností řešení vedle sebe, což by v klasické učebnici nebylo možné.

Hodnocení: 1/1/2/3/2

Skorda

Odkaz: http://skorda1.wz.cz/matika.htm



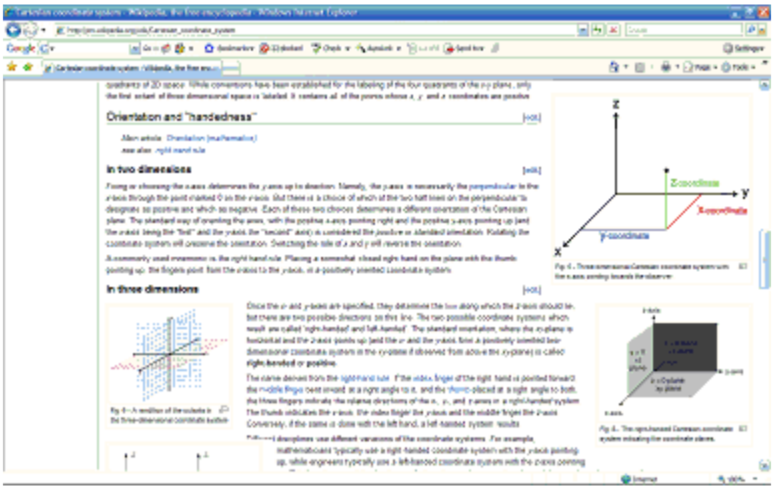
Osobní stránky vytvořené studentem Jiřím Šušákem. Zájemcům autor předkládá vypracované maturitní otázky z různých předmětů, a to včetně otázek z matematiky. Rozsah je velmi dobrý a najdete na nich vše, co byste mohli potřebovat. Lze jim ale vytknout více věcí. Ať už je to nedostatek řešených příkladů, přílišná stručnost nebo malá názornost. Najdete zde několik obrázků, ale to je vše, co autor nabízí k pochopení látky. Problém tkví především v tom, že autor neusiluje o to, aby čtenáři látku pochopili, ale předkládá jen fakta, která mohou zůstat nepochopena. Svůj účel – podat přehled středoškolské analytické geometrie – autor splnil. Pro žáky a studenty, kteří se analytickou geometrii teprve učí, zůstávají tyto stránky nevhodné.

Hodnocení: 1/2/3/3/3

1.1.3 Zahraniční stránky

Wikipedia

Odkaz: http://en.wikipedia.org/wiki/Analytic_geometry

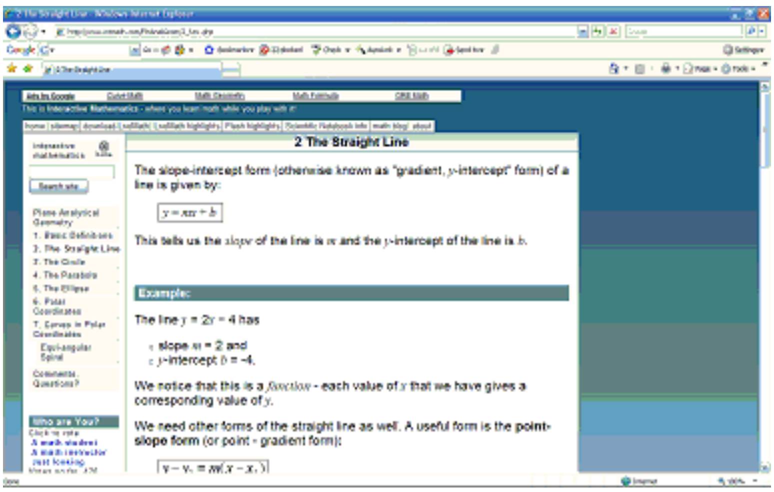


Anglický článek, který je věnován výkladu hesla „analytická geometrie“ internetové encyklopedie Wikipedia. Je třeba zdůraznit, že český a anglický článek se liší a jeden není překladem druhého. Co se kapitol a témat týče, vyrovná se české verzi a leckde ji překonává. Kapitoly jsou rozsáhlejší, obsahují více obrázků i informací. Mimo samotných pojmů, které jsou zde vysvětleny, naleznete i mnoho dalších souvisejících informací – poznámky z historie, nematematické aplikace těchto poznatků aj. Podobně jako v české verzi, nenaleznete zde příklady a cvičení. V článcích najdete několik obecných řešení, ale až na výjimky žádné příklady konkrétní. Nevýhodou stále zůstává nepřehlednost, způsobená častými odkazy. Vzhledem k větší obsáhlosti, není tato nevýhoda tak výrazná a anglická verze je výrazně lepší, než česká.

Hodnocení: 1/1/2/2/2

Interactive Mathematics

Odkaz: http://www.intmath.com/PlnAnalGeom/PAGe.php

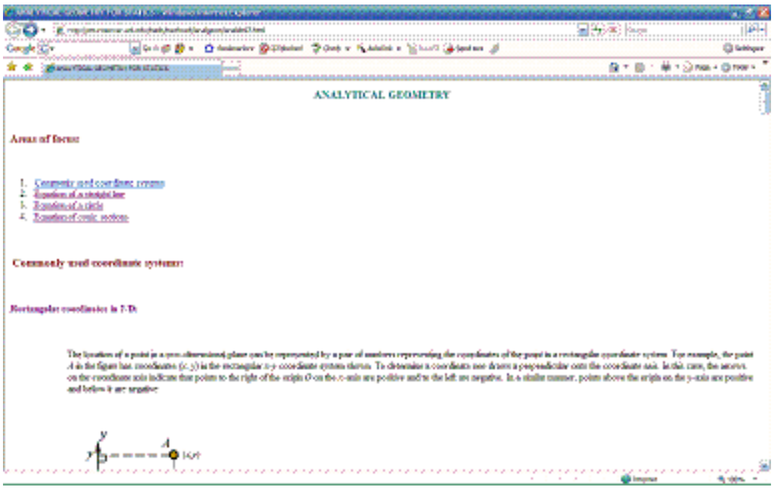


Anglické stránky, které jsou určené pro studenty a učitele matematiky. Rozsahem jsou z našeho hlediska spíše nedostatečné, obsahují jen rovinnou analytickou geometrii, a to ještě navíc ne kompletní. Zajímavé a přínosné jsou způsobem, jakým látku podávají. Obsahují řešené příklady a cvičení (u těch je možné zobrazit správné řešení) a k probíraným tématům naleznete příklady z praxe a historie. Autoři navíc nabízejí zásuvný modul (plug-in) do prohlížeče uživatele – MathLive, jenž umožňuje zobrazovat řešení a dynamicky měnit zadání příkladů, které jsou k dispozici. Tento modul má ale jednu slabinu, a tou je jeho ovládání, které je složité a málo intuitivní.

Hodnocení: 3/2/1/1/2

University of Nebraska-Lincoln

Odkaz: http://em-ntserver.unl.edu/Math/mathweb/mathtoc.html

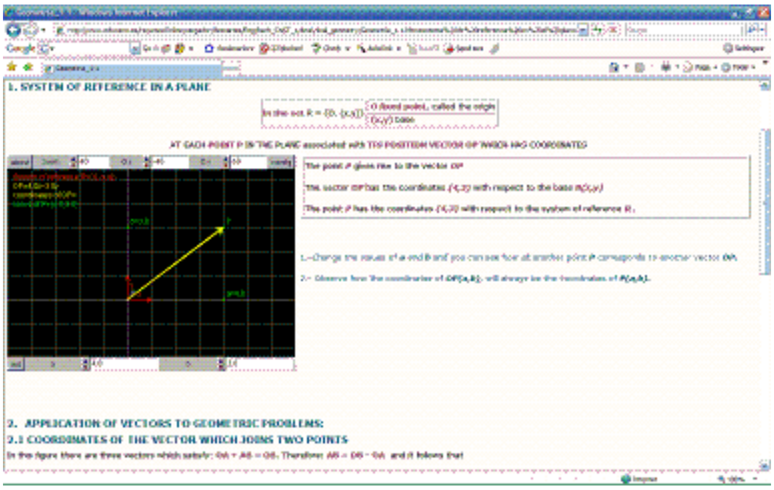


Univerzitní stránky, poskytující informace o některých základních matematických tématech, která by studenti měli ovládat. Jedná se o jednu z mála stránek, kde autoři používají definice a věty. Ve svém záměru nebyli důslední, a tak některé pojmy definované naleznete a jiné, ač používané, ne. Rozsah vysvětlované látky není příliš velký a ani zpracování není nejlepší. Především pokulhává navigace, protože rozdělení do kapitol se nachází vždy jen na vrchu stránky a celý výklad se poté nachází v souvislém proudu textu, nadpisů a obrázků až pod tímto rozdělením. Druhou velkou nevýhodou je stručnost a absence jakýchkoliv příkladů a prostředků, které by studentům vysvětlovanou látku více přiblížily.

Hodnocení: 3/1/2/3/3

Descartes 2D

Odkaz: http://www.educarm.es/recursosOnline/cargador/descartes/Eng/Bach_CNST_1/Analytical_geometry/Geometria_0.htm

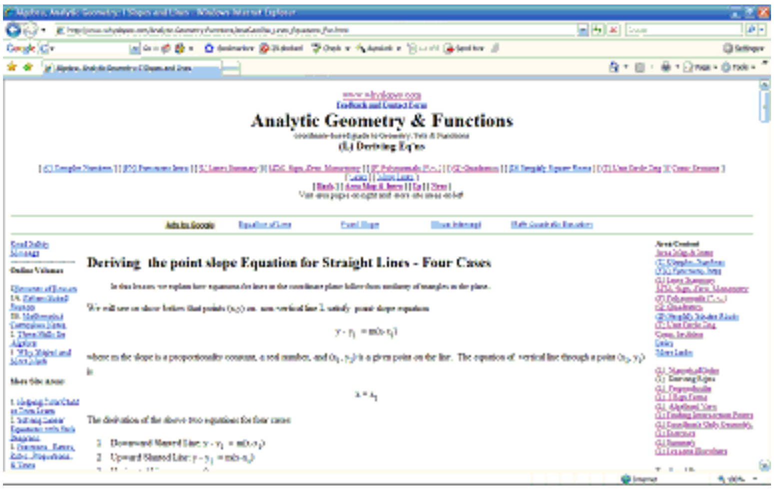


Nádherné španělské stránky věnované analytické geometrii v rovině. Patří k tomu nejlepšímu, co lze na Internetu najít. Neobsahují všechny partie středoškolské analytické geometrie a nelze je použít jako učebnici, protože neobsahují mnoho teorie. To, co je řadí mezi nejlepší, jsou java applety na nich umístěné. Každý z nich je věnován procvičení jiného problému a umožňuje studentům proniknout do věcí, které si sami třeba nedokáží představit. U každého appletu se nachází textové zadání cvičení a problémů, které by student měl s jeho pomocí vyřešit nebo pochopit. Důraz je kladen na dynamičnost a okamžitou odezvu, kterou applety přinášejí, a která pomáhá studentům vytvářet a rozvíjet jejich geometrickou představivost.

Hodnocení: 2/1/1/1/1

Whyslopes

Odkaz: http://www.whyslopes.com/Analytic-Geometry-Functions/

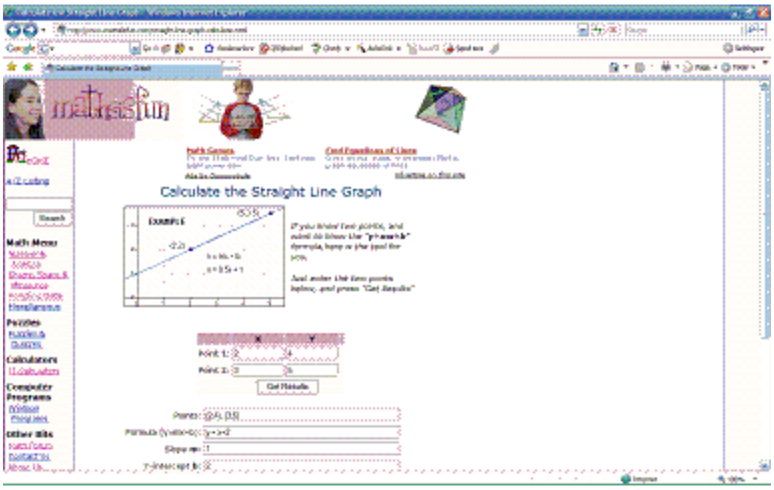


Internetové stránky věnované matematice, jejichž vznik se datuje již do roku 1996. Obsahují celou řadu matematických témat a mezi nimi i analytickou geometrii. První věc, která na stránkách zaujme, je jejich nepřehlednost. Čtenář je zahlcen obrovským množstvím různých odkazů a jen špatně se může orientovat v nabízených informacích. Poznatky o analytické geometrii na stránkách nejsou rozsáhlé a autoři se věnují jen několika málo partiím. Ty jsou potom probírány pozvolna a obsáhle. Dobrým nápadem jsou shrnutí látky po každé kapitole, kde je stručně podán obsah předchozího dlouhého textu. Objevují se zde matematické věty a jejich důkazy, ale ani tady nebyli autoři důslední a nepoužívají matematické vyjadřování systematicky.

Hodnocení: 3/1/2/3/3

Math is fun

Odkaz: http://www.mathisfun.com/

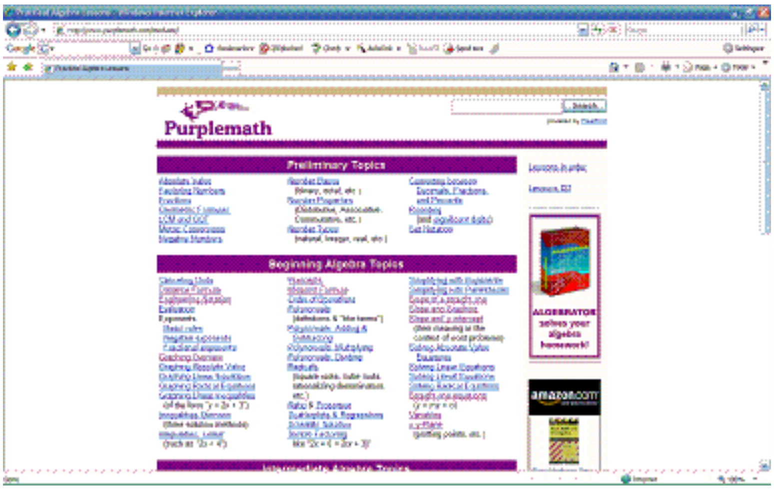


Nenáročné matematické stránky pro děti. Nejsou určeny pro středoškoláky a přesto obsahují i informace o analytické geometrii a při jejím vysvětlování využívají všemožných prostředků. Najdete jen rovnici přímky a soustavy souřadnic, ale látka je podána přehledně, obsahuje řešené příklady a dokonce i příklady na procvičení. Nechybí dynamický applet, který pomůže získat představu o tom, jak směrnice ovlivňuje sklon přímky, obrázky a zábavná cvičení v souřadnicové soustavě. Ačkoliv jsou tyto stránky pro středoškolského studenta příliš dětské, lze si z nich odnést mnoho dobrého a poučného (pro tvůrce elektronické učebnice). Obsahují totiž přesně to, co by dle mého stránky o matematice obsahovat měly.

Hodnocení: 3/–/1/1/2

Purple Math

Odkaz: http://www.purplemath.com/modules/index.htm

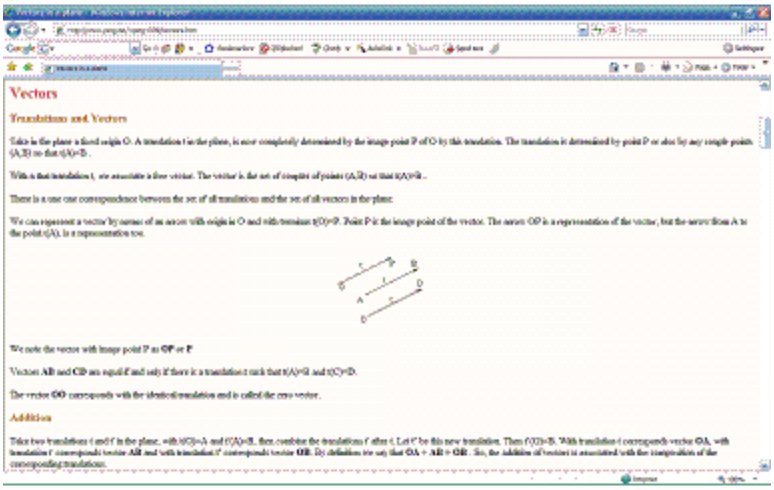


Stránky americké učitelky matematiky, pojednávající o mnoha matematických tématech a především problémech. Nabízí návody, jak řešit celou řadu různých typů úloh. Ty jsou vysvětlovány krok za krokem a probírány jak na konkrétním příkladu, tak na obecném zadání. Někdy je přidán i vysvětlující text, který studenta uvede do problému, ale většinou se jedná především o praktický návod, jak řešit vybrané typy úloh: Jak najít střed kružnice, určit vrchol paraboly nebo jak vynášet body do kartézské soustavy souřadnic. Vzhledem k pojetí stránky nepřekvapí, že obsahuje mnoho řešených příkladů a pokud student potřebuje poradit s řešením nějaké úlohy, může zde úspěšně hledat pomoc. Rozsáhlejší teoretické informace je třeba vyhledat někde jinde.

Hodnocení: 2/1/1/2/2

Math – abundance

Odkaz: http://www.ping.be/~ping1339/

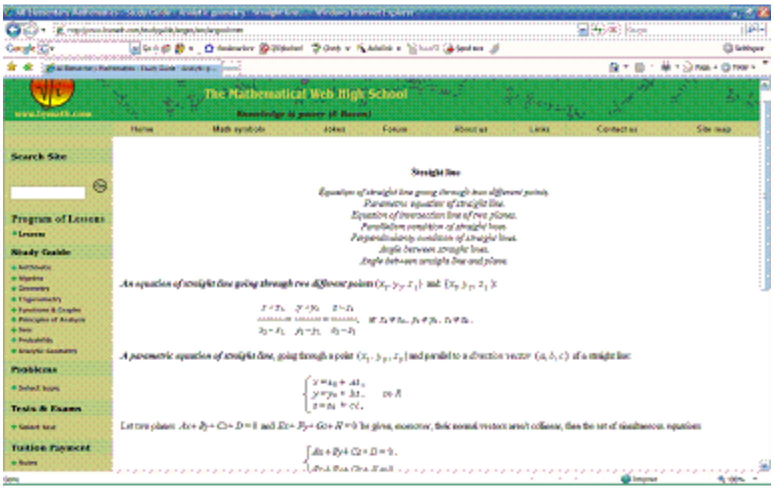


Na těchto stránkách najdete přehled středoškolské matematiky, který někde přesahuje až do matematiky vysokoškolské. Autor používá definice, věty a podává i důkazy vyslovených vět. Obsah je uspokojivý, ale některé poznatky byste hledali marně, ačkoliv o nich autor začíná psát a částečně je zmiňuje (např. rozbor vzájemné polohy útvarů v prostoru – rovina a rovina, rovina a přímka). Nechybí řešené příklady a ke každé větší kapitole sbírka úloh. Další výhodou je rejstřík pojmů, který usnadňuje hledání v textu a je velmi užitečný. Naopak výraznou nevýhodou je nedostatek názornosti – neobsahuje téměř žádné obrazové přiblížení vysvětlované látky a špatná čitelnost matematických výrazů, které autor zapisuje jen pomocí základního textového formátování (chybí zlomky, odmocniny aj.).

Hodnocení: 1/1/2/3/2

Bymath

Odkaz: http://www.bymath.com/studyguide/angeo/angeo_topics.html

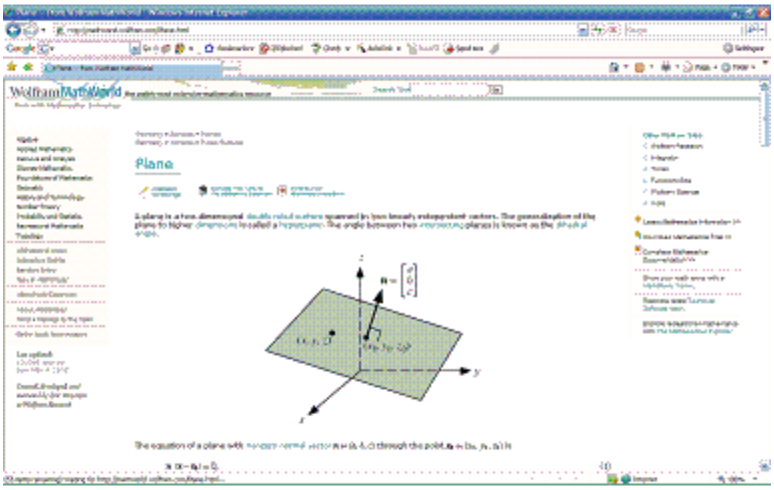


Stránky o matematice, které jsou určeny středoškolským studentům. Naleznete zde celou analytickou geometrii, ale podávané informace jsou velmi stručné a strohé. Tvoří je jen přehled vzorců a pouček podobný matematickým tabulkám. Nenajdete žádné řešené příklady a abyste si mohli prohlédnout nabízená cvičení, je nutné se zaregistrovat a zaplatit. Až na výjimky chybí obrázky a i další prostředky, které by studentům mohly látku přiblížit a zpřehlednit. S přihlédnutím ke kompozici stránek a jejich obsahu je nutné říci, že rozhodně nejsou vhodné pro někoho, kdo se analytickou geometrii teprve učí. Jako přehled ale určitě mohou pomoci, protože nabízejí hezký souhrn této středoškolské partie matematiky.

Hodnocení: 1/1/3/3/2

Mathworld

Odkaz: http://mathworld.wolfram.com

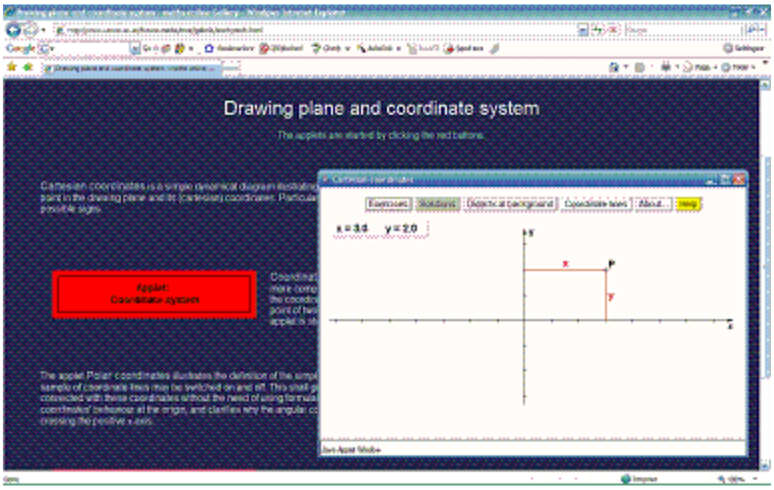


Matematická encyklopedie, která ja učiněnou studnicí matematických poznatků. Můžete zde nalézt vše, co se na střední škole v analytické geometrii učí a ještě mnohem více. Najdete obrázky, applety další odkazy a prameny, ze kterých se dá čerpat. Obsahují vše, ale to je zároveň i jejich problém. Podobně jako u Wikipedie zde existuje řada křížových odkazů na další témata, které ztěžují přehlednost a znesnadňují hledání ucelených témat. Další nevýhodou je, že pro běžného středoškoláka jsou z matematického hlediska často nepřístupné, protože nastíněná řešení velmi často využívají determinanty, které se na střední škole ještě neprobírají. Poslední nevýhodou je absence řešených příkladů. Stránky jsou velmi hezké a obsáhlé. Pro normální studenty ale obsahují velké množství pojmů, které si sami nebudou schopni vhodně propojit.

Hodnocení: 1/1/2/1/2

Maths online

Odkaz: http://www.univie.ac.at/future.media/moe/galerie.html



Stránky Vídeňské univerzity, na kterých naleznete celou řadu java appletů. Ty umožní studentům poznat některá zákoutí analytické geometrie a pomohou procvičit a napomoci pochopení znalostí, které studenti získávají ve škole. Applety jsou rozděleny do kapitol a každý je uveden krátkým textem s popisem toho, co obsahuje. Přímo po jeho spuštění, v nově otevřeném okně appletu, naleznete zadání příkladů na procvičení i jejich řešení. Pro učitele je navíc uvedeno didaktické pozadí, tedy to, co daný applet má rozvíjet a co umožňuje pochopit. Stránky neobsahují učební texty, ale přesto jsou hodnotné a mohou přispět k rozvoji studentů a jejich představivosti. Applety mohou být doplňkem učebnice a učitelovým pomocníkem při výkladu ve škole.

Hodnocení: 2/1/1/1/1

1.1.4 Shrnutí

Internetových stránek, věnujících se analytické geometrii, není mnoho ani u nás, ani ve světě. Ještě méně je těch, které se snaží odlišit od klasických učebnic a které využívají prostředků, které nyní již vysokorychlostní internet nabízí. Ty mohou být rozličné. Mezi nejjednodušší patří křížové odkazy, které propojují jednotlivé pojmy, rejstříky, obrázky, kterých na internetových stránkách může být mnohem více než v papírové učebnici. K dalším patří skripty a dynamické applety nebo jiné prostředky, které interagují s uživatelem a které mohou nahradit pedagoga v jeho roli zprostředkovatele vzdělání. Nehodnotil jsem proto další učebnice v textové podobě, které na Internetu můžete najít (texty psané ve wordu, pdf), protože tyto učební texty se od normálních učebnic neliší. Rozsah internetové učebnice může být větší a taková učebnice může a dle mého názoru by měla obsahovat další, doplňující informace, ať už z historie, nebo o aplikaci daných poznatků v praxi aj.

Prozkoumal jsem, co internet nabízí, a došel k názoru, že neexistuje dobrá a úplná internetová učebnice věnující se středoškolské analytické geometrii. Některé z prozkoumaných stránek jsou opravdu velmi kvalitní, ale vždy je něco nezanedbatelného, co jim chybí. Co jedna stránka má, druhá nemá a naopak. Výsledkem mé práce bude internetová učebnice, co možná nejlepší a nejkompletnější, aby v ní zájemci o analytickou geometrii našli vše, co potřebují. Mým cílem je vytvořit stránky, které by mohli využívat studenti samostatně a zároveň bych rád pedagogům nabídl nástroje, které by mohli využít při výuce ve svých hodinách.

1.2 Tabulka hodnocení

Následuje tabulka, ve které jsou přehledně shrnuta hodnocení výše popisovaných stránek. Zvýrazněné řádky označují to nejlepší, co lze na Internetu ohledně analytické geometrie nalézt. Tyto stránky rozhodně stojí za navštívení.

	Obsah	**Správnost**	**Názornost**	**Možnosti**	**Dojem**
1. CZ NeHe OpenGL	**2**	**2**	**2**	**3**	**2**
2. Wikipedie	**1**	**1**	**3**	**3**	**2**
3. ČVUT	**2**	**1**	**1**	**2**	**1**
4. ZČU – Centrum Počítačové Grafiky a Vizualizace Dat	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**
5. Micromat	**3**	**1**	**1**	**2**	**2**
6. Vysoké Školy	**1**	**1**	**2**	**3**	**2**
7. Skorda	**1**	**2**	**3**	**3**	**3**
8. Wikipedia	**1**	**1**	**2**	**2**	**2**
9. Interactive Mathematics	**3**	**2**	**1**	**1**	**2**
10. University of Nebraska-Lincoln	**3**	**1**	**2**	**3**	**3**
11. Descartes 2D	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**
12. Whyslopes	**3**	**1**	**2**	**3**	**3**
13. Math is fun	**3**	**–**	**1**	**1**	**2**
14. Purple Math	**2**	**1**	**1**	**2**	**2**
15. Math – abundance	**1**	**1**	**2**	**3**	**2**
16. Vymatu	**1**	**1**	**3**	**3**	**2**
17. Mathworld	**1**	**1**	**2**	**1**	**2**
18. Maths online	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**

2. Implementace webových stránek

Výklad analytické geometrie v sobě spojuje algebraická řešení problémů s jejich geometrickou interpretací v rovině a prostoru. V práci bylo nutné zobrazovat složité výrazy, rovnice a vzorce. Kreslit názorné 2D a 3D obrázky, upravovat je do formy vhodné pro webové stránky a případně je ještě měnit. To vše, doplněné o programování Java appletů a samotných stránek vyžadovalo použití velkého množství aplikací. Používal jsem jen ty, které jsou součástí operačního systému nebo je jejich použití zdarma. Vývoj probíhal na platformě Mac OS X Leopard s využitím následujících programů:

Inkscape pro tvorbu vektorové grafiky,
Gimp pro tvorbu a úpravu obrázků,
Xcode jako textový editor kódu,
NetBeans pro tvorbu appletů,
Grab pro zachycení obrázků z obrazovky.
Nenahraditelným pomocníkem byla aplikace **Grapher**, která umožnovala jednoduše vytvářet přesné obrázky k příkladům a vzorce do textové verze.

V analytické geometrii se často používají poměrně komplikované výrazy a matematické zápisy, proto bylo nevyhovující používat jinak běžný přístup, kdy se zobrazované výrazy přetvoří na obrázky, a ty se poté vloží do zobrazovaného textu. Takový postup neumožňuje vytvářet dynamická zadání a obrázky není možné jednoduše editovat. Navíc v textu chybí jakákoliv informace o tom, co je na obrázku zobrazeno. V prohlížečích zatím není implementován jazyk MathML a neexistuje žádný nekomerční program, který by umožňoval vytvářet a zobrazovat matematické vzorce v prohlížečích. Proto je jako součást práce vytvořen Java applet, který umožňuje snadno zobrazovat i poměrně komplikované matematické výrazy.

$$\frac{\left(\frac{a^2b^2 + a^2(y_0 - n)(y - n)}{b^2(x_0 - m)}\right)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1,$$

Applet ještě nedokáže zobrazovat korektně úplně vše[2], ale umožňuje vytvářet automaticky generované příklady včetně jejich řešení a nabízí snadné zobrazení a editaci matematických zápisů i výrazů přímo ve zdrojovém kódu webových stránek.

Ne všechny výrazy a zápisy jsou zobrazeny pomocí tohoto appletu. Protože stránky jsou kódovány v UTF-8, využívají pro zápis výrazů kaskádové styly doplněné o matematické znaky jako ∈, ×, které jsou včleněny přímo do textu[3].

[2] Problémy jsou s velikostí závorek okolo rozsáhlejších výrazů a se změnou fontu přímo ve výrazu. Nelze tak zcela korektně označovat např. vektory nebo třeba množiny reálných čísel.

[3] V některých počítačích se systémem Windows XP je font, který stránky využívají, neúplný. Z toho důvodu se mohou matematické znaky špatně zobrazovat. V úvodu webových stránek je toto uživateli oznámeno a je uveden návod, jak naistalovat „úplnější“ font.

Součástí práce jsou i interaktivní 2D Java applety, které zobrazují geometrické objekty spolu s jejich popisem a charakteristikami. Uživatelé si tak mohou propojit probírané pojmy s jejich geometrickou interpretací v prostředí, které jim poskytuje zpětnou vazbu a pomáhá lépe formovat jejich pochopení probírané látky. Tyto applety obsahují úlohy, na kterých si studenti mohou ověřit své nově nabyté znalosti. Applety totiž dokáží interpretovat a vyhodnotit odpovědi na zadané otázky.

Celé stránky jsou naprogramovány v PHP verze 5. Využívají JavaScript, Java applety, obrázky, křížové odkazy a databázi MySQL. Zdrojový kód stránek je validován jako XHTML 1.1[4] a stránky by měly fungovat ve všech moderních prohlížečích (IE 8, Firefox 3, Opera 9, Safari 4 a Chrome). Stránky jsou plně otestované v prohlížečích Safari 4 a Firefox 3.5 a IE 8. V ostatních prohlížečích byly stránky testovány jen zběžně a jejich správná funkčnost tak není zcela zaručena. Protože je používán JavaScript a Java, je nutné, aby byly povolené v prohlížeči. V úvodu stránek je toto testováno, a pokud prohlížeč nevyhovuje, uživatel je instruován, aby zjednal nápravu. Tento test také kontroluje verzi nainstalovaného interpretru Javy, a pokud je zastaralá, oznámí to uživateli.

Výklad je doplněn automaticky generovanými testy z probrané látky. Testové otázky jsou uložené v databázi a do jednotlivých testů jsou vybírány náhodně podle obtížnosti a kapitoly, do které patří. V testech jsou použity dva typy otázek: s výběrem z nabízených odpovědí a s otevřenou odpovědí. Každý test obsahuje vyhodnocení, jehož součástí je ohodnocení výkonu známkou jako ve škole, zvýraznění správných a špatných odpovědí a k jednotlivým otázkám zobrazí navíc i správné odpovědi. Bylo-li to vhodné, je doplněno i zdůvodnění správného řešení. Databáze obsahuje přes 40 typů úloh a přes 200 různých zadání, proto je možné testy i několikrát zopakovat.

[4] Některé části webových stránek specifikaci XHTML 1.1 neodpovídají. To je způsobeno odkazy na externí stránky, které obsahují zakázané znaky. Ty jsou ale nutné, pro jejich správnou funkčnost.

3. Text práce

Úvod

Tyto stránky vznikaly jako diplomová práce na matematicko-fyzikální fakultě v letech 2006 – 2009. Jedná se o výukové stránky věnované analytické geometrii, které svým rozsahem pokrývají středoškolské učivo. Látka je rozdělena do kapitol: souřadnice, vektory, geometrie v rovině, geometrie v prostoru, kuželosečky a plochy. Součástí učebního textu jsou sbírky řešených úloh, dynamicky generované testy a rejstřík definovaných pojmů. Text obsahuje desítky původních obrázků a je doplněn řadou Java appletů, které propojují algebraické zápisy s jejich geometrickou interpretací.

Požadavky

Stránky ve velké míře využívají Javascript a Javu. Aby správně fungovaly, je nutné mít jak Javascript, tak Javu v prohlížeči povolené. Pro správnou funkci appletů je potřeba mít nainstalované JRE (Java Runtime Environment) verze alespoň 5.0, jinak applety nemusí fungovat správně.

Následující skript a applet otestují, zda máte Javascript a Javu v prohlížeči povolenou. Applet navíc otestuje i nainstalovanou verzi Javy. Pokud applet nebude fungovat, nebo pokud nainstalovaná verze JRE není dostačující, stáhněte si ji odtud[5] a nainstalujte.

Kontrola[6]:

✔...Javascript povolen

✘...Java nepovolena

Stránky jsou kódovány v UTF-8. Pokud se Vám některé znaky na stránkách nezobrazují správně, zkontrolujte, zda má Váš prohlížeč správně nastavené kódování. Pokud jsou špatně zobrazovány pouze matematické znaky (jejich souhrn najdete zde[7]), znamená to, že font, který stránky využívají, je Vašem počítači neúplný. Pokud používáte systém Windows XP, můžete následujícím způsobem nainstalovat úplnější font:

- uložte do počítače soubor fonty.zip[8],
- soubor v počítači dekomprimujte (komprimovaný soubor obsahuje soubory trebucit.ttf, trebucbd.ttf, trebuc.ttf a trebucbi.ttf),
- dále postupujte podle instrukcí na www.ceskefonty.cz/navody-clanky/jak-nainstalovat-fonty-do-pocitace-ve-windows-xp[9],
- restartujte prohlížeč.

Ovládání stránek

[5] **Odkaz:** http://www.java.com/en/download/manual.jsp.

[6] Na tomto místě je na webových stránkách skript a applet, který testuje zda prohlížeč splňuje základní požadavky na něj kladené.

[7] **Odkaz:** Kapitola – Použité symboly.

[8] **Odkaz:** Zip soubor s fonty.

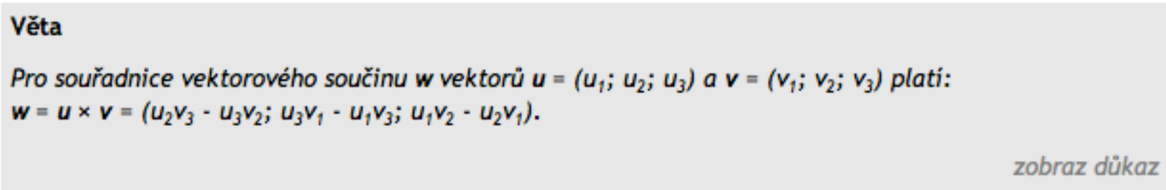
[9] **Odkaz:** http://www.ceskefonty.cz/navody-clanky/jak-nainstalovat-fonty-do-pocitace-ve-windows-xp

Navigace na stránkách je v dvojstupňovém menu na levé straně. Na stránkách se můžete setkat s následujícími ovládacími prvky:

- 

  Poznámka skrývá nějaký vysvětlující text, který není nezbytně nutný pro pochopení látky, je ale vhodné, abyste si jej přečetli. Pokud myší najedete do oblasti mezi vodorovnými čarami, poznámka se zobrazí. Pokud tuto oblast opustíte, poznámka se znovu schová.
- 

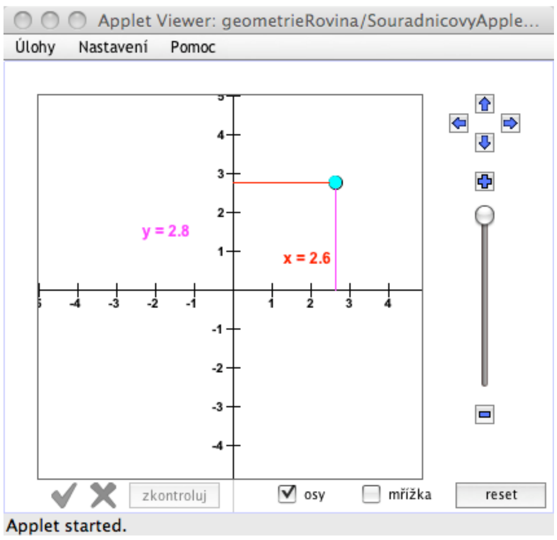
  Zobrazení řešení úlohy. První symbol zleva po kliknutí levým tlačítkem myši zobrazí další krok řešení. Druhý zobrazí všechny kroky řešení najednou a třetí všechny zobrazené kroky řešení schová.
- 

  Nápověda ukrývá nějakou radu, která se zobrazí při najetí myši na „vypnutou" žárovku. Žárovka se zároveň „rozsvítí".
- 

  Důkazy jsou v normálním toku textu skryty, ale každá věta obsahuje odkaz „zobraz důkaz". Po kliknutí na něj se důkaz zobrazí a odkaz se změní na „schovej důkaz", který funguje opačně. Pokud je dokazovaná věta ve formě implikace, je její důkaz rozdělen do dvou částí. Směry právě dokazované implikace jsou označeny symboly $\Rightarrow$ a $\Leftarrow$.

Ovládání appletů

Webové stránky obsahují Java applety, umožňující uživatelům procvičit nově nabyté vědomosti a propojit algebraické zápisy zkoumaných objektů s jejich geometrickou interpretací.



Applety obsahují celou řadu ovládacích prvků. Uprostřed appletu je plátno, na kterém se zobrazují geometrické objekty. Plátno není statické. Lze s ním pohybovat a zobrazovat tak různé části roviny. Rozsah os je omezen hodnotami −50, 50. K ovládání plátna můžete využít šipky napravo od plátna. Posuvník pod nimi plátno přibližuje a oddaluje. K posunutí plátna můžete využít i myš. Po stisknutí pravého tlačítka myši je možné tažením plátno posouvat.

V pravé dolní části appletu je tlačítko reset a boxy osy a mřížka. Reset vrátí applet do výchozího stavu. Box osy slouží k zobrazení souřadnicových os. Obdobně funguje i box mřížka, který ale zobrazuje mřížku, usnadňující určování souřadnic.

Nyní probereme funkci hlavního menu okna appletu. V menu Pomoc najdete informace o appletu a tento návod. V menu nastavení jsou znovu volby osy a mřížka. Navíc je tam možné nastavit „přichytávání k mřížce". To se hodí, pokud chceme přesně nastavit souřadnice nějakého objektu.

Menu úlohy obsahuje volbu volný pohyb a volby zadání několika úloh. Pokud je vybrána položka volný pohyb, můžete volně pohybovat s objekty na plátně. Tyto mají zobrazené některé své vlastnosti, které souvisejí s právě probíranou látkou. Pokud ale vyberete některou z úloh, popisy zmizí a zobrazí se zadání úlohy, kterou je třeba vyřešit. V tutéž chvíli se také v dolní části appletu aktivuje tlačítko zkontroluj. Najdete-li řešení úlohy, klikněte na něj. Rozsvícená ikona pak indikuje, zda jste nalezli správné řešení.
Nakonec pár slov k ovládání objektů na plátně. Základním objektem plátna je bod. Ten se aktivuje po kliknutí levým tlatčítkem myši. Body se na plátně přemisťují tažením při stisknutém levém tlačítku. Různé zkoumané objekty obsahují řídící body, jimiž lze určovat jejich charakteristiky. Celý objekt se aktivuje kliknutím levým tlačítkem myši na nějaký jeho řídící bod. Může se stát, že některé body nepůjde posouvat. To se stává v případech, že bod je výsledkem nějaké operace a jeho poloha závisí tak na bodech jiných.

Použité symboly

Následuje seznam symbolů dále používaných v textu. Pokud se symboly nezobrazují správně, zkontrolujte, zda je kódování prohlížeče nastaveno na UTF-8.

$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\{a, b, c\}$	množina daná výčtem prvků, obsahující prvky a, b, c
$\varnothing$	prázdná množina
$\subset$	podmnožina ($A \subset B$ znamená, že každý prvek množiny A je i prvkem množiny B)
$\in$	je prvkem ($a \in A$ znamená, že a je prvkem množiny A)
$\cap$	průnik ($A \cap B$ je množina všech prvků, které jsou prvky A i B)
$\wedge$	konjunkce ($A \wedge B$ znamená, že platí tvrzení A i B)
$\vee$	disjunkce ($A \vee B$ znamená, že platí tvrzení A nebo B)
$\Rightarrow$	implikace ($A \Rightarrow B$ znamená, že z tvrzení A vyplývá tvrzení B)
A, B, C	body
$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$	vektory
p, q	přímky
ρ, σ, ψ	roviny
$A[a_1; a_2]$	bod se souřadnicemi a_1, a_2
$\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$	vektor se souřadnicemi u_1, u_2
$\boldsymbol{AB}$	orientovaná úsečka AB
$\lvert AB \rvert$	vzdálenost bodů AB
$\lvert Ap \rvert$	vzdálenost bodu A od přímky p
$\lvert A\rho \rvert$	vzdálenost bodu A od roviny ρ
$\lvert pq \rvert$	vzdálenost přímky p od přímky q
$\lvert \boldsymbol{u} \rvert$	velikost vektoru $\boldsymbol{u}$
$\boldsymbol{uv}$ nebo $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$	skalární součin vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$
$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$	vektorový součin vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$
$p(A, \boldsymbol{u})$	přímka p určená bodem A a vektorem $\boldsymbol{u}$

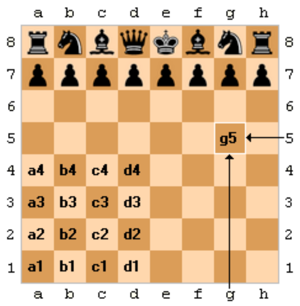
$\rho(A, \boldsymbol{n})$	rovina ρ určená bodem A a vektorem $\boldsymbol{n}$
p: $ax + by + c = 0$	přímka p určená rovnicí $ax + by + c = 0$
ρ: $ax + by + cz + d = 0$	rovina ρ určená rovnicí $ax + by + cz + d = 0$
$p \parallel q$	přímka p je rovnoběžná s přímkou q
$p \times q$	přímka p je různoběžná s přímkou q
$p = q$	přímka p je totožná s přímkou q
$p \not\times q$	přímka p je mimoběžná s přímkou q
$q \parallel \rho$	přímka q je rovnoběžná s rovinou ρ
$q \times \rho$	přímka q je různoběžná s rovinou ρ
$\rho \parallel \sigma$	rovina ρ je rovnoběžná s rovinou σ
$\rho \times \sigma$	rovina ρ je různoběžná s rovinou σ
$\rho = \sigma$	rovina ρ je totožná s rovinou σ

Souřadnice

Úvodem

Každý z nás velmi často používá principy a postupy, které mu přijdou přirozené a jasné, aniž by se o ně více zajímal. Když se Vás někdo zeptá: „Kde bydlíte?“, asi mu pohotově odpovíte a řeknete mu svou adresu. Vaše adresa přesně určí místo, kde bydlíte a každý podle ní může určit polohu Vašeho domu. Určovat polohu ale nemusíte jen udáním své adresy. Jistě jste již ve škole v nějakém předmětu určovali zeměpisnou šířku a délku. Mimochodem to, kde bydlíte, by se dalo určit udáním zeměpisné šířky a délky.

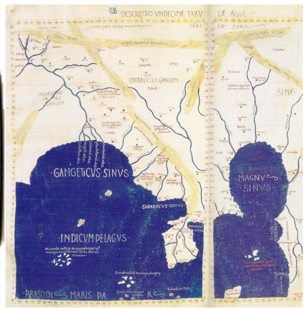
Hráli jste někdy šachy? Tam má každá figurka na hrací ploše své místo, které je jednoznačně označeno. Co třeba hra lodní bitva? I tam spoluhráči musíte přesně určit místo, kam střílíte – musíte určit jeho polohu. Kdybyste někomu vysvětlovali, že bydlíte „támhle za kopcem, ve žluté vile“, možná byste uspěli. Popis „střílím doleva nahoru“ by už ale asi neuspěl. Celá řada situací nebo činností vyžaduje přesný popis a nejinak je tomu v geometrii. My budeme postupovat podobně jako šachisté, zeměměřiči a ostatní, kteří někdy potřebovali ve svém životě určovat polohu čehokoliv. Namísto lodí, figurek nebo domů budeme adresovat geometrické objekty – bod, přímka aj. Jejich polohu určíme pomocí **souřadnic**[10]. Body v rovině pomocí dvou, body v prostoru pomocí tří. Než ale souřadnice začneme používat, musíme se dohodnout, jak je získáme a na pravidlech, jak je budeme interpretovat. Na obrázcích *1.1* až *1.4* se podívejte, kde všude souřadnice možná i nevědomky používáme.



Obr. 1.1: Hra šachy

Obr. 1.2: Hra námořní bitva

Obr. 1.3: Satelitní navigace



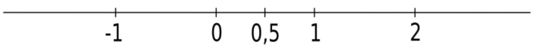
Obr. 1.4: Mapa (asi 85 – 165 n.l.)

[10] Ačkoliv souřadnice dnes vidíme na každém kroku (adresy, GPS navigace do automobilů, hry) a některé jejich aplikace aktivně používáme již po tisíce let (mapy), do geometrie se dostaly teprve nedávno. Zásluhy za propojení geometrie a algebry patří mnoha lidem, ale tím nejznámějším je René Descartes.

Soustava souřadnic v rovině

Číselná osa

Znáte číselnou osu[11]? Pokud si nejste jisti, napovím obrázkem:



Obr. 1.5: Číselná osa

Jistě již víte, že na číselné ose můžeme zobrazit libovolné reálné číslo. Množina všech bodů tvořících číselnou osu odpovídá všem reálným číslům. My využijeme dvou číselných os, k vytvoření soustavy souřadnic, která nám umožní popisovat geometrické objekty.

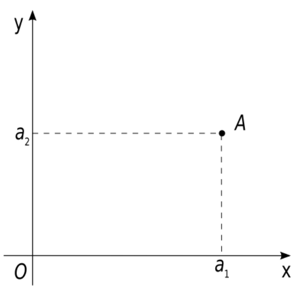
Definice

Dvojice stejných číselných os x, y v rovině, pro které platí:

1. *obě osy jsou navzájem kolmé;*
2. *jejich průsečíku O odpovídá na obou osách číslo 0,*

se nazývá ***kartézská[12] soustava souřadnic v rovině*** *a označuje se* O_{xy}*. Bod O se nazývá* ***počátek kartézské soustavy souřadnic*** *a přímky x, y se nazývají* ***souřadnicové osy****.*

Pokud máme nyní zadánu soustavu souřadnic O_{xy}, můžeme libovolnému bodu A roviny jednoznačně přiřadit uspořádanou dvojici čísel a_1 a a_2. Jak na to? Veďme bodem A rovnoběžky se souřadnicovými osami x a y. Rovnoběžka s osou y procházející bodem A protne osu x v bodě, který odpovídá nějakému číslu – nazvěme jej a_1. Rovnoběžka s osou x protne osu y a získáme tak číslo a_2.



[11] Kdy byla číselná osa použita poprvé se asi nikdy nedozvíme, ale zřejmě se tak stalo někdy v průběhu středověku. Dříve lidé nepoužívali všechna čísla, protože některá z nich byla pro lidi nepředstavitelná nebo dokonce nesmyslná (záporná čísla, nula, iracionální čísla). Ačkoliv již staří Řekové používali souřadnice, víme, že číselná osa tou dobou ještě používána nebyla. Pythagorejci totiž odmítali připustit existenci iracionálních čísel a jejich vliv neumožnil prosazení myšlenky číselné osy v jejich věku. Vytvořit číselnou osu tak, aby zobrazovala jen racionální čísla dost dobře nejde. Až slábnoucí vliv antické matematiky ve středověku umožnil zkonstruování a používání číselné osy.

[12] Je pojmenována po René Descartovi, jehož jméno bylo v latině Cartesius, proto Kartézská.

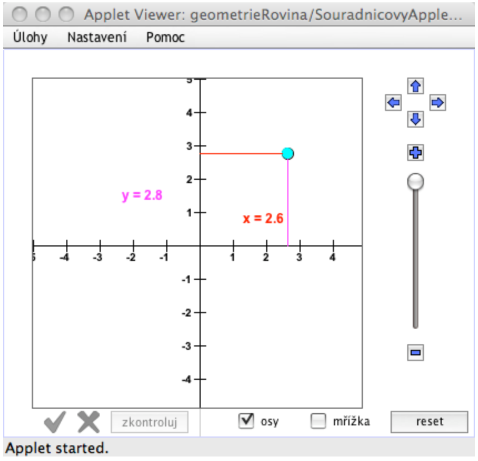
Obr. 1.6: Určení souřadnic bodu v rovině

Definice

Čísla a_1, a_2, získaná výše uvedeným způsobem, se nazývají ***souřadnice*** *bodu A v kartézské soustavě souřadnic O_{xy}.*

Zapisujeme $A[a_1; a_2]$.

Každému bodu roviny takto můžeme přiřadit jeho souřadnice a ke každé dvojici souřadnic můžeme určit příslušný bod v rovině.



Soustava souřadnic v prostoru

Podobně jako při získání souřadnic bodu v rovině budeme postupovat i v prostoru.

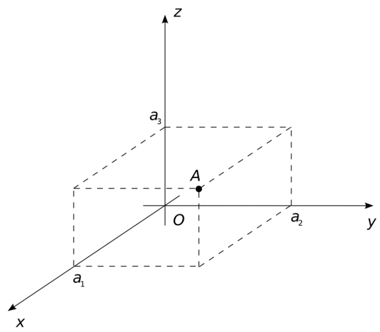
Definice

Trojice stejných číselných os x,y,z v prostoru, pro které platí:

1. *všechny osy jsou navzájem kolmé;*
2. *protínají se v jednom bodě;*
3. *jejich průsečíku O, odpovídá na všech osách číslo 0,*

se nazývá ***kartézská soustava souřadnic v prostoru*** *a označuje se O_{xyz}. Bod O se nazývá* ***počátek kartézské soustavy souřadnic*** *a přímky x, y, z se nazývají* ***souřadnicové osy****. Roviny určené dvojicemi souřadnicových os se nazývají* ***souřadnicové roviny****.*

Abychom získali souřadnice bodu v prostoru (vzhledem k zadané souřadnicové soustavě), budeme postupovat velmi podobně, jako když jsme získávali souřadnice v rovině. Zvolíme si kartézskou soustavu souřadnic v prostoru O_{xyz} a bod A. Bodem A povedeme rovinu, která je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou yz. Tato rovina protne osu x v bodě, který odpovídá číslu a_1. Poté bodem A povedeme rovinu rovnoběžnou se souřadnicovou rovinou xz, která nám na ose y určí bod, odpovídající číslu a_2. Nakonec bodem A povedeme rovinu rovnoběžnou se souřadnicovou rovinou xy. Ta se s osou z protne v bodě, který odpovídá číslu a_3.



Obr. 1.7: Určení souřadnic bodu v prostoru

Definice

Čísla a_1, a_2, a_3, získaná výše uvedeným způsobem, se nazývají ***souřadnice bodu A*** *v kartézské soustavě souřadnic O_{xyz}.*

Zapisujeme $A[a_1; a_2; a_3]$.

Úmluva: Nadále při práci v rovině budeme předpokládat, že máme zavedenou soustavu souřadnic O_{xy}. Analogicky v prostoru pak budeme mít zavedenou soustavu souřadnic O_{xyz}.

Vzdálenost

Když už víme, jak popsat bod pomocí souřadnic, pokusíme se z jeho souřadnic vytěžit další informace. Jak vypočítat vzdálenost dvou bodů na číselné ose, jistě víte. V rovině to nebude o mnoho složitější.

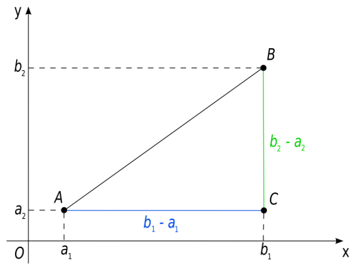
Věta

Vzdálenost $|AB|$ dvou bodů $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$ v rovině je dána vztahem:

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Důkaz

Mějme zadané body $A[a_1; a_2]$ a $B[b_1; b_2]$, jejichž vzdálenost chceme vypočítat. Přidejme ještě bod C, kterým body A a B doplníme na pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu C.



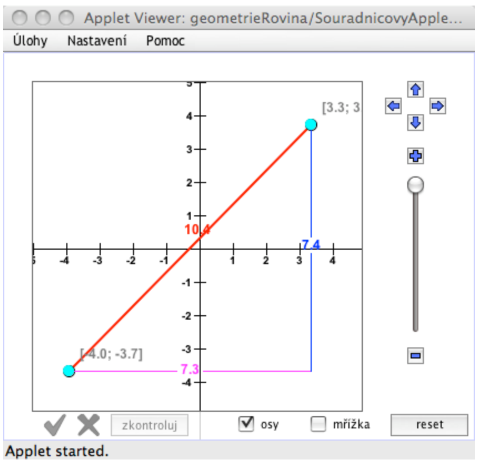
Z obrázku plyne, že bod C má souřadnice [b_1; a_2]. Nás ale zajímá vzdálenost bodů A a B. Ta se rovná délce přepony pravoúhlého trojúhelníka ABC. Známe délku strany AC, která se rovná ($b_1 - a_1$) a délku strany BC, která je ($b_2 - a_2$). Délku přepony pak vypočítáme dle Pythagorovy věty:
$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$,
$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

Příklad 1.1

Určete vzdálenost bodů $A[1; 3]$ a $B[5; 6]$.

Řešení

$|AB| = \sqrt{(5-1)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$



Pokud bychom chtěli zjistit vzdálenost dvou bodů v prostoru, použijeme podobný vzoreček jako v rovině.

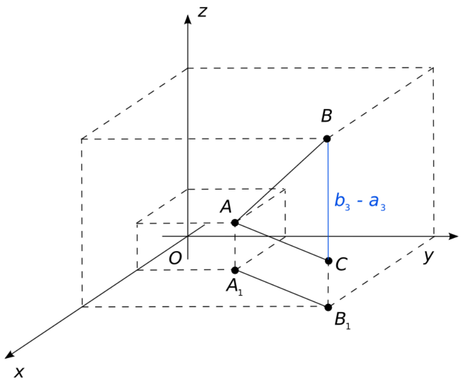
Věta

Vzdálenost |AB| dvou bodů A[a_1; a_2; a_3], B[b_1; b_2; b_3] v prostoru je dána vztahem:

$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$

Důkaz

Důkaz provedeme podobně jako když jsme dokazovali vzorec pro vzdálenost dvou bodů v rovině. Těm z vás, kteří mají dobrou prostorovou představivost, napovím, že Pythagorovu větu tentokrát použijeme dvakrát. Ostatním pomůže následující obrázek. Připomeňme, že měříme vzdálenost bodů A a B.



Použijeme stejný princip jako při určení vzdálenosti v rovině. Znovu najdeme pravoúhlý trojúhelník ABC, ve kterém aplikujeme Pythagorovu větu. Délku první odvěsny získáme jednoduše, je to $(b_3 - a_3)$, *ke druhé se musíme propracovat. Použijeme průmětů* A_1, B_1 *bodů A, B do souřadnicové roviny xy. Jejich vzdálenost je délka druhé odvěsny trojúhleníka ABC:*

$|A_1B_1|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2.$

Vzdálenost bodů A, B pak můžeme napsat jako:

$|AB| = \sqrt{|A_1B_1|^2 + (b_3 - a_3)^2},$

kde $|A_1B_1|$ *je vzdálenost dvou bodů v rovině.*

Příklad 1.2

Určete vzdálenost bodů $A[-1; 0; -2]$ a $B[1; 3; 4]$.

Řešení

$|AB| = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (3 - 0)^2 + (4 - (-2))^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7.$

Střed úsečky

Pomocí souřadnic dokážeme určit i souřadnice středu úsečky.

Věta

V rovině pro souřadnice středu $S[s_1; s_2]$ *úsečky s krajními body* $A[a_1; a_2]$ a $B[b_1; b_2]$ *platí vztahy:*

$s_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}, s_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}.$

Důkaz

Střed úsečky s krajními body $A[a_1; a_2]$ a $B[b_1; b_2]$, dělí úsečku AB na dvě stejné části.

Pro bod

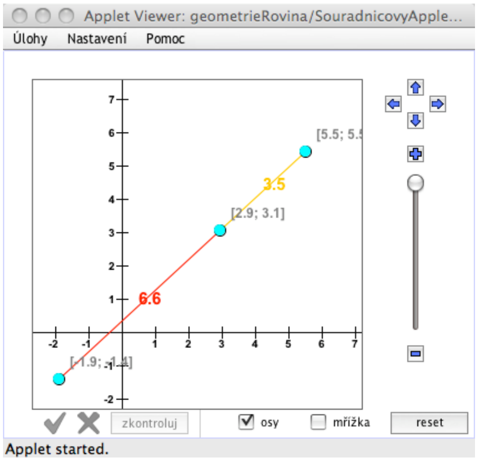
$$S\left[\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}\right]$$

musí platit

$$|AS| = |BS| = \frac{|AB|}{2}.$$

$$|AS| = \sqrt{\left(\frac{a_1+b_1}{2} - a_1\right)^2 + \left(\frac{a_2+b_2}{2} - a_2\right)} = \sqrt{\left(\frac{b_1-a_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_2-a_2}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}{2} = \frac{|AB|}{2},$$

$$|BS| = \sqrt{\left(\frac{a_1+b_1}{2} - b_1\right)^2 + \left(\frac{a_2+b_2}{2} - b_2\right)} = \sqrt{\left(\frac{a_1-b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_2-b_2}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}}{2} = \frac{|BA|}{2} = \frac{|AB|}{2}.$$



Situace v prostoru je analogická. Pro souřadnice středu úsečky platí následující věta.

Věta

V prostoru pro souřadnice středu $S[s_1; s_2; s_3]$ úsečky s krajími body $A[a_1; a_2; a_3]$ a $B[b_1; b_2; b_3]$ platí vztahy:

$$s_1 = \frac{a_1+b_1}{2}, s_2 = \frac{a_2+b_2}{2}, s_3 = \frac{a_3+b_3}{2}.$$

Důkaz

Větu lze dokázat stejným způsobem jako její verzi v rovině.

Příklad 1.3

Najděte střed úsečky s krajními body $A[1; 2; 2]$ a $B[3; 6; 2]$.

Řešení

Při hledání souřadnic středu $S[s_1; s_2; s_3]$ úsečky AB využijeme předchozí věty.

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2,$$

$$s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{2 + 6}{2} = 4,$$

$$s_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{2 + 2}{2} = 2.$$

Středem úsečky AB je bod $S[2; 4; 2]$.

Vektory

Co je to vektor?

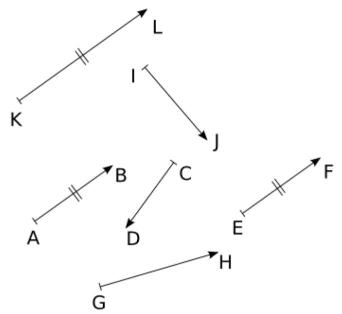
Stejně jako jste již znali a používali pojem souřadnice, zřejmě budete znát i vektor, který si představíme nyní. Abychom si vektory mohli zavést, je třeba znát následující pojmy: **orientovaná úsečka**, **velikost orientované úsečky** a **orientovaný směr**. Pokud by někomu tyto pojmy byly nejasné, vysvětlení najde zde[13].

Úmluva: Orientovanou úsečku s počátečním bodem A a koncovým bodem B budeme v textu dále označovat jako ***AB***.

Definice

Nulový vektor *je množina všech orientovaných úseček nulové délky. Nulový vektor označujeme* $\boldsymbol{o}$.

Nenulový vektor *je množina všech orientovaných úseček, které mají stejnou nenulovou velikost a stejný směr.*



Obr. 2.1: Umístění vektoru

Na *obr. 2.1* jsou různé orientované úsečky. ***AB*** a ***IJ*** mají stejnou velikost, ale různý směr. ***AB***, ***EF*** a ***KL*** mají stejný směr. ***AB*** a ***EF*** mají i stejnou velikost i směr a určují tedy stejný vektor. Úsečky ***AB*** a ***EF*** jsou různým **umístěním** stejného vektoru.

Poznámka

Nulový vektor je množina všech orientovaných úseček nulové délky. To jsou takové úsečky, které jsou tvořeny dvojicí totožných bodů.

Úmluva: Vektor u, určený orientovanou úsečkou ***AB*** budeme značit jako ***u***. Zapisujeme ***u*** = ***AB***.

Úmluva: Dále v textu budeme předpokládat, že máme zvolenou nějakou kartézskou soustavu souřadnic, ve které budeme pracovat.

[13] Odkaz směřuje na stránky věnované výuce zobrazení na střední škole od Kateřiny Dobiášové: http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/katerina_dobiasova/.

Definice

Je-li vektor ***u*** *v rovině určen orientovanou úsečkou* ***AB****, kde* $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$, *nazývají se čísla* $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$, ***souřadnice vektoru u****.*

Zapisujeme $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$.

Je-li vektor ***u*** *v prostoru určen orientovanou úsečkou* ***AB****, kde* $A[a_1; a_2; a_3]$, $B[b_1; b_2; b_3]$, *nazývají se čísla* $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$, $u_3 = b_3 - a_3$, ***souřadnice vektoru u****.*

Zapisujeme $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$.

Poznámka

Kvůli způsobu výpočtu souřadnic vektoru ***u*** = ***AB***, se ***u*** někdy symbolicky zapisuje ve tvaru $\boldsymbol{u} = B - A$.

Příklad 2.1

V prostoru jsou dány body $A[1; 2; 2]$ a $B[3; 2; 5]$. Vypočítejte souřadnice vektoru ***u***, který je určen orientovanou úsečkou ***AB***.

Řešení

$\boldsymbol{u} = B - A$,

$\boldsymbol{u} = (3 - 1; 2 - 2; 5 - 2)$,

$\boldsymbol{u} = (2; 0; 3)$.

Věta

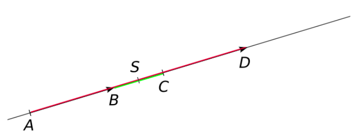
Dvě orientované úsečky ***AB*** *a* ***CD*** *určují stejný vektor právě tehdy, mají-li úsečky AD a BC společný střed.*

Důkaz

$\Rightarrow$

Dvě orientované úsečky, určující stejný vektor, mají stejnou velikost a směr.

Pokud tyto leží na jedné přímce, pak úsečky AD a BC mají společný střed viz obrázek.

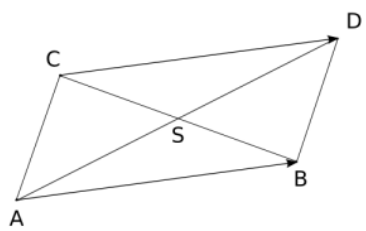


Neleží-li na jedné přímce, jejich krajní body A, B, D, C tvoří rovnoběžník s úhlopříčkami AD a BC. V rovnoběžníku se úhlopříčky půlí – mají společný střed.

⇐

Jestliže úsečky AD a BC ležící na jedné přímce mají společný střed, pak orientované úsečky ***AB*** *a* ***CD*** *mají stejnou velikost i směr a určují tedy týž vektor.*

Neleží-li na přímce, tvoří body ABDC nějaký čtyřúhelník. Jesliže se úhlopříčky ve čtyřúhelníku ABDC půlí, je čtyřúhelník ABDC rovnoběžník a orientované úsečky ***AB*** *a* ***CD*** *tedy určují týž vektor.*



Poznámka

Z předchozí věty plyne, že souřadnice vektoru nezávisí na volbě konkrétní orientované úsečky, která je jeho umístěním (vždy získáme stejné souřadnice):

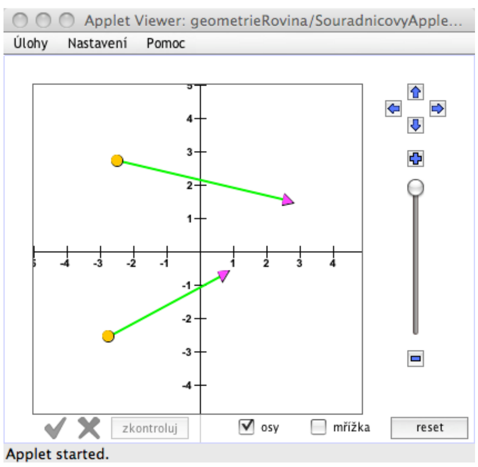
To, že úsečky *AD* a *BC* v rovině mají společný střed, můžeme zapsat takto

$\frac{a_1 + d_1}{2} = \frac{b_1 + c_1}{2} \wedge \frac{a_2 + d_2}{2} = \frac{b_2 + c_2}{2}$, kde a_i, b_i, c_i, d_i; $i = 1, 2$ jsou souřadnice daných bodů.

Tyto rovnice lze upravit a získáme

$b_1 - a_1 = d_1 - c_1$; $b_2 - a_2 = d_2 - c_2$,

což jsou souřadnice vektorů určených orientovanými úsečkami ***AB*** a ***CD***, které v případě, že se jejich souřadnice rovnají, určují stejný vektor.



Příklad 2.2

Rozhodněte, zda orientované úsečky ***AB*** a ***CD*** určené body $A[3; 5]$, $B[2; 0]$, $C[1; 2]$ a $D[-1; 2]$ určují v rovině stejný vektor. Řešení si "vizuálně" ověřte na předcházejícím appletu.

Řešení

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB} = B - A,$

$\boldsymbol{u} = (2 - 3; 0 - 5) = (-1; -5),$

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{CD} = D - C,$

$\boldsymbol{v} = (-1 - 1; 2 - 2) = (-2; 0).$

Souřadnice vektorů ***u*** a ***v*** se liší, proto orientované úsečky ***AB*** a ***CD*** určují různé vektory. V předcházejícím appletu můžete zjistit, že vektory ***u*** a ***v*** mají jak jinou velikost, tak jiný směr.

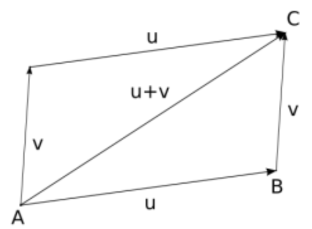
Sčítání vektorů

Operace s vektory jsou poměrně jednoduché. První a nejjednodušší z nich je sčítání dvou vektorů.

Definice

Součet vektorů $\boldsymbol{u} = B - A$ *a* $\boldsymbol{v} = C - B$ *je vektor* $\boldsymbol{w} = C - A$.

Zapisujeme $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$.



Obr. 2.2: Sčítání vektorů

Věta

Pro každé dva vektory v rovině $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2)$, *resp. v prostoru* $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; v_3)$, *platí*

$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1 ; u_2 + v_2),$

resp.

$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1 ; u_2 + v_2 ; u_3 + v_3).$

Důkaz

Zvolíme takové umístění vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2)$, *aby* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$ *a* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{BC}$, *kde* $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$, $C[c_1; c_2]$. *Z definice plyne*

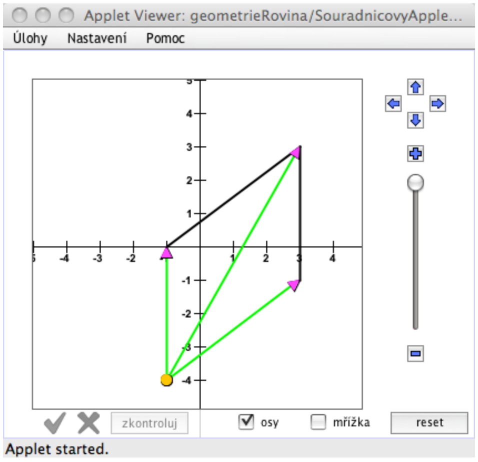
$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{AC},$

tedy $\boldsymbol{w} = (w_1; w_2) = (c_1 - a_1; c_2 - a_2) = (c_1 - b_1 + b_1 - a_1; c_2 - b_2 + b_2 - a_2)$. **(2.1)**

*Nyní si jen stačí uvědomit, že **u** = **AB** a **v** = **BC**, a tedy* $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$, $v_1 = c_1 - b_1$, $v_2 =$ $= c_2 - b_2$ *a dosadit tyto vztahy do výrazu **(2.1)**.*

Tedy $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2)$.

V prostoru by stačilo doplnit ještě třetí souřadnici a důkaz by probíhal obdobně.



Příklad 2.3

Vypočítejte součet vektorů ***u*** a ***v***, jestliže ***u*** = (3; 5) a ***v*** je určen orientovanou úsečkou ***AB***, je-li $A[-1; 2]$, $B[3; -1]$.

Řešení

$\boldsymbol{u} = (3; 5)$,

$\boldsymbol{v} = (3 + 1; -1 - 2) = (4; -3)$,

$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (3 + 4; 5 - 3) = (7; 2)$.

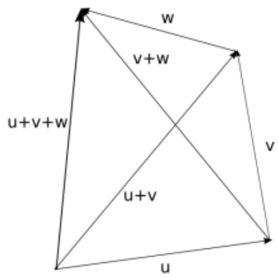
Věta

*Pro každé tři vektory **u**, **v**, **w** (v rovině nebo v prostoru) platí*

1. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$;
2. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$.

Důkaz

Tato věta by se slovy dala vyjádřit následovně: sčítání vektorů je komutativní a asociativní (stejně jako sčítání reálných čísel). Komutativita sčítání plyne z obr. 2.2 a asociativita z obrázku následujícího.



Větu bychom mohli jednoduše dokázat pomocí souřadnic. V rovině by to bylo takto:

$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1; u_2) + (v_1; v_2) = (u_1 + v_1; u_2 + v_2)$,

$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} = (v_1; v_2) + (u_1; u_2) = (v_1 + u_1; v_2 + u_2)$.

Součet reálných čísel je komutativní, proto platí $(u_1 + v_1; u_2 + v_2) = (v_1 + u_1; v_2 + u_2)$, *a tedy i* $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.

Asociativita sčítání vektorů by se ukázala podobně.

$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$,

$((u_1; u_2) + (v_1; v_2)) + (w_1; w_2) = (u_1 + v_1; u_2 + v_2) + (w_1; w_2) = (u_1 + v_1 + w_1; u_2 + v_2 + w_2)$,

$(u_1; u_2) + ((v_1; v_2) + (w_1; w_2)) = (u_1; u_2) + (v_1 + w_1; v_2 + w_2) = (u_1 + v_1 + w_1; u_2 + v_2 + w_2)$,

Sčítání reálných čísel je asociativní, proto platí $(u_1 + v_1 + w_1; u_2 + v_2 + w_2) = (u_1 + v_1 + w_1; u_2 + v_2 + w_2)$, *a tedy i* $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$.

Definice

Je dán vektor $\boldsymbol{u} = B - A$. *Vektor* $A - B$ *nazýváme* ***opačný vektor*** *k vektoru* $\boldsymbol{u}$ *a označujeme jej* $-\boldsymbol{u}$.

Věta

Pro každý vektor $\boldsymbol{u}$ *v rovině, resp. v prostoru, platí:*

1. $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}$.

2. Jestliže $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$, *resp.* $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$ *v prostoru, pak pro souřadnice vektoru* $-\boldsymbol{u}$, *platí* $-\boldsymbol{u} = (-u_1; -u_2)$, *resp. v prostoru* $-\boldsymbol{u} = (-u_1; -u_2; -u_3)$.

Důkaz

1. *Zvolíme nějaké umístění* $\boldsymbol{AB}$ *vektoru* $\boldsymbol{u}$, *kde* $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$. *Vektor* $\boldsymbol{u} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$, *z definice opačného vektoru víme, že* $-\boldsymbol{u} = \boldsymbol{BA}$, *tedy* $-\boldsymbol{u} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$
   a
   $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (b_1 - a_1 + a_1 - b_1; b_2 - a_2 + a_2 - b_2) = (0; 0) = \boldsymbol{o}$.

2. *Plyne z definice opačného vektoru. Je-li* $\boldsymbol{u} = B - A$ *a* $-\boldsymbol{u} = A - B$, *kde* $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$, *resp. v prostoru* $A[a_1; a_2; a_3]$, $B[b_1; b_2; b_3]$, *pak označíme-li* $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$ *a* $-\boldsymbol{u} = (v_1; v_2)$, *resp.* $\boldsymbol{u} =$

= (u_1; u_2; u_3) a $-\boldsymbol{u}$ *= (v_1; v_2; v_3), získáme následující rovnosti:*

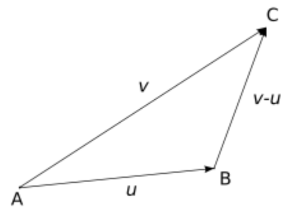
$v_1 = a_1 - b_1 = -(b_1 - a_1) = -u_1,$
$v_2 = a_2 - b_2 = -(b_2 - a_2) = -u_2,$
resp. $v_3 = a_3 - b_3 = -(b_3 - a_3) = -u_3.$

Tedy $-\boldsymbol{u} = (-u_1; -u_2)$ *(resp.* $-\boldsymbol{u} = (-u_1; -u_2; -u_3)$*).*

Definice

Jsou-li dány vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, *potom vektor* $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{u})$ *nazýváme* ***rozdíl vektorů*** $\boldsymbol{v}$ *a* $\boldsymbol{u}$.

Zapisujeme $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$.



Obr. 2.3: Rozdíl vektorů

Příklad 2.4
Vypočítejte součet a rozdíl vektorů $\boldsymbol{u} = (3; 1; 5)$ a $\boldsymbol{v} = (2; -2; 1)$.

Řešení
$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (3 + 2; 1 - 2; 5 + 1) = (5; -1; 6)$,
$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v}) = (3 - 2; 1 + 2; 5 - 1) = (1; 3; 4)$.

Násobení vektorů reálným číslem

Definice

Násobek *nulového vektoru* ***reálným číslem*** *k je nulový vektor.*

Násobek *nenulového vektoru* $\boldsymbol{u} = B - A$ ***reálným číslem*** *k je vektor* $\boldsymbol{v} = C - A$, *přičemž C je bod, pro který platí*

1. $|AC| = |k|\cdot|AB|$

2. *Je-li* $k \geq 0$, *leží bod C na polopřímce AB; je-li* $k < 0$, *leží bod C na polopřímce opačné k polopřímce AB.*

Násobení vektoru $\boldsymbol{u}$ *číslem k zapisujeme* $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{u}$.

Násobení vektoru skalárem (reálným číslem) lze geometricky reprezentovat jeho prodloužením nebo zkrácením, popřípadě změnou jeho orientace na opačnou (při násobení záporným číslem). Pro nás je důležité, jak násobení vektoru číslem vyjádříme v souřadnicích v rovině a v prostoru.

Věta

Pro každý vektor $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$ *v rovině a každé reálné číslo k platí* $k\boldsymbol{u} = (ku_1; ku_2)$.

Pro každý vektor $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$ *v prostoru a každé reálné číslo k platí* $k\boldsymbol{u} = (ku_1; ku_2; ku_3)$.

Důkaz

Důkaz provedeme v rovině, protože je názornější, v prostoru by se postupovalo obdobně.

Jestliže $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, *pak z definice plyne, že* $k\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, *tedy pro libovolné reálné číslo k je* $k\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} = (0; 0) = (k \cdot 0; k \cdot 0)$.

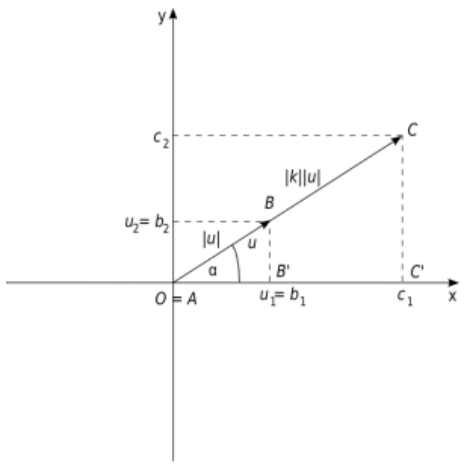
Je-li $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2) = B - A$ *pro nějaké* $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$. *Z definice je* $k\boldsymbol{u} = C - A$ *pro nějaké* $C[c_1; c_2]$, *pro které platí:*

1. $|AC| = |k| \cdot |AB|$.
2. *Je-li* $k \geq 0$, *leží bod C na polopřímce AB; je-li* $k < 0$, *leží bod C na polopřímce opačné k polopřímce AB.*

Zvolme si takové umístění vektoru $\boldsymbol{u}$, *že bod A bude ležet v počátku námi volené kartézské soustavy souřadnic (souřadnice vektoru nezávisí na volbě jeho umístění).*

I. $\boldsymbol{k \geq 0}$

Situace vypadá následovně:



Z podobnosti trojúhelníků ABB' a ACC' na obrázku plyne, že

$|c_1| = |k| \cdot |b_1|$, ***(i)***

$|c_2| = |k| \cdot |b_2|$. ***(ii)***

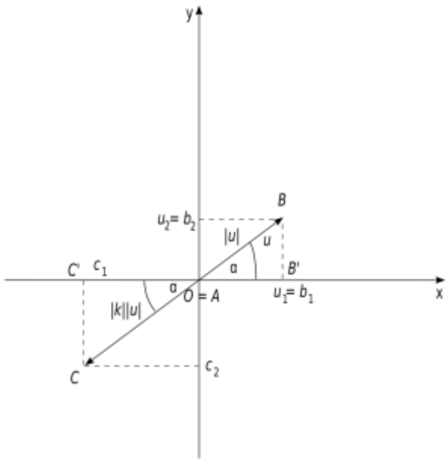
Podle toho, v jakém kvadrantu se nachází bod B, mohou nastat 4 možné případy. V každém případě se ale bod C bude nacházet ve stejném kvadrantu a znaménka u x-ové nebo y-ové souřadnice budou pro oba body stejné. Zpracováním rovnic ***(i)*** *a* ***(ii)*** *získáme následující:*

$b_1 < 0, c_1 < 0$	$b_1 \geq 0, c_1 \geq 0$	$b_2 < 0, c_2 < 0$	$b_2 \geq 0, c_2 \geq 0$
$-c_1 = \|k\|(-b_1)$ $-c_1 = \|k\|(-b_1)$ /(-1) $c_1 = \mathrm{k}b_1$ [protože $k \geq 0$] $c_1 = kb_1$ $c_1 = ku_1$	$c_1 = \|k\|b_1$ $c_1 = kb_1$ [protože $k \geq 0$] $c_1 = kb_1$ $c_1 = ku_1$	$-c_2 = \|k\|(-b_2)$ /(-1) $c_2 = \|k\|b_2$ $c_2 = kb_2$ [protože $k \geq 0$] $c_2 = kb_2$ $c_2 = ku_2$	$c_2 = \|k\|b_2$ $c_2 = kb_2$ [protože $k \geq 0$] $c_2 = kb_2$ $c_2 = ku_2$

*Bez ohledu na umístění bodu B platí k**u** = (ku₁; ku₂).*

II. ***k > 0***

Teď situace vypadá trochu jinak:



Z podobnosti trojúhelníků ABB' a ACC' na obrázku znovu plyne, že

$|c_1| = |k| \cdot |b_1|$, ***(iii)***

$|c_2| = |k| \cdot |b_2|$. ***(iv)***

*Podobně jako v předchozím případě, i nyní mohou nastat 4 možné případy v závislosti na poloze bodu B. Bod C se vždy bude nacházet v kvadrantu protilehlém a pro jeho souřadnice platí, že mají opačné znaménko než souřadnice bodu B. Zpracováním rovnic **(iii)** a **(iv)** získáme:*

$b_1 < 0, c_1 > 0$	$b_1 \geq 0, c_1 \leq 0$	$b_2 < 0, c_2 > 0$	$b_2 \geq 0, c_2 \leq 0$
$c_1 = \|k\|(-b_1)$ $c_1 = \|k\|(-b_1)$ $c_1 = -k(-b_1)$ [protože $k < 0$] $c_1 = kb_1$ $c_1 = ku_1$	$-c_1 = \|k\|b_1$ $-c_1 = (-k)b_1$ [protože $k < 0$] $c_1 = kb_1$ $c_1 = ku_1$	$c_2 = \|k\|(-b_2)$ $c_2 = (-k)(-b_2)$ [protože $k < 0$] $c_2 = kb_2$ $c_2 = ku_2$	$-c_2 = \|k\|b_2$ $-c_2 = (-k)b_2$ [protože $k < 0$] $c_2 = kb_2$ $c_2 = ku_2$

*Tedy k**u** = (ku₁; ku₂) i pro k < 0.*

Příklad 2.5

Vypočítejte souřadnice vektoru $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{w}$, kde $\boldsymbol{v} = (2; 1; -3)$ a $\boldsymbol{w} = (2; 3;1)$.

Řešení

$\boldsymbol{u} = (2; 1; -3) + 2(2; 3; 1)$,

$\boldsymbol{u} = (2; 1; -3) + (4; 6; 2)$,

$\boldsymbol{u} = (6; 7; -1)$.

Poznámka

Nezapomeňte, že násobení vektoru skalárem musíte provést před sčítáním vektorů.

Umět sčítat vektory a násobit je reálným číslem nám stačí k tomu, abychom si zavedli velmi důležitý pojem.

Definice

Vektor $\mathbf{z} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w}$, *kde* $a, b, c \in \mathbb{R}$, *se nazývá* ***lineární kombinace vektorů*** $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$.

Poznámka

Lze utvořit lineární kombinaci i dvou, čtyř, pěti atd. vektorů. Lineární kombinace jednoho vektoru je jeho reálný k-násobek.

Příklad 2.6

Určete, zda vektor $\boldsymbol{w} = (5; 4)$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u} = (1; 2)$ a $\boldsymbol{v} = (2; 1)$.

Řešení

Aby náš zadaný vektor $\boldsymbol{w}$ byl lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, musel by splňovat následující podmínku: $\boldsymbol{w} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}$, pro nějaká $a, b \in \mathbb{R}$. Protože vektory jsou si rovny, pokud se rovnají jejich souřadnice, hledáme reálná čísla a a b taková, aby platilo $(5; 4) = a(1; 2) + b(2; 1)$. Tedy

$5 = a + 2b$,

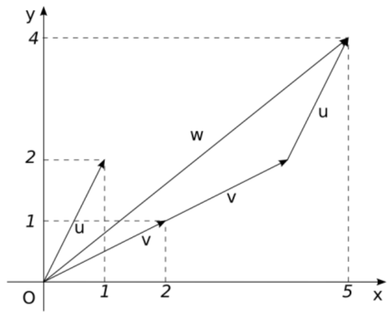
$4 = 2a + b$.

Chceme najít řešení výše uvedené soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. Z druhé rovnice vyjádříme $b = 4 - 2a$ a získáme

$5 = a + 8 - 4a$.

Z toho jednoduše dostaneme řešení soustavy $a = 1$ a $b = 2$.

Soustava má řešení, proto je vektor $\boldsymbol{w}$ lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ a platí $\mathbf{w} = \mathbf{u} + 2\mathbf{v}$. To znamená, že jej získáme součtem vektoru $\mathbf{u}$ s dvojnásobkem vektoru $\mathbf{v}$. Podívejte se na *obr. 2.4*.



Obr. 2.4: Lineární kombinace vektorů

Příklad 2.7

Určete, zda je vektor $\boldsymbol{w} = (4; 5)$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u} = (2; -1)$ a $\boldsymbol{v} = (-4; 2)$.

Řešení

Podobně jako v předcházejícím příkladě hledáme reálná čísla a, b taková, aby $\boldsymbol{w} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}$. Po rozepsání v souřadnicích hledáme řešení rovnic

$4 = 2a - 4b,$

$5 = -a + 2b.$

Když k první rovnici přičteme dvojnásobek druhé rovnice, získáme následující rovnost

$4 + 10 = 2a - 4b - 2a + 4b,$

$14 \neq 0.$

Soustava nemá řešení a hledaná a, b neexistují, proto vektor $\boldsymbol{w}$ není lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.

Úloha

Určete, zda je vektor $\boldsymbol{u} = (7; 11; 4)$ lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{v} = (2; 1; -1)$ a $\boldsymbol{w} = (1; 3; 2)$.

Řešení

- Je-li náš zadaný vektor $\boldsymbol{u}$ lineární kombinací dvou vektorů $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, pak existují reálná čísla a, b tak, že $\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}$. Hledáme tedy reálná čísla a a b taková, aby platilo $(7; 11; 4) = a(2; 1; -1) + b(1; 3; 2)$. Tedy:
  $7 = 2a + b,$
  $11 = a + 3b,$
  $4 = -a + 2b.$
- Z posledních dvou rovnic získáme $a = 2$ a $b = 3$, což je i řešením první rovnice. Soustava tedy má řešení a náš vektor $\boldsymbol{u}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$, neboť platí $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{v} + 3\boldsymbol{w}$.

Velikost vektoru

Definice

Velikost vektoru u *je velikost kterékoliv orientované úsečky určující vektor* ***u****. Velikost vektoru* ***u*** *označujeme symbolem* |***u***|.

Jestliže |***u***| *= 1, nazývá se vektor* ***u jednotkový vektor****.*

Velikost vektoru se dá snadno vypočítat z jeho souřadnic.

Věta

Pro každý vektor ***u*** *= (u_1; u_2) v rovině platí*

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\,.$$

Pro každý vektor ***u*** *= (u_1; u_2; u_3) v prostoru platí*

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\,.$$

Pro nulový vektor ***o*** *platí, že* |***o***| *= 0.*

Důkaz

Důkaz provedeme v rovině. Nechť ***u*** *=* ***AB****, kde A[a_1; a_2] a B[b_1; b_2]. Vzdálenost dvou bodů*[14] *A[a_1; a_2], B[b_1; b_2] v rovině, je dána vztahem*

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}\,. \quad \textbf{(2.2)}$$

Pro ***u*** *=* ***AB*** *= (u_1; u_2), platí $u_1 = b_1 - a_1$ a $u_2 = b_2 - a_2$. Naše vzorce z věty získáme prostým dosazením do* ***(2.2)****. Při důkazu v prostoru by přibyla ještě třetí souřadnice, ale postup i myšlenka jsou obdobné.*

Příklad 2.8
Vypočítejte velikost vektoru ***u*** = (3; 4).

Řešení

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5\,.$$

Úloha
Vypočítejte velikost vektoru ***u*** = (u_1; u_2; u_3). Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

Skript automaticky generující úlohy i řešení (vzhledem k odmocnině jen přibližné).

Skalární součin

Umíme sčítat a odečítat vektory, násobit je reálným číslem i vypočítat jejich velikost. Další operace, kterou si zavedeme, se nazývá skalární součin a umožní nám násobit vektory mezi sebou.

---

[14] **Odkaz:** Kapitola souřadnice – vzdálenost dvou bodů.

Definice

Skalární součin *dvou vektorů* $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2)$ *v rovině je číslo* $u_1v_1 + u_2v_2$.

Skalární součin *dvou vektorů* $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; v_3)$ *v prostoru je číslo* $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

Skalární součin *vektorů* $\boldsymbol{u}$ *a* $\boldsymbol{v}$ *zapisujeme jako* $\boldsymbol{uv}$ *nebo* $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$.

Poznámka

Všiměte si, že výsledkem skalárního součinu dvou vektorů **je číslo**. Ukážeme si, jak se dá skalární součin využít a co nám říká o vzájemném vztahu vektorů, které mezi sebou násobíme.

Úmluva: Místo $\boldsymbol{uu}$ budeme psát $\boldsymbol{u}^2$.

Příklad 2.9

Vypočítejte skalární součin vektorů $\boldsymbol{u} = (1; -2)$ a $\boldsymbol{v} = (2; -3)$.

Řešení

$\boldsymbol{uv} = 1\cdot 2 + (-2)\cdot(-3) = 2 + 6 = 8$

Úloha

Pro $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2)$ vypočítejte $\boldsymbol{uv}$.

Skript automaticky generující úlohy i řešení.

Věta

Pro každé vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ (v rovině i v prostoru) a každé reálné číslo r platí:

1. $\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{vu}$;
2. $(r\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = r(\boldsymbol{uv})$;
3. $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{wu} + \boldsymbol{wv}$.

Důkaz

Ukážeme si, jak bychom tato tvrzení dokazovali v prostoru. Nechť $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; v_3)$, $\boldsymbol{w} = (w_1; w_2; w_3)$ *a* r *je libovolné reálné číslo.*

1.

$\boldsymbol{uv} = (u_1; u_2; u_3)\cdot(v_1; v_2; v_3) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$,

$\boldsymbol{vu} = (v_1; v_2; v_3)\cdot(u_1; u_2; u_3) = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3$.

Z komutativity součinu reálných čísel plyne rovnost $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3$ *a tedy* $\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{vu}$.

2.

$(r\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v} = (r(u_1; u_2; u_3))\cdot(v_1; v_2; v_3) = (ru_1; ru_2; ru_3)\cdot(v_1; v_2; v_3) = (ru_1)v_1 + (ru_2)v_2 + (ru_3)v_3$,

$\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{uv}) = r((u_1;\ u_2;\ u_3)\cdot(v_1;\ v_2;\ v_3)) = r(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) = r(u_1v_1) + r(u_2v_2) + r(u_3v_3).$

Znovu využijeme komutativity součinu reálných čísel, ze které plyne, že $(ru_1)v_1 + (ru_2)v_2 + (ru_3)v_3 = r(u_1v_1) + r(u_2v_2) + r(u_3v_3)$*, tedy* $(\boldsymbol{ru})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{uv})$.

3.

$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = (w_1;\ w_2;\ w_3)\cdot((u_1;\ u_2;\ u_3) + (v_1;\ v_2;\ v_3)) = (w_1;\ w_2;\ w_3)\cdot(u_1 + v_1;\ u_2 + v_2;\ u_3 + v_3) = w_1(u_1 + v_1) + w_2(u_2 + v_2) + w_3(u_3 + v_3) = w_1u_1 + w_1v_1 + w_2u_2 + w_2v_2 + w_3u_3 + w_3v_3,$

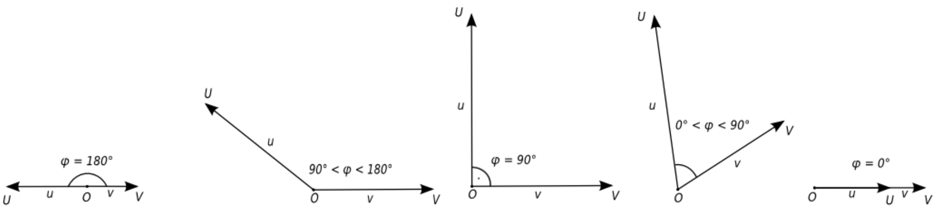
$\boldsymbol{wu} + \boldsymbol{wv} = (w_1;\ w_2;\ w_3)\cdot(u_1;\ u_2;\ u_3) + (w_1;\ w_2;\ w_3)\cdot(v_1;\ v_2;\ v_3) = w_1u_1 + w_2u_2 + w_3u_3 + w_1v_1 + w_2v_2 + w_3v_3.$

Prozkoumáním získaných rovností se snadno přesvědčíme, že $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{wu} + \boldsymbol{wv}$.

Odchylka dvou vektorů

Definice

*Mají-li dva nenulové vektory **u**, **v** umístění **OU**, **OV**, nazývá se velikost konvexního úhlu UOV **odchylka vektorů u, v**. Jsou-li přímky **OU**, **OV** navzájem kolmé, říkáme, že i vektory **u**, **v** jsou navzájem kolmé.*



Obr. 2.5: Odchylka vektorů, rozbor případů

Poznámka

V případě, že je alespoň jeden vektor nulový, odchylku nedefinujeme.

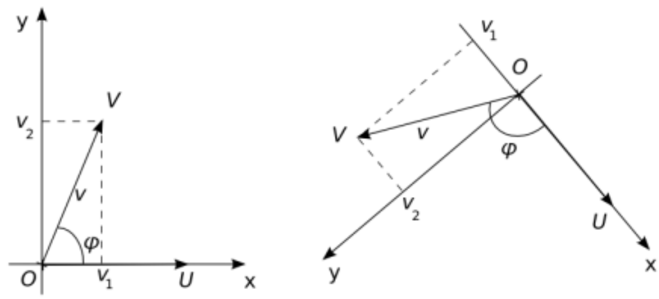
Věta

*Pro dva nenulové vektory **u**, **v** v rovině nebo v prostoru a jejich odchylku φ platí:*

$\boldsymbol{uv} = |\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|\cos\varphi,\ \varphi \in \langle 0°;\ 180°\rangle.$

Důkaz

*V rovině bychom větu dokázali takto. Zvolíme si kartézskou soustavu souřadnic O_{xy} tak, aby polopřímka OU byla kladná poloosa x a bod V ležel v polorovině, která obsahuje kladnou poloosu y a má hraniční přímku x. Nyní můžeme určit souřadnice vektorů **u**, **v** pomocí jejich velikosti a úhlu φ:* $\boldsymbol{u} = (|\boldsymbol{u}|;\ 0)$, $\boldsymbol{v} = (|\boldsymbol{v}|\cos\varphi;\ |\boldsymbol{v}|\sin\varphi)$*. Potom platí* $\boldsymbol{uv} = |\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|\cos\varphi$.



Poznámka

Pro výpočet odchylky dvou nenulových vektorů ***u***, ***v*** můžeme použít vzorec vyplývající z předchozí věty. Později tento vzorec využijeme například pro určování odchylek dvou přímek:

$$\cos\varphi = \frac{uv}{|u||v|}\ ,\ \varphi \in \langle 0°;\ 180° \rangle.$$

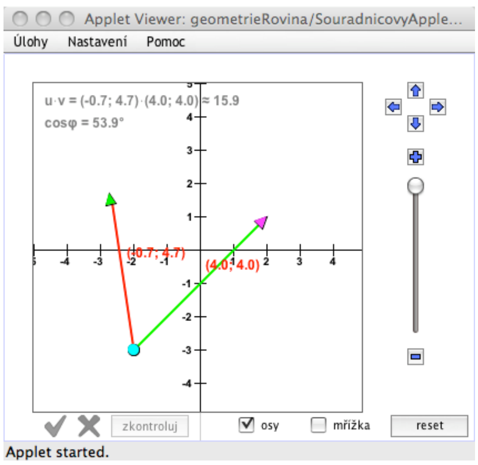
Věta

*Pro každé dva vektory **u**,**v** v rovině nebo v prostoru platí, že **uv** = 0 právě tehdy, když je alespoň jeden z vektorů je nulový vektor nebo když jsou oba dva vektory nenulové a navzájem kolmé.*

Důkaz

*Z definice skalárního součinu plyne, že jestliže **u** nebo **v** je nulový vektor, pak i **uv** = 0.*

*Pokud jsou oba dva vektory nenulové, tak podle předchozí věty platí **uv** = |**u**||**v**| cos φ. Protože |**u**| i |**v**| jsou nenulové, tak **uv** = 0 právě tehdy, když cos φ = 0. To nastává právě v tom případě, kdy je odchylka φ = 90°, tj. vektory **u** a **v** jsou na sebe kolmé. Je potřeba si uvědomit, že odchylka dle definice musí ležet v intervalu <0°; 180°>.*



Vektorový součin

Vektorový součin je další operace s vektory. Už víme, že výsledek skalárního součinu dvou vektorů je číslo, výsledkem vektorového součinu je vektor. Narozdíl od skalárního součinu, je vektorový součin definován jen pro vektory v prostoru. Než si jej zavedeme, je potřeba zmínit se o pravo- a levotočivých bázích v prostoru, které nám umožní určit orientaci vektoru, který je výsledkem vektorového součinu.

Pravotočivá a levotočivá báze

Definice

Báze v prostoru *je každá trojice vektorů, která neleží v jedné rovině.*

Bázi v prostoru *určenou vektory* ***a****,* ***b*** *a* ***c*** *budeme označovat (****a****,* ***b****,* ***c****).*

Poznámka

Z definice báze plyne, že ani jeden z vektorů báze nemůže být nulový.

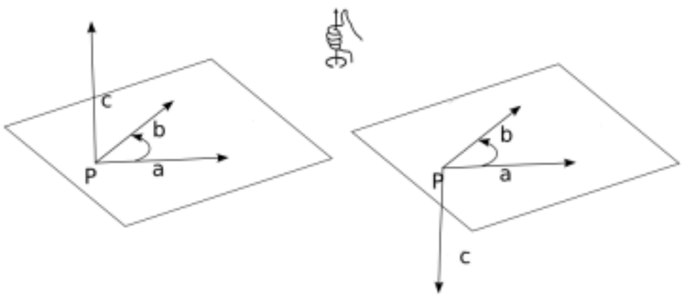
Poznámka

Pomocí nám již známých pojmů by se to dalo vyjádřit jako:

Trojice vektorů v prostoru tvoří **bázi v prostoru** právě tehdy, když se žádný z vektorů nedá vyjádřit jako lineární kombinace zbývajících dvou vektorů.

Zda je báze pravo- nebo levotočivá, rozlišíme takto:

Zvolíme takové umístění vektorů ***a***, ***b***, ***c***, aby jejich počáteční bod byl stejný. Položíme pravou ruku na pomyslnou rovinu určenou vektory ***a***, ***b*** tak, aby pokrčené prsty ruky udávaly směr od vektoru ***a*** k ***b*** (nejkratším směrem). Vztyčený palec pak může směrovat do stejného poloprostoru jako vektor ***c***. V tom případě se báze nazývá **pravotočivá**. Pokud vztyčený palec ukazuje do opačného poloprostoru, nazveme bázi **levotočivou** (kdybyste místo pravé ruky teď použili ruku levou, tak její palec ukazuje do stejného poloprostoru jako vektor ***c***). Na *obr. 2.6* vlevo tvoří vektory ***a***, ***b***, ***c*** pravotočivou bázi, vpravo potom levotočivou.



Obr. 2.6: Báze prostoru

Definice

Vektorový součin *dvou vektorů, které leží na jedné přímce, je nulový vektor.* ***Vektorový součin*** *dvou vektorů* $\boldsymbol{u}$*,* $\boldsymbol{v}$ *neležících na jedné přímce je vektor* $\boldsymbol{w}$*, který má tyto vlastnosti:*

1. *vektor* $\boldsymbol{w}$ *je kolmý k oběma vektorům* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$*;*
2. *vektory* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ *tvoří pravotočivou bázi;*
3. $|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\alpha$*, kde* α *je odchylka vektorů* $\boldsymbol{u}$ *a* $\boldsymbol{v}$*.*

Vektorový součin $\boldsymbol{w}$ *vektorů* $\boldsymbol{u}$*,* $\boldsymbol{v}$ *značíme* $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$*, tj.* $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$*.*

Poznámka

Všiměte si, že vektorový součin je definován jen prostoru, a že výsledkem vektorového součinu dvou vektorů **je vektor**.

Věta

Pro souřadnice vektorového součinu $\boldsymbol{w}$ *vektorů* $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$ *a* $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; v_3)$ *platí:*

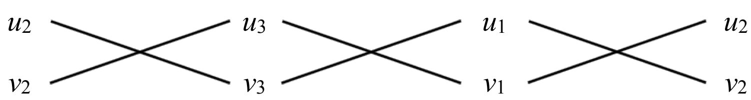
$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (u_2v_3 - u_3v_2;\ u_3v_1 - u_1v_3;\ u_1v_2 - u_2v_1).$$

Důkaz [15]

Poznámka

Pro snadné zapamatování výše zmíněného vzorce se využívá následující pomůcka:

Zapíšete souřadnice vektorů pod sebe, přičemž začnete u prostřední a skončíte znovu prostřední. Čáry mezi souřadnicemi vyjadřují násobení. Čára \ odpovídá kladnému znaménku, / pak zápornému znaménku.



$u_2v_3 - v_2u_3$ $\quad$ $u_3v_1 - v_3u_1$ $\quad$ $u_1v_2 - v_1u_2$

Příklad 2.10

Vypočítejte vektorový součin vektorů $\boldsymbol{u} = (2; 3; 1)$ a $\boldsymbol{v} = (1; 2; 1)$.

Řešení

$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (3\cdot1 - 2\cdot1;\ 1\cdot1 - 1\cdot2;\ 2\cdot2 - 1\cdot3)$,

$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (1; -1; 1)$.

[15] Důkaz vyslovené věty naleznete například v knize Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie autorů Kočandrle, Boček, str. 61, 62, 63.

Úloha

Pro $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; v_3)$ vypočítejte $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$.

- *Skript automaticky generující úlohy i řešení.*

Smíšený součin

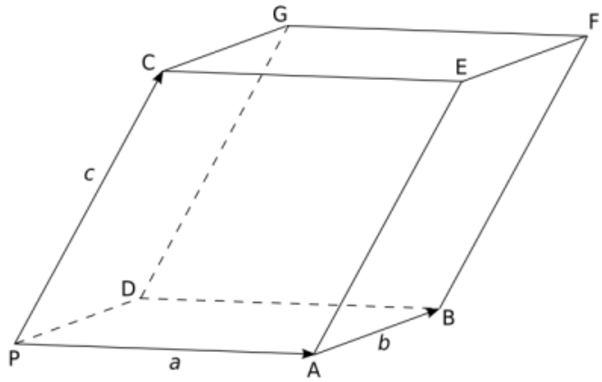
Spojení vektorového a skalárního součinu se nazývá smíšený součin. Smíšený součin je stejně jako vektorový součin definován pouze v prostoru.

Definice

Smíšený součin *vektorů* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *je číslo* $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

Poznámka

Smíšený součin vektorů **je číslo** (z vektorového součinu vznikne vektor a skalární součin dvou vektorů je číslo). Absolutní hodnota smíšeného součinu vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ je rovna objemu rovnoběžnostěnu, který tyto tři vektory určují (viz *obr. 2.7*).



Obr. 2.7: Geometrická interpretace smíšeného součinu

Příklad 2.11

Vypočítejte smíšený součin $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}$, vektorů $\boldsymbol{u} = (5; 1; 0)$, $\boldsymbol{v} = (1; 4; 1)$ a $\boldsymbol{w} = (1; 0; 3)$.

Řešení

Řešení příkladu rozdělíme do dvou kroků. Nejprve spočítáme $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ a získaný vektor skalárně vynásobíme vektorem $\boldsymbol{w}$.

$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (1\cdot1 - 4\cdot0; 0\cdot1 - 1\cdot5; 5\cdot4 - 1\cdot1) = (1; -5; 19)$,

$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} = (1; -5; 19)(1; 0; 3) = 1 + 57 = 58$.

Úloha

Spočtěte objem rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$, kde $A[1; 0; 0]$, $B[6; 0; 0]$, $C[6; -4; 0]$, $D[1; -4; 0]$, $E[1; 0; 5]$, $F[6; 0; 5]$, $G[6; -4; 5]$, $H[1; -4; 5]$.

Řešení

- Rovnoběžnostěn je určen vektory ***AB***, ***AD***, ***AE***. ***AB*** = (5; 0; 0), ***AD*** = (0; −4; 0), ***AE*** = (0; 0; 5).
- Objem rovnoběžnostěnu je roven absolutní hodnotě smíšeného součinu vektorů ***AB***, ***AD*** a ***AE***. |(***AB*** × ***AD***)·***AE***|.
- (***AB*** × ***AD***) = (0; 0; −20),
- |(***AB*** × ***AD***)·***AE***| = |(0; 0; −20)(0; 0; 5)| = |−100| = 100,
- Objem rovnoběžnostěnu *ABCDEFGH* je roven 100.

Geometrie v rovině

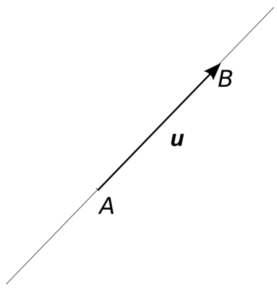
V minulé kapitole jsme se zabývali vektory, jejich souřadnicemi a operacemi s nimi. Vektory a body budou naše stavební základy, na kterých vystavíme další geometrické útvary jako jsou například přímka a rovina. V této kapitole se budeme věnovat geometrii v rovině a základním geometrickým objektům jako je úsečka, polopřímka a přímka.

Parametrické vyjádření přímky

Parametrické vyjádření přímky je jednou z možností, jak matematicky popsat přímku. Každá přímka v rovině je určena dvěma různými body A a B. Tyto body určují také vektor. My tento vektor pojmenujeme a využijeme jej pro zavedení parametrického vyjádření přímky.

Definice

*Jestliže A, B jsou dva různé body, pak vektor $\mathbf{u} = B - A$ nazýváme **směrový vektor** přímky AB.*



Obr. 3.1: Směrový vektor

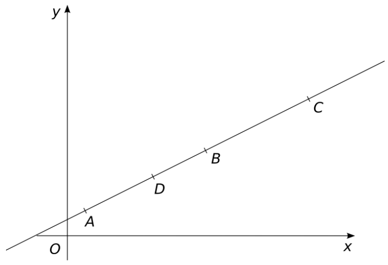
Příklad 3.1

Odpovězte na následující otázky:

1. Kolik můžeme najít dvojic bodů, jenž určují stejnou přímku?
2. Kolik má přímka směrových vektorů (jak spolu souvisejí)?
3. Existuje přímka, jejímž směrovým vektorem je nulový vektor?
4. Mohou mít dvě různé přímky stejný směrový vektor? Jak spolu takové přímky souvisejí?

Řešení

1. Na *obr 3.2* určují všechny dvojice bodů AD, BC, DC, CA stejnou přímku. Takových dvojic ale můžeme najít nekonečně mnoho.

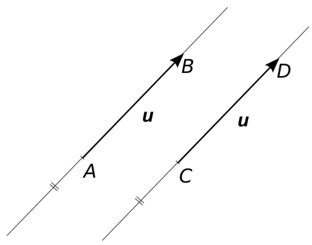


Obr. 3.2: Určení přímky dvojicí bodů

2. Má jich nekonečně mnoho a každý z nich je reálným násobkem jiného. To plyne z odpovědi na 1. otázku.

3. Taková přímka neexistuje. Z definice směrového vektoru plyne, že je nenulový – je určen dvojicí různých bodů.

4. Ano mohou. Jsou rovnoběžné různé. Na *obr. 3.3* je vidět, že vektory ***AB*** a ***CD*** jsou různými umístěními[16] vektoru ***u*** a oba jsou směrovými vektory různých přímek *AB* a *CD*.



Obr. 3.3: Směrové vektory rovnoběžných přímek

Definice

Rovnice

$X = A + t\boldsymbol{u};\ t \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$

se nazývá ***parametrická rovnice*** *nebo také* ***parametrické vyjádření*** *přímky určené bodem A a směrovým vektorem* ***u****. Proměnná t se nazývá* ***parametr****.*

Úmluva: Přímku *p*, určenou bodem *P* a vektorem ***u***, budeme zapisovat jako *p*(*P*, ***u***).

[16] **Odkaz:** Umístění vektoru.

Poznámka

Každou přímku lze zapsat nějakým parametrickým vyjádřením a každé parametrické vyjádření popisuje nějakou přímku.

Když parametrickou rovnici přímky $p(A, \boldsymbol{u})$, kde $A[a_1; a_2]$ a $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$, zapíšeme pomocí souřadnic, získáme vyjádření souřadnic bodů $X[x; y]$ této přímky v závislosti na parametru t.

$x = a_1 + tu_1$,

$y = a_2 + tu_2$; $t \in \mathbb{R}$.

Příklad 3.2

Určete parametrické vyjádření přímky zadané body $A[2; 1]$ a $B[3; 3]$.

Řešení

Jeden směrový vektor $\boldsymbol{u}$ přímky AB vypočítáme snadno jako $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$:

$\boldsymbol{u} = (3 - 2; 3 - 1)$,

$\boldsymbol{u} = (1; 2)$.

Podle definice je potom parametrické vyjádření přímky AB:

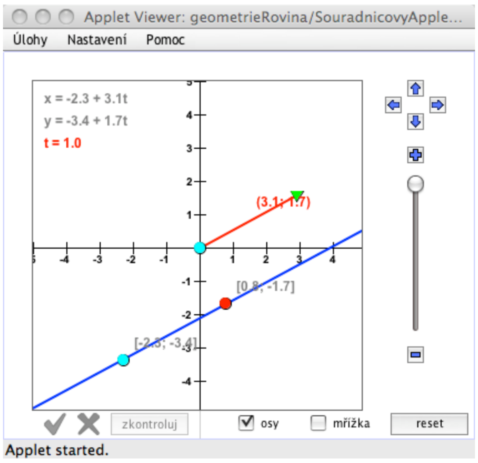
$x = 2 + t$,

$y = 1 + 2t$; $t \in \mathbb{R}$.

Poznámka

Postupným dosazením různých hodnot za parametr t do parametrické rovnice přímky, získáme souřadnice různých bodů této přímky. V *příkladě 3.2* hodnotě parametru $t = 1$ odpovídá bod B, pro hodnotu $t = 0$ parametrické vyjádření určuje bod A.

Parametrická rovnice přímky je určena volbou jednoho bodu a nějakého směrového vektoru dané přímky. Každá přímka má nekonečně mnoho různých parametrických vyjádření.



Příklad 3.3

Zjistěte, zda bod $P[-3; 5]$ leží na přímce AB, kde $A[1; 1]$ a $B[5; -3]$.

Řešení

Nejprve vypočítáme směrový vektor přímky AB a pomocí něj určíme parametrické vyjádření:

$u = B - A,$

$u = (5 - 1; -3 - 1),$

$u = (4; -4).$

Parametrické vyjádření přímky AB vypadá tedy takto:

$x = 1 + 4t,$ **(3.1)**

$y = 1 - 4t;\ t \in \mathrm{R}.$

Aby bod $P \in AB$, jeho souřadnice musí splňovat parametrické vyjádření přímky p, tj. musí existovat nějaká hodnota parametru t, která je řešením soustavy:

$-3 = 1 + 4t,$

$5 = 1 - 4\mathrm{t}.$

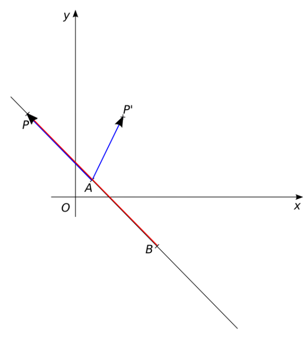
Z první rovnice získáme $t = -1$. Po dosazení do druhé rovnice ověříme, že $t = -1$ je řešením naší soustavy. Bod P proto leží na přímce AB. V parametrické rovnici ***(3.1)*** přímky AB je bod P určený hodnotou parametru $t = -1$.

Toto řešení je správné, ale příklad by šel vyřešit o něco rychleji. Stačí si uvědomit, že bod P leží na přímce AB právě tehdy, když je vektor $\boldsymbol{AP}$ reálným násobkem vektoru $\boldsymbol{AB}$. To bychom v tomto případě mohli rozsoudit pouhým nahlédnutím.

$\boldsymbol{AP} = (-4; 4),$

$\boldsymbol{BP} = (-8; 8).$

Je vidět, že $\boldsymbol{AP} = 2 \cdot \boldsymbol{AB}$, tedy bod P na přímce AB leží.



Obr. 3.4: Obrázek k příkladu 3.3

Body, které neleží na jedné přímce se označují jako **nekolineární**. Naproti tomu body, které na jedné přímce leží se označují jako **kolineární**.

Příklad 3.4

Určete, jaký geometrický útvar určuje parametrické vyjádření $X = A + t\boldsymbol{u}$, jestliže

1. $t \in <0; 1>$.

2. $t \in <0; \infty)$.

Řešení

1. Je to úsečka s krajními body A, B, kde $B = A + \boldsymbol{u}$.

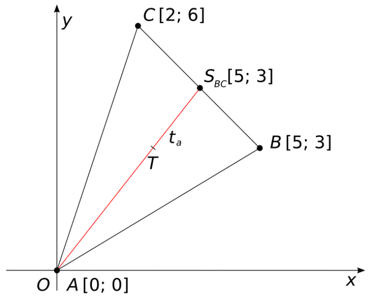
2. Určuje polopřímku AB, kde $B = A + \boldsymbol{u}$.

Úloha

Najděte souřadnice těžiště trojúhelníka ABC, jestliže $A[0; 0]$, $B[5; 3]$, $C[2; 6]$.

Řešení

- Těžiště v trojúhelníku je průsečíkem těžnic. Mohli bychom hledat společný bod těžnic, ale to ještě neumíme. Využijeme proto znalosti, že vzdálenost těžiště a vrcholu, ležícího na těžnici je rovna ⅔ její délky.
- Budeme pracovat s těžnicí t_a. Ta je určena bodem A a středem úsečky BC. Tento střed umíme již určit[17], je jím bod $S_{BC} = [3{,}5; 4{,}5]$.



- Těžnice t_a prochází bodem S_{BC} a bodem A. S jejich pomocí můžeme určit parametrickou rovnici těžnice t_a:

  $x = 3{,}5t$,

  $y = 4{,}5t$; $t \in <0; 1>$.

- Pro hodnotu parametru $t = 0$ rovnice určují souřadnice bodu A a pro hodnotu parametru $t = 1$ souřadnice bodu S_{BC}. Těžiště se nachází ve ⅔ těžnice směrem od vrcholu trojúhelníka: lze to zapsat takto: $\boldsymbol{AT} = \frac{2}{3}\boldsymbol{AS_{BC}}$. V uvedené rovnici to odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{2}{3}$. Souřadnice těžiště proto snadno získáme dosazením hodnoty parametru $t = \frac{2}{3}$ do parametrické rovnice a tedy $T = [7/3; 3]$.
- Protože těžiště je v našem trojúhelníku jen jedno, zkuste si získanou hodnotu ověřit výpočtem pomocí ostatních těžnic (těžnice se protínají v jednom bodě – těžišti, to tedy musí ležet na každé z nich a navíc musí mít souřadnice stále stejné).

---

[17] **Odkaz:** Kapitola Souřadnice – souřadnice středu úsečky.

Obecná rovnice přímky

Obecná rovnice přímky je další způsob, jak zapsat přímku v rovině.

Definice

Rovnice

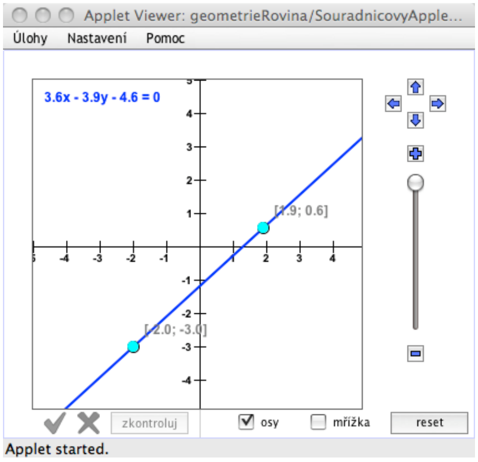
$ax + by + c = 0,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R},$

*kde alespoň jedno z čísel a, b je nenulové, se nazývá **obecná rovnice** přímky.*

Poznámka

Všechny body $X[x;\ y]$, jejichž souřadnice splňují nějakou obecnou rovnici přímky, tvoří přímku a naopak každá přímka v rovině je určena nějakou obecnou rovnicí. Obecná rovnice přímky je stejně „silná” jako rovnice parametrická a umožňuje zapsat jakoukoliv přímku v rovině.

Obecná rovnice přímky je určena jednoznačně až na násobek. Rovnice $2x + 3y + 5 = 0$ určuje stejnou přímku jako rovnice $4x + 6y + 10 = 0$.



Příklad 3.5

Najděte 5 bodů ležících na přímce vyjádřené obecnou rovnicí: $2x - y + 3 = 0$.

Řešení

Jak určit body ležící na přímce je jednoduché – stačí zvolit jednu jeho souřadnici a z obecné rovnice dopočítat druhou. Zvolme si například hodnotu x-ové souřadnice jako 1. Dosadíme do obecné rovnice přímky a dopočítáme y-ovou souřadnici

$2 \cdot 1 - y + 3 = 0,$

$y = 5.$

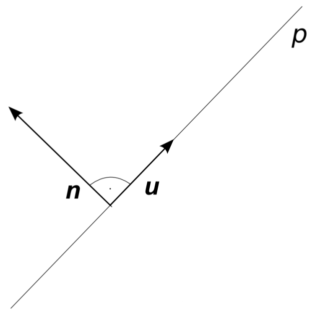
Na přímce, mimo nalezeného bodu [1; 5], leží například i body: [−2; −1], [−1; 1], [0; 3], [5; 13].

Z obecné rovnice konkrétní přímky snadno zjistíme, které body na ní leží. O něco složitější je to naopak: určit obecnou rovnici přímky, pokud víme, kterými body je určena. Jak nalezneme koeficienty

a, b, c obecné rovnice hledané přímky? V parametrickém vyjádření přímky jsme využívali směrový vektor, nyní si zavedeme a použijeme vektor normálový.

Definice

Vektor kolmý ke směrovému vektoru přímky v rovině se nazývá ***normálový vektor*** *této přímky.*



Obr. 3.5: Normálový vektor $\boldsymbol{n}$ přímky p

Ukážeme si, jak jednoduše ze souřadnic směrového vektoru $\boldsymbol{u}$ získáme souřadnice normálového vektoru $\boldsymbol{n}$. Označíme si normálový vektor $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$, směrový vektor $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$. Z definice plyne, že jsou na sebe kolmé, tedy jejich skalární součin je roven nule

$n_1u_1 + n_2u_2 = 0.$

Pokud n_1 položíme rovno u_2 a n_2 rovno $-u_1$ (případně $n_1 = -u_2$ a $n_2 = u_1$), snadno se přesvědčíme, že uvedená rovnost platí:

$n_1n_2 + n_2(-n_1) = 0,$

$n_1(-n_2) + n_2n_1 = 0.$

To platí pro libovolný vektor $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$. Nalezený normálový vektor je $\boldsymbol{n} = (u_2; -u_1)$ případně $\boldsymbol{n'} =$ $= (-u_2; u_1)$. Při daném směrovém vektoru nám k získání vektoru normálového stačí prohodit souřadnice a u jedné z nich změnit znaménko.

Věta

V obecné rovnici $ax + by + c = 0$ přímky $p(P, \boldsymbol{u})$, odpovídají koeficienty a, b souřadnicím jejího normálového vektoru $\boldsymbol{n} = (n_1; n_2)$; $a = n_1$ a $b = n_2$.

Důkaz

Mějme přímku $p(P, \boldsymbol{u})$, s normálovým vektorem $\boldsymbol{n} = (n_1; n_2)$. Každý bod $X[x, y]$ přímky p (vyjma P) spolu s bodem $P[p_1; p_2]$ určuje její směrový vektor. Víme, že normálový vektor je ke směrovému kolmý a tedy, že platí

$\boldsymbol{n}(X - P) = 0.$

Tuto rovnost rozepíšeme v souřadnicích

$n_1(x - p_1) + n_2(y - p_2) = 0,$

$n_1x + n_2y + (-n_1p_1 - n_2p_2) = 0.$

Pokud do této rovnice dosadíte souřadnice libovolného bodu přímky p (včetně P), bude splněna. Z toho plyne, že jde o obecnou rovnici přímky p s koeficienty $a = n_1$ *a* $b = n_2$*, koeficient* $c = -(n_1p_1 + n_2p_2)$.

Opačným postupem bychom došli k tomu, že rovnice $n_1x + n_2y + (-n_1p_1 - n_2p_2) = 0$ *je obecnou rovnicí přímky určené bodem* $P[p_1, p_2]$ *a normálovým vektorem* $\boldsymbol{n} = (n_1; n_2)$.

Příklad 3.6

Určete obecnou rovnici přímky p, která je určena body $A[3; 1]$ a $B[1; 2]$.

Řešení

Nejprve nalezneme souřadnice směrového vektoru $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB} = (-2; 1)$. Normálový vektor přímky p je $\boldsymbol{n} = (1; 2)$ a obecná rovnice přímky p vypadá takto:

$x + 2y + c = 0.$

Zbývá určit koeficient c, ten získáme např. dosazením souřadnic bodu A do získané rovnice. Protože $A \in p$, musí platit:

$3 + 2 \cdot 1 + c = 0,$

tedy

$c = -5.$

Obecná rovnice přímky p je:

$x + 2y - 5 = 0.$

Řešení si můžete snadno ověřit dosazením souřadnic bodů A, B do obecné rovnice, ta musí být splněna.

Příklad 3.7

1. Najděte obecnou rovnici přímky q: $x = 3 - 2t$, $y = 2 + t$; $t \in \mathbb{R}$.

2. Najděte obecnou rovnici přímky q: $x = 1$, $y = 2 + t$; $t \in \mathbb{R}$.

3. Určete parametrickou rovnici přímky q: $x - 3y - 4 = 0$.

Řešení

1. Parametrické vyjádření přímky q si můžeme představit jako soustavu dvou rovnic o třech neznámých x, y, t:
   $x = 3 - 2t,$
   $y = 2 + t.$
   Budeme se snažit eliminovat parametr t. V našem případě k první rovnici přičteme dvojnásobek rovnice druhé:
   $x + 2y = 3 - 2t + 4 + 2t,$
   $x + 2y = 7,$
   $x + 2y - 7 = 0.$
   Úpravami jsme získali obecnou rovnici přímky q.

2. V tomto případě nemůžeme použít postup z 1, protože parametru t se nezbavíme. Pokud se zamyslíte, tak uvidíte, že na přímce q leží body $[1; 2]$, pro $t = 0$, $[1; 3]$ pro $t = 1$, $[1; 4]$ pro $t = 2$ atd.
   Z toho plyne, že rovnice přímky q určuje přímku $x = 1$, což je obecná rovnice přímky q (u přímek rovnoběžných s osou x by se postupovalo obdobně).

3. K parametrickému vyjádření potřebujeme znát alespoň jeden bod přímky q. Nejprve tedy spočítáme souřadnice nějakého bodu A, který leží na přímce q.
   Zvolíme si jeho x-ovou souřadnici jako $x = 1$ a dopočítáme souřadnici y-ovou; $A[1; -1]$.
   Teď bychom mohli spočítat souřadnice dalšího bodu, určit směrový vektor a vyjádřit přímku parametricky nebo si uvědomíme, že umíme jednoduše převést normálový vektor na vektor směrový.
   Normálový vektor přímky q, $\boldsymbol{n_q} = (1; -3)$ můžeme převést na směrový vektor této přímky $\boldsymbol{u_q} = (3; 1)$.
   Pomocí bodu A a vektoru $\boldsymbol{u_q}$ vyjádříme parametrickou rovnici přímky q:
   $x = 1 + t,$
   $y = -1 - 3t,\ t \in \mathbb{R}.$

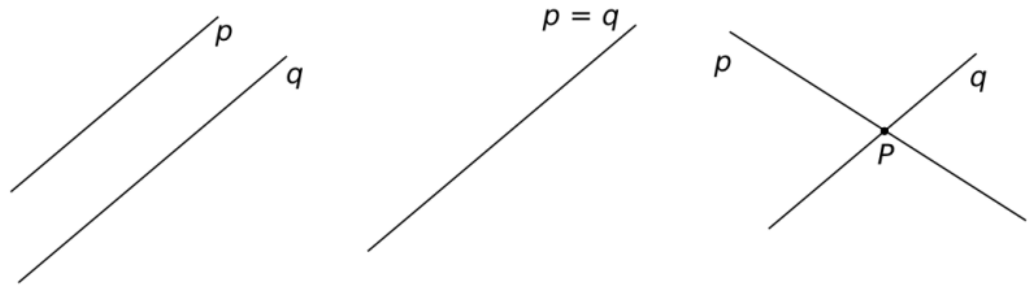
Vzájemná poloha přímek

Dvě přímky p, q v rovině mohou mít tři vzájemné polohy viz *obr. 3.8*.

- $p \cap q = \emptyset$
  Přímky p a q jsou **rovnoběžné různé**. Nemají žádný společný bod.

- $p \cap q = \{P\}$
  Přímky p a q jsou **různoběžné**. Mají jeden společný bod, bod P. Zapisujeme $p \times q$.

- $p \cap q = p$
  Přímky p a q jsou **totožné**. Zapisujeme $p = q$.



Obr. 3.6: Vzájemná poloha přímek v rovině

Poznámka

Totožnost přímek je speciální případ rovnoběžnosti. Tj. dvě totožné přímky jsou i rovnoběžné, ale dvě rovnoběžné přímky nemusí být totožné.

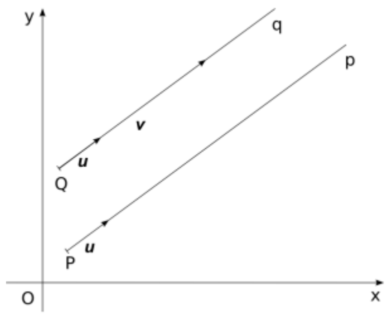
Úmluva: Rovnoběžnost přímek p a q budeme značit jako $p \parallel q$. Nadále budeme jako rovnoběžné přímky označovat přímky rovnoběžné různé i přímky totožné. Bude-li potřeba polohy rozlišit, použije se příslušný pojem.

Věta

Dvě přímky p(P, ***u****) a q(Q,* ***v****) jsou rovnoběžné právě tehdy, je-li vektor* ***u*** *nenulovým reálným násobkem vektoru* ***v****.*

Důkaz

Důkaz plyne z obrázku.



Příklad 3.8

Jsou dány body $P[3; 5]$, $Q[2; 1]$ a vektory $\boldsymbol{u} = (1; 2)$ a $\boldsymbol{v} = (3; 6)$. Rozhodněte, zda jsou přímky $p(P, \boldsymbol{u})$ a $q(Q, \boldsymbol{v})$ rovnoběžné.

Řešení

Hledáme nějaké reálné číslo k takové, aby $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{u}$ (přímky jsou rovnoběžné právě tehdy, je-li vektor $\boldsymbol{v}$ nenulovým násobkem vektoru $\boldsymbol{u}$).

$3 = 1 \cdot k,$

$6 = 2k.$

Pro $k = 3$ je soustava splněna, přímka p je rovnoběžná s přímkou q.

Věta

Dvě přímky p(P, ***u****) a q(Q,* ***v****) jsou totožné právě tehdy, jsou-li rovnoběžné a leží-li bod Q na přímce p.*

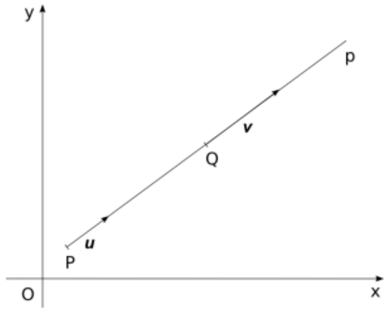
Důkaz

$\Rightarrow$

Jsou-li přímky p(P, ***u****) a q(Q,* ***v****) totožné, pak jsou rovnoběžné (****u*** *je násobkem* ***v****) a bod Q leží na přímce p.*

$\Leftarrow$

Z obrázku plyne, že jsou-li přímky p(P, ***u****) a q(Q,* ***v****) rovnoběžné a bod Q leží na přímce p, pak jsou tyto přímky totožné.*



Příklad 3.9

Jsou dány body $P[3; 5]$, $Q[2; 1]$ a vektory $\boldsymbol{u} = (1; 2)$ a $\boldsymbol{v} = (3; 6)$. Rozhodněte, zda jsou přímky $p(P, \boldsymbol{u})$ a $q(Q, \boldsymbol{v})$ totožné.

Řešení

Ze zadání je vidět, že $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{u}$ a tedy $p \parallel q$. Musíme zjistit, zda bod Q leží na přímce p. Přímku p parametricky vyjádříme:

$x = 3 + t,$

$y = 5 + 2t;\ t \in \mathrm{R}.$

Do rovnic dosadíme souřadnice bodu Q a hledáme hodnotu parametru t tak, aby platilo:

$2 = 3 + t,$

$1 = 5 + 2t.$

Z první rovnice plyne $t = -1$. Po dosazení do druhé rovnice získáme $1 = 3$. To neplatí a soustava tedy nemá řešení. Bod Q proto neleží na přímce p a přímky p a q jsou rovnoběžné různé.

Jestliže přímky $p(P, \boldsymbol{u})$, $q(Q, \boldsymbol{v})$ v rovině nejsou rovnoběžné, jsou různoběžné[18] a má smysl hledat jejich průsečík. Průsečík přímek p, q je bod, který leží na obou přímkách. Je to tedy bod X, pro který platí rovnice:

$X = P + t\boldsymbol{u},$

$X = Q + s\boldsymbol{v}$, pro nějakou hodnotu parametrů t, s.

Pokud hledáme průsečík těchto přímek, hledáme hodnoty parametrů t a s, pro které obě přímky určují stejný bod. Řešíme tedy rovnici $P + t\boldsymbol{u} = Q + s\boldsymbol{v}$.

Příklad 3.10

Jsou dány přímky $p(P, \boldsymbol{u})$ a $q(Q, \boldsymbol{v})$, $P[2; -1]$, $\boldsymbol{u} = (1; 2)$, $Q[0; -2]$, $\boldsymbol{v} = (1; 1)$. Určete jejich vzájemnou polohu a jsou-li různoběžné, najděte i jejich průsečík.

Řešení

Nejprve vyloučíme možnost, že by přímky p a q byly rovnoběžné. Je vidět, že směrový vektor $\boldsymbol{u} = (1; 2)$ není násobkem směrového vektoru $\boldsymbol{v} = (1; 1)$, přímky p a q proto nejsou rovnoběžné. Budeme pokračovat tím, že obě přímky vyjádříme parametricky.

---

[18] **Nápověda:** V prostoru je situace složitější, přímky mohou být ještě navíc mimoběžné.

p: $\quad$ q:

$x = 2 + t,$ $\quad$ $x = s,$

$y = -1 + 2t;\ t \in \mathbb{R}.$ $\quad$ $y = -2 + s;\ s \in \mathbb{R}.$

Hledáme společný bod těchto přímek, tedy bod, jehož x-ová i y-ová souřadnice je v rovnicích obou přímek stejná. Získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$2 + t = s,$

$-1 + 2t = -2 + s.$

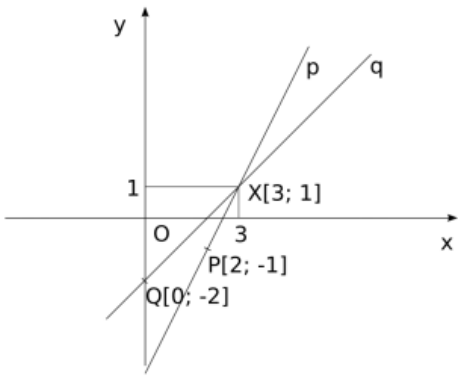
Řešením soustavy je $t = 1$ a $s = 3$. To jsou hodnoty parametrů, které odpovídají souřadnicím námi hledaného průsečíka přímek p a q v jejich parametrických vyjádřeních. Stačí buď $t = 1$ dosadit do parametrické rovnice přímky p nebo $s = 3$ do parametrické rovnice přímky q a vypočítat souřadnice průsečíku:

p: $\quad$ q:

$x = 2 + 1 = 3,$ $\quad$ $x = 3,$

$y = -1 + 2 \cdot 1 = 1.$ $\quad$ $y = -2 + 3 = 1.$

Přímky p a q jsou různoběžné. Jejich průsečíkem je bod $X[3;\ 1]$. Na *obr. 3.9* si prohléděte, jak vypadá situace z tohoto příkladu.



Obr. 3.7: Řešení příkladu 3.10

Při řešení následujících příkladů si uvědomte, kolik řešení soustavy rovnic s neznámými t, s získáme, pokud bychom postupovali stejně jako v *příkladě 3.10*, za předpokladu, že by $p(P, \boldsymbol{u})$ a $q(Q, \boldsymbol{v})$ jsou rovnoběžné různé nebo totožné.

Příklad 3.11

Jsou dány přímky $p(P, \boldsymbol{u})$ a $q(Q, \boldsymbol{v})$, $P[-1;\ 0]$, $\boldsymbol{u} = (1;\ 2)$, $Q[3;\ 5]$, $\boldsymbol{v} = (3;\ 6)$. Určete jejich vzájemnou polohu a jsou-li různoběžné, najděte i jejich průsečík.

Řešení

p: $\quad$ q:

$x = 1 - t,$ $\quad$ $x = 3 + 3s,$

$y = 2t;\ t \in \mathbb{R}.$ $\quad$ $y = 5 + 6s;\ s \in \mathbb{R}.$

Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$-1 + t = 3 + 3s,$

$2t = 5 + 6s.$

Pokud od druhé rovnice odečteme dvojnásobek první získáme

$2 = -1.$

To neplatí pro žádnou hodnotu t a s a soustava tedy nemá **žádné** řešení. Tento výsledek geometricky interpretujeme tak, že přímky p a q nemají žádný společný bod, a proto můžeme říci, že přímky p a q jsou rovnoběžné různé.

Příklad 3.12

Jsou dány přímky $p(P, \boldsymbol{u})$ a $q(Q, \boldsymbol{v})$, $P[1; 2]$, $\boldsymbol{u} = (1; -2)$, $Q[-1; 6]$, $\boldsymbol{v} = (-2; 4)$. Určete jejich vzájemnou polohu a jsou-li různoběžné, najděte i jejich průsečík.

Řešení

p:	q:
$x = 1 + t,$	$x = -1 - 2s,$
$y = 2 - 2t;\ t \in \mathbb{R}.$	$y = 6 + 4s;\ s \in \mathbb{R}.$

Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$1 + t = -1 - 2s,$

$2 - 2t = 6 + 4s.$

Pokud první rovnici vynásobíme dvěma a přičteme ke druhé rovnici získáme

$4 = 4.$

To platí pro libovolnou hodnotu t a s a soustava tedy má **nekonečně** mnoho řešení, což znamená, že existuje nekonečně mnoho bodů ležících jak na přímce p, tak q, proto $p = q$.

Jak je vidět, mohli bychom použít výše zmíněné postupy pro zkoumání vzájemné polohy jakýchkoliv dvou přímek v rovině. Kontrola, zda jeden vektor je násobkem druhého je ale jednodušší, než řešit celou soustavu.

Vzájemnou polohu dvou přímek nemusíme určovat jen z parametrických rovnic. Můžeme využít i rovnice obecné nebo jejich kombinace.

Věta

Dvě přímky, které mají rovnice

$ax + by + c = 0,$

$a'x + b'y + c' = 0,$

1. *jsou rovnoběžné právě tehdy, je-li vektor* $\boldsymbol{n} = (a; b)$ *nenulovým reálným násobkem vektoru* $\boldsymbol{n}' = (a'; b')$*;*

2. *jsou totožné právě tehdy, když je jedna rovnice násobkem druhé;*

3. *jsou různoběžné právě tehdy, když má soustava jejich obecných rovnic právě jedno řešení.*

Důkaz

1. $\Rightarrow$
   Jsou-li přímky $ax + by + c = 0$ a $a'x + b'y + c' = 0$ rovnoběžné, pak podle dříve dokázané věty[19] *platí, že směrový vektor **u** první přímky je reálným násobkem směrového vektoru **u'** přímky druhé. Tedy existuje $k \in \mathbb{R}$, pro které $\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u'}$. Souřadnice vektorů **u** a **u'** můžeme určit z obecných rovnic*
   $\boldsymbol{u} = (b; -a)$,
   $\boldsymbol{u'} = (b'; -a')$.
   Platí
   $\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u'} = (b; -a) = (kb'; -ka')$,
   tedy $b = kb'$ *a* $a = ka'$.
   Z toho plyne, že
   $\boldsymbol{n} = (a; b) = (ka'; kb') = k(a'; b') = k\boldsymbol{n'}$.
   $\Leftarrow$
   Opačnou implikaci bychom dokazovali obráceným postupem.

2. *Řešíme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Ty mají stejnou množinu řešení právě tehdy, když je jedna násobkem druhé.*

3. *Důkaz vychází z předchozích úvah. Pokud jsou přímky rovnoběžné různé, soustava nemá řešení – přímky nemají žádný společný bod. Jsou-li totožné, soustava má řešení nekonečně mnoho – společnými body je celá přímka. Zbývá možnost, že řešení je jen jedno, které je jejich průsečíkem.*

Příklad 3.13

Určete vzájemnou polohu přímek p a q.

p: $x + 2y - 1 = 0$,

q: $3x + 6y = 2$.

Řešení

Normálový vektor přímky p budeme značit jako $\boldsymbol{n_p}$, analogicky normálový vektor přímky q jako $\boldsymbol{n_q}$.

$\boldsymbol{n_p} = (1; 2)$,

$\boldsymbol{n_q} = (3; 6)$.

Ze zápisu je vidět, že $\boldsymbol{n_q}$ je násobkem $\boldsymbol{n_p}$, naše přímky jsou tedy rovnoběžné. Zbývá zjistit, zda jsou totožné nebo rovnoběžné různé.

Pokud by rovnice q byla násobkem p, byly by totožné. Aby rovnice q byla násobkem rovnice p, musel by koeficient c v rovnici přímky q odpovídat hodnotě -3 (to plyne z toho, že vektor $\boldsymbol{n_q} = 3\boldsymbol{n_p}$). Koeficient je roven jen -2, tedy p a q jsou **rovnoběžné různé**.

Příklad 3.14

Určete vzájemnou polohu přímek p a q, je-li

p: $x - y - 1 = 0$,

q: $3x + 3y - 6 = 0$. Jsou-li různoběžné, najděte i jejich průsečík.

Řešení

---

[19] **Nápověda:** Dvě přímky $p(P, \boldsymbol{u})$ a $q(Q, \boldsymbol{v})$ jsou rovnoběžné právě tehdy, je-li vektor $\boldsymbol{v}$ nenulovým reálným násobkem vektoru $\boldsymbol{u}$.

Najdeme normálové vektory přímek p a q:

$\boldsymbol{n_p} = (1; -1)$,
$\boldsymbol{n_q} = (3; 3)$.

Vidíme, že vektor $\boldsymbol{n_p}$ není násobkem vektoru $\boldsymbol{n_q}$, a proto přímky nejsou rovnoběžné a musí být tedy různoběžné (přímky p a q jsou na sebe dokonce kolmé[20]). Pokud přímky p a q nejsou rovnoběžné, má smysl hledat jejich společný bod. Ten získáme, pokud vyřešíme následující soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$x - y = 1$,
$3x + 3y = 6$.

Z první rovnice plyne $x = y + 1$. Po dosazení do druhé rovnice získáme:

$3y + 3 + 3y = 6$,
tedy $x = 3/2$ a $y = 1/2$.

Přímky p a q jsou různoběžné, jejich průsečíkem je bod $X\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Příklad 3.15

Určete vzájemnou polohu přímek p: $x - 2y + 5$ a q: $x = 3 - 2t$, $y = 2 + t$; $t \in \mathbb{R}$. Pokud existuje, najděte jejich průsečík.

Řešení

Do obecné rovnice přímky p dosadíme za x a y vyjádřené souřadnice x a y z parametrické rovnice přímky q:

$(3 - 2t) - 2(2 + t) + 5 = 0$.

Tuto rovnici vyřešíme:

$3 - 2t - 4 - 2t + 5 = 0$,
$-4t + 4 = 0$,
$t = 1$.

Rovnice má jedno řešení. To znamená, že $p \times q$ a jejich průsečíkem je bod $P[1; 3]$, který odpovídá hodnotě parametru $t = 1$ v parametrické rovnici přímky q.

Odchylka přímek

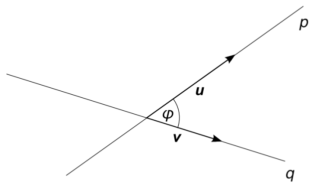
V posledních dvou kapitolách si rozšíříme paletu úloh, které umíme řešit. V této kapitole si ukážeme, jak vypočítat odchylku přímek. V poslední kapitole se naučíme počítat vzdálenost bodu od přímky a vzdálenost dvou přímek.

[20] **Nápověda:** $\boldsymbol{n_p} \cdot \boldsymbol{n_q} = 0$.

Definice

Odchylka přímek *p(P,* $\boldsymbol{u}$*), q(Q,* $\boldsymbol{v}$*) je číslo* $\varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$*, pro které platí:*

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{uv}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}.$$



Obr. 3.8: Odchylka přímek

Příklad 3.16

Jsou dány přímky p a q. Přímka p je určena body $A = [2; 0]$ a $B = [1; 6]$ a přímka q: $2x - y + 1 = 0$. Určete jejich odchylku.

Řešení

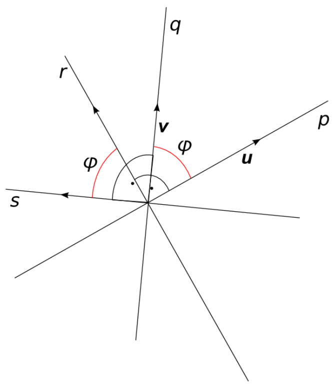
Směrový vektor $\boldsymbol{u_p}$ přímky p určíme jako vektor $\boldsymbol{AB} = (-1; 6)$. Z rovnice přímky q nejdříve vyjádříme její normálový vektor, který převedeme na vektor směrový: $\boldsymbol{n_q} = (2; -1)$ a $\boldsymbol{u_q}$ je tedy $(1; 2)$.

$$\cos\phi = \frac{|-1+12|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{37}} = \frac{|11|}{\sqrt{185}} \approx 0.8087.$$

Nelekejte se získaného výsledku, jen málokdy se totiž stane, aby řešením podobné úlohy byla některá z tzv. tabulkových hodnot. Využijte kalkulačky a výsledek zaokrouhlete na stupně.

$\varphi \approx \cos^{-1}(0.8087) \approx 36°$.

K výpočtu odchylky dvou přímek, které jsou zadány svými obecnými rovnicemi můžeme využít i jejich normálové vektory. Z *obr. 3.11* plyne, že odchylka přímek p, q je stejná jako odchylka přímek r, s, jejichž směrovými vektory jsou normálové vektory přímek p a q.



Obr. 3.9: Odchylka přímek

Úloha

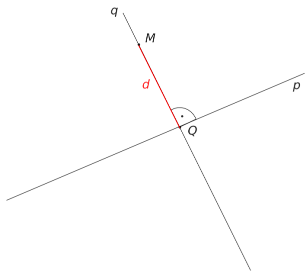
Vypočítejte odchylku přímek p: $ax + by + c = 0$ a q: $dx + ey + f = 0$. Výsledek zaokrouhlete na stupně.

Skript automaticky generující úlohy i řešení.

Vzdálenost bodu od přímky

Pro výpočet vzdálenosti bodu od přímky budeme používat následující vzorec. Jen připomeneme, že vzdálenost bodu od přímky hledáme na kolmici k dané přímce procházející daným bodem.

Úmluva: Vzdálenost bodu M od přímky p budeme značit $|Mp|$.



Obr. 3.10: Vzdálenost bodu od přímky

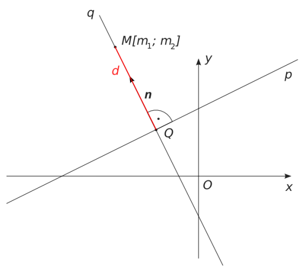
Věta

Vzdálenost *d bodu* $M[m_1; m_2]$ *od přímky* p: $ax + by + c = 0$ *se vypočítá podle vzorce*

$$d = |Mp| = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Důkaz

Podívejte se na obrázek. Hledáme průsečík přímky p a takové přímky q, že $q \perp p$ *a* $M \in q$.



Tento průsečík označíme jako Q. Je zřejmé, že vzdálenost bodu M od přímky p je rovna |MQ|, vzdálenosti bodů M a Q. Nejprve si vyjádříme přímku q parametricky. Využijeme toho, že normálový vektor $\boldsymbol{n} = (a; b)$ *přímky p je směrovým vektorem přímky q:*

q:

$x = m_1 + at,$

$y = m_2 + bt;\ t \in \mathbb{R}.$

Dále budeme hledat bod $Q = p \cap q$:

$am_1 + a^2t + bm_2 + b^2t + c = 0,$

$t(a^2 + b^2) = -am_1 - bm_2 - c,$

$$t = \frac{-am_1 - bm_2 - c}{a^2 + b^2}. \qquad \textbf{(3.2)}$$

To je hodnota parametru, kterou je potřeba dosadit do rovnice přímky q, abychom získali souřadnice bodu Q.

Nakonec budeme počítat vzdálenost bodů M a Q.

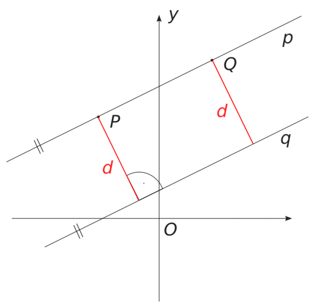
$$|MQ| = \sqrt{(m_1 + at - m_1)^2 + (m_2 + bt - m_2)^2} = \sqrt{a^2t^2 + b^2t^2} = |t|\ \sqrt{a^2 + b^2},$$

pro t získané z ***(3.2)*** *je vzdálenost M a Q rovna*

$$|MQ| = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Stejný vzorec lze využít pro výpočet vzdálenosti dvou rovnoběžných přímek. Stačí si jen uvědomit, že jejich vzdálenost je rovna vzdálenosti libovolného bodu jedné přímky od přímky druhé. Vzdálenost dvou různoběžných přímek je rovna nule.

Úmluva: Vzdálenost přímky p od přímky q budeme značit $|pq|$.



Obr. 3.11: Vzdálenost dvou přímek

Příklad 3.17

Vypočítejte vzdálenost d bodu $A[-1; 5]$ od přímky p: $3x + 4y - 2 = 0$.

Řešení

$$d = |Ap| = \frac{|3\cdot(-1) + 4\cdot 5 - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-3 + 20 - 1|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3.$$

Úloha

Určete vzdálenost d přímky p: $3x - 4y + 1 = 0$ od přímky q: $3x - 4y + 4 = 0$.

Řešení

- Z obecných rovnic přímek p a q je vidět, že jsou rovnoběžné různé a jejich vzdálenost je tedy nenulová. Nejprve najdeme nějaký bod P, který leží na přímce p a jehož vzdálenost od přímky q budeme počítat. Zvolme si například $x = 1$ a dopočítejme $y = 1$.

- Budeme tedy hledat vzdálenost bodu $P[1; 1]$ od přímky q: $3x - 4y + 4 = 0$. Stačí dosadit souřadnice bodu P do vzorce[21] pro výpočet vzdálenosti a vypočítáme d:
  $d = |pq| = \dfrac{|3\cdot 1 - 4\cdot 1 + 4|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{3}{5}.$

Směrnicový a úsekový tvar rovnice přímky

Mimo parametrické a obecné rovnice přímky se používají ještě další vyjádření. Jsou to směrnicový a úsekový tvar rovnice přímky. Narozdíl od parametrické a obecné rovnice neumožňují vyjádřit všechny přímky, a proto se až tolik nevyužívají. Je ale důležité je znát a vědět, jaké mají výhody a nevýhody.

Směrnicový tvar rovnice přímky

Jak je vidět z následující definice, směrnicový tvar rovnice přímky je vlastně předpisem funkce proměnné x. Z toho plyne jisté omezení, které si později ukážeme.

Definice

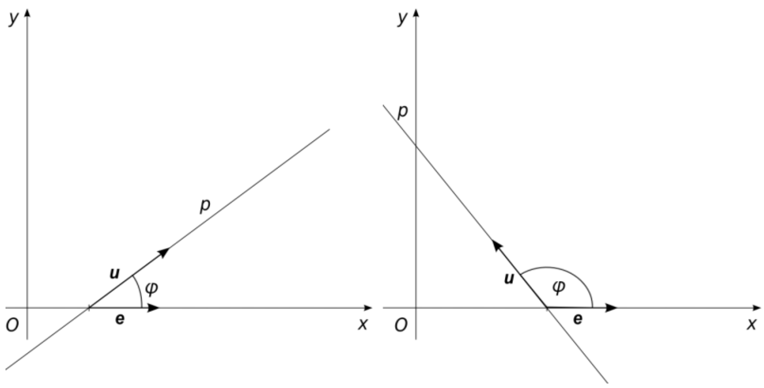
Rovnice

$y = kx + q;\ k, q \in \mathbb{R},$

se nazývá ***směrnicový tvar*** *rovnice přímky. Číslo k se nazývá* ***směrnice*** *přímky.*

Poznámka

Směrnice přímky p vyjadřuje tangens odchylky φ vektorů $\boldsymbol{e} = (1; 0)$ a $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$, kde $\boldsymbol{u}$ je libovolný směrový vektor přímky p, jehož souřadnice $u_2 > 0$.



Obr. 3.12: Směrnice přímky

[21] **Nápověda:** Vzorec pro výpočet vzdálenosti.

Směrnicový tvar přímky neumožňuje popsat ty přímky, které jsou rovnoběžné s osou *y*. Protože směrnice vyjadřuje tangens úhlu a tangens 90° není definován, není pro takovou přímku definována ani směrnice, a nemůžeme ji tudíž vyjádřit.

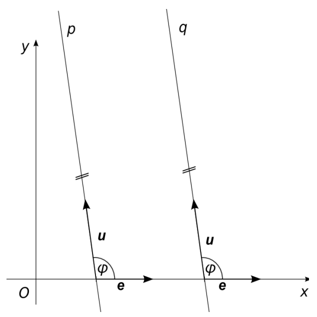
Věta

Dvě přímky jsou spolu rovnoběžné právě tehdy, když jsou různoběžné s osou y a jejich směrnice jsou totožné nebo pokud jsou obě rovnoběžné s osou y.

Důkaz

$\Rightarrow$

Dvě rovnoběžné přímky, které jsou různoběžné s osou y, mají stejné směrnice. Jsou-li obě rovnoběžné s osou y, jsou rovnoběžné i navzájem.



$\Leftarrow$

Pokud je každá přímka rovnoběžná s osou y, pak jsou rovnoběžné i navzájem.

Pokud jsou s osou y různoběžné a mají stejné směrnice, tak jejich rovnice vypadají takto:

$y = kx + q,$

$y = kx + d.$

To se dá snadno přepsat jako

$kx - y + q = 0,$

$kx - y + d = 0.$

Je vidět, že normálové vektory těchto dvou přímek jsou si rovny a přímky jsou proto rovnoběžné.

Poznámka

Jestliže dvě přímky mají stejnou směrnici, pak jsou rovnoběžné.

Věta

Jestliže přímka p má nenulovou směrnici k a přímka q je na ni kolmá, pak směrnice přímky q je rovna $-\frac{1}{k}$.

Důkaz

Přímka p má nenulovou směrnici k, a přímka q je na ni kolmá. To znamená to, že přímku p můžeme zapsat jako

$y = kx + q$.

Protože $k \neq 0$, přímka p není rovnoběžná s osou x. To znamená, že přímka q, která je na ni kolmá není rovnoběžná s osou y a existuje její směrnicový tvar

$y = k'x + r$.

Přímky jsou k sobě kolmé, právě když skalární součin normálových vektorů je roven 0. Normálové vektory přímek p, resp. q, můžeme zapsat jako $(k; -1)$, resp. $(k'; -1)$, a protože $p \perp q$, platí

$k \cdot k' + (-1)(-1) = 0$.

Z této rovnice nakonec můžeme vyjádřit k' jako

$k' = -\frac{1}{k}$.

Úsekový tvar rovnice přímky

Mějme na souřadnicových osách dány body $P[p; 0]$ a $Q[0; q]$, které jsou různé od počátku. Přímka PQ má potom rovnici:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

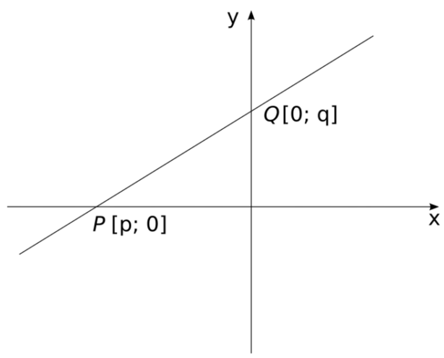
Definice

Rovnice

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1;\ p \cdot q \neq 0,\ p, q \in \mathbb{R},$$

*se nazývá **úsekový tvar** rovnice přímky.*

Z úsekového tvaru rovnice přímky tedy můžeme velmi jednoduše vyčíst průsečíky přímky se souřadnicovými osami nebo naopak z průsečíků se souřadnicovými osami můžeme snadno zjistit rovnici přímky, která osy v daných bodech protíná.



Obr. 3.13: Průsečíky přímky se souřadnicovými osami

Poznámka

Rovnici přímky v úsekovém tvaru lze psát právě tehdy, když přímka není rovnoběžná s žádnou souřadnicovou osou a neprochází počátkem.

Příklad 3.18

Je-li to možné, najděte pro přímku AB, kde $A[0; 3]$, $B[6; 0]$ parametrické vyjádření, obecnou rovnici, směrnicový a úsekový tvar její rovnice.

Řešení

Směrový vektor přímky AB: $\boldsymbol{u} = B - A = (6; -3)$.

Normálový vektor přímky AB: $\boldsymbol{n} = (3; 6)$.

Parametrická rovnice[22]

$x = 6t,$

$y = 3 - 3t;\ t \in \mathbb{R}.$

Obecná rovnice[23]

$3x + 6y + c = 0,$

po dosazení souřadnic bodu A získáme $c = -18$ a obecná rovnice přímky AB je

$3x + 6y - 18 = 0$, což můžeme zapsat jako:

$x + 2y - 6 = 0.$

---

[22] **Odkaz:** Parametrická rovnice přímky v rovině.

[23] **Odkaz:** Obecná rovnice přímky.

Směrnicový tvar[24]

$y = kx + q$,

po dosazení souřadnic bodů A a B do směrnicového tvaru rovnice získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$3 = 0k + q$,

$0 = 6k + q$.

Z první rovnice můžeme vyjádřit $q = 3$ a dosadit do rovnice druhé. Řešením je potom $k = -1/2$ a $q = 3$. Směrnicový tvar rovnice přímky AB vypadá takto:

$$y = -\frac{x}{2} + 3.$$

Úsekový tvar[25]

Protože ze zadání známe průsečíky se souřadnicovými osami, můžeme úsekový tvar rovnou zapsat jako:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1.$$

[24] **Odkaz:** Směrnicový tvar rovnice přímky.

[25] **Odkaz:** Úsekový tvar rovnice přímky.

Geometrie v prostoru

V této kapitole se při zavádění pojmů a řešení úloh přesuneme do prostoru. Úlohy, které budeme řešit, se podobají těm, které jsme řešili v kapitole **Geometrie v rovině**[26]**,** a i postupy budou obdobné. Mezi úlohy, které budeme řešit, patří zkoumání vzájemné polohy přímky a roviny nebo třeba výpočet vzdálenosti dvou rovin.

Začneme vyjádřením přímky v prostoru. Přímku v prostoru můžeme vyjádřit jen parametricky, protože obecná rovnice přímky v prostoru neexistuje.

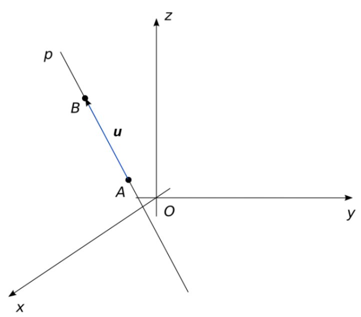
Parametrické vyjádření přímky

Parametrické vyjádření přímky v prostoru zavedeme podobným způsobem jako v rovině.

Úmluva: Přímku p v prostoru, určenou bodem P a vektorem $\boldsymbol{u}$, budeme zapisovat jako $p(P, \boldsymbol{u})$.

Definice

*Jestliže A, B jsou dva různé body, pak vektor $\boldsymbol{u} = B - A$ nazýváme **směrový vektor** přímky AB.*



Obr. 4.1: Směrový vektor přímky v prostoru

V prostoru zůstávají všechny úvahy i řešení z *příkladu 3.1*[27] platné.

Definice

Rovnice $X = A + t\boldsymbol{u}$; $t \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$,

*se nazývá **parametrická rovnice** nebo také **parametrické vyjádření** přímky $p(A, \boldsymbol{u})$. Proměnná t se nazývá **parametr**.*

[26] **Odkaz:** Kapitola Goemetrie v rovině.

[27] **Odkaz:** Kapitola Geometrie v rovině, příklad 3.1.

Když parametrickou rovnici přímky $p(A, \boldsymbol{u})$, kde $A[a_1; a_2; a_3]$ a $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$ zapíšeme v souřadnicích, získáme vyjádření souřadnic bodů $X[x; y; z]$ této přímky v závislosti na parametru t.

$x = a_1 + tu_1,$

$y = a_2 + tu_2,$

$z = a_3 + tu_3;\ t \in \mathbb{R}.$

Poznámka

Protože bodů a směrových vektorů pro vyjádření jedné přímky můžeme zvolit nekonečně mnoho, můžeme jednu přímku vyjádřit nekonečně mnoha parametrickými rovnicemi.

Příklad 4.1

Určete parametrické vyjádření přímky AB, je-li $A[2; 3; -1]$ a $B[0; -1; 5]$.

Řešení

Pro určení parametrické rovnice přímky AB použijeme bod A a směrový vektor $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$:

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB} = (0 - 2; -1 - 3; 5 + 1) = (-2; -4; 6).$

Parametrická rovnice pak vypadá následovně:

$x = 2 - 2t,$

$y = 3 - 4t,$

$z = -1 + 6t;\ t \in \mathbb{R}.$

Příklad 4.2

Zjistěte, zda body $A[1; 5; -2]$, $B[2; 3; 0]$ a $C[0; 7; -3]$ leží na jedné přímce.

Řešení

Ze zadaných bodů zvolíme dva, pomocí kterých vyjádříme parametrickou rovnici přímky, která jimi prochází. Do získané rovnice dosadíme souřadnice třetího bodu a hledáme hodnotu parametru t, pro kterou bude parametrická rovnice splněna – pokud taková hodnota existuje, body na přímce leží, pokud ne, body na jedné přímce neleží.

Z bodů A a B získáme parametrickou rovnici přímky AB:

$x = 1 + t,$

$y = 5 - 2t,$

$z = -2 + 2t;\ t \in \mathbb{R}.$

Za x, y a z dosadíme souřadnice bodu C:

$0 = 1 - t,$

$7 = 5 - 2t,$

$-3 = -2 + 2t.$

Z první rovnice vyjádříme $t = -1$. Pro $t = -1$ je splněna i druhá rovnice, ale po dosazení do rovnice třetí vidíme:

$-3 = -4.$

Soustava nemá řešení, proto bod C neleží na přímce AB. To samozřejmě znamená, že body A, B, C neleží na jedné přímce.

Celý příklad by se dal vyřešit i rychleji způsobem podobným tomu, který jsme použili v *příkladě 3.3*[28]. Body A, B, C leží na jedné přímce, právě tehdy, když je vektor $\boldsymbol{AB}$ nenulovým reálným násobkem vektoru $\boldsymbol{AC}$, tj. existuje nějaké reálné číslo k, pro které platí $\boldsymbol{AB} = k\boldsymbol{AC}$.

$\boldsymbol{AB} = (1; -2; 2)$,

$\boldsymbol{AC} = (-1; 2; -1)$.

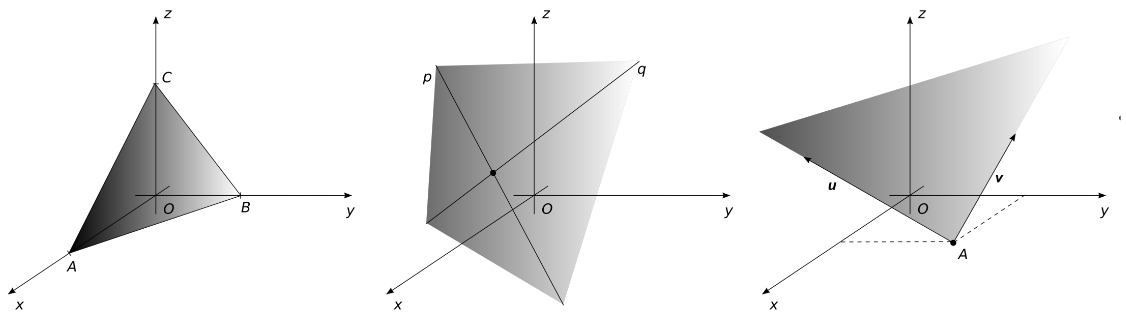
Ze souřadnic vektorů $\boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{AC}$ je vidět, že jeden není násobkem druhého, a proto body A, B a C neleží na jedné přímce.

Poznámka

Interval, ve kterém leží parametr t, ovlivňuje stejně jako v rovině, co parametrická rovnice vyjadřuje.

Parametrické vyjádření roviny

V prostoru je rovina jen jedním z mnoha objektů, a proto má smysl zabývat se jejím vyjádřením. Rovina je určena třemi nekolineárními body[29], nebo dvěma různými přímkami, které ale nejsou mimoběžné, nebo třeba bodem a dvěma různými vektory, z nichž jeden není reálným násobkem druhého.



Obr. 4.2: Určení roviny

Zavedeme si dvě různá vyjádření roviny v prostoru – parametrické vyjádření a později obecnou rovnici roviny.

Definice

*Rovnice $X = A + s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$, kde $s, t \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$, a $\boldsymbol{u} \neq k\boldsymbol{v}$, pro libovolné $k \in \mathbb{R}$, se nazývá **parametrická rovnice** nebo též **parametrické vyjádření** roviny ABC, kde $B = A + \boldsymbol{u}$ a $C = A + \boldsymbol{v}$. Neznámé s, t nazýváme **parametry**.*

Zapíšeme-li parametrickou rovnici roviny určenou bodem A a vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, kde $A[a_1; a_2; a_3]$, $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; v_3)$, pomocí souřadnic bodů a vektorů, získáme vyjádření souřadnic bodů $X[x; y; z]$ této roviny v závislosti na hodnotách parametrů s a t:

---

[28] **Odkaz:** Příklad 3.3 v kapitole Geometrie v rovině.

[29] **Nápověda:** Třemi body neležícími na jedné přímce.

$x = a_1 + su_1 + tv_1,$

$y = a_2 + su_2 + tv_2,$

$z = a_3 + su_3 + tv_3;\ s, t \in \mathbb{R}.$

Příklad 4.3

Určete parametrickou rovnici roviny ABC, jestliže $A[0; 2; 1]$, $B[-1; 3; 2]$ a $C[4; -1; 3]$.

Řešení

Parametrickou rovnici roviny určíme podle definice. Pro $\boldsymbol{u} = B - A$, $\boldsymbol{v} = C - A$ je rovnice roviny ABC:

$X = A + s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v};\ s, t \in \mathbb{R}.$

Nejprve určíme vektory $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AC}$.

$\boldsymbol{u} = (-1; 1; 1),$

$\boldsymbol{v} = (4; -3; 2)$

a rovnici roviny vyjádříme jako:

$x = -s + 4t,$

$y = 2 + s - 3t,$

$z = 1 + s + 3t;\ s, t \in \mathbb{R}.$

Poznámka

Každá rovina v prostoru je vyjádřena nějakým parametrickým vyjádřením roviny a každé parametrické vyjádření roviny popisuje nějakou rovinu.

Úloha

Rozhodněte, zda bod $K[3; 2; 0]$ leží v rovině určené bodem $A[2; 1; 5]$ a přímkou $p(B, \boldsymbol{u})$, jestliže $B[2; -1; 2]$ a $\boldsymbol{u} = (1; 3; 3)$.

Řešení

- Ze souřadnic bodu A a vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{AB}$ určíme parametrické vyjádření zadané roviny
  $x = 2 + s,$
  $y = 1 + 3s - 2t,$
  $z = 5 + 3s - 3t;\ s, t \in \mathbb{R}.$

- Aby bod K byl bodem této roviny, musí nutně existovat hodnoty parametrů s a t, pro které bude parametrická rovnice určovat souřadnice bodu K. Za x, y, z dosadíme souřadnice bodu K:
  $3 = 2 + s,$
  $2 = 1 + 3s - 2t,$
  $0 = 5 + 3s - 3t.$
  Z první rovnice vyjádříme $s = 1$ a z druhé rovnice dopočítáme $t = 1$. Dosadíme-li získané hodnoty do třetí rovnice zjistíme, že
  $0 = 5 + 3 - 3,$
  $0 \neq 5.$

- Soustava nemá řešení, a proto bod K v zadané rovině neleží.

Obecná rovnice roviny

Obecná rovnice roviny je další způsob vyjádření roviny v prostoru. Obecná rovnice roviny v prostoru je podobná obecné rovnici přímky v rovině.

Definice

Rovnice

$ax + by + cz + d = 0$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

*kde alespoň jedno z čísel a, b, c je nenulové, se nazývá **obecná rovnice** roviny.*

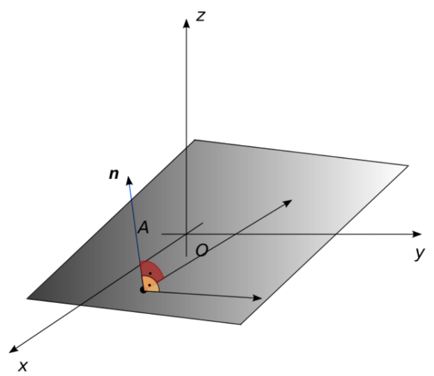
Poznámka

Všechny body $X[x; y; z]$, které splňují nějakou obecnou rovnici roviny tvoří rovinu a naopak každá rovina je určena nějakou obecnou rovnicí.

Z obecné rovnice roviny snadno zjistíme, jaké body v této rovině leží – jsou to všechny ty, jejichž souřadnice tuto rovnici splňují. Zajímavější a složitější bude zjistit, jak pro zadanou rovinu, určíme její obecnou rovnici. Stejně jako v předcházející kapitole, kdy jsme hledali obecnou rovnici přímky, k tomu budeme využívat normálový vektor.

Definice

*Vektor **n**, který je kolmý ke všem vektorům ležícím v rovině, nazýváme **normálovým vektorem** této roviny.*



Obr. 4.3: Normálový vektor roviny

Z definice a *obr. 4.3* plyne, že rovinu můžeme určit jedním bodem a jejím normálovým vektorem. Toho využijeme a vyslovíme následující větu.

Věta

V obecné rovnici $ax + by + cz + d = 0$ roviny δ, určené bodem $P[p_1; p_2; p_3]$ a normálovým vektorem $\boldsymbol{n} = (n_1; n_2; n_3)$, odpovídají koeficienty a, b, c souřadnicím jejího normálového vektoru $\boldsymbol{n}$; $a = n_1$, $b = n_2$ a $c = n_3$.

Důkaz

$\Rightarrow$

Mějme rovinu δ určenou bodem P a normálovým vektorem $\boldsymbol{n} = (n_1; n_2; n_3)$. Každý bod $X[x, y, z]$ roviny δ spolu s bodem $P[p_1; p_2; p_3]$ určuje vektor, který je k normálovému vektoru kolmý. Platí

$\boldsymbol{n}(X - P) = 0.$
Tuto rovnost rozepíšeme v souřadnicích
$n_1(x - p_1) + n_2(y - p_2) + n_3(y - p_3) = 0,$
$n_1x + n_2y + n_3z + (-n_1p_1 - n_2p_2 - n_3p_3) = 0.$
Pokud do této rovnice dosadíme souřadnice libovolného bodu roviny δ, bude splněna. Z toho plyne, že je to obecná rovnice roviny δ s koeficienty $a = n_1$, $b = n_2$, $c = n_3$ a $d = -(n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3)$.

$\Leftarrow$

Opačným postupem bychom ukázali, že rovnice $n_1x + n_2y + n_3z + (-n_1p_1 - n_2p_2 - n_3p_3) = 0$ je obecnou rovnicí roviny určené bodem $P[p_1; p_2; p_3]$ a normálovým vektorem $n = (n_1; n_2; n_3)$.

Úmluva: Rovinu ρ, určenou bodem A s normálovým vektorem $\boldsymbol{n}$, budeme zapisovat jako $\rho(A, \boldsymbol{n})$.

Příklad 4.4

Určete obecnou rovnici roviny ABC, kde $A[2; -2; 1]$, $B[1; -1; 4]$ a $C[0; 0; 1]$.

Řešení

Nejprve určíme normálový vektor této roviny. Ten vypočítáme jako vektorový součin vektorů $\boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{AC}$[30]. $\boldsymbol{AB} = (-1; 1; 3)$, $\boldsymbol{AC} = (-2; 2; 0)$,

$\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC} = (-6; -6; 0).$

Podle předcházející věty tento vektor určuje koeficienty a, b, c obecné rovnice roviny ABC. Ta pak vypadá následovně:

$-6x - 6y + 0z + d = 0.$

Zbývá dopočítat koeficient d. Ten získáme, dosadíme-li do rovnice souřadnice některého z bodů A, B, C. Pro jednoduchost zvolíme bod C a dojdeme k $d = 0$. Hledaná obecná rovnice má tvar:

$-6x - 6y = 0.$

Výslednou rovnici si snadno můžeme ověřit dosazením souřadnic bodů A a B.

Mějme na souřadnicových osách dány body $P[p; 0; 0]$, $Q[0; q; 0]$ a $R[0; 0; r]$, které jsou různé od počátku. Rovina PQR má potom rovnici:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1.$$

---

30 **Nápověda:** Vektor $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, je kolmý k $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$.

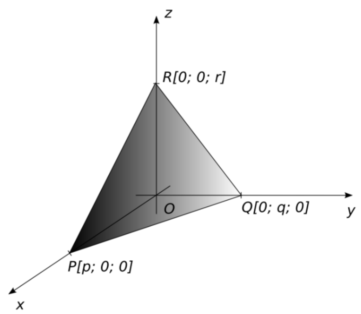
Definice

Rovnice

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1; \; p \cdot q \cdot r \neq 0, \; p, q, r \in \mathbb{R},$$

*se nazývá **úsekový tvar** rovnice roviny.*

Z úsekového tvaru rovnice roviny tedy můžeme velmi jednoduše vyčíst průsečíky roviny se souřadnicovými osami nebo naopak z průsečíků se souřadnicovými osami můžeme snadno zjistit rovnici roviny, která osy v daných bodech protíná.



Obr. 4.4: Průsečíky roviny se souřadnicovými osami

Poznámka

Rovnici roviny v úsekovém tvaru lze psát právě tehdy, když rovina není rovnoběžná s žádnou souřadnicovou osou a neprochází počátkem.

Příklad 4.5

1. Najděte úsekový tvar rovnice roviny: $x = 2 - 2s$, $y = 3 + 3t$, $z = 1 - t - s$; $t, s \in \mathbb{R}$.
2. Převeďte obecnou rovnici roviny: $5x - 8y - 6z + 11 = 0$ na parametrické vyjádření.
3. Určete obecnou rovnici roviny, která je dána parametricky: $x = 2 + 2t - s$, $y = 3 - t + 3s$, $z = -1 - 2t - s$; $s, t \in \mathbb{R}$.

Řešení

1. Úsekový tvar umíme určit z průsečíků roviny se souřadnicovými osami. Ty se pokusíme najít. Průsečík s osou x musí mít y-ovou a z-ovou souřadnici rovnu nule, tedy
   $3 + 3t = 0$,
   $1 - t - s = 0$.
   Z první rovnice přímo vyjádříme $t = -1$. Po dosazení do rovnice druhé dopočítáme $s = 0$. Tyto hodnoty parametrů odpovídají bodu $P[2; 0; 0]$.
   Průsečík s osou y musí mít x-ovou a y-ovou souřadnici rovnu nule, budeme řešit soustavu:
   $2 - 2s = 0$,
   $1 + t - s = 0$.
   Z první rovnice vyjádříme $s = 1$ a po dosazení do rovnice druhé dopočítáme $t = 0$. Hodnotám parametrů $s = 1$, $t = 0$ odpovídá bod $Q[0; 3; 0]$.

Nakonec nalezneme průsečík s osou z. Ten má nulovou x-ovou a y-ovou souřadnici. Vyřešíme soustavu:
$2 - 2s = 0,$
$3 + 3t = 0.$
Tuto soustavu vyřešíme. Jejím řešením je $s = 1$, $t = -1$. To odpovídá bodu $R[0; 0; 1]$. Protože průsečíky se všemi souřadnicovými osami existují, jsou to $P[2; 0; 0]$, $Q[0; 3; 0]$ a $R[0; 0; 1]$, můžeme zapsat úsekový tvar rovnice roviny:
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - z = 1.$$

2. K získání parametrického vyjádření roviny potřebujeme znát jeden její bod a dva vektory, které v ní leží, přičemž jeden nesmí být násobkem druhého. Z obecné rovnice sice vyčteme souřadnice normálového vektoru, ale ty v tomto případě nemůžeme nijak využít. Místo toho využijeme obecnou rovnici roviny k tomu, abychom našli nějaké tři nekolineární body A, B, C této roviny.
   Pro bod A zvolíme $x = 1$, $y = 2$ a dopočítáme z obecné rovnice roviny jeho z-ovou souřadnici, $A[1; 2; 0]$. Podobně určíme body $B[5; 3; 2]$ a $C[1; -1; 4]$. Tyto body jsou nekolineární.
   Pro určení parametrické rovnice roviny použijeme bod A a vektory $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$:
   $\boldsymbol{AB} = (4; 1; 2),$
   $\boldsymbol{AC} = (0; -3; 4).$
   Parametrickou rovnici pak můžeme psát jako:
   $x = 1 + 4t,$
   $y = 2 + t - 3s,$
   $z = 2t + 4s;\ s, t \in \mathbb{R}.$

3. Z parametrického vyjádření můžeme určit souřadnice jednoho bodu roviny a dvou jejích vektorů. Tím bodem je bod $A[2; 3; -1]$ a vektory jsou $\boldsymbol{u} = (2; -1; -2)$, $\boldsymbol{v} = (-1; 3; -1)$. Normálový vektor roviny je kolmý ke všem vektorům roviny a tedy i k vektorům $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. Takovou vlastnost[31] má vektor $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, který vypočítáme:
   $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (2; -1; -2) \times (-1; 3; -1) = (7; 4; 5).$
   Obecnou rovnici roviny můžeme zapsat jako
   $7x + 4y + 5z + \mathrm{d} = 0.$
   Po dosazení souřadnic bodu A do této rovnice dopočítáme $d = -21$. Hledaná obecná rovnice zadané přímky je:
   $7x + 4y + 5z - 21 = 0.$

Vzájemná poloha přímek a rovin

V této kapitole se budeme budeme zabývat vzájemnou polohou přímek a rovin v prostoru.

Vzhledem k tomu, že výpočty s obecnou rovnicí roviny jsou u tohoto typu úloh jednodušší, budeme v následujícím textu používat právě tento způsob vyjádření roviny.

Vzájemná poloha přímek v prostoru

Vzájemnou polohu dvou přímek v rovině jsme zkoumali v předchozí kapitole[32]. V prostoru rozlišujeme čtyři vzájemné polohy dvou přímek p a q.

[31] **Odkaz:** Definice vektorového součinu.

[32] **Odkaz:** Předchozí kapitola Geometrie v rovině – vzájemná poloha dvou přímek.

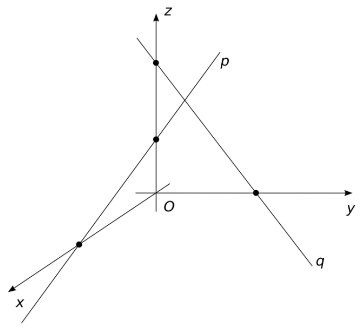
- $p \cap q = \emptyset$
  Pokud přímky p a q nemají žádný společný bod, mohou být **rovnoběžné různé** nebo **mimoběžné**.

  Přímky $p(A, \boldsymbol{u})$ a $q(B, \boldsymbol{v})$ jsou **rovnoběné různé**, pokud nemají žádný společný bod a $\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{v}$, pro nějaké $k \in \mathbb{R}$.

  Přímky jsou **mimoběžné**, pokud nemají žádný společný bod a zároveň nejsou rovnoběžné. Tato vzájemná poloha přímek nemůže nastat v rovině. Zapisujeme $p \not\parallel q$.

- $p \cap q = \{P\}$
  Přímky p a q jsou **různoběžné**, mají jeden společný bod P. Zapisujeme $p \times q$.

- $p \cap q = p$
  Přímky p a q jsou **totožné**. Zapisujeme $p = q$.



Obr. 4.5: Mimoběžky

Poznámka

Totožnost přímek je speciální případ rovnoběžnosti. Tj. dvě totožné přímky jsou i rovnoběžné, ale dvě rovnoběžné přímky nemusí být totožné.

Úmluva: Rovnoběžnost přímek p a q budeme značit jako $p \parallel q$. Nadále budeme jako rovnoběžné přímky označovat přímky rovnoběžné různé i přímky totožné. Bude-li potřeba polohy rozlišit, použije se příslušný pojem.

Samotný postup, kterým řešíme vzájemnou polohu dvou přímek v prostoru, je téměř stejný jako ten, který jsme používali v rovině. Je třeba si uvědomit, že přímka je v prostoru zadána jen parametricky a od toho se musí odvíjet i naše řešení.

Příklad 4.6

Určete vzájemnou polohu přímek $p(A, \boldsymbol{u})$ a $q(B, \boldsymbol{v})$, je-li $A[1; 3; 5]$, $B[-1; -2; 2]$, $\boldsymbol{u} = (2; 1; 1)$ a $\boldsymbol{v} =$ $= (-1; 2; 1)$.

Řešení

Podíváme-li se na směrové vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ zadaných přímek, vidíme, že vektor $\boldsymbol{u}$ není násobkem vektoru $\boldsymbol{v}$. To napovídá, že přímky p a q jsou buď různoběžné, nebo mimoběžné. Pokud jsou mimoběžné, nemají žádný společný bod, pokud jsou různoběžné, mají společný bod jeden.

Hledáme společné body přímek p a q:

p:	q:
$x = 1 + 2t,$	$x = -1 - s,$
$y = 3 - 2t,$	$y = -2 + 2s,$
$z = 5 + t;\ t \in \mathbb{R}.$	$z = 2 + s;\ s \in \mathbb{R}.$

Abychom určili společné body p a q, musíme vyřešit soustavu rovnic:

$1 + 2t = -1 - s,$
$3 - 2t = -2 + 2s,$
$5 + t = 2 + s.$

Z druhé rovnice vyjádříme $t = -5 + 2s$. Dosadíme za t do třetí rovnice a vypočítáme $s = 2$ a zpětně potom $t = -1$. Spočtené hodnoty parametrů s a t dosadíme zpět do první rovnice:

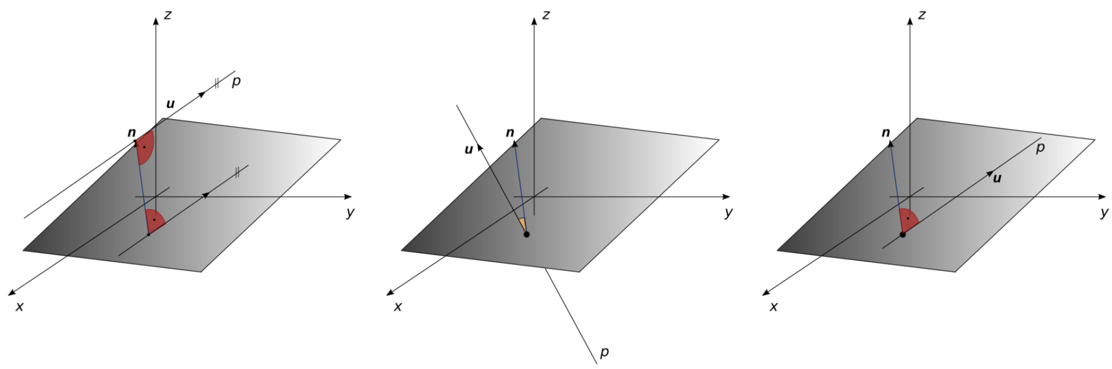
$1 - 2 = -1 - 2,$
$-1 \neq -3.$

Protože soustava nemá žádné řešení, znamená to, že přímky p a q nemají žádný společný bod. To s přihlédnutím k úvaze na začátku řešení znamená, že přímky p a q jsou mimoběžné.

Vzájemná poloha přímky a roviny

V prostoru rozlišujeme tři možné vzájemné polohy roviny ρ a přímky p.

- $p \cap \rho = \emptyset$
  Přímka p je s rovinou ρ **rovnoběžná různá**. Přímka a rovina nemají žádný společný bod.
- $p \cap \rho = \{P\}$
  Přímka p a rovina ρ jsou **různoběžné**. Přímka rovinu protíná v jednom bodě, bodě P. Zapisujeme $p \times \rho$.
- $p \cap \rho = p$
  Přímka p **leží v** rovině ρ. Společnými body jsou všechny body přímky p. Zapisujeme $p \subset \rho$.



Obr. 4.6: Vzájemná poloha přímky a roviny

Poznámka

Poloha, kdy přímka leží v rovině je speciální případ jejich rovnoběžnosti. Tj. přímky, která leží v rovině je s ní i rovnoběžná, ale přímka rovnoběžná s rovinou v ní nemusí ležet.

Úmluva: Rovnoběžnost přímky p a roviny ρ budeme značit jako $p \parallel \rho$. Nadále budeme jako přímky rovnoběžné s rovinou označovat přímky, které jsou s ní rovnoběžné různé i přímky, které v ní leží. Bude-li potřeba polohy rozlišit, použije se příslušný pojem.

Z *obr 4.6* je vidět, že vzájemná poloha závisí na vztahu normálového vektoru roviny a směrového vektoru přímky. Pokud jsou tyto na sebe kolmé, je přímka s rovinou rovnoběžná. Jestliže kolmé nejsou, přímka a rovina jsou různoběžné.

Pokud je přímka s rovinou rovnoběžná, je třeba zjistit, zda přímka v rovině náhodou neleží. Zvolíme jeden bod přímky a zkoumáme, zda v rovině leží, nebo neleží. Pokud ano, tak celá přímka leží v rovině, pokud ne, tak je přímka s rovinou rovnoběžná různá.

Příklad 4.7

Určete vzájemnou polohu přímky $p(A, \boldsymbol{u})$ a roviny δ určené bodem B a jejím normálovým vektorem $\boldsymbol{n}$, je-li $A[1; 4; 2]$, $B[4; 1; 0]$, $\boldsymbol{u} = (1; 1; 2)$ a $\boldsymbol{n} = (1; -1; 2)$. Jsou-li různoběžné, najděte jejich průsečík.

Řešení

Nejprve zkontrolujeme, zda je vektor $\boldsymbol{u}$ kolmý na vektor $\boldsymbol{n}$:

$\boldsymbol{un} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 4.$

Vektor $\boldsymbol{u}$ není na $\boldsymbol{v}$ kolmý a to znamená, že přímka $p \times \delta$. Má smysl hledat jejich průsečík. Určíme parametrickou rovnici přímky[33] p a obecnou rovnici roviny[34] δ.

p:	δ:
$x = 1 + t,$	$x - y + 2z - 3 = 0.$
$y = 4 + t,$	
$z = 2 + 2t;\ t \in \mathbb{R}.$	

Do obecné rovnice roviny δ, dosadíme, za x, y, z vztahy z parametrické rovnice přímky p:

$(1 + t) - (4 + t) + 2(2 + 2t) - 3 = 0,$

$1 + t - 4 - t + 4 + 4t - 3 = 0,$

$4t = 2,$

$t = ½.$

To je hodnota parametru t odpovídající průsečíku P roviny δ a přímky p. Dosadíme-li do parametrické rovnice přímky $t = ½$, vypočítáme jeho souřadnice. Rovina δ a přímka p jsou různoběžné a jejich průsečíkem je bod $P[3/2; 9/2; 3]$.

Úloha

Určete vzájemnou polohu přímky $p(A, \boldsymbol{u})$ a roviny xy [35], je-li $A[1; 2; 1]$ a $\boldsymbol{u} = (2; -1; 0)$.

---

[33] **Odkaz:** Parametrická rovnice přímky.

[34] **Odkaz:** Obecná rovnice roviny.

[35] **Nápověda:** Rovina xy je rovina určená souřadnicovými osami x a y.

Řešení

- Nejprve zkontrolujeme, zda je vektor $\boldsymbol{u}$ kolmý na normálový vektor roviny xy – například $\boldsymbol{n} =$ $= (0; 0; 2)$:
  $\boldsymbol{un} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 0$.

- To znamená, že přímka p, je s rovinou xy rovnoběžná. Zkusíme do obecné rovnice roviny xy:
  $z = 0$
  dosadit souřadnice bodu A, abychom zjistili, zda v ní bod A leží. Získáme
  $1 = 0$.
  To neplatí a bod A tedy neleží v rovině xy.

- Přímka p a rovina xy jsou rovnoběžné různé.

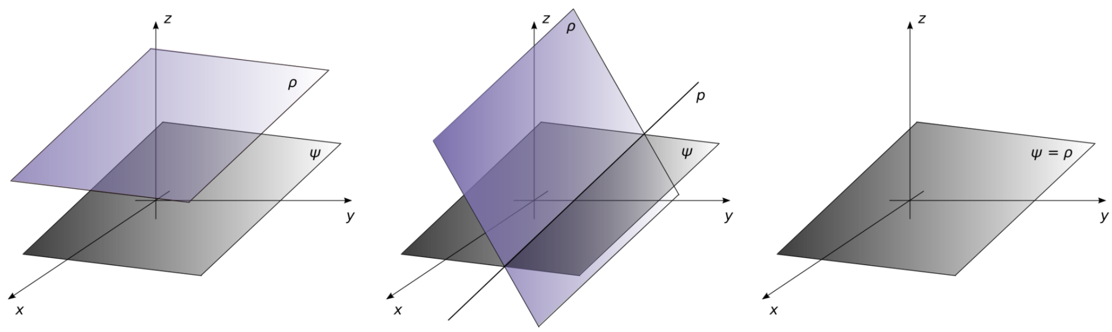
Vzájemná poloha dvou rovin

Hledání vzájemné polohy dvou rovin v prostoru je téměř shodné s hledáním vzájemné polohy dvou přímek v rovině, když jsou tyto určené obecnými rovnicemi. Vzájemné polohy dvou rovin ρ a ψ jsou stejné jako u přímek v rovině.

- $\rho \cap \psi = \emptyset$
  Roviny ρ a ψ jsou **rovnoběžné různé**. Nemají žádný společný bod.

- $\rho \cap \psi = p$
  Roviny ρ a ψ jsou **různoběžné**. Jejich průnikem je přímka p, kterou nazýváme **průsečnice**. Zapisujeme $\rho \times \psi$.

- $\rho \cap \psi = \rho$
  Roviny jsou **totožné**. Zapisujeme $\rho = \psi$.



Obr. 4.7: Vzájemná poloha dvou rovin

Poznámka

Totožnost rovin je speciální případ rovnoběžnosti. Tj. dvě totožné roviny jsou i rovnoběžné, ale dvě rovnoběžné roviny nemusí být totožné.

Úmluva: Rovnoběžnost rovin ρ a ψ budeme značit jako $\rho \parallel \psi$. Nadále budeme jako roviny rovnoběžné označovat roviny, které jsou rovnoběžné různé i totožné. Bude-li potřeba polohy rozlišit, použije se příslušný pojem.

Příklad 4.8

Určete vzájemnou polohu rovin ρ: $x - y + z = 0$ a σ: $2x - 3y + z - 1 = 0$. Jsou-li různoběžné, určete jejich průsečnici.

Řešení

Nejprve zjistíme, zda jsou roviny ρ a σ rovnoběžné, nebo různoběžné. Určíme normálový vektor roviny ρ, $\boldsymbol{n_\rho} = (1; -1; 1)$ a normálový vektor roviny σ, $\boldsymbol{n_\sigma} = (2; -3; 1)$. Je vidět, že $\boldsymbol{n_\rho}$ není násobkem $\boldsymbol{n_\sigma}$, a proto $\rho \times \sigma$. Má tedy smysl hledat jejich průsečnici. Řešíme soustavu dvou rovnic o třech neznámých:

$x - y + z = 0,$

$2x - 3y + z = 1.$

Jednu z neznámých si zvolíme za parametr. Neznámou, kterou zvolíme za parametr musíme vybrat obezřetně, abychom mohli vypočítat zbylé proměnné. Kdyby například rovnice roviny σ byla $2x - 2y + z - 1 = 0$ a my položili $z = t$, měli bychom problém, protože bychom soustavu nemohli dopočítat.

V našem příkladě položíme $x = t$ a vypočítáme soustavu:

$t - y + z = 0,$

$2t - 3y + z = 1.$

Z první rovnice vyjádříme $z = y - t$ a dosadíme do druhé rovnice:

$2t - 3y + y - t = 1,$

$-2y = 1 - t,$

$y = \frac{1 - t}{2}.$

Zpětně dopočítáme $z = \frac{1 - t}{2} - t = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t.$

Zvolený parametr t, je zároveň parametrem v rovnici průsečnice p rovin ρ a σ.

p:

$x = t,$

$y = \frac{1}{2} - \frac{t}{2},$

$z = \frac{1}{2} - \frac{3t}{2};\ t \in \mathbb{R}.$

Shrnutí

Při zkoumání vzájemných poloh různých objektů v rovině můžete postupovat podle tohoto návodu. Budeme zkoumat vzájemnou polohu:

- Bodu $A[a_1; a_2; a_3]$;
- přímky $p(P, \boldsymbol{u})$; $P[p_1; p_2; p_3]$, $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$;
- přímky $q(Q, \boldsymbol{v})$; $Q[q_1; q_2; q_3]$, $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; v_3)$;

- roviny ρ: $ax + by + cz + d = 0$;
- roviny σ: $ex + fy + gz + h = 0$.

Vyber zkoumané objekty:		přímka p	přímka q
Odpovězte na následující otázku:	Je $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{u}$?	◉ Ano	○ Ne
Odpovězte na následující otázku:	Je $Q - P = r\boldsymbol{u}$?	○ Ano	◉ Ne
Řešení:	$p \parallel q \wedge p \neq q$.		

Odchylka přímek a rovin

Odchylka dvou přímek

Definice

Odchylka přímek *$p(P, \boldsymbol{u})$, $q(Q, \boldsymbol{v})$ je číslo $\varphi \in \langle 0, \pi/2\rangle$, pro které platí:*

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{uv}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}.$$

Úloha

Spočítejte odchylku dvou přímek $p(A; \boldsymbol{u})$ a $q(B; \boldsymbol{v})$, je-li $A[a_1; a_2; a_3]$, $B[b_1; b_2; b_3]$, $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; v_3)$.

Skript automaticky generující úlohy i řešení.

Odchylka přímky a roviny

Odchylku přímky a roviny nepočítáme přímo, ale využijeme znalostí, které již máme.

Definice

Je-li přímka p kolmá k rovině ρ, je jejich vzájemná **odchylka** $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Není-li přímka p kolmá k rovině ρ, je jejich **odchylka** rovna odchylce přímky p a průsečnice p' rovin ρ a ψ, kde $p \in \psi$ a $\rho \perp \psi$.

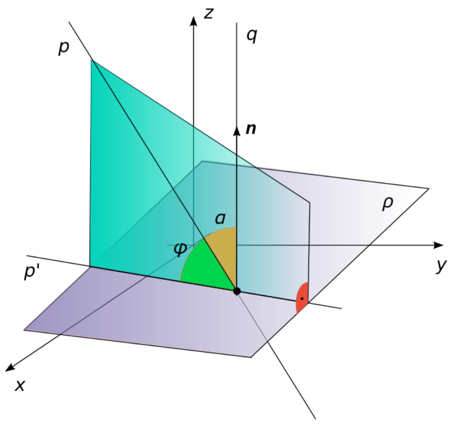
Poznámka

Ještě jednodušší je, sestrojit kolmici q k rovině ρ a počítat odchylku α přímek p a q. Vztah mezi hledanou a získanou odchylkou je:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Pro výpočet odchylky φ přímky $p(A, \boldsymbol{u})$ a roviny $\rho(B, \boldsymbol{n})$ můžeme použít vzorec:

$$\sin\varphi = \cos\alpha = \frac{|\boldsymbol{un}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}, \ \varphi \in <0°; 90°>.$$



Obr. 4.8: Odchylka přímky a roviny

Úloha

Spočítejte odchylku přímky $p(A;\ \boldsymbol{u})$ a roviny ρ: $ax + by + cz + d = 0$, je-li $A[a_1;\ a_2;\ a_3]$, a $\boldsymbol{u} =$ $= (u_1;\ u_2;\ u_3)$.

Skript automaticky generující úlohy i řešení.

Odchylka rovin

Definice

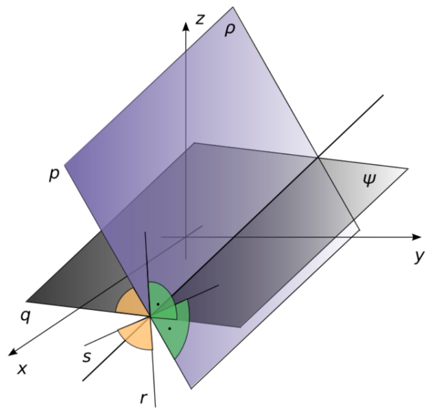
Odchylka *dvou rovin ρ a ψ, je rovna odchylce přímek p a q, pro které platí $p = (\rho \cap \sigma)$, $q = (\psi \cap \sigma)$, kde σ je rovina kolmá na ρ i ψ.*

Slovy bychom výše uvedenou definici mohli rozepsat takto:

Odchylku φ dvou rovin ρ a ψ, vypočítáme následujícím způsobem. Nejprve najdeme rovinu, která je k oběma kolmá[36]. Tato rovina protne roviny ρ a ψ v přímkách p a q. Odchylka φ rovin ρ a ψ je rovna odchylce přímek p a q.

Podobně jako když jsme hledali odchylku přímky a roviny, můžeme využít normálových vektorů rovin ρ a ψ. Na *obr. 4.9* je vidět, že přímky r a s svírají úhel stejné velikosti jako p a q. Odchylku dvou rovin můžeme tedy snadno určit pomocí jejich normálových vektorů.

[36] **Nápověda:** Je kolmá k jejich průsečnici.



Obr. 4.9: Odchylka dvou rovin

Poznámka

Pro výpočet odchylky φ dvou rovin $\rho(A, \boldsymbol{n_\rho})$ a $\psi(B, \boldsymbol{n_\psi})$ můžeme použít vzorec vyplývající z předchozí úvahy:

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{n}_\rho \boldsymbol{n}_\psi|}{|\boldsymbol{n}_\rho||\boldsymbol{n}_\psi|}, \ \varphi \in \langle 0°; 90° \rangle.$$

Úloha

Spočítejte odchylku rovin ρ: $ax + by + cz + d = 0$ a σ: $ex + fy + gz + h = 0$.

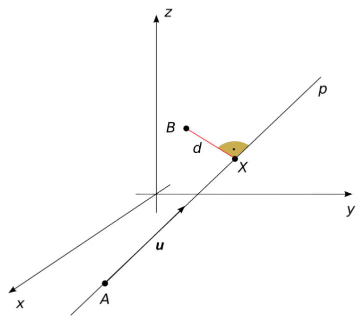
Skript automaticky generující úlohy i řešení.

Vzdálenost

V rovině jsme počítali vzdálenost bodu od přímky a vzdálenost dvou přímek. V prostoru se naučíme řešit tytéž úlohy a navíc budeme počítat vzdálenost bodu od roviny a vzdálenost dvou rovin.

Vzdálenost bodu od přímky

Mějme zadánu přímku $p(A, \boldsymbol{u})$ a bod B. Hledáme vzdálenost d bodu B od přímky p viz *obr. 4.10*.



Obr. 4.10: Vzdálenost bodu od přímky

Najdeme takový bod X přímky p, pro který platí $(B - X)\boldsymbol{u} = 0$. Že to musí platit je zřejmé z obrázku a je i vidět, že takový bod je jen jeden. Vzdálenost bodu B od přímky p je potom rovna $|XB|$.

Úmluva: Stejně jako v rovině budeme vzdálenost bodu B od přímky p značit $|Bp|$.

Příklad 4.9

Určete vzdálenost bodu B od přímky $p(A, \mathrm{u})$, je-li $A[3; 0; -1]$, $B[1; 2; 1]$ a $\boldsymbol{u} = (-1; 0; 1)$.

Řešení

Jak jsme si vysvětlili, hledáme nejprve bod $X[x; y; z]$, který bude ležet na přímce p a pro který platí, $(B - X)\boldsymbol{u} = 0$. Protože bod X leží na přímce p, můžeme s využitím jejího parametrického vyjádření jeho souřadnice zapsat jako:

$x = 3 - t,$

$y = 0,$

$z = -1 + t,$

pro nějakou hodnotu parametru t. Vyjádříme druhou podmínku, $(B - X)\boldsymbol{u} = 0$:

$(1 - 3 + t)\cdot(-1) + (2 - 0)\cdot 0 + (1 + 1 - t)\cdot 1 = 0,$

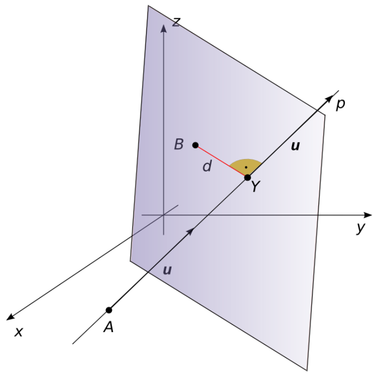
$2 - t + 2 - t = 0,$

$t = 2.$

Zjistili jsme, že bod X má souřadnice $X[1; 0; 1]$. Vzdálenost d, bodu B od přímky p, je rovna

$d = |Bp| = |XB| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2} = 2.$

Celý příklad by se dal řešit ještě jinak. Bodem B můžeme vést rovinu kolmou na přímku p. Ta přímku p protne v nějakém bodě Y. Vzdálenost $|BY|$ je vzdálenost bodu B od přímky p.



Obr. 4.11: Řešení příkladu 4.9

Normálový vektor roviny kolmé na přímku p je směrovým vektorem přímky p, tedy $\boldsymbol{u} = (-1; 0; 1)$. Její obecná rovnice je $-x + z + d = 0$. Koeficient d určíme po dosazení souřadnic bodu B do této rovnice, $d = 0$. Hledáme bod Y, který je průsečíkem roviny $-x + z = 0$ a přímky p:

$-(3 - t) + (-1 + t) = 0,$

$-3 + t - 1 + t = 0,$

$2t - 4 = 0,$

$t = 2.$

Bod Y má souřadnice $Y[1; 0; 1]$. Všiměte si, že body X a Y jsou ve skutečnosti jeden a tentýž bod:

$d = |YB| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2} = 2.$

Vzdálenost bodu od roviny

Pro určení vzdálenosti bodu od roviny můžeme využít následující vzorec.

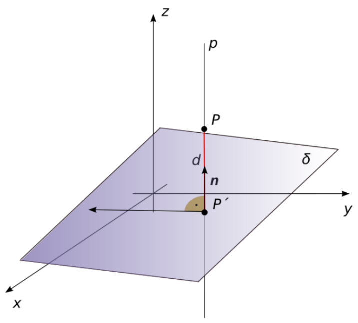
Věta

Vzdálenost d bodu $P[p_1; p_2; p_3]$ od roviny δ: $ax + by + cz + e = 0$ je vyjádřena vzorcem:

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Důkaz

Důkaz této věty provedeme vlastně vyřešením obecného případu, kde hledáme vzdálenost bodu od roviny.



Na obrázku vidíme, jak máme vzdálenost bodu od roviny hledat. Bodem P vedeme kolmici k rovině δ a její průsečík s rovinou označíme jako P'. Vzdálenost bodů P a P' je rovna vzdálenosti bodu P od roviny δ. Kolmici procházející bodem P si označíme jako p a můžeme ji vyjádřit takto:

p:

$x = p_1 + ta,$

$y = p_2 + tb,$

$z = p_3 + tc;\ t \in \mathbb{R}.$

Tato parametrická rovnice odpovídá zadání přímky p. Ta prochází bodem P a zároveň je kolmá na δ, tedy jejím směrovým vektorem je normálový vektor roviny δ; $\boldsymbol{n_\delta} = (a;\ b;\ c)$. *Hledáme průsečík P'. Do obecné rovnice δ dosadíme za x, y, z jednotlivá vyjádření, z parametrického vyjádření přímky p.*

$P' = p \cap \delta$:

$a(p_1 + ta) + b(p_2 + tb) + c(p_3 + tc) + e = 0,$

$ap_1 + ta_2 + bp_2 + tb_2 + cp_3 + tc_2 + e = 0,$

$t(a_2 + b_2 + c_2) = -ap_1 - bp_2 - cp_3 - e,$

$$t = \frac{-ap_1 - bp_2 - cp_3 - e}{(a^2 + b^2 + c^2)}. \quad \textbf{(4.1)}$$

Po dosazení této hodnoty t do rovnice přímky p získáme souřadnice bodu P'. Zbývá jen dopočítat vzdálenost bodu P a P':

$$|PP'| = \sqrt{(p_1 + ta - p_1)^2 + (p_2 + tb - p_2)^2 + (p_3 + tc - p_3)^2},$$

kde t je námi vypočítaná hodnota.

$$|PP'| = \sqrt{t^2a^2 + t^2b^2 + t^2c^2} = \sqrt{t^2(a^2 + b^2 + c^2)} = |t|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Pro t získané z ***(4.1)*** *je vzdálenost P a P' rovna*

$$|PP'| = \frac{|-ap_1 - bp_2 - cp_3 - e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Úmluva: Vzdálenost bodu B od roviny ρ budeme značit $|B\rho|$.

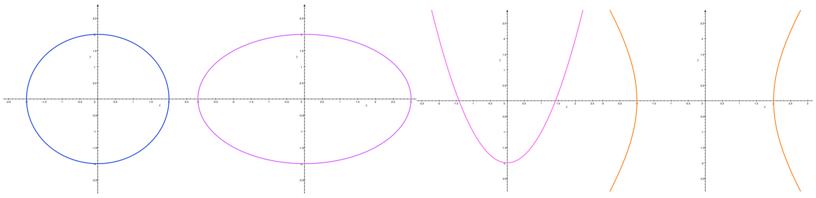
Úloha

Spočítejte vzdálenost bodu $B[b_1; b_2; b_3]$ od roviny φ: $ax + by + cz + d = 0$.

Skript automaticky generující úlohy i řešení.

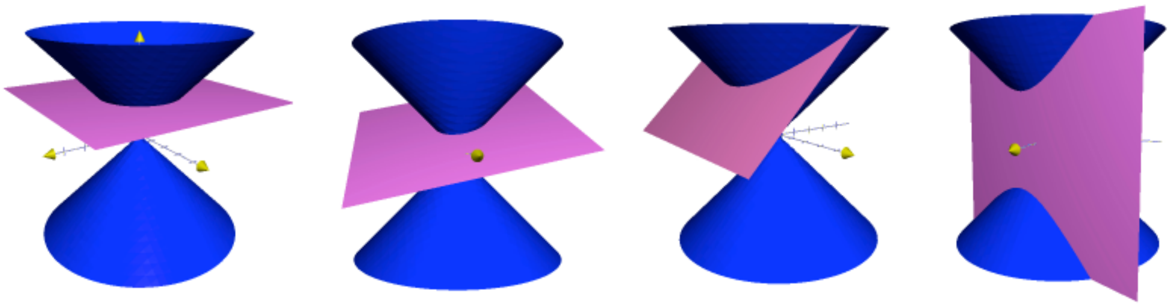
Kuželosečky

V předchozích kapitolách jsme se naučili vyjadřovat základní geometrické útvary rovnicemi a řešit s nimi různé úlohy. Svět geometrie ale nejsou jen přímky, úsečky, vektory atd. V rovině kromě přímek existují i další křivky a v prostoru jsou i jiné plochy než jen roviny. V této kapitole se budeme zabývat křivkami, které se souhrnně nazývají **kuželosečky**. Jsou to kružnice, elipsa, parabola a hyperbola. Ukážeme si, jak je lze matematicky vyjádřit a naučíme se řešit další úlohy.



Obr. 5.1: Kuželosečky – kružnice, elipsa, parabola, hyperbola

Kuželosečky, jak již název napovídá, mají společný původ. Získáme je jako řez rotační kuželové plochy[37] rovinou.



Obr. 5.2: Kuželosečky jako řezy kuželové plochy rovinou – kružnice, elipsa, parabola, hyperbola

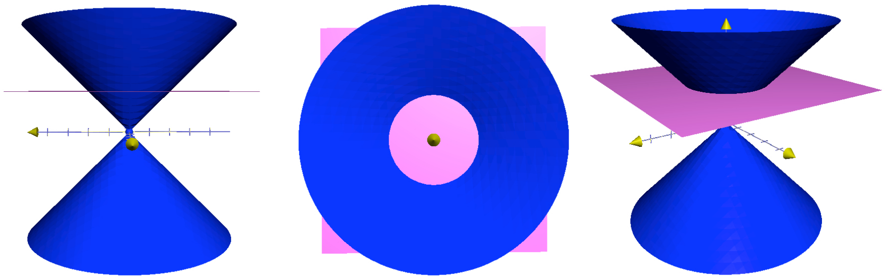
Poznámka

Za jistých okolností může být průnikem roviny a kuželové plochy bod, přímka nebo dvě přímky. Tyto útvary se proto někdy označují jako **singulární** kuželosečky. Kružnice, elipsa, parabola a hyperbola jsou potom označovány jako kuželosečky **regulární**.

Kružnice

Kružnice je z kuželoseček nejjednodušší a asi i nejznámější, pokud neuvažujeme ty singulární. Vznikne řezem rotační kuželové plochy rovinou kolmou na osu rotace, která neprochází vrcholem. Jinak se dá kružnice zavést jako množina všech bodů dané vlastnosti.

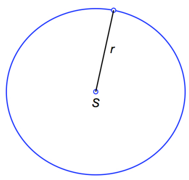
[37] **Nápověda:** Rotační kuželová plocha je množina bodů v prostoru, která vznikne z rotačního kužele tím, že odstraníme podstavu a každou úsečku pláště (tj. spojnici vrcholu kužele s bodem hranice podstavy) prodloužíme na přímku. Tyto přímky se nazývají řídící přímky kuželové plochy.



Obr. 5.3: Kružnice jako řez kuželové plochy rovinou

Definice

Kružnice *je množina všech bodů roviny, které mají od daného bodu,* ***středu*** *kružnice, danou vzdálenost,* ***poloměr*** *kružnice.*



Obr. 5.4: Charakteristiky kružnice

Poznámka

Kružnici s nulovým poloměrem tvoří jediný bod – její střed.

Definice

Rovnice $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ *se nazývá* ***středovou rovnicí*** *kružnice se středem* $S[m; n]$ *a poloměrem* r.

Definice

Středovou rovnici kružnice upravenou do tvaru $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0$, kde $p = m^2 + n^2 - r^2$, nazýváme **obecnou rovnicí** kružnice.

Příklad 5.1

Najděte středovou a obecnou rovnici kružnice se středem $S[3; 5]$ a poloměrem $r = 2$.

Řešení
Středovou rovnici můžeme zapsat přímo podle definice:

$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 2^2.$

Obecnou rovnici získáme rozepsáním mocnin:

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 4,$
$x^2 - 6x + y^2 - 10y + 30 = 0.$

Poznámka
Ne každá rovnice ve tvaru $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0$ je rovnicí kružnice.

Pokud v rovnici doplníme výrazy $x^2 - 2mx$ a $y^2 - 2ny$ na druhé mocniny dvojčlenů, můžeme ji vyjádřit jako $(x-m)^2 - m^2 + (y-n)^2 - n^2 + p = 0$. To je po úpravě

$(x-m)^2 + (y-n)^2 = m^2 + n^2 - p.$

Je vidět, že o kružnici se jedná jen v případě, že $p \geq m^2 + n^2$.

Pokud je $p = m^2 + n^2$, rovnici splňují souřadnice jediného bodu, tj. kružnice má nulový poloměr.

Je-li $p < m^2 + n^2$, rovnice nemá žádné řešení, tj. rovnici nevyhovuje žádný bod.

Příklad 5.2
Určete střed a poloměr kružnice dané rovnicí $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 11 = 0$.

Řešení
Doplníme výrazy $x^2 - 2x$ a $y^2 + 4y$ na druhé mocniny dvojčlenů $x - 1$ a $y + 2$:

$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 1 - 4 - 11 = 0,$
$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 16 = 0,$
$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16.$

Střed zadané kružnice je bod $S[1; -2]$ a její poloměr $r = 4$.

Příklad 5.3
Zjistěte, zda body $A[2; 1]$, $B[2; 5]$, $C[4; 5]$ a $D[-1; 2]$ leží na stejné kružnici.

Řešení
Hledaná kružnice se středem $S[m; n]$ a poloměrem r má středovou rovnici:

$(x-m)^2 + (y-n)^2 = \mathrm{r}^2.$

Tři nekolineární body[38] jednoznačně určují kružnici. My využijeme souřadnic bodů A, B, C, které nekolineární jsou, a dosadíme je do obecné rovnice hledané kružnice. Získáme tři rovnice o třech neznámých:

$(2-m)^2 + (1-n)^2 = r^2,$
$(2-m)^2 + (5-n)^2 = r^2,$
$(4-m)^2 + (5-n)^2 = r^2.$

[38] **Nápověda:** Tři body, které neleží na jedné přímce.

Z první a druhé rovnice vyjádříme hodnotu neznámé n:

$(2 - m)^2 + (1 - n)^2 = (2 - m)^2 + (5 - n)^2$,
$(1 - n)^2 = (5 - n)^2$,
$1 - 2n + n^2 = 25 - 10n + n^2$,
$n = 3$.

Obdobným způsobem z druhé a třetí rovnice můžeme vyjádřit $m = 3$. Dosadíme-li získané hodnoty m a n zpět do první rovnice, dopočítáme $r^2 = 5$. Středová rovnice kružnice, určené body A, B a C, je:

$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

Můžeme si to ověřit dosazením souřadnic bodů A, B, C do této rovnice – vždy musí být splněna. Zkusíme-li dosadit souřadnice bodu D, zjistíme, že získaná rovnost neplatí:

$(-1 - 3)^2 + (2 - 3)^2 = 5$,
$17 \neq 5$.

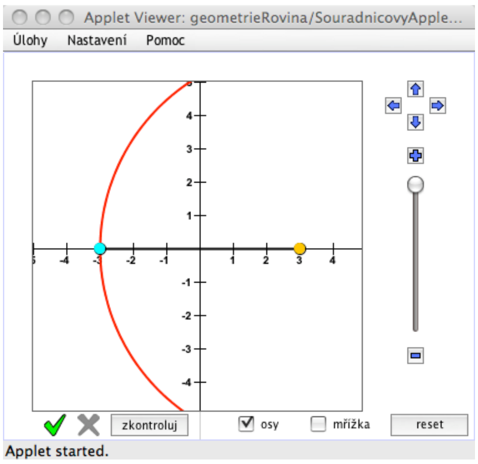
To znamená, že bod D neleží na stejné kružnici jako body A, B a C.

Příklad 5.4
Vypočítejte vzdálenost bodu $X[1; 6]$ od středu kružnice $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 10 = 0$.

Řešení
Nejsnadněji souřadnice středu kružnice zjistíme z její středové rovnice. Budeme proto postupovat podobně jako v *příkladě 5.2*[39].

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 - 4 - 1 + 10 = 0$,
$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + 5 = 0$,
$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = -5$.

Protože levá strana rovnice bude vždy nezáporná a pravá je rovna zápornému číslu, je zřejmé, že rovnice nemá žádné reálné řešení a neurčuje proto kružnici. Vzhledem k tomu, že rovnice neurčuje kružnici, nemá smysl v řešení tohoto příkladu pokračovat.



[39] **Odkaz:** Příklad 5.2.

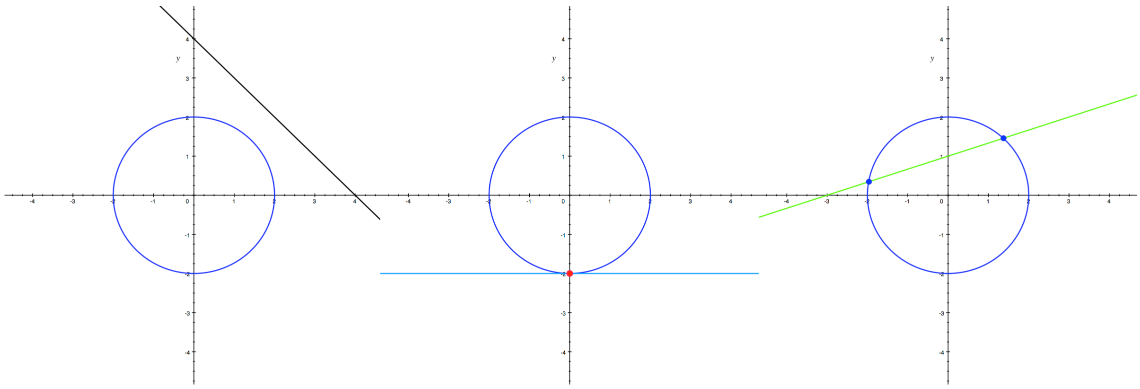
Vzájemná poloha kružnice a přímky

V rovině mohou nastat tři různé vzájemné polohy kružnice k a přímky p. Podobně jako u vzájemné polohy dvou přímek je rozlišujeme podle toho, kolik mají společných bodů. Mohou nastat tyto případy: nemají žádný společný bod, mají jeden společný bod nebo mají dva společné body.

- $p \cap k = \emptyset$
  Přímka p leží vně kružnice k a nazýváme ji **vnější přímka** kružnice.

- $p \cap k = \{P\}$
  Přímka p se kružnice k dotýká v bodě P. Přímku p nazýváme **tečnou** kružnice k.

- $p \cap k = \{X, Y\}$
  Přímka kružnici protíná v bodech X a Y. Přímku p nazýváme **sečnou** kružnice k.



Obr. 5.5: Vzájemná poloha přímky a kružnice

Příklad 5.5

Najděte průsečíky přímky $p(A, \boldsymbol{u})$ a kružnice $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$, je-li $A[-1; 4]$ a $\boldsymbol{u} = (1; -1)$.

Řešení

Parametricky vyjádříme přímku p.

p:

$x = -1 + t,$

$y = 4 - t;\ t \in \mathbb{R}.$

Průsečík kružnice a přímky je bod $P[x; y]$, jehož souřadnice splňují jak středovou rovnici kružnice, tak pro nějakou hodnotu parametru t i parametrické vyjádření přímky p. Do středové rovnice kružnice dosadíme souřadnice x a y vyjádřené v parametrické rovnici přímky p. Získáme následující kvadratickou rovnici:

$(-1 + t - 3)^2 + (4 - t - 2)^2 = 4.$

To můžeme upravit až na

$t^2 - 6t + 8 = 0$

Podle diskriminantu D této rovnice rozhodneme, jaká je vzájemná poloha dané přímky a kružnice.

Je-li $D < 0$, rovnice nemá v $\mathbb{R}$ řešení a přímka p je vnější přímkou kružnice.

Je-li $D = 0$, rovnice má jedno (dvojnásobné) řešení a přímka p je tečnou kružnice.

Nakonec, je-li $D > 0$, rovnice má dvě řešení a přímka p je sečnou kružnice.

V našem případě je $D = 4$ a rovnice má dvě řešení: $t_1 = 4$ a $t_2 = 2$. Tyto dvě hodnoty parametru dosadíme do parametrické rovnice přímky p a získáme souřadnice bodů $P_1[3; 0]$ a $P_2[1; 2]$, které jsou hledanými průsečíky.

Úloha

Určete vzájemnou polohu přímky p: $x - y + 5 = 0$ a kružnice k: $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 1 = 0$.

Řešení

- Z obecné rovnice přímky p vyjádříme neznámou x:
  $x = y - 5$. **(5.1)**
- Vyjádřenou neznámou x dosadíme do obecné rovnice kružnice a řešíme kvadratickou rovnici:
  $(y - 5)^2 + 2(y - 5) + y^2 - 4y + 1 = 0,$
  $y^2 - 10y + 25 + 2y - 10 + y^2 - 4y + 1 = 0,$
  $y^2 - 6y + 8 = 0,$
  $y_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 8}}{2} = \dfrac{6 \pm 2}{2},$
  $y_1 = 4, y_2 = 2.$
- Pro hodnoty y_1 a y_2 dopočítáme z **(5.1)** příslušné x_1 a x_2. Hledané průsečíky jsou body $P_1[-1; 4]$ a $P_2[-3; 2]$.

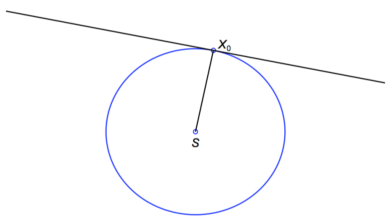
Bodem $X_0[x_0; y_0]$, který leží na kružnici můžeme vést nekonečně mnoho sečen, žádnou vnější přímku a právě jednu tečnu této kružnice. Jak nalézt její rovnici nám řekne následující věta.

Věta

Rovnice $(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2$, je rovnicí tečny ke kružnici se středem $S[m; n]$ a poloměrem r v bodě $X_0[x_0; y_0]$.

Důkaz

Je vidět, že rovnice $(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2$ je obecnou rovnicí přímky s normálovým vektorem $(x_0 - m; y_0 - n)$. Tečna ke kružnici v bodě $X_0[x_0; y_0]$ musí být kolmá na vektor ***SX₀*** *a to naše přímka splňuje, protože vektor* ***SX₀*** *je jejím normálovým vektorem.*



Zbývá ověřit, že X_0 na této přímce leží. Do rovnice přímky dosadíme souřadnice bodu X_0 a získáme $(x_0 - m)^2 + (y_0 - n)^2 = r^2$. To platí, protože víme, že bod X_0 leží na kružnici $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$.

Příklad 5.6

Najděte rovnici tečny kružnice $x^2 - 2x + y^2 - 4y - 20 = 0$ v jejím bodě $T[4; -2]$.

Řešení

Z předchozí věty víme, jak ze středové rovnice kružnice jednoduše určíme rovnici její tečny v nějakém bodě. Doplníme tedy výrazy $x^2 - 2x$ a $y^2 - 4y$ na druhé mocniny dvojčlenů $x - 1$ a $y - 2$ a určíme její středovou rovnici:

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25.$

Rovnice tečny v bodě $X[x_0; y_0]$ má podle výše uvedené věty tvar:

$(x - 1)(x_0 - 1) + (y - 2)(y_0 - 2) = 25.$

Abychom získali rovnici tečny v bodě T, stačí za x_0 a y_0 dosadit souřadnice bodu T.

$(x - 1)(4 - 1) + (y - 2)(-2 - 2) = 25,$
$3(x - 1) + (-4)(y - 2) = 25,$
$3x - 3 - 4y + 8 = 25,$
$3x - 4y - 20 = 0.$

Příklad 5.7

Napište rovnici tečny ke kružnici $x^2 - 6x + y^2 - 4y - 5 = 0$, která je rovnoběžná s přímkou p: $x + y + 4 = 0$.

Řešení

Rovnice tečny dané kružnice v nějakém jejím bodě $X_0[x_0; y_0]$ má tvar:

$(x_0 - 3)(x - 3) + (y_0 - 2)(y - 2) = 18.$

Normálový vektor tečny je $\boldsymbol{n} = (x_0 - 3; y_0 - 2)$. Víme, že tečna bude rovnoběžná s přímkou p právě tehdy, když její normálový vektor $\boldsymbol{n}$ bude nenulovým násobkem normálového vektoru přímky p[40]. Musí tedy platit:

$(x_0 - 3; y_0 - 2) = k(1; 1)$, pro nějaké $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Z rovnic těchto vektorů můžeme vyjádřit $x_0 = k + 3$ a $y_0 = k + 2$. Protože bod $X_0[x_0; y_0]$ leží na kružnici (je to bod dotyku), musí navíc platit, že

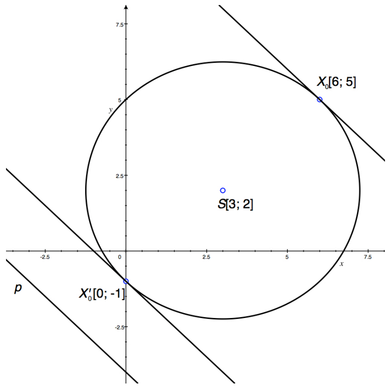
$(x_0 - 3)^2 + (y_0 - 2)^2 = 18.$

Po dosazení za x_0 a y_0 do této rovnice, získáme kvadratickou rovnici s neznámou k:

$(k + 3 - 3)^2 + (k + 2 - 2)^2 = 18,$
$k^2 + k^2 = 18,$
$2k^2 = 18,$
$k = \pm 3.$

[40] **Odkaz:** Kapitola geometrie v rovině věta o vzájemné poloze přímek určených obecnými rovnicemi.

Pro $k = 3$ je $X_0[6; 5]$, pro $k = -3$ je $X_0'[0; -1]$. Tečny jsou dvě viz obrázek. To jste ale nejspíše očekávali.



Obr. 5.6: Obrázek k příkladu

Zjistíme nejdříve rovnici první z nich:

$3(x - 3) + 3(y - 2) = 18,$

$3x - 9 + 3y - 6 = 18,$

$3x + 3y - 33 = 0,$

$x + y - 11 = 0.$

Obdobně získáme i rovnici druhé tečny, která má obecnou rovnici:

$x + y + 1 = 0.$

Na závěr kapitoly o kružnici si zavedeme ještě jeden pojem, a tím je polára bodu vzhledem ke kružnici. Polára je přímka, která má jednu velice zajímavou vlastnost související s tečnami kružnice.

Definice

Přímka daná rovnicí $(x - m)(x_1 - m) + (y - n)(y_1 - n) = r^2$ se nazývá ***polára bodu*** *$X_1[x_1; y_1]$ vzhledem ke kružnici se středem $S[m; n]$ a poloměrem r.*

Věta

Polára bodu $X_1[x_1; y_1]$ vzhledem ke kružnici k se středem $S[m; n]$ a poloměrem r obsahuje body dotyku tečen kružnice k, procházejících bodem X_1.

Důkaz

Polára bodu $X_1[x_1; y_1]$ vzhledem ke kružnici k se středem $S[m; n]$ a poloměrem r obecnou rovnici:

$(x - m)(x_1 - m) + (y - n)(y_1 - n) = r^2.$

Pro bod $X_0[x_0; y_0]$, který leží na kružnici k, je $(x - m)(x_0 - m) + (y - n)(y_0 - n) = r^2$ rovnice tečny ke kružnici procházejícím tímto bodem.

Hledáme takové X_0, pro které tečna ke kružnici prochází nejen X_0, ale i X_1. Tj. hledáme body dotyku tečen procházejících bodem X_1. Musí tedy platit:

$(x_1 - m)(x_0 - m) + (y_1 - n)(y_0 - n) = r^2$.

Chceme ukázat, že bod $X_0[x_0; y_0]$, pro který toto platí, musí ležet i na poláře $(x - m)(x_1 - m) + (y - n)\cdot(y_1 - n) = r^2$. Aby tam ležel, musela by být splněna rovnice $(x_1 - m)(x_0 - m) + (y_1 - n)(y_0 - n) = r^2$. Ta splňená je, takže bod $X_0[x_0; y_0]$, na poláře leží.

Úloha

Najděte tečny ke kružnici k: $x^2 - 2x + y^2 + 6y - 6 = 0$, které procházejí bodem $B[5; 1]$.

Řešení

- Nejprve určíme středovou rovnici kružnice k:
  $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 16$.

- Díky předchozí větě víme, že body dotyku kružnice a hledaných tečen leží na poláře bodu B vzhledem ke k. Polára má rovnici:
  $(x - 1)(5 - 1) + (y + 3)(1 + 3) = 16$,
  $4x - 4 + 4y + 12 = 16$,
  $4x + 4y - 8 = 0$,
  $x + y - 2 = 0$.

- Hledáme průsečíky poláry a kružnice k. Z rovnice poláry můžeme vyjádřit x:
  $x = 2 - y$.

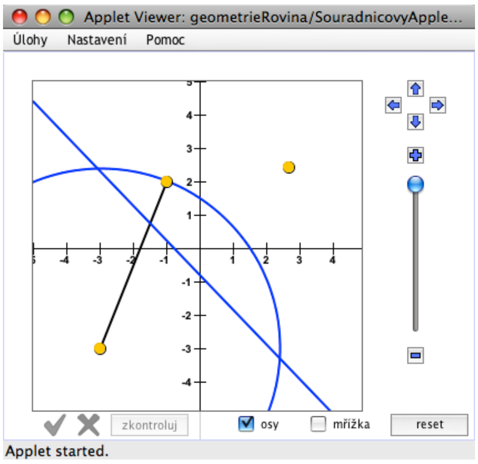
- Do středové rovnice kružnice k dosadíme za x a řešíme kvadratickou rovnici s neznámou y:
  $(2 - y - 1)^2 + (y + 3)^2 = 16$,
  $(1 - y)^2 + (y + 3)^2 = 16$,
  $1 - 2y + y^2 + y^2 + 6y + 9 = 16$,
  $y^2 + 2y - 3 = 0$.

- Dopočítáme $y_1 = 1$, $y_2 = -3$ a příslušné $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. Body $T_1[1; 1]$ a $T_2[5; -3]$ jsou body dotyku. Zbývá určit rovnice tečen.

  Obecná rovnice tečny kružnice k v bodě T_1 je:
  $(x - 1)(1 - 1) + (y + 3)(1+ 3) = 16$,
  $y = 1$.

  Obecnou rovnice tečny kružnice k v bodě T_2 najdeme stejným způsobem:
  $(x - 1)(5 - 1) + (y + 3)(-3 + 3) = 16$,
  $x = 5$.

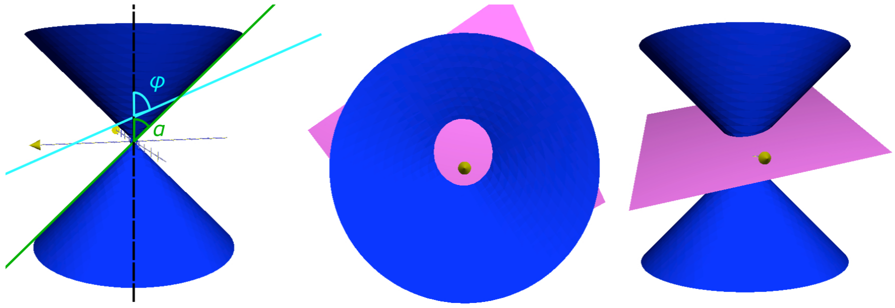
Na následujícím appletu se můžete podívat, jak je polára bodu vzhledem ke kružnici ovlivněna jejich vzájemnou polohou.



Applet Viewer: geometrieRovina/SouradnicovyApple...
Úlohy
Nastavení
Pomoc
zkontroluj
osy
mřížka
reset
Applet started.

Elipsa

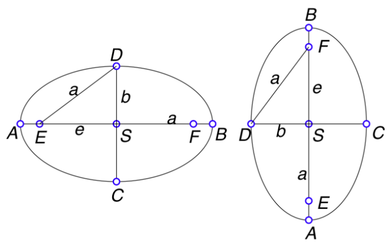
Elipsa vznikne řezem rotační kuželové plochy rovinou, která neprochází jejím vrcholem a pro jejíž odchylku φ od osy rotace kuželové plochy platí: $\varphi \in (\alpha; 90°)$, kde α je odchylka tvořících přímek[41] kuželové plochy od její osy.



Obr. 5.7: Elipsa jako řez kuželové plochy rovinou

Definice

Množina všech bodů X roviny, pro které se součet $|XE| + |XF|$*, vzdáleností bodu X od daných bodů E, F této roviny, rovná danému číslu většímu než* $|EF|$*, se nazývá* ***elipsa****. Body E a F se nazývají* ***ohniska*** *elipsy.*



Obr. 5.8: Charakteristiky elipsy

Na *obr. 5.8* jsou elipsy s ohnisky E, F. Bod S se nazývá **střed** elipsy. Body A, B, ležící na přímce EF nazýváme **hlavní vrcholy** elipsy, přímku AB potom **hlavní osa** elipsy. Body C, D se nazývají **vedlejší vrcholy** elipsy a přímka CD **vedlejší osa** elipsy. Vzdálenost a hlavního vrcholu elipsy a jejího středu nazýváme **hlavní poloosa** elipsy a vzdálenost b vedlejšího vrcholu a středu analogicky **vedlejší poloosa** elipsy. Vzdálenost e, ohniska a středu elipsy nazýváme **výstřednost** nebo také **excentricita** elipsy. Z *obr. 5.8* plyne vztah mezi výstředností a hlavní a vedlejší poloosou $a^2 = b^2 + e^2$. To platí, protože $|EA| + |FA| = e + a + a - e = 2a$, a tedy $|ED| + |FD| = 2a$.

Poznámka

---

[41] **Nápověda:** Tvořící přímky kuželové plochy jsou všechny přímky tvořící její plášť.

Kružnice je speciální případ elipsy, jejíž ohniska splývají s jejím středem. Pro každý bod X této elipsy platí $|EX| + |FX| = 2|SX| = 2r$.

Příklad 5.8

Určete výstřednost elipsy s hlavním vrcholem $A[-1; 1]$, vedlejším vrcholem $B[4; -2]$ a středem $S[4; 1]$.

Řešení

Ze zadání můžeme určit hlavní a vedlejší poloosu a, b dané elipsy. Vime, že

$a = |AS|$ a $b = |BS|$.

$$a = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{5^2} = 5,$$

$$b = \sqrt{(4 - 4)^2 + (1 - (-2))^2} = \sqrt{3^2} = 3.$$

Ze vztahu $a^2 = b^2 + e^2$ dopočítáme výstřednost e:

$e^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16,$

$e = \pm 4.$

Protože výstřednost je vzdálenost ohniska od středu, může to být jen nezáporné číslo, tedy $e = 4$.

Definice

Rovnice

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1;\ a, b > 0,$$

*se nazývá **středová rovnice** elipsy se středem S[m; n] a poloosami a, b.*

Pro ohniska $E[e_1; e_2]$, $F[f_1; f_2]$ elipsy z definice platí následující. Je-li $a \geq b$, platí $e_2 = f_2 = n$, $e_1 = m - e$ a $f_1 = m + e$. Je-li $a < b$ platí $e_1 = f_1 = m$, $e_2 = n + e$, $f_2 = n - e$, kde $e = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Poznámka

Pokud je $a \geq b$, tak středová rovnice určuje elipsu, jejíž hlavní osa je rovnoběžná s osou x a a je její hlavní poloosa viz *obr. 5.8* vlevo. Je-li $a < b$, pak středová rovnice elipsy určuje elipsu jejíž hlavní osa je rovnoběžná s osou y a její hlavní poloosa je b viz *obr. 5.8* vpravo.

Příklad 5.9

Najděte středovou rovnici elipsy se středem $S[2; 2]$, výstředností $e = 4$ a hlavním vrcholem $A[-3; 2]$.

Řešení

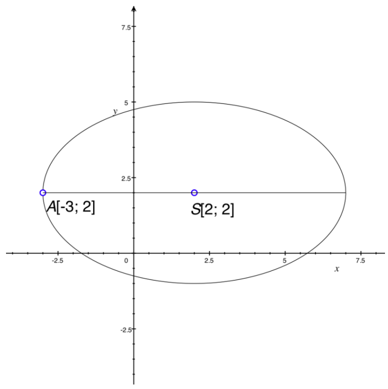
Abychom mohli napsat rovnici elipsy, potřebujeme znát ještě její hlavní a vedlejší poloosu. Nejprve vypočítáme hlavní poloosu $|SA|$:

$$|SA| = \sqrt{(-3 - 2)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Vedlejší poloosu b vypočítáme z hlavní poloosy a výstřednosti:

$b^2 = a^2 - e^2$,
$b = 3$.

Zadaná elipsa má hlavní osu rovnoběžnou s osou x. To je vidět ze souřadnic bodů A a S na *obr. 5.9.* Body A, S mají stejnou y-ovou souřadnici a liší se jejich souřadnice x-ová.



Obr. 5.9: Obrázek k příkladu

Hledanou středovou rovnici elipsy pak zapíšeme jako:

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$$

Definice

*Středová rovnice elipsy upravená do tvaru $px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0$; $p, q, r, s, t \in \mathbb{R}$, $p \cdot q > 0$, se nazývá **obecná rovnice** elipsy.*

Poznámka

Ne každá rovnice $px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0$; $p \cdot q > 0$, je rovnicí elipsy – to je obdobné jako u kružnice a její obecné rovnice.[42]

Příklad 5.10

Určete střed, ohniska a hlavní poloosu elipsy dané rovnicí $25x^2 + 9y^2 + 150x - 36y + 36 = 0$.

Řešení

Nejprve obecnou rovnici upravíme na rovnici středovou:

$25x^2 + 9y^2 + 150x - 36y + 36 = 0$,
$25x^2 + 150x + 9y^2 - 36y + 36 = 0$,
$25(x^2 + 6x) + 9(y^2 - 4y) + 36 = 0$,
$25(x^2 + 6x + 9 - 9) + 9(y^2 - 4y + 4 - 4) + 36 = 0$,
$25(x + 3)^2 - 225 + 9(y - 2)^2 - 36 + 36 = 0$,

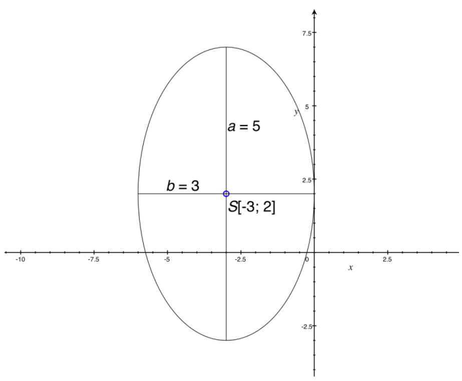
[42] **Odkaz:** Kapitola kružnice, obdobná poznámka.

$25(x+3)^2 + 9(y-2)^2 = 225,$

$$\frac{25(x+3)^2}{225} + \frac{9(y-2)^2}{225} = 1,$$

$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1.$$

Ze středové rovnice snadno určíme jak střed elipsy, tak její hlavní a vedlejší poloosu. Navíc rozpoznáme i orientaci její hlavní osy viz *obr. 5.10*.



Obr. 5.10: Obrázek k příkladu

Hlavní osa je rovnoběžná s osou y, což nám také napovídá, kde hledat ohniska E a F. Z rovnice určíme hlavní poloosu $a = 5$, vedlejší poloosu $b = 3$ a střed elipsy $S[-3; 2]$. Dopočítáme výstřednost $e = 4$ a zbývá určit ohniska E a F. Jelikož víme, že hlavní osa elipsy je rovnoběžná s osou y, můžeme ohniska jednoduše určit za pomocí výstřednosti a souřadnic středu:

$E = [-3; 2 + e] = [-3; 6],$

$F = [-3; 2 - e] = [-3; -2].$

Úloha

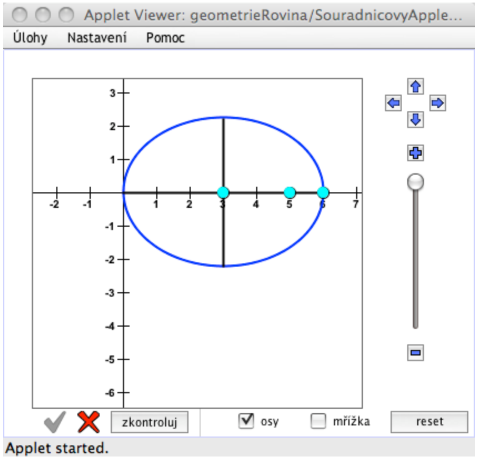
Najděte obecnou rovnici elipsy, která má střed $S[2; 1]$, hlavní vrchol $A[2; 6]$ a ohnisko $E[2; -3]$.

Řešení

- Obecnou rovnici elipsy získáme upravením její středové rovnice. K jejímu zápisu potřebujeme kromě středu elipsy znát i její hlavní a vedlejší poloosu. Ze zadání můžeme vypočítat hlavní poloosu a a výstřednost e a z nich pak vedlejší poloosu.
  $a = |AS| = \sqrt{(2-2)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{5^2} = 5,$
  $e = |ES| = \sqrt{(2-2)^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{4^2} = 4,$
  $b^2 = a^2 - e^2,$
  $b^2 = 5^2 - 4^2 = 9,$
  $b = \pm 3.$
  Vedlejší poloosa elipsy je vzdálenost, která je vždy nezáporná, proto $b = 3$.

- Tvar středové rovnice elipsy plyne ze vzájemné polohy její hlavní osy a osy y. Elipsa má svou hlavní osu rovnoběžnou s osou y[43], její rovnice je proto:
$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1.$$

- Upravíme středovou rovnici a získáme rovnici obecnou:
$25(x-2)^2+9(y-1)^2=25\cdot 9,$
$25(x^2-4x+4)+9(y^2-2y+1)=225,$
$25x^2+9y^2-100x-18y+100+9-225=0,$
$25x^2+9y^2-100x-18y-116=0.$



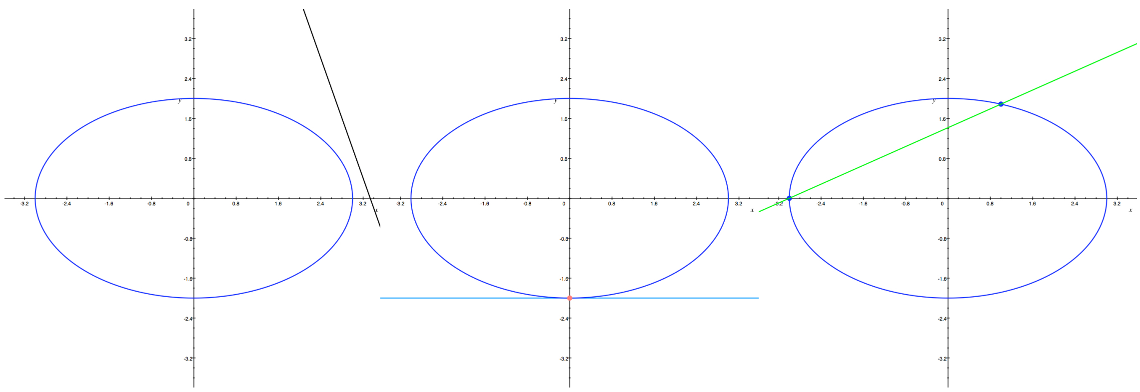
Vzájemná poloha elipsy a přímky

V rovině mohou nastat tři různé vzájemné polohy elipsy E a přímky p: nemají žádný společný bod, mají jeden společný bod nebo mají dva společné body.

- $p \cap E = \varnothing$
Přímka p leží vně elipsy E. Nazýváme ji **vnější přímka** elipsy.

- $p \cap E = \{P\}$
Přímka p se elipsy E dotýká v bodě P. Přímku p nazýváme **tečna** elipsy E.

- $p \cap E = \{X, Y\}$
Přímka elipsou prochází a protíná ji v bodech X a Y. Přímku p nazýváme **sečna** elipsy E.



[43] **Nápověda:** X-ová souřadnice středu je stejná jako x-ová souřadnice hlavního vrcholu.

Obr. 5.11: Vzájemná poloha přímky a elipsy

Příklad 5.11

Určete vzájemnou polohu přímky p: $x - 3y + 1 = 0$ a elipsy E: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Řešení

Z rovnice přímky p vyjádříme $x = 3y - 1$ a dosadíme do středové rovnice elipsy E. Získáme kvadratickou rovnici

$$\frac{(3y-1)^2}{4} + y^2 = 1,$$

$$(3y - 1)^2 + 4y^2 = 4,$$

$$9y^2 - 6y + 1 + 4y^2 - 4 = 0,$$

$$13y^2 - 6y - 3 = 0.$$

Kořeny této kvadratické rovnice odpovídají y-ové souřadnici společných bodů p a E. Z diskriminantu D zjistíme, kolik jich je, a podle toho i vzájemnou polohu. Je-li $D < 0$, přímka je vnější přímkou elipsy. Je-li $D = 0$, přímka je tečnou elipsy a nakonec, je-li $D > 0$, přímka elipsu protíná ve dvou bodech a je její sečnou. V našem případě

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-3) = 36 + 156 = 192.$$

Diskriminant je kladný a přímka p má proto s elipsou E dva společné body. Přímka p je sečnou elipsy E.

Úloha

Vyšetřete vzájemnou polohu přímky p: $x = 3 + t$, $y = 2 - 2t$; $t \in \mathbb{R}$, a elipsy $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Řešení

- Budeme postupovat podobně jako v *příkladě 5.11*[44]. Vyjádřené souřadnice x a y z parametrické rovnice přímky p dosadíme do středové rovnice elipsy a získáme
  $$\frac{(3+t)^2}{4} + \frac{(2-2t)^2}{9} = 1,$$
  $$9(9 + 6t + t^2) + 4(4 - 8t + 4t^2) = 36,$$
  $$25t^2 + 22t + 61 = 0.$$
- Spočítáme diskriminant D této rovnice:
  $D = 22^2 - 4 \cdot 25 \cdot 61 = 484 - 6100 = -5616.$
  Diskriminant je záporný. To znamená, že přímka p nemá s elipsou žádný společný bod a je vnější přímkou elipsy.

---

[44] **Odkaz:** Příklad 5.11.

Věta

Rovnice

$$\frac{(x_0 - m)(x - m)}{a^2} + \frac{(y_0 - n)(y - n)}{b^2} = 1,$$

je rovnicí tečny k elipse s rovnicí

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1,$$

v bodě $X_0[x_0; y_0]$.

Důkaz

Nejprve ukážeme, že zadaná rovnice je rovnice přímky procházející bodem X_0. Poté budeme hledat průsečíky této přímky se zadanou elipsou a dokážeme, že průsečík je jen jeden. Nutně jím musí být bod X_0. Přímka je tedy tečna elipsy v bodě X_0.

Rovnice

$$\frac{(x_0 - m)(x - m)}{a^2} + \frac{(y_0 - n)(y - n)}{b^2} = 1, \quad \frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1,$$

pro další výpočty upravíme na

$$b^2(x_0 - m)(x - m) + a^2(y_0 - n)(y - n) = a^2b^2,$$
$$b^2(x - m)^2 + a^2(y - n)^2 = a^2b^2.$$

První z nich je rovnice přímky, protože buď $b^2(x_0 - m) \neq 0$ nebo $a^2(y_0 - n) \neq 0$[45]*.*

Dokazujeme, že přímka $b^2(x_0 - m)(x - m) + a^2(y_0 - n)(y - n) = a^2b^2$ je tečnou elipsy $b^2(x - m)^2 + a^2(y - n)^2 = a^2b^2$ v bodě $X_0[x_0; y_0]$.

Dosadíme-li do rovnice přímky souřadnice bodu X_0, získáme $b^2(x_0 - m)(x_0 - m) + a^2(y_0 - n)(y_0 - n) = a^2b^2$. Tato rovnost platí, protože bod X_0 je bodem elipsy, tedy $b^2(x_0 - m)^2 + a^2(y_0 - n)^2 = a^2b^2$. Bod X_0 je tedy bodem zadané přímky.

Z rovnice přímky teď vyjádříme $(x - m)$:

$$(x - m) = \frac{a^2b^2 - a^2(y_0 - n)(y - n)}{b^2(x_0 - m)}.$$

Vyjádřené $(x - m)$ z rovnice přímky dosadíme do rovnice elipsy. Počet řešení kvadratické rovnice, kterou po dosazení získáme, je i počet průsečíků naší přímky a elipsy.

$$b^2\left(\frac{a^2b^2 - a^2(y_0 - n)(y - n)}{b^2(x_0 - m)}\right)^2 + a^2(y - n)^2 = a^2b^2,$$

$$(a^2b^2 - a^2(y_0 - n)(y - n))^2 + a^2b^2(y - n)^2 + a^2b^2(y - n)^2(x_0 - m)^2 = a^2b^4(x_0 - m)^2,$$
$$a^4b^4 - 2a^4b^2(y_0 - n)(y - n) + a^4(y_0 - n)^2(y - n)^2 + a^2b^2(y - n)^2(x_0 - m)^2 = a^2b^4(x_0 - m)^2.$$

Provedeme substituci, která neovlivní počet řešení, ale zpřehlední další zápis:

$$t = y - n.$$

---

[45] **Nápověda:** Vycházíme z rovnice elipsy, proto víme, že $a \cdot b \neq 0$. Bod dotyku X_0 leží na elipse, a proto buď $(x_0 - m)$, nebo $(y_0 - n)$ musí být nenulové. Kdyby tomu tak nebylo, bod X_0 by musel být středem elipsy.

Získáme:

$a^4b^4 - 2a^4b^2(y_0 - n)t + a^4(y_0 - n)^2t^2 + a^2b^2(x_0 - m)^2t^2 = a^2b^4(x_0 - m)^2,$

$t^2(a^4(y_0 - n)^2 + a^2b^2(x_0 - m)^2) + t(-2a^4b^2(y_0 - n)) + a^4b^4 - a^2b^4(x_0 - m)^2 = 0.$

Z diskriminantu D určíme počet řešení a následně i počet průsečíků:

$D = 4a^8b^4(y_0 - n)^2 - 4(a^4(y_0 - n)^2 + a^2b^2(x_0 - m)^2)(a^4b^4 - a^2b^4(x_0 - m)^2) =$

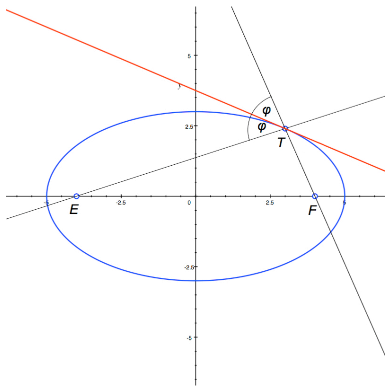
$= 4a^8b^4(y_0 - n)^2 - 4a^8(y_0 - n)^2b^4 - 4a^6b^6(x_0 - m)^2 + 4a^6b^4(y_0 - n)^2(x_0 - m)^2 + 4a^4b^6(x_0 - m)^4 =$

$= 4a^4b^4(x_0 - m)^2(-a^2b^2 + a^2(y_0 - n)^2 + b^2(x_0 - m)^2).$

Poslední závorka je jen jinak zapsaný výraz $b^2(x_0 - m)^2 + a^2(y_0 - n)^2 - a^2b^2$, který je roven 0. Vyjadřuje totiž rovnici elipsy po dosazení souřadnic bodu X_0. Diskriminant je tedy roven 0 a rovnice má právě jedno řešení.

Tím jsme dokázali, že zkoumaná přímka a elipsa mají právě jeden společný bod, tj. přímka je její tečnou. Společným bodem je bod X_0, proto je daná přímka tečnou elipsy v bodě X_0.

Pokud byste někdy chtěli zkonstruovat tečnu elipsy v nějakém jejím bodě vězte, že tečna k elipse s ohnisky E, F v jejím libovolném bodě T je ta osa úhlu přímek ET, EF, která neprochází úsečkou EF.



Obr. 5.12: Konstrukce tečny k elipse

Příklad 5.12

Určete tečnu elipsy $\frac{(x-2)^2}{10} + \frac{(y-3)^2}{40} = 1$, v bodě $T[3; 9]$.

Řešení

Rovnici tečny k dané elipse můžeme zapsat podle dokázané věty jako

$$\frac{(3-2)(x-2)}{10} + \frac{(9-3)(y-3)}{40} = 1,$$

$$\frac{(x-2)}{10} + \frac{6(y-3)}{40} = 1,$$

$4(x - 2) + 6(y - 3) = 40,$

$4x - 8 + 6y - 18 - 40 = 0,$

$4x + 6y - 66 = 0,$

$2x + 3y - 33 = 0.$

Úloha

Určete rovnice tečen elipsy $\frac{(x+1)^2}{32}+\frac{(y-2)^2}{2}=1$, které jsou kolmé k přímce p: $4x - y + 5 = 0$.

Řešení

- Tečna této elipsy v bodě $X[x_0; y_0]$ má následující rovnici
  $\frac{(x_0+1)(x+1)}{32}+\frac{(y_0-2)(y-2)}{2}=1,$
  $(x_0 + 1)(x + 1) + 16(y_0 - 2)(y - 2) = 32.$ **(5.2)**

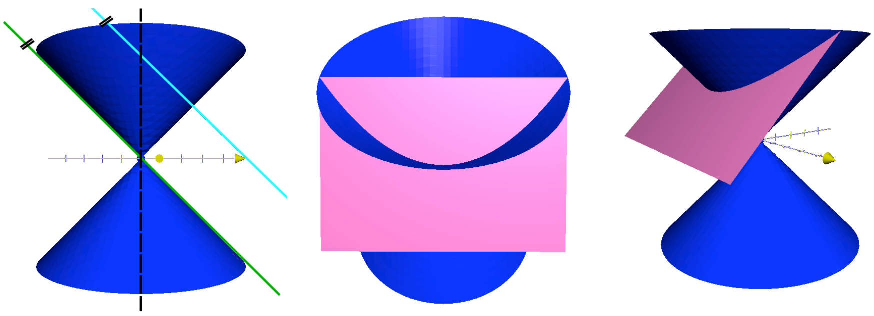
- Normálový vektor této tečny je $\boldsymbol{n_t} = (x_0 + 1; 16y_0 - 32)$. Hledáme tečny, jejichž normálový vektor je kolmý na normálový vektor přímky p – $\boldsymbol{n_p} = (4; -1)$. Musí tedy platit
  $\boldsymbol{n_t} \cdot \boldsymbol{n_p} = 0,$
  tedy
  $4(x_0 + 1) - (16y_0 - 32) = 0,$
  $4x_0 - 16y_0 + 36 = 0.$
  $x_0 - 4y_0 + 9 = 0.$ **(5.3)**

- Protože bod $X_0[x_0; y_0]$ je bodem elipsy, musí jeho souřadnice splňovat rovnici elipsy:
  $\frac{(x_0+1)^2}{32}+\frac{(y_0-2)^2}{2}=1.$
  Z **(5.3)** můžeme vyjádřit $x_0 = 4y_0 - 9$ a dosadit do této rovnice. Získáme
  $\frac{(4y_0-9+1)^2}{32}+\frac{(y_0-2)^2}{2}=1,$
  po úpravách pak
  $y_0^2 - 4y_0 + 3 = 0.$

- Tato rovnice má dvě řešení $y_0' = 1$ a $y_0'' = 3$, kterým odpovídají $x_0' = -5$ a $x_0'' = 3$. Stačí jen dosadit do **(5.2)**, upravit příslušné rovnice a získáme rovnice hledaných tečen:
  t_1: $x + 4y + 1 = 0,$
  t_2: $x + 4y - 15 = 0.$

Parabola

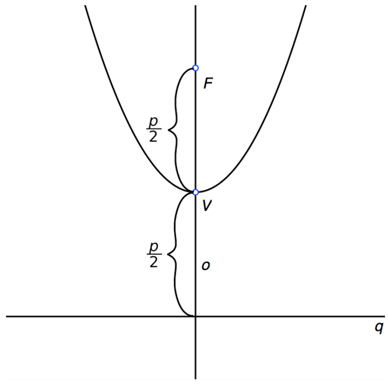
Parabola je kuželosečka, která vznikne průnikem rotační kuželové plochy s rovinou, která neprochází jejím vrcholem a která je rovnoběžná s právě jednou přímkou této kuželové plochy.



Obr. 5.13: Parabola jako řez kuželové plochy rovinou

Definice

*V rovině je dán bod F a přímka q, která jím neprochází. Množina všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od bodu F a od přímky q, se nazývá **parabola**. Bod F se nazývá **ohnisko**, přímka q **řídicí přímka** paraboly.*



Obr. 5.14: Charakteristiky paraboly

Bod V, na *obr. 5.14*, je jediný bod paraboly ležící na její ose o. Nazýváme jej **vrchol** paraboly. Vzdálenost ohniska paraboly od její řídicí přímky budeme označovat jako p.

Definice

Rovnice

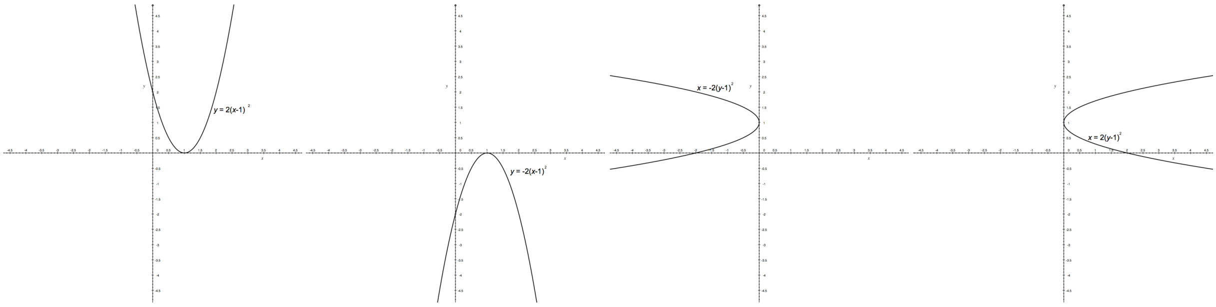
$(x - m)^2 = \pm 2p(y - n)$, *resp.* $(y - n)^2 = \pm 2p(x - m)$, *kde* $p > 0$,

*se nazývají **vrcholové rovnice** paraboly s vrcholem* $V[m; n]$ *a ohniskem* $E[m; n \pm p/2]$, *resp.* $E[m \pm p/2; n]$.

Z vrcholové rovnice můžeme určit polohu vrcholu, ohniska a řídicí přímky paraboly. Na *obr. 5.15* jsou zleva doprava části parabol s rovnicemi $y = 2(x - 1)^2$, $y = -2(x - 1)^2$, $x = -2(y - 1)^2$ a $x = 2(y - 1)^2$.

Paraboly $(x - m)^2 = \pm 2p(y - n)$ mají osu rovnoběžnou s osou y. Parabola je „otevřená" ve směru kladné poloosy y, pokud má rovnici $(x - m)^2 = 2p(y - n)$. Parabola je „otevřená" ve směru záporné poloosy y, pokud má rovnici $(x - m)^2 = -2p(y - n)$.

Paraboly $(y - n)^2 = \pm 2p(x - m)$ mají osu rovnoběžnou s osou x. Parabola je „otevřená" ve směru záporné poloosy x, pokud má rovnici $(y - n)^2 = -2p(x - m)$. Parabola je „otevřená" ve směru kladné poloosy x, pokud má rovnici $(y - n)^2 = 2p(x - m)$.



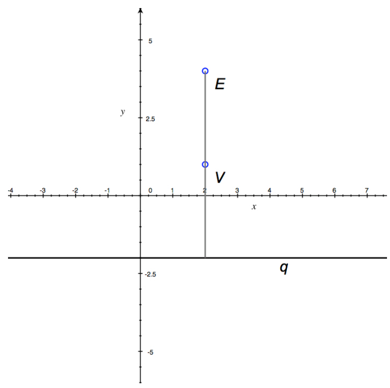
Obr. 5.15: Různé paraboly

Příklad 5.13

Najděte vrcholovou rovnici paraboly určené ohniskem $E[2; 4]$ a řídicí přímkou q: $y = -2$.

Řešení

Vrchol V hledané paraboly leží mezi bodem E a přímkou q. Platí, že $V \in o$ a $2|EV| = 2|Vq| = p$.



Obr. 5.16: Obrázek k příkladu

Ze vzdálenosti E a q a jejich polohy viz *obr. 5.16*, můžeme určit jeho souřadnice. Protože $|Eq| = 6$, můžeme říci, že souřadnice vrcholu V jsou $[2; 1]$. Z toho už jednoduše vyjádříme vrcholovou rovnici:

$(x - 2)^2 = 12(y - 1)$.

Definice

Vrcholové rovnice paraboly upravené do tvarů $x^2 + 2rx + 2sy + t = 0$ a $y^2 + 2sx + 2ry + t = 0$; $r \neq 0$, $r, s, t \in \mathbb{R}$, se nazývají ***obecné rovnice*** *paraboly.*

Příklad 5.14

Určete obecnou rovnici paraboly s vrcholem $V[2; -1]$, jejíž řídicí přímka je osa y.

Řešení

Vrcholovou rovnici určíme ze souřadnic vrcholu paraboly a velikosti koeficientu p, který odpovídá dvojnásobku vzdálenosti vrcholu od řídicí přímky, $p = 4$. Je ještě potřeba vzít v úvahu, polohu vrcholu

V vůči řídicí přímce paraboly. Naše parabola je „otevřená" ve směru kladné poloosy x a její vrcholová rovnice je:

$(y + 1)^2 = 8(x - 2).$

Obecnou rovnici získáme roznásobením a upravením vrcholové rovnice paraboly:

$y^2 + 2y + 1 = 8x - 16$**,**
$y^2 - 8x + 2y + 17 = 0.$

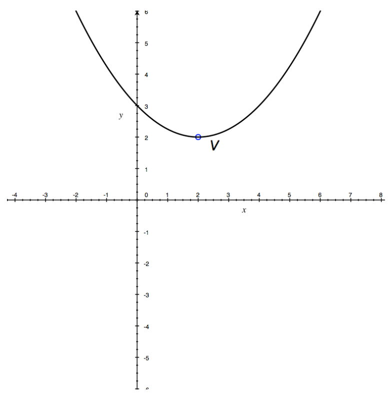
Úloha

Najděte ohnisko, vrchol a řídicí přímku paraboly, která je dána rovnicí $x^2 - 4x - 4y + 12 = 0$.

Řešení

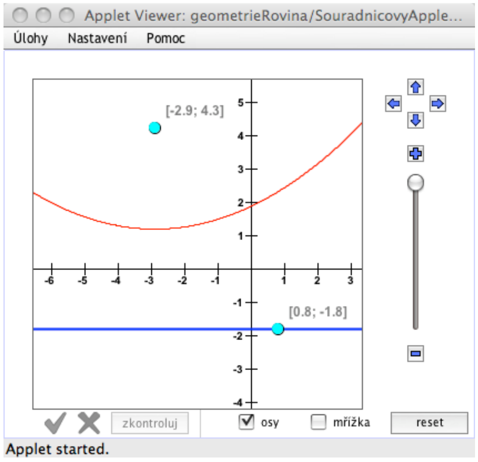
- Nejprve převedeme obecnou rovnici na rovnici vrcholovou:
  $x^2 - 4x - 4y + 12 = 0,$
  $(x - 2)^2 - 4 - 4y + 12 = 0,$
  $(x - 2)^2 = 4y - 8,$
  $(x - 2)^2 = 4(y - 2).$

- Z vrcholové rovnice umíme určit souřadnice vrcholu $V[2; 2]$, orientaci paraboly a vzdálenost p řídicí přímky a ohniska $p = 2$[46]. Rovnice odpovídá parabole na obrázku.



  Její ohnisko je $E[2; 3]$ a její řídicí přímka q má rovnici: $y = 1$.

[46] **Nápověda:** Pravá strana rovnice odpovídá $2p(y - 2)$.



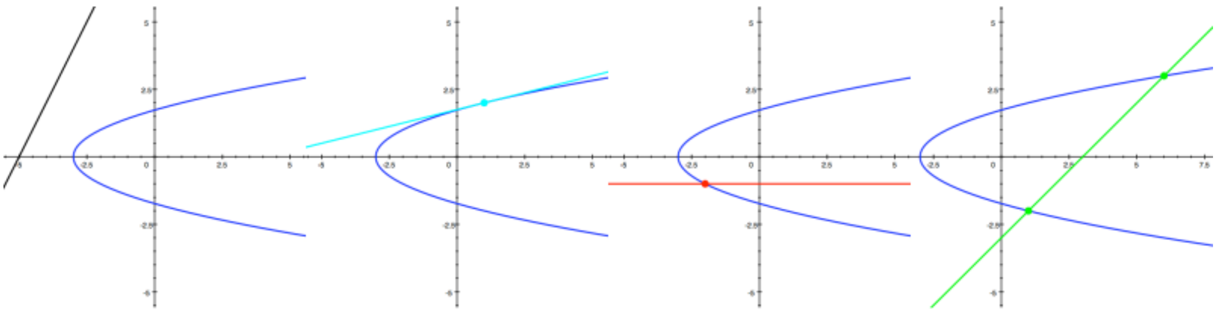
Vzájemná poloha paraboly a přímky

V rovině mohou nastat tři různé vzájemné polohy paraboly L a přímky p: nemají žádný společný bod, mají jeden společný bod nebo mají dva společné body.

- $p \cap L = \emptyset$
  Přímka p leží vně paraboly L a nazýváme ji **vnější přímka** paraboly.
- $p \cap L = \{P\}$
  Přímka p má s parabolou L právě jeden společný bod, bod P.

  Pokud je přímka p různoběžná s osou o paraboly, nazýváme ji **tečnou** paraboly L.

  Pokud je přímka p rovnoběžná s osou o paraboly L, tečnou ji nenazýváme.
- $p \cap L = \{X, Y\}$
  Přímka parabolou prochází a protíná ji v bodech X a Y. Přímku p nazýváme **sečnou** paraboly L.



Obr. 5.17: Vzájemná poloha paraboly a přímky

Příklad 5.15

Najděte společné body přímky $2x - y + 5 = 0$ a paraboly $(y-3)^2 = 2(x-1)$.

Řešení

Budeme postupovat podobně, jako když jsme hledali společné body přímky a elipsy. Z rovnice přímky nejprve vyjádříme $y = 2x + 5$ a dosadíme do rovnice paraboly:

$(2x + 5 - 3)^2 = 2(x - 1)$.

Hledáme řešení kvadratické rovnice

$(2x + 2)^2 = 2x - 2.$

Počet řešení určí vzájemnou polohu přímky a paraboly. Navíc získáme jednu ze souřadnic hledaných průsečíků.

$4x^2 + 8x + 4 = 2x - 2,$

$4x^2 + 6x + 6 - 0,$

$2x^2 + 3x + 3 = 0.$

Diskriminant této rovnice je:

$D = 3^2 - 4{\cdot}2{\cdot}3 = 9 - 24 = -15.$

Rovnice nemá žádné řešení, a proto můžeme říci, že zadaná přímka a parabola nemají žádný společný bod, přímka je vnější přímkou paraboly.

Příklad 5.16

Je dána parabola L: $(y - 1)^2 = -4x$ a přímka r: $-x + 2y + 2 = 0$. Určete jejich vzájemnou polohu a společné body, pokud existují.

Řešení

Budeme postupovat podobně jako v *příkladě 5.15*. Z rovnice přímky vyjádříme $x = 2y + 2$ a dosadíme do rovnice paraboly:

$(y - 1)^2 = -4(2y + 2),$

$y^2 - 2y + 1 + 8y + 8 = 0,$

$y^2 + 6y + 9 = 0.$

Diskriminant této rovnice je:

$D = 6^2 - 4{\cdot}1{\cdot}9 = 0.$

Z nulového diskriminantu plyne, že parabola a přímka mají právě jeden společný bod T. Jeho y-ová souřadnice je řešením kvadratické rovnice $y^2 + 6y + 9 = 0$, $y = -3$. Dosazením za y do $x = 2y + 2$ spočítáme x-ovou souřadnici bodu T:

$x = 2{\cdot}(-3) + 2 = -4,$

$T[-4; -3].$

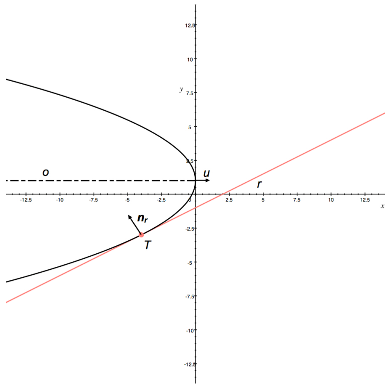
Bod T je jediným společným bodem přímky a paraboly. Je třeba určit, zda r je tečnou paraboly L, tj. zda $r \times o$, kde o je osa paraboly L. Zjistíme to z normálového vektoru vektoru přímky r. Pokud by byl kolmý na osu o paraboly, pak by přímka r byla s osou o paraboly L rovnoběžná a nebyla by tečnou. Nebude-li tomu tak, můžeme říci, že přímka r je tečnou paraboly L.

$\boldsymbol{n_r} = (-1; 2)$ je normálový vektor přímky r. Protože parabola L má osu rovnoběžnou s osou x, má směrový například $\boldsymbol{u} = (0; 1)$.

Vypočítáme skalární součin vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{n_r}$:

$\boldsymbol{u}{\cdot}\boldsymbol{n_r} = (-1){\cdot}0 + 2{\cdot}1 = 2.$

Skalární součin je nenulový, vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{n_r}$ nejsou navzájem kolmé a přímka r je tedy tečnou paraboly L. Totéž zjistíme i z *obr. 5.18*.



Obr. 5.18: Obrázek k příkladu

Věta

Rovnice

$(x_0 - m)(x - m) = \pm p(y_0 - n) \pm p(y - n);\ p > 0$, *resp.* $(y_0 - n)(y - n) = \pm p(x_0 - m) \pm p(x - m);\ p > 0$,

je rovnicí tečny k parabole s rovnicí

$(x - m)^2 = \pm 2p(y - n);\ p > 0$, *resp.* $(y - n)^2 = \pm 2p(x - m);\ p > 0$,

v bodě $X_0[x_0;\ y_0]$.

Důkaz

Ze všech čtyř různých možností dokážeme jen, že rovnice $(x_0 - m)(x - m) = p(y_0 - n) + p(y - n);$ $p > 0$, *je rovnicí tečny k parabole s rovnicí* $(x - m)^2 = 2p(y - n);\ p > 0$, *v bodě* $X_0[x_0;\ y_0]$. *Důkazy zbylých možností by byly obdobné.*

Nejprve ukážeme, že rovnice $(x_0 - m)(x - m) = p(y_0 - n) + p(y - n);\ p > 0$, *je rovnicí přímky, obsahující bod* X_0. *Poté dokážeme že uvedená přímka má s příslušnou parabolou právě jeden společný bod a nakonec, že není rovnoběžná s osou paraboly.*

Rovnice $(x_0 - m)(x - m) = p(y_0 - n) + p(y - n)$ *je rovnicí přímky, protože* $p > 0$. *Bod* X_0 *na této přímce leží, pokud platí:*

$(x_0 - m)(x_0 - m) = p(y_0 - n) + p(y_0 - n)$,
$(x_0 - m)^2 = 2p(y_0 - n)$. ***(5.4)***

To platí, neboť bod X_0 *je bodem paraboly* $(x - m)^2 = 2p(y - n);\ p > 0$.

Ukážeme, že přímka daná rovnicí $(x_0 - m)(x - m) = p(y_0 - n) + p(y - n);\ p > 0$ *má s parabolou* $(x - - m)^2 = 2p(y - n);\ p > 0$, *právě jeden společný bod.*

Z rovnice přímky vyjádříme $(y - n)$ *a dosadíme do rovnice paraboly:*

$$(y - n) = \frac{(x_0 - m)(x - m) - p(y_0 - n)}{p},$$

$$(x - m)^2 = 2p\frac{(x_0 - m)(x - m) - p(y_0 - n)}{p},$$

$(x - m)^2 = 2(x_0 - m)(x - m) - 2p(y_0 - n)$.

Provedeme substituci $t = x - m$. Tato substituce nezmění počet řešení a zpřehlední další výpočet.

$t^2 - 2(x_0 - m)t + 2p(y_0 - n) = 0.$

Diskriminant D této kvadratické rovnice s neznámou t je:

$D = (-2(x_0 - m))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2p(y_0 - n)) = 4(x_0 - m)^2 - 8p(y_0 - n) = 4((x_0 - m)^2 - 2p(y_0 - n)).$

Využijeme platné rovnosti ***(5.4)*** *a vidíme:*

$D = 4(2p(y_0 - n) - 2p(y_0 - n)) = 0.$

Diskriminant je roven nule. Přímka a parabola mají právě jeden společný bod. To samo o sobě ještě nemusí znamenat, že přímka je tečnou paraboly, viz rozbor vzájemných poloh[47]. Musíme ještě dokázat, že přímka není rovnoběžná s osou paraboly.

Přímka $(x_0 - m)(x - m) = p(y_0 - n) + p(y - n)$ má normálový vektor $\boldsymbol{n} = (x_0 - m; p)$ a parabola $(x - m)^2 = 2p(y - n);\ p > 0$, má osu rovnoběžnou s osou y. Jestliže za směrový vektor osy paraboly zvolíme například $\boldsymbol{u} = (0; 1)$, můžeme ověřit, že $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u} = (x_0 - m) \cdot 0 + p \cdot 1 = p$. Protože $p > 0$, zkoumaná přímka není rovnoběžná s osou paraboly, ale je její tečnou.

Příklad 5.17

Parabola je dána řídicí přímkou $x = -1$ a ohniskem $E[3; -1]$. Napište rovnici tečny této paraboly v jejím bodě $T[9; 7]$.

Řešení

Rovnici tečny paraboly v nějakém bodě můžeme snadno vyjádřit, známe-li vrcholovou rovnici dané paraboly. Zadaná parabola má osu rovnoběžnou s osou x. Vzdálenost její řídicí přímky od ohniska je rovna 4 a souřadnice vrcholu paraboly jsou $V[1; -1]$. To vše můžeme zjistit ze zadaných souřadnic ohniska a řídicí přímky. Rovnici paraboly pak zapíšeme jako:

$(y - (-1))^2 = 2 \cdot 4(x - 1),$

$(y + 1)^2 = 8(x - 1).$

Tečna v bodě $T[9; 7]$ má podle předchozí věty rovnici:

$(y + 1)(7 + 1) = 4(x - 1) + 4(9 - 1),$

$8y + 8 = 4x - 4 + 32,$

$-4x + 8y - 20 = 0,$

$x - 2y + 5 = 0.$

Úloha

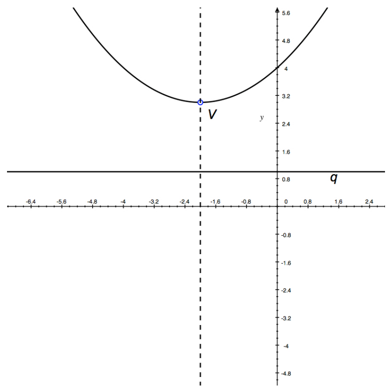
Najděte řídicí přímku a ohnisko paraboly, která je zadána rovnicí $x^2 + 4x - 4y + 16 = 0$. Určete vzájemnou polohu a případné průsečíky této paraboly s přímkou $3x - y + 1 = 0$.

Řešení

- Nejprve převedeme obecnou rovnici paraboly na její vrcholovou rovnici.
  $x^2 + 4x + 4 - 4 - 4y + 16 = 0,$
  $(x + 2)^2 - 4y + 12 = 0,$
  $(x + 2)^2 = 4(y - 3).$
- Z vrcholové rovnice určíme charakteristiky paraboly. Vrcholem je bod $V[-2; 3]$, parabola má osu rovnoběžnou s osou y a vzdálenost ohniska a řídicí přímky je $p = 2$.

---

[47] **Odkaz:** Vzájemná poloha přímky a paraboly.



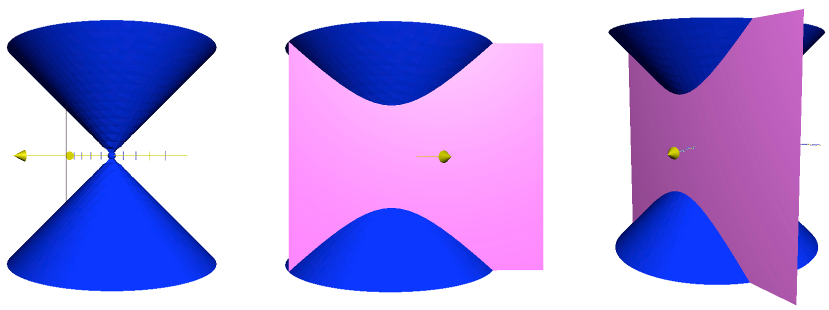
Z toho můžeme určit souřadnice ohniska $E[-2; 5]$ a rovnici řídicí přímky $y = 1$.

- Při hledání vzájemné polohy paraboly a přímky použijeme ještě neupravenou obecnou rovnici paraboly. Z obecné rovnice přímky vyjádříme $y = 3x + 1$ **(5.5)** a dosadíme do obecné rovnice paraboly. Získáme
  $x^2 + 4x - 4(3x + 1) + 16 = 0,$
  $x^2 + 4x - 12x - 4 + 16 = 0,$
  $x^2 - 8x + 12 = 0.$
  Diskriminant této kvadratické rovnice je $D = 16$. Protože je kladný víme, že rovnice má dvě řešení a přímka s parabolou mají dva společné body. Dopočítáme $x_1 = 6$, $x_2 = 2$ a k nim ze vztahu **(5.5)** $y_1 =$ $= 19$ a $y_2 = 7$.

- Přímka je sečnou paraboly. Jejich průsečíky jsou body $P_1[6; 19]$ a $P_2[2; 7]$.

Hyperbola

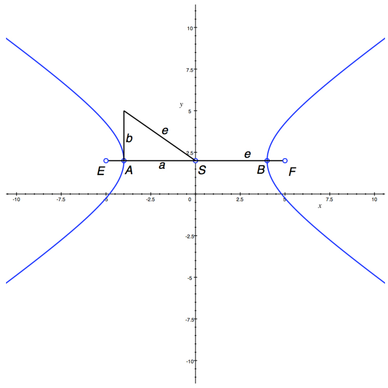
Poslední kuželosečkou, kterou si probereme je hyperbola. Hyperbola vznikne průnikem rotační kuželové plochy s rovinou, která neprochází jejím vrcholem a pro jejíž odchylku φ od osy rotace kuželové plochy platí: $\varphi \in <0°; \alpha)$, kde α je odchylka tvořících přímek kuželové plochy od její osy.



Obr 5.19: Hyperbola jako řez kuželové plochy rovinou

Definice

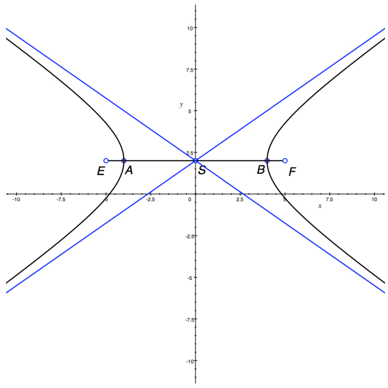
V rovině jsou dány dva různé body E, F. Množina všech bodů X této roviny, pro které se $||XE| - |XF||$ rovná danému kladnému číslu, které je menší než $|EF|$, se nazývá ***hyperbola****. Body E, F se nazývají* ***ohniska*** *hyperboly.*



Obr. 5.20: Charakteristiky hyperboly

Střed *S* úsečky *EF* se nazývá **střed** hyperboly. Přímka *EF* **hlavní osou** a osa úsečky *EF* **vedlejší osou** hyperboly. Dvěma bodům *A*, *B* hyperboly, které leží na její hlavní ose, říkáme **vrcholy** hyperboly. Vzdálenost vrcholu hyperboly od středu nazýváme **hlavní poloosa** *a* hyperboly, vzdálenost ohniska od středu pak **výstřednost** (**excentricita**) *e* hyperboly. Hyperbola se skládá ze dvou **větví**. Jedna z nich je ta, která na *obr. 5.20* obsahuje vrchol *A*, druhá potom vrchol *B*.

Přímky $y = kx + c$, které procházejí středem hyperboly a mají směrnici $|k| = \frac{b}{a}$ se nazývají **asymptoty** hyperboly. Jsou-li asymptoty navzájem kolmé, hyperbola se nazývá **rovnoosá**. Asymptoty hyperboly mají zajímavou vlastnost. Jejich vzdálenost od větví hyperboly se blíží k nule, ale nemají s ní žádný společný bod. Pokud bychom na *obr. 5.21* obě větvě hyperboly a její asymptoty prodloužili donekonečna, viděli byste, že větve hyperboly se k asymptotám neustále přibližují, ale nikdy se jich nedotknou.



Obr. 5.21: Asymptoty hyperboly

Definice

Rovnice

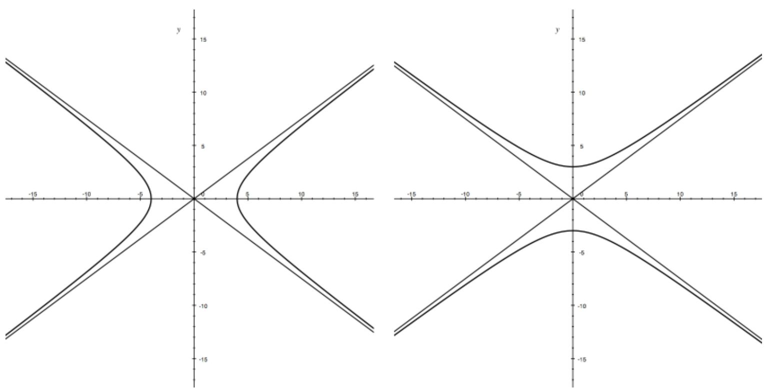
$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1,\ \text{resp.}\ \frac{(y-n)^2}{b^2}-\frac{(x-m)^2}{a^2}=1;\ a\cdot b\neq 0,$$

nazýváme ***středové rovnice*** *hyperboly se středem S[m; n] a vrcholy A[m + a; n], B[m − a; n], resp. A[m; n + a], B[m; n − a] a výstředností* $e=\sqrt{a^2+b^2}$.

Hyperbola s rovnicí $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$ má hlavní osu rovnoběžnou s osou *x*.

Hyperbola s rovnicí $-\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$ má hlavní osu rovnoběžnou s osou *y*.

Na *obr. 5.22* je vlevo hyperbola s rovnicí $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ vpravo potom hyperbola s rovnicí $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.



Obr. 5.22: Různé hyperboly

Poznámka

Asymptoty odpovídající rovnicím hyperboly v definici středové rovnice hyperboly jsou přímky

$$\frac{x-m}{a}=\pm\frac{y-n}{b}.$$

Všimněte si, že asymptoty jsou jsou pro obě hyperboly stejné, jen poloha hyperboly se vzhledem k asymptotám liší.

Příklad 5.18

Určete středovou rovnici a asymptoty hyperboly se středem $S[2; -1]$, ohniskem $E[7; -1]$ a vrcholem $A[5; -1]$.

Řešení

Ze souřadnic středu a vrcholu můžeme snadno spočítat hlavní poloosu *a*. Ze souřadnic středu a ohniska pak výstřednost *e*, zadané hyperboly. Platí:

$a = |SA| = 3$,
$e = |SE| = 5$.

Z hodnot a a e můžeme dopočítat koeficient b, který potřebujeme znát, abychom mohli vyjádřit středovou rovnici hyperboly:

$b = \sqrt{e^2 - a^2}$.

Zbývá zvolit správný tvar její středové rovnice. Ze souřadnic bodů S a E vyčteme, že hlavní osa hyperboly je rovnoběžná s osou x[48]. Zadaná hyperbola má rovnici:

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1.$$

Rovnice

$$\frac{(x-2)}{3} = \pm\frac{(y+1)}{4},$$

odpovídají asymptotám zadané hyperboly. Upravíme-li je, získáme:

$4x - 3y - 11 = 0$,
$4x + 3y - 5 = 0$.

Definice

*Středová rovnice hyperboly upravená do tvaru $px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0$; $p, q, r, s \in \mathbb{R}$, $p \cdot q < 0$, se nazývá **obecná rovnice** hyperboly.*

Poznámka
Ne každá rovnice v tomto tvaru je rovnice hyperboly.

Příklad 5.19
Najděte střed, ohniska, hlavní vrcholy a asymptoty hyperboly, dané rovnicí: $9x^2 - 90x - 16y^2 - 96y +$ $+ 225 = 0$.

Řešení
Upravíme obecnou rovnici na středovou, ze které dokážeme celou řadu údajů přímo vyčíst.

$9(x^2 - 10x) - 16(y^2 + 6y) + 225 = 0$,
$9(x^2 - 10x + 25) - 9 \cdot 25 - 16(y^2 + 6y + 9) + 16 \cdot 9 + 225 = 0$,
$9(x - 5)^2 - 16(y + 3)^2 = -144$,
$$-\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1.$$

Z této rovnice určíme souřadnice středu hyperboly, její hlavní a vedlejší poloosu. Střed S má souřadnice $S[5; -3]$, hlavní poloosa $a = 4$, vedlejší poloosa $b = 3$. Z a a b dopočítáme výstřednost $e = \sqrt{16 + 9} = 5$. Tvar středové rovnice odpovídá hyperbole, jejíž hlavní osa je rovnoběžná s osou y. To

[48] **Nápověda:** Body S a E mají stejnou y-ovou souřadnici.

nám stačí k určení souřadnic ohnisek E, F a hlavních vrcholů A, B; $E[5; 2]$, $F[5; -8]$, $A[5; 0]$ a $B[5; -6]$.

Rovnice asymptot získáme úpravou rovnic

$$\frac{x-5}{4} = \pm\frac{y+3}{3}.$$

Ty upravíme na:

a_1: $3x - 4y - 27 = 0$,

a_2: $3x + 4y - 3 = 0$.

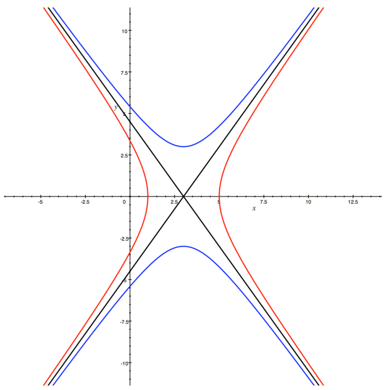
Úloha

Napište obecnou rovnici hyperboly s asymptotami a_1: $3x + 2y - 9 = 0$, a_2: $3x - 2y - 9 = 0$ a vrcholem $A[3; 3]$.

Řešení

- Rovnice asymptot můžeme zapsat jako
  $3x - 9 = \pm 2y$.
  Rovnice asymptot upravíme do tvaru $\frac{x-m}{a} = \pm\frac{y-n}{b}$. Na levé i pravé straně potřebujeme mít koeficienty u neznámých x a y rovny zlomku s čitatelem 1. Rovnice tedy vydělíme 3·2 a získáme:
  $$\frac{3x-9}{6} = \pm\frac{2y}{6},$$
  $$\frac{x-3}{2} = \pm\frac{y}{3}.$$

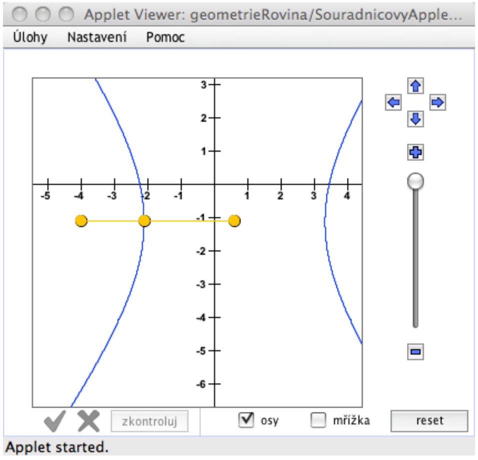
- To jsou rovnice asymptot dvou různých hyperbol s rovnicemi
  $$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{y^2}{9} = \pm 1.$$



  O kterou z těchto hyperbol se jedná, zjistíme, pokud do nich dosadíme souřadnice vrcholu A. Z uvedených dvou rovnic je splněna jen rovnice
  $$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1.$$
  To je rovnice hyperboly se středovou rovnicí:
  $$-\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

- Rovnici roznásobíme a upravíme na obecný tvar:
  $-9(x-3)^2 + 4y^2 = 36$,

$-9x^2 + 54x - 81 + 4y^2 = 36,$
$9x^2 - 4y^2 - 54x + 117 = 0.$



Vzájemná poloha hyperboly a přímky

V rovině mohou nastat tři různé vzájemné polohy hyperboly H a přímky p: nemají žádný společný bod, mají jeden společný bod nebo mají dva společné body.

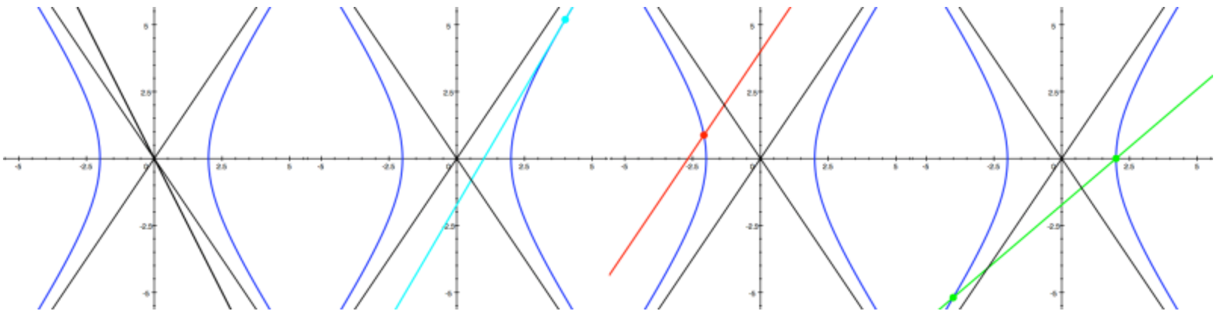
- $p \cap H = \emptyset$
  Přímka p nemá s hyperbolou H žádný společný bod.

- $p \cap H = \{T\}$
  Přímka p má s hyperbolou H právě jeden společný bod, bod T.

  Pokud je přímka p různoběžná s asymptotami hyperboly, nazýváme ji **tečnou** hyperboly H.

  Pokud je přímka p rovnoběžná s některou z asymptot hyperboly H, tečnou jí nenazýváme.

- $p \cap H = \{X, Y\}$
  Přímka hyperbolou prochází a protíná ji v bodech X a Y. Přímku p nazýváme **sečnou** hyperboly H.



Obr. 5.23: Vzájemná poloha přímky a hyperboly

Příklad 5.20

Určete počet společných bodů hyperboly H: $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ a přímky p: $x + 3y - 1 = 0$.

Řešení

Z rovnice přímky vyjádříme $x = 1 + 3y$ a dosadíme do rovnice hyperboly:

$$\frac{(1+3y+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$$

Získanou kvadratickou rovnici upravíme na

$4(9y^2 - 6y + 1) - 9(y^2 - 2y + 1) = 36,$
$27y^2 - 6y - 41 = 0.$

Z diskriminantu této rovnice určíme počet jejích řešení a tím zároveň počet průsečíků hyperboly H a přímky p.

$D = 36 - 4 \cdot 27 \cdot (-41) = 4\,464.$

$D > 0$, rovnice má dvě různá řešení. To znamená, že hyperbola H a přímka p mají dva společné body.

Příklad 5.21

Je dána přímka p: $4x - 15y - 4 = 0$ a hyperbola H: $\frac{(x-1)^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$. Určete jejich vzájemnou polohu a společné body, pokud existují.

Řešení

Podobně jako v *příkladě 5.20* si nejprve z rovnice přímky p vyjádříme x:

$$x = \frac{15y+4}{4}.$$

Dosadíme do rovnice hyperboly H a řešíme kvadratickou rovnici:

$$\frac{\left(\frac{15y+4}{4} - 1\right)^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

$$\frac{\left(\frac{15y}{4}\right)^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

$$\frac{225y^2}{16} - 9y^2 = 81,$$

$81y^2 = 896,$
$y^2 = 16,$
$y_{1,2} = \pm 4.$

Rovnice má dvě řešení, proto je přímka p sečnou hyperboly H. Jejich průsečíky jsou body $P_1[16; 4]$ a $P_2[-14; 4]$, jejichž x-ové souřadnice získáme dosazením hodnot $y_{1,2}$ do rovnice přímky p.

Věta

Rovnice

$$\frac{(x_0 - m)(x - m)}{a^2} - \frac{(y_0 - n)(y - n)}{b^2} = \pm 1,$$

je rovnicí tečny k hyperbole s rovnicí

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = \pm 1,$$

v bodě $X_0[x_0; y_0]$.

Důkaz

Tečna k hyperbole v nějakém bodě X_0 musí splňovat následující podmínky:

- *Musí to být přímka, která obsahuje bod X_0.*
- *Bod X_0 musí být jediným společným bodem této přímky a hyperboly.*
- *Daná přímka nesmí být rovnoběžná s asymptotami příslušné hyperboly.*

Větu budeme dokazovat pro hyperbolu s rovnicí $\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$*. Ukážeme, že přímka* $\frac{(x_0 - m)(x - m)}{a^2} - \frac{(y_0 - n)(y - n)}{b^2} = 1$ *všechny tři výše uvedené podmínky splňuje.*

Nejprve upravíme rovnici $\frac{(x_0 - m)(x - m)}{a^2} - \frac{(y_0 - n)(y - n)}{b^2} = 1$*:* **(5.6)**

$b^2(x - m)(x_0 - m) - a^2(y - n)(y_0 - n) = a^2b^2,$
$xb^2(x_0 - m) - ya^2(y_0 - n) - b^2mx_0 + b^2m^2 + a^2y_0n - a^2n^2 = a^2b^2.$

*Protože buď $b^2(x_0 - m)$ nebo $a^2(y_0 - n)$ jsou různé od nuly, jedná se o rovnici přímky s normálovým vektorem $\mathbf{n} = (b^2(x_0 - m); a^2(y_0 - n))$. Budeme zkoumat, zda na této přímce leží bod X_0. Dosadíme-li do rovnice **(5.6)** souřadnice bodu X_0, získáme*

$$\frac{(x_0 - m)(x_0 - m)}{a^2} - \frac{(y_0 - n)(y_0 - n)}{b^2} = 1,$$

$$\frac{(x_0 - m)^2}{a^2} - \frac{(y_0 - n)^2}{b^2} = 1.$$

To platí, protože bod X_0 je zároveň bodem hyperboly s rovnicí

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1.$$

Teď ukážeme, že zkoumaná přímka není rovnoběžná s asymptotami dané hyperboly. Rovnice asymptot jsou

$$\frac{(x - m)}{a} = \pm\frac{(y - n)}{b},$$

$bx - bm \pm (ay - an) = 0.$

Jejich normálové vektory jsou $\mathbf{n}_{a1,\ a2} = (b;\ \pm a)$. *Jak už jsme zjistili výše, zkoumaná přímka má normálový vektor* $\mathbf{n} = (b^2(x_0 - m);\ a^2(y0 - n))$. *Přímka by s některou z asymptot byla rovnoběžná právě tehdy, kdyby normálový vektor přímky byl násobkem normálového vektoru této asymptoty.*

Budeme dokazovat sporem. Kdyby zkoumaná přímka byla rovnoběžná s některou z asymptot, muselo by existovat číslo $k \in \mathbb{R}$*, pro které by platilo:*

$b^2\,(x_0 - m) = kb \wedge (a^2(y_0 - n) = ka \vee a^2(y_0 - n) = -ka)$. ***(5.7)***

Z první rovnosti můžeme vyjádřit $k = b(x_0 - m)$. *Dosadíme-li do dalších dvou rovností za k, zjistíme, že by měla platit jedna z následujících rovností:*

$$(y_0 - n) = \pm\frac{b}{a}(x_0 - m).$$

Víme, že bod X_0 *je bodem hyperboly, musí tedy platit*

$$\frac{(x_0 - m)^2}{a^2} - \frac{(y_0 - n)^2}{b^2} = 1.$$

Dosadíme-li do této rovnice za $(y_0 - n)$*, získáme*

$$\frac{(x_0 - m)^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}(x_0 - m)^2\frac{1}{b^2} = 1,$$

$0 = 1.$

Tím jsme došli ke sporu, můžeme tedy říci, že neexistuje číslo $k \in \mathbb{R}$*, pro které by vztah* ***(5.7)*** *platil a zkoumaná přímka proto není rovnoběžná s asymptotami.*

Zbývá dokázat, že přímka $b^2(x_0 - m)(x - m) - a^2(y_0 - n)(y - n) = a^2b^2$ *má s hyperbolou jen jeden společný bod. Z rovnice přímky vyjádříme například* $(x - m)$:

$$(x - m) = \frac{a^2b^2 + a^2(y_0 - n)(y - n)}{b^2(x_0 - m)}.$$

Za $(x - m)$ *dosadíme do rovnice hyperboly a řešíme kvadratickou rovnici:*

$$\frac{\left(\dfrac{a^2b^2 + a^2(y_0 - n)(y - n)}{b^2(x_0 - m)}\right)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{a^4b^4 + 2a^4b^2(y_0 - n)(y - n) + a^4(y_0 - n)^2(y - n)^2}{a^2b^4} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1,$$

$a^2b^4 + 2b^2a^2(y_0 - n)(y - n) + a^2(y_0 - n)^2(y - n)^2 - b^2(x_0 - m)^2(y - n)^2 = b^4(x_0 - m)^2.$

Provedeme substituci $t = y - n$ *a dalšími úpravami se propracujeme k*

$t^2((y_0 - n)^2a^2 - b^2(x_0 - m)^2) + t(2a^2b^2(y_0 - n)) + b^4(a^2 - (x_0 - m)^2) = 0.$

Diskriminant této rovnice je:

$D = (2a^2b^2(y_0 - n))^2 - 4((y_0 - n)^2a^2 - b^2(x_0 - m)^2)b^4(a^2 - (x_0 - m)^2) = 4a^4b^4(y_0 - n)^2 - 4b^4(y_0 - n)^2a^4 + 4b^4a^2(y_0 - n)^2(x_0 - m)^2 + 4b^6a^2(x_0 - m)^2 - 4b^6(x_0 - m)^4 = 4b^4((y_0 - n)^2(x_0 - m)^2a^2 + a^2(x_0 - m)^2b^2 - b^2(x_0 - m)^4) = 4b^4(x_0 - m)^2((y_0 - n)^2a^2 + a^2b^2 - b^2(x_0 - m)^2).$

Z rovnice hyperboly víme, že $a^2b^2 = b^2(x_0 - m)^2 - a^2(y_0 - n)^2$, *tedy*

$D = 4b^4(x_0 - m)^2((y_0 - n)^2a^2 + b^2(x_0 - m)^2 - a^2(y_0 - n)^2 - b^2(x_0 - m)^2) = 0.$

Rovnice má jedno dvojnásobné řešení. To znamená, že zkoumaná přímka má s hyperbolou právě jeden společný bod a tím je, jak jsme již dříve dokázali, bod $X_0[x_0; y_0]$.

Příklad 5.22

Napište rovnici tečny hyperboly $4x^2 - 5y^2 - 24x - 20y - 4 = 0$ v jejím bodě $T[8; -6]$.

Řešení

Obecnou rovnici hyperboly převedeme na rovnici středovou:

$4(x^2 - 6x + 9 - 9) - 5(y^2 + 4y + 4 - 4) = 4,$
$4(x - 3)^2 - 5(y + 2)^2 - 36 + 20 = 4,$
$4(x - 3)^2 - 5(y + 2)^2 = 20,$
$\frac{(x-3)^2}{5} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$

Rovnici tečny hyperboly v bodě T určíme z dokázané věty. Je to:

$\frac{(x-3)(8-3)}{5} - \frac{(y+2)(-4+2)}{4} = 1,$

$20(x - 3) + 10(y + 2) = 20,$
$20x - 60 + 10y + 20 = 20,$
$2x + y - 6 = 0.$

Úloha

Najděte průsečíky tečny hyperboly H: $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{8} = 1$ v bodě $T[4; -3]$ s přímkami p: $x - 4y + 12 = 0$ a q: $-x + y + 2 = 0$.

Řešení

- Tečna t k hyperbole H v bodě T má rovnici:
  $\frac{(x+2)(4+2)}{4} - \frac{(y-5)(-3-5)}{8} = 1,$
  $\frac{6(x+2)}{4} + \frac{8(y-5)}{8} = 1,$
  $12(x + 2) + 8(y - 5) = 8,$
  $12x + 8y - 24 = 0,$
  t: $3x + 2y - 6 = 0.$

- Hledáme průsečíky dvojic přímek t, p a t, q.
  $t \cap p$:
  $3x + 2y - 6 = 0,$
  $x - 4y + 12 = 0.$
  První rovnici vynásobíme dvěma a přičteme k druhé. Získáme
  $7x + 0 = 0,$
  $x = 0.$
  Dopočítáme y-ovou souřadnici průsečíku, $y = 3$. Průsečík přímek t a p je bod $P_1[0; 3]$.

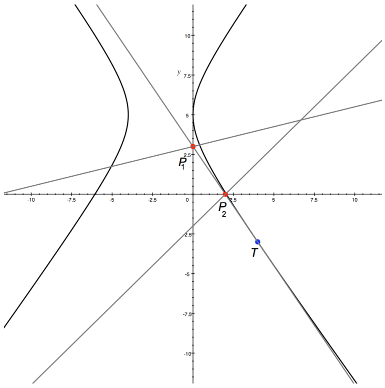
- $t \cap q$:
  $3x + 2y - 6 = 0,$

$-x + y + 2 = 0.$

Druhou rovnici vynásobíme (-2) a přičteme k první. Získáme

$5x - 10 = 0,$

$x = 2.$



Dopočítáme y-ovou souřadnici průsečíku, $y = 0$. Průsečík přímek t a q je bod $P_2[2; 0]$.

Plochy

V prostoru mimo rovin existuje i celá řada dalších ploch. Mnoho z nich vidíme každý den kolem nás:

- Na *obr. 6.1* je akvárium, jehož plášť tvoří válcová plocha, je to největší akvárium svého druhu a nachází se v Berlíně. Na *obr. 6.2* je známá rotunda na Řípu, která je tvořena hned několika válcovými plochami.
- Pláště chladících věží atomové elektrárny Temelín na *obr. 6.3* mají tvar jiné plochy – rotačního hyperboloidu. Ta byla užita i při tvorbě střední části pláště televizního vysílače a hotelu na Ještědu, známé dominanty Liberce – *obr. 6.4*.
- Celá řada církevních budov má kopule, tvořené částmi kulové plochy. Z mnohých zmíním jen Panteon v Římě, na *obr. 6.5* nebo Baziliku svatého Petra ve Vatikánu – *obr. 6.6*.

Obr. 6.1: Berlínské akvárium[49]

Obr 6.2: Rotunda na Řípu[50]

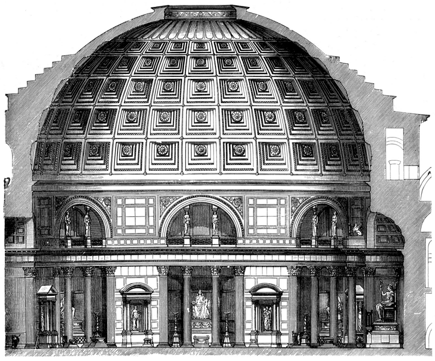
Obr. 6.3: Jaderná elektrárna Temelín[51]

49 Zdroj: http://4.bp.blogspot.com/_8DfUOJtGfL8/SKl1cRfHkJI/AAAAAAAAAUA/Vk2KjMwb6v0/s400/Aqua04.jpg.

50 Zdroj: http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Rotunda_na_Ripu.jpg.

51 Zdroj: http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Je%C5%A1t%C4%9Bd,_vys%C3%ADla%C4%8D,_pohled_od_jihu.jpg.

Obr 6.4: Ještěd[52]



Obr. 6.5: Panteon[53]

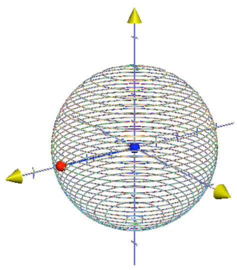
Obr 6.6: Bazilika sv. Petra[54]

Pro všechny tyto plochy bychom mohli nalézt jejich vyjádření a řešit s nimi různé úlohy. My se ale podrobněji budeme zabývat jen jednou z nich, kulovou plochou neboli sférou.

Kulová plocha

Definice

***Kulová plocha** (**sféra**) je množina všech bodů v prostoru, které mají od daného bodu, **středu** kulové plochy, danou vzdálenost, **poloměr** kulové plochy.*



Obr. 6.7: Kulová plocha

[52] Zdroj: http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:JETE-chladici_veze.jpg.

[53] Zdroj: http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Pantheon.drawing.jpg.

[54] Zdroj: http://it.wikipedia.org/wiki/File:StPetersDomePD.jpg.

Definice

Rovnice $(x-m)^2+(y-n)^2+(z-p)^2=r^2$ *se nazývá* ***středová rovnice*** *kulové plochy se středem* $S[m; n; p]$ *a poloměrem* r*.*

Příklad 6.1

Určete rovnici kulové plochy dané středem $S[1; 3; 2]$ a bodem $P[5; -1; 3]$, který na ní leží.

Řešení

Vzdálenost bodů S a P určuje poloměr r hledané kulové plochy:

$$|SP|=\sqrt{(5-1)^2+(-1-3)^2+(3-2)^2}=\sqrt{4^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{33}.$$

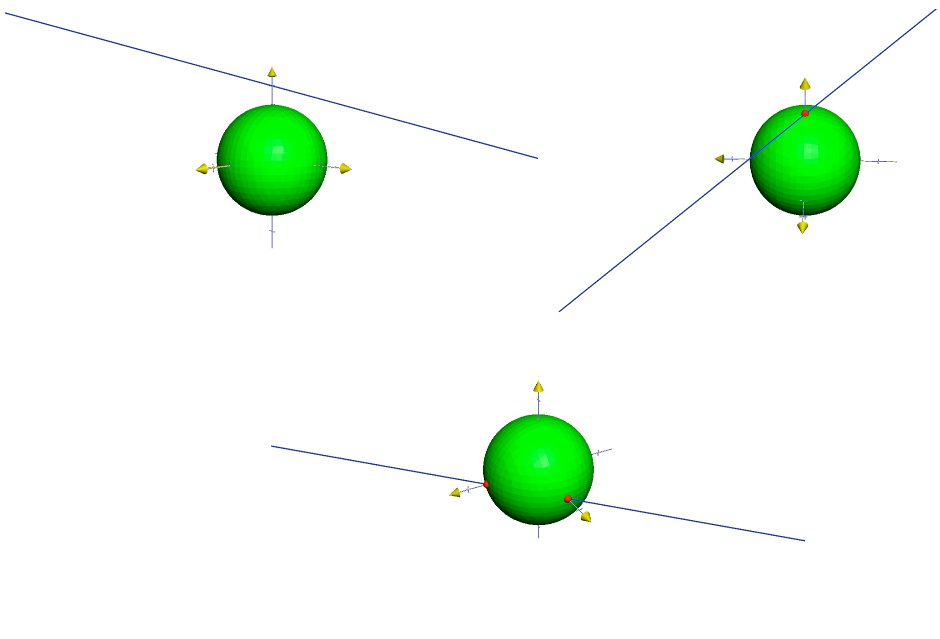
Rovnice kulové plochy se pak dá zapsat jako:

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=33.$$

Vzájemná poloha přímky a kulové plochy

Vzájemné polohy přímky p a kulové plochy Φ rozeznáváme tři. Navzájem se liší počtem společných bodů. Ty mohou být dva, jeden nebo žádný.

- $p \cap \Phi = \emptyset$
  Přímka leží mimo kulovou plochu.
- $p \cap \Phi = \{T\}$
  Přímka se kulové plochy dotýká v právě jednom bodě, je její **tečnou**. Jejich společný bod, bod T, nazýváme **bod dotyku**.
- $p \cap \Phi = \{X, Y\}$
  Přímka kulovou plochou prochází, jejich společnými body jsou body X a Y.



Obr. 6.8: Vzájemná poloha přímky a sféry

Příklad 6.2

Najděte společné body přímky $p(P;\ \boldsymbol{u})$ a kulové plochy dané rovnicí $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$, je-li $P[3; 1; 2]$ a $\boldsymbol{u} = (1; 2; -1)$.

Řešení

Nejprve si vyjádříme přímku p parametricky.

p:
$x = 3 + t,$
$y = 1 + 2t,$
$z = -t;\ t \in \mathbb{R}.$

Vyjádřené souřadnice dosadíme do rovnice sféry a získáme:

$(3 + t)^2 + (1 + 2t)^2 + (-t - 2)^2 = 4,$
$3t^2 + 7t + 5 = 0.$

Kořeny této kvadratické rovnice odpovídají hodnotám parametru t, určující hledané průsečíky. Diskriminant této rovnice je záporný:

$D = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = -11.$

Rovnice nemá žádné reálné řešení, a proto můžeme říci, že přímka p zadanou sféru neprotíná.

Vzájemná poloha roviny a kulové plochy

Rozeznáváme tři různé vzájemné polohy roviny ρ a kulové plochy Φ.

- $\rho \cap \Phi = \emptyset$
  Rovina leží mimo kulovou plochu.
- $\rho \cap \Phi = \{T\}$
  Rovina se kulové plochy dotýká, je její **tečnou rovinou**, jejich průnik, bod T, nazýváme **bod dotyku**.
- $\rho \cap \Phi = k$
  Rovina kulovou plochu protíná, jejich průnikem je potom kružnice k.

Příklad 6.3

Najděte průnik kulové plochy se středem $S[2; 0; 1]$ a poloměrem $r = 4$ s rovinou xy[55].

Řešení

Rovina xy má rovnici $z = 0$, rovnice kulové plochy je $(x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 16$. Pokud hledáme společné body, řešíme následující soustavu:

$(x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 16,$
$z = 0.$

Vyjádřené z můžeme dosadit do rovnice kulové plochy a získáme

$(x - 2)^2 + y^2 = 15.$

[55] **Nápověda:** To je rovina určená souřadnicovými osami x a y.

Průnikem zadané kulové plochy a roviny je tedy kružnice ležící v rovině *xy* se středem [2; 0; 0] a poloměrem $\sqrt{15}$.

Úlohy a testy

Úlohy I

Úloha

Určete, zda je vektor $\boldsymbol{u} = (2; 1; 6)$ lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{v} = (1; -2; 3)$ a $\boldsymbol{w} = (3; 5; 0)$.

Řešení

- Je-li náš zadaný vektor $\boldsymbol{u}$ lineární kombinací dvou vektorů $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, pak existují reálná čísla a, b tak, že $\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}$. Vektory se rovnají, jsou li stejné jejich souřadnice, hledáme tedy reálná čísla a a b taková, aby platilo $(2; 1; 6) = a(1; -2; 3) + b(3; 5; 0)$. Tedy:
  $2 = a + 3b,$
  $1 = -2a + 5b,$
  $6 = 3a.$
- Z poslední rovnice vyjádříme $a = 2$. Po dosazení do rovnice první, dopočítáme $b = 0$. Nyní je třeba dosadit spočtené hodnoty do rovnice druhé, abychom ověřili, zda je i tato splněna.
- Získáme
  $1 = -2 \cdot 2 + 5 \cdot 0,$
  $1 \neq -4.$
  Soustava tedy nemá řešení a vektor $\boldsymbol{u}$ není lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$.

Úloha

Vypočítejte velikost vektoru $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

- *Skript automaticky generující úlohy i řešení (vzhledem k odmocnině jen přibližné).*

Úloha

Pro $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$ a $\boldsymbol{v}=(v_1; v_2)$ vypočítejte $\boldsymbol{uv}$.

- *Skript automaticky generující úlohy i řešení.*

Úloha

Pro $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; v_3)$ vypočítejte $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$.

- *Skript automaticky generující úlohy i řešení.*

Úloha

Vypočítejte odchylku přímek p: $ax + by + c = 0$ a q: $dx + ey + f = 0$. Výsledek zaokrouhlete na stupně.

- *Skript automaticky generující úlohy i řešení.*

Úloha

Určete vzdálenost d přímky p určené body $P[1; -4]$, $Q[6; 8]$ od bodu $A[3; 6]$.

Řešení

- Nejprve vyjádříme přímku p její obecnou rovnicí. Určíme její směrový vektor $\boldsymbol{u}$ a z něj potom normálový vektor $\boldsymbol{n}$.
  $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{PQ} = (5; 12),$
  $\boldsymbol{n} = (12; -5).$

- Obecná rovnice přímky p má tvar:
  $12x - 5y + c = 0$.
  Dosadíme souřadnice bodu P a dopočítáme hodnotu c:
  $12 \cdot 1 - 5 \cdot (-4) + c = 0$,
  $12 + 20 + c = 0$,
  $c = -32$.
  Obecná rovnice přímky p tedy vypadá takto:
  $12x - 5y - 32 = 0$.

- Pro výpočet vzdálenosti bodu A od přímky p nám stačí jen dosadit do známého vzorce[56].
  $$d = |AP| = \frac{|12 \cdot 3 - 5 \cdot 6 - 32|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{26}{13} = 2.$$

Úloha

Určete průsečík přímek AB a CD, kde $A[1; 0]$, $B[3; 2]$, $C[-1; 5]$, $D[3; 2]$.

Řešení

- Úlohu vyřešíme paralelně s využitím parametrického vyjádření přímky v jednom sloupci a s pomocí obecné rovnice přímky ve sloupci druhém. Směrové vektory přímek AB a CD budeme označovat $\boldsymbol{u_{AB}}$ a $\boldsymbol{u_{CD}}$, normálové potom $\boldsymbol{n_{AB}}$ a $\boldsymbol{n_{CD}}$.

- **Parametrické vyjádření**
  $\boldsymbol{u_{AB}} = (2; 2)$, $\boldsymbol{u_{CD}} = (4; -3)$.

- **Určení přímky *AB*:**
  $x = 1 + 2t$,
  $y = 2t$; $t \in \mathbb{R}$.
  Určení přímky *CD*:
  $x = -1 + 4q$,
  $y = 5 - 3q$; $q \in \mathbb{R}$.

- ***P* = *AB* ∩ *CD***
  Hledání průsečíku odpovídá řešení soustavy:
  $1 + 2t = -1 + 4q$,
  $2t = 5 - 3q$.
  V druhé rovnici vyjádřené $2t$ dosadíme do první:
  $1 + 5 - 3q = -1 + 4q$,
  $q = 1$.
  Hodnota parametru $q = 1$ odpovídá v parametrickém vyjádření přímky CD souřadnicím bodu P. Dosadíme a získáme:
  $P = [3; 2]$.

Obecná rovnice
$\boldsymbol{n_{AB}} = (2; -2)$, $\boldsymbol{n_{CD}} = (3; 4)$.

Určení přímky *AB*:
$2x - 2y + c = 0$.
Po dosazení souřadnic bodu A a získáme
$2 + c = 0 \Rightarrow c = -2$,
AB: $2x - 2y - 2 = 0$,
AB: $x - y - 1 = 0$.
Určení přímky *CD*:
$3x + 4y + d = 0$.
Dosadíme souřadnice bodu C a spočteme d:
$-3 + 20 + d = 0$,
$d = -17$.
CD: $3x + 4y - 17 = 0$.

P* = *AB* ∩ *CD
Hledání průsečíku odpovídá řešení soustavy:
$x - y - 1 = 0$,
$3x + 4y - 17 = 0$.
Řešením této soustavy je $x = 3$ a $y = 2$, tedy
$P = [3; 2]$.

Úloha

Určete zda bod $A[4; 3]$ leží v polorovině určené přímkou p: $2x - y + 3 = 0$ a bodem $C[1; 2]$.

---

[56] **Nápověda:** Vzorec pro výpočet vzdálenosti.

Řešení

- Každá přímka dělí rovinu na dvě poloroviny. Dosadíme-li do levé části obecné rovnice přímky souřadnice nějakého bodu roviny, získáme buď kladné číslo, záporné číslo nebo nulu. Nulu získáme, pokud bod leží na přímce. Po dosazení souřadnic bodů jedné ze zmíněných polorovin, dostaneme kladné číslo. Pokud to budou body druhé poloroviny, bude to číslo záporné.

- Dosadíme-li souřadnice bodu C, získáme hodnotu $2 - 2 + 3 = 3$. To je kladné číslo.

- Pokud dosadíme souřadnice bodu A, získáme hodnotu $8 - 3 + 3 = 8$. To je také kladné číslo. Na základě našich úvah můžeme říci, že body A a C leží ve stejné polorovině.

Úloha

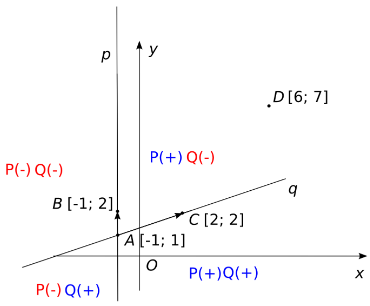
Určete, zda bod $D[6;\ 7]$ leží v úhlu BAC, $A[-1;\ 1]$, $B[-1;\ 2]$, $C[2;\ 2]$.

Řešení

- Budeme postupovat podobně jako v předchozí úloze. Přímky AB a AC rozdělují rovinu do čtyř částí. Přímku AB nazveme p a přímku AC nazveme q.

- Vyjádříme přímky p a q:
  p: $x + 1 = 0$,
  q: $x - 3y + 4 = 0$.

- Teď využijeme znalostí, které jsme získali při řešení předchozí úlohy. Na obrázku je vidět, jaké čísla bychom měli získat po dosazení souřadnic nějakého bodu do levých stran obecných rovnic přímek p a q. Aby takový bod ležel v daném úhlu, musely by nám jeho souřadnice dosazené do levé strany rovnice přímky p dát nezápornou hodnotu. U rovnice přímky q to musí být hodnota nekladná.



- Pokud dosadíme souřadnice bodu C zjistíme, že v případě přímky p získáme číslo 7 a z rovnice přímky q číslo -11. To odpovídá našim požadavkům a můžeme tedy říci, že bod C leží v úhlu BAC.

Úloha

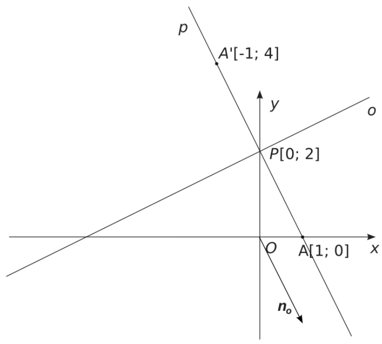
Najděte bod souměrně sdružený k bodu $A[1;\ 0]$ podle osy o: $x - 2y + 4 = 0$.

Řešení

- Hledaný bod A' leží na kolmici k ose o, která prochází bodem A. Budeme tedy hleda rovnici této kolmice. Její směrový vektor je normálovým vektorem osy o: $\boldsymbol{n_o} = (1;\ -2)$. Parametrické vyjádření hledané kolmice, kterou nazveme p, vypadá následovně:

p:
$x = 1 + t,$
$y = -2t;\ t \in \mathbb{R}.$

- Hledejme dál průsečík přímky p a osy o, prohlédněte si situaci na obrázku.



- $P = p \cap o,$
  $1 + t + 4t + 4 = 0,$
  $5t + 5 = 0,$
  $t = -1,$
  tedy $P[0; 2]$.

- Bod P leží v polovině úsečky AA', kde A' je hledaný obraz bodu A. Jak určit souřadnice středu úsečky již víme a protože známe i souřadnice bodu P, stačí ze vzorce vyjádřit souřadnice hledaného bodu A'.
  $S_{AA'} = \left[\frac{x_A + x_{A'}}{2}; \frac{y_A + y_{A'}}{2}\right] = P.$
  Dosadíme a získáme:
  $0 = \frac{1 + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = -1,$
  $2 = \frac{0 + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = 4.$

- Hledaný bod A' má souřadnice $[-1; 4]$.

Úlohy II

Úloha

Určete obecnou a parametrickou rovnici roviny ρ, která je dána body $A[2; 1; 3]$, $B[-1; 2; -1]$, $C[3; 4; 2]$.

Řešení

- Nejprve určíme parametrickou rovnici této roviny. K tomu nám stačí znát jeden bod roviny a dva její vektory (přičemž jeden nesmí být reálným násobkem druhého). Bod A známe, určíme tedy vektory $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AC}$:
  $\boldsymbol{u} = (-3; 1; -4)$,
  $\boldsymbol{v} = (1; 3; -1)$.

- Parametrickou rovnici[57] roviny ρ zapíšeme jako:
  $x = 2 - 3t + s$,
  $y = 1 + t + 3s$,
  $z = 3 - 4t - s$; $t, s \in \mathbb{R}$.

- K určení obecné rovnice musíme znát normálový vektor této roviny. Ten získáme jako vektorový součin vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$:
  $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (11; -7; -10)$.

- Obecná rovnice roviny[58] ρ je
  $11x - 7y - 10z + d = 0$.
  Po dosazení souřadnic bodu A do této rovnice, dopočítáme $d = 15$. Obecná rovnice roviny ρ je
  $11x - 7y - 10z + 15 = 0$.

Úloha

Určete obecnou rovnici roviny ρ, která prochází bodem $B[3; 2; -3]$ a která je kolmá na přímku $x = 1 - t$, $y = 2 + 2t$, $z = -t$; $t \in \mathbb{R}$.

Řešení

- Rovina, která je kolmá na přímku má normálový vektor roven směrovému vektoru této přímky. V našem případě je normálovým vektorem roviny vektor $(-1; 2; -1)$. Rovnici roviny pak můžeme psát jako:
  $-x + 2y - z + d = 0$.

- Po dosazení souřadnic bodu B, který v rovině leží, dopočítáme $d = -4$ a můžeme psát
  ρ: $-x + 2y - z - 4 = 0$,
  ρ: $x - 2y + z + 4 = 0$.

Úloha

Napište parametrickou rovnici roviny ρ, která obsahuje přímky $p(A, \boldsymbol{u})$ a $q(B, \boldsymbol{v})$, je-li $A[-2; 1; 0]$, $B[-3; 5; 1]$, $\boldsymbol{u} = (1; -1; -1)$ a $\boldsymbol{v} = (-3; 2; 3)$.

Řešení

- Přímky p a q určují rovinu, jen pokud nejsou mimoběžné, nebo totožné. Pokud zjistíme, že přímky p a q jsou rovnoběžné různé, nebo různoběžné, rovnici roviny ρ budeme moci snadno vyjádřit ze

[57] **Odkaz:** Parametrická rovnice roviny.

[58] **Odkaz:** Obecná rovnice roviny.

souřadnic bodu A nebo B a vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. Budou-li přímky p a q mimoběžné, pak neexistuje žádná rovina, která by obě dvě obsahovala, kdyby byly totožné, tak by jich naopak bylo nekonečně mnoho.

- Ze souřadnic vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je vidět, že přímky p a q nejsou rovnoběžné[59], mohou tedy být jen různoběžné, nebo mimoběžné. Určíme jejich parametrické rovnice:

p:	q:
$x = -2 + t,$	$x = -3 - 3r,$
$y = 1 - t,$	$y = 5 + 2r,$
$z = -t;\ t \in \mathbb{R}.$	$z = 1 + 3r;\ r \in \mathbb{R}.$

- Abychom rozlišili, zda $p \times q$ nebo $p \not\times q$, musíme zjistit, kolik mají společných bodů. Hledáme takové body, které leží jak na přímce p, tak na přímce q. Řešíme soustavu tří rovnic o dvou neznámých:
  $-2 + t = -3 - 3r,$
  $1 - t = 5 + 2r,$
  $-t = 1 + 3r.$

- Pokud by tato soustava měla jedno řešení, přímky jsou různoběžné, nebude-li mít žádné, přímky jsou mimoběžné. Z poslední rovnice vyjádříme $t = -3r - 1$ a dosadíme do druhé rovnice:
  $1 + 3r + 1 = 5 + 2r,$
  $r = 3.$

- Dopočítáme vyjádřené $t = -10$ a do první rovnice dosadíme $r = 3$ a $t = -10$:
  $-2 - 10 = -3 - 9,$
  $-12 = -12.$

- To platí. Ukázali jsme, že soustava má právě jedno řešení $r = 3$, $t = -10$, tedy $p \times q$. Protože jsou přímky p a q různoběžné, leží v jedné rovině. Tou je hledaná rovina ρ. Její parametrickou rovnici určíme ze souřadnic bodu A a vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ jako
  ρ:
  $x = -2 + f - 3s,$
  $y = 1 - f + 2s,$
  $z = -r + 3f;\ f, s \in \mathbb{R}.$

Úloha

Jsou dány body $A[-1; 0; 3]$, $B[-1; 3; -2]$ a vektory $\boldsymbol{u} = (1; 2; 2)$ a $\boldsymbol{v} = (-2; 3; 1)$. Určete vzájemnou polohu přímek $p(A, \boldsymbol{u})$ a $q(B, \boldsymbol{v})$.

Řešení

- Podíváme-li se na směrové vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ zadaných přímek, vidíme, že vektor $\boldsymbol{u}$ není reálným násobkem vektoru $\boldsymbol{v}$. To napovídá, že přímky p a q jsou buď různoběžné, nebo mimoběžné. Pokud jsou mimoběžné, nemají žádný společný bod, pokud jsou různoběžné, mají společný bod jeden.
  Hledáme společné body přímek p a q:

p:	q:
$x = -1 + t,$	$x = -1 - 2s,$
$y = 2t,$	$y = 3 + 3s,$
$z = 3 + 2t;\ t \in \mathbb{R}.$	$z = -2 + s;\ s \in \mathbb{R}.$

- Abychom určili společné body p a q, musíme vyřešit soustavu:
  $-1 + t = -1 - 2s,$
  $2t = 3 + 3s,$
  $3 + 2t = -2 + s.$

---

[59] **Nápověda:** Vektor $\boldsymbol{u}$ není reálným násobkem vektoru $\boldsymbol{v}$.

- Z první rovnice vyjádříme $t = -2s$. Dosadíme za t do třetí rovnice a vypočítáme $s = 1$. Dopočítáme $t = -2$ a spočtené hodnoty parametrů s a t dosadíme do druhé rovnice:
  $-4 = 3 + 3$,
  $-4 = 6$.

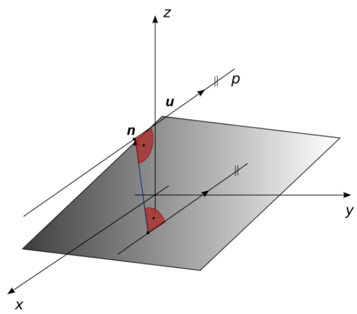
- To neplatí pro žádné hodnoty parametrů s a t. Soustava nemá žádné řešení, a to znamená, že přímky p a q nemají žádný společný bod a mohou být buď rovnoběžné různé nebo mimoběžné. S přihlédnutím k úvaze na začátku řešení můžeme říci, že přímky p a q jsou mimoběžné.

Úloha

Určete vzájemnou polohu přímky $p(A, \boldsymbol{u})$ a roviny δ: $3x - y + 2z - 4 = 0$, je-li $A[2; -1; 2]$ a $\boldsymbol{u} = (2; 3; 2)$.

Řešení

- Nejprve zkontrolujeme, zda je vektor $\boldsymbol{u}$ kolmý na normálový vektor roviny δ, vektor $\boldsymbol{n}$. Kdyby kolmý byl, znamenalo by to, že přímka p je s rovinou δ rovnoběžná.



  $\boldsymbol{un} = 2\cdot3 + 3\cdot(-1) + 2\cdot2 = 7$.

- Vektor $\boldsymbol{u}$ není na $\boldsymbol{v}$ kolmý, to znamená, že přímka p je s rovinou δ různoběžná a má smysl hledat jejich průsečík. Obecnou rovnici roviny δ už známe, stačí najít parametrické vyjádření přímky p:
  p:
  $x = 2 + 2t$,
  $y = -1 + 3t$,
  $z = 2 + 2t$; $t \in \mathbb{R}$.

- Do obecné rovnice roviny δ dosadíme za x, y, z vztahy z parametrické rovnice přímky p:
  $3(2 + 2t) - (-1 + 3t) + 2(2 + 2t) - 5 = 0$,
  $6 + 6t + 1 - 3t + 4 + 4t - 4 = 0$,
  $7t = -7$,
  $t = -1$.
  To je hodnota parametru t odpovídající průsečíku roviny δ a přímky p. Odpovídá mu bod $P[0; -4; 0]$.

Úloha

Určete vzájemnou polohu přímky $p(A, \boldsymbol{u})$ a roviny ρ: $3x - 2y - z + 2 = 0$, je-li $A[1; 2; 1]$ a $\boldsymbol{u} = (3; 3; 3)$.

Řešení

- Nejprve zkontrolujeme, zda je vektor $\boldsymbol{u}$ kolmý na normálový vektor $\boldsymbol{n} = (3; -2; -1)$ roviny ρ:
  $\boldsymbol{un} = 3\cdot3 + 3\cdot(-2) + 3\cdot(-1) = 0$.
  To znamená, že přímka p je s rovinou ρ rovnoběžná různá nebo v ní leží. Pokud by byla rovnoběžná různá, nemohl by v rovině ρ ležet žádný její bod. Pokud by tam nějaký ležel, nutně by tam musela

ležet celá přímka. Do obecné rovnice roviny ρ dosadíme souřadnice bodu A, abychom zjistili, zda $A \in \rho$.

- Získáme
  $3 - 4 - 1 + 2 = 0$,
  $0 = 0$.
  Bod A leží v rovině ρ, proto i přímka p leží v rovině ρ.

Úloha

Určete vzájemnou polohu rovin ρ: $2x - 6y + z + 1 = 0$ a φ: $x + 3y + 2z - 4 = 0$.

Řešení

- Nejprve zjistíme, zda jsou roviny ρ a φ rovnoběžné, nebo různoběžné. Určíme normálový vektor roviny ρ, $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\rho}} = (2; -6; 1)$ a normálový vektor roviny φ, $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\varphi}} = (1; 3; 2)$. Je vidět, že $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\rho}}$ není násobkem $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\varphi}}$ a roviny ρ a φ jsou proto různoběžné. Má tedy smysl hledat jejich průsečnici[60]. Řešíme soustavu dvou rovnic o třech neznámých:
  $2x - 6y + z + 1 = 0$,
  $x + 3y + 2z - 4 = 0$.

- Proměnnou y zvolíme za parametr, $y = t$ a řešíme soustavu:
  $2x - 6t + z + 1 = 0$,
  $x + 3t + 2z - 4 = 0$.

- Z druhé rovnice vyjádříme $x = 4 - 2z - 3t$ a dosadíme do rovnice první:
  $2(4 - 2z - 3\mathrm{t}) - 6\mathrm{t} + z + 1 = 0$,
  $8 - 4z - 6t - 6t + z + 1 = 0$,
  $9 - 3z - 12t = 0$,
  $-3z = 12t - 9$,
  $z = 3 - 4t$.
  Zpětně dopočítáme $x = 4 - 2(3 - 4t) - 3t = -2 + 5t$. Soustava má nekonečně mnoho řešení, které jsou závislé na různých hodnotách parametru t. Zvolený parametr t, je vlastně parametrem v rovnici průsečnice p rovin ρ a φ.
  p:
  $x = -2 + 5t$,
  $y = t$,
  $z = 3 - 4t$, $t \in \mathbb{R}$.

Úloha

Najděte průsečnici p rovin ρ: $x - 4y + 4z = 0$ a φ: $2x - y + z - 7 = 0$.

Řešení

- Ze zadání plyne, že bychom měli hledat průsečnici rovin ρ a φ. Kontrolou jejich normálových vektorů se ujistíme, že zadání má smysl a že roviny jsou různoběžné:
  $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\rho}} = (1; -4; 4)$,
  $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\varphi}} = (2; -1; 1)$.

- Je vidět, že $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\rho}}$ není násobkem $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\varphi}}$, roviny ρ a φ jsou různoběžné a má smysl hledat jejich průsečnici. Vyřešíme soustavu dvou rovnic o třech neznámých:
  $x - 4y + 4z = 0$,
  $2x - y + z - 7 = 0$.

[60] **Nápověda:** Přímku, která je oběma rovinám společná.

- Proměnnou y zvolíme za parametr, $y = t$ a vypočítáme soustavu:
  $x - 4t + 4z = 0,$ **(1)**
  $2x - t + z - 7 = 0.$

- Od druhé rovnice odečteme dvojnásobek první a získáme:
  $7t - 7z - 7 = 0,$
  $z = -1 + t.$

- Po dosazení do **(1)** dopočítáme $x = 4$. Můžeme zapsat rovnici průsečnice p jako
  $x = 4,$
  $y = t,$
  $z = -1 + t, t \in \mathbb{R}.$

Úloha

Spočítejte odchylku dvou přímek $p(A; \boldsymbol{u})$ a $q(B; \boldsymbol{v})$, je-li $A[a_1; a_2; a_3]$, $B[b_1; b_2; b_3]$, $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; v_3)$.

Skript automaticky generující úlohy i řešení.

Úloha

Spočítejte odchylku přímky $p(A; \boldsymbol{u})$ a roviny ρ: $ax + by + cz + d = 0$, je-li $A[a_1; a_2; a_3]$, a $\boldsymbol{u} =$ $= (u_1; u_2; u_3)$.

Skript automaticky generující úlohy i řešení.

Úloha

Spočítejte odchylku rovin ρ: $ax + by + cz + d = 0$ a σ: $ex + fy + gz + h = 0$.

Skript automaticky generující úlohy i řešení.

Úloha

Určete vzdálenost bodu B od přímky $p(A, \boldsymbol{u})$, jestliže $A[-2; 1; -2]$, $B[3; 4; -3]$ a $\boldsymbol{u} = (2; 1; 1)$.

Řešení

- Bodem B povedeme rovinu kolmou na přímku p. Ta přímku p protne v nějakém bodě Y. Vzdálenost $|BY|$ je vzdálenost bodu B od přímky p.

- Normálový vektor roviny kolmé na přímku p je směrovým vektorem přímky p, tedy $\boldsymbol{u} = (2; 1; 1)$. Její obecná rovnice je $2x + y + z + e = 0$. Koeficient e určíme po dosazení souřadnic bodu B do této rovnice:
  $2 \cdot 3 + 4 - 3 + e = 0,$
  $e = -7.$

- Rovnice přímky p je:
  $x = -2 + 2t,$
  $y = 1 + t,$
  $z = -2 + t; t \in \mathbb{R}.$

- Hledáme bod Y, který je průsečíkem roviny $2x + y + z - 7 = 0$ a přímky p:
  $2(-2 + 2t) + (1 + t) + (-2 + t) - 7 = 0,$
  $-4 + 4t + 2t - 8 = 0,$
  $6t = 12,$
  $t = 2.$

- Bod Y leží na přímce p a jeho souřadnice odpovídají hodnotě parametru $t = 2$. Bod Y má souřadnice $Y[2; 3; 0]$.
  $d = |Bp| = |YB| = \sqrt{5^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{35}.$

Úloha

Spočítejte vzdálenost bodu $B[b_1; b_2; b_3]$ od roviny φ: $ax + by + cz + d = 0$.

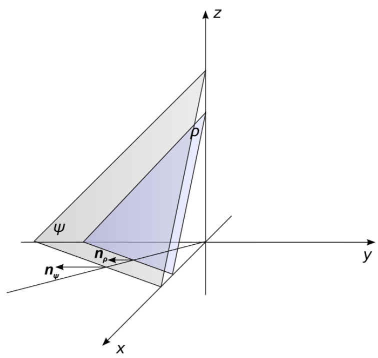
Skript automaticky generující úlohy i řešení.

Úloha

Vypočítejte vzdálenost rovin ρ: $2x - y + z - 5 = 0$ a ψ: $4x - 2y + 2z - 13 = 0$.

Řešení

- Vzdálenost dvou rovin v prostoru se počítá podobně jako vzdálenost dvou přímek v rovině[61]. Pokud jsou roviny různoběžné, je jejich vzdálenost rovna nule. Jsou-li rovnoběžné, je jejich vzdálenost rovna vzdálenosti libovolného bodu jedné z nich od té druhé. Roviny ρ a ψ jsou rovnoběžné, protože pro jejich normálové vektory, které získáme z obecné rovnice $\boldsymbol{n_\rho} = (2; -1; 1)$ a $\boldsymbol{n_\psi} = (4; -2; 2)$ platí $\boldsymbol{n_\psi} = 2\boldsymbol{n_\rho}$.



- Vzdálenost d rovin ρ a ψ je rovna vzdálenosti libovolného bodu roviny ρ od roviny ψ. Za bod roviny ρ zvolme například bod $A[1; 2; 5]$. Jeho vzdálenost od roviny ψ vypočítáme ze vzorce[62] jako
  $d = |A\psi| = \dfrac{|4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 - 13|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2}} = \dfrac{8}{\sqrt{24}} = \dfrac{8\sqrt{24}}{24} \approx 1{,}63.$

Úloha

Vypočítejte vzdálenost přímek $p(A, \boldsymbol{u})$, $q(B, \boldsymbol{v})$, jestliže $A[2; -1; -1]$, $B[5; 1; 3]$, $\boldsymbol{u} = (2; 0; 1)$ a $\boldsymbol{v} = (4; 0; 2)$.

Řešení

- Ze souřadnic směrových vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je vidět, že přímky p a q jsou rovnoběžné. Platí, že $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{u}$. Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek p, q se rovná vzdálenosti libovolného bodu přímky p od přímky q. Bod, jehož vzdálenost od přímky q budeme počítat, může být například bod A.
- Bodem A povedeme rovinu ρ kolmou na přímku q. Ta přímku q protne v nějakém bodě Y. Vzdálenost $|AY|$ je vzdálenost bodu A od přímky q.

---

[61] **Odkaz:** Vzdálenost dvou přímek v rovině.

[62] **Odkaz:** Věta se vzorcem popisujícím výpočet vzdálenosti bodu od roviny.

- Normálový vektor roviny kolmé na přímku q je směrovým vektorem přímky q, tedy $\boldsymbol{n}_\rho = \boldsymbol{v} = (4; 0; 2)$. Její obecná rovnice je $4x + 2z + d = 0$. Koeficient d určíme po dosazení souřadnic bodu A do této rovnice:
  $4 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + d = 0,$
  $d = -6.$

- Rovnice přímky q je:
  $x = 5 + 4t,$
  $y = 1,$
  $z = 3 + 2t;\ t \in \mathbb{R}.$

- Hledáme bod Y, který je průsečíkem roviny ρ: $4x + 2z - 6 = 0$ a přímky q:
  $4(5 + 4t) + 2(3 + 2t) - 6 = 0,$
  $20 + 16t + 6 + 4t - 6 = 0,$
  $20t + 20 = 0,$
  $t = -1.$

- Bod Y leží na přímce q a jeho souřadnice odpovídají hodnotě parametru $t = -1$. Bod Y má souřadnice $Y[1; 1; 1]$. Vzdálenost d přímek p a q je rovna vzdálenosti bodů Y a A:
  $d = |pq| = |YA| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3.$

Úloha

Vypočítejte vzdálenost přímek $p(A, \boldsymbol{u})$, $q(B, \boldsymbol{v})$, je-li $A[2; 2; 0]$, $B[4; -1; 3]$, $\boldsymbol{u} = (-2; 3; 1)$ a $\boldsymbol{v} = (-1; 2; 1)$.

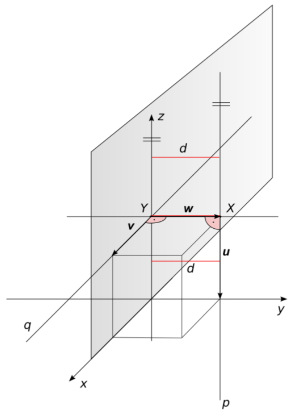
Řešení

- Přímky p a q nejsou rovnoběžné, to vidíme ze souřadnic vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, protože $\boldsymbol{u}$ není reálným násobkem vektoru $\boldsymbol{v}$. Přímky p a q mohou být různoběžné, nebo mimoběžné. Zjistíme to v závislosti na tom, kolik mají společných bodů nebo s použitím následující úvahy:
  Rovina ρ určená bodem A a vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ může nebo nemusí obsahovat bod B. Pokud bod B leží v této rovině, přímky p a q jsou různoběžné. Není-li tomu tak, jsou mimoběžné. Rovina určená bodem A a vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ má rovnici:
  $x = 2 - 2t - s,$
  $y = 2 + 3t + 2s,$
  $z = 0 + t + s;\ t, s \in \mathbb{R}.$

- Aby bod B ležel v rovině ρ, muselo by platit
  $4 = 2 - 2t - s,$
  $-1 = 2 + 3t + 2s,$
  $3 = t + s.$

- Přičteme první rovnici k poslední a vyjádříme $t = -5$. Ze třetí rovnice dopočítáme $s = 8$. Dosadíme $t = -5$, $s = 8$ do druhé rovnice:
  $-1 = 2 - 15 + 16,$
  $-1 = 3.$
  Soustava nemá řešení, z toho plyne, že bod B v rovině určené bodem A a vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ neleží. Přímky p a q jsou proto mimoběžné a jejich vzdálenost je nenulová.

- Vzdálenost dvou mimoběžných přímek je rovna minimální vzdálenosti kterýchkoliv dvou jejich bodů. Dvojice bodů, která určuje tuto vzdálenost, je právě jedna. Jsou to body $X[x_1; x_2; x_3]$ na přímce p a $Y[y_1; y_2; y_3]$ na přímce q takové, že přímka XY je kolmá jak na přímku p, tak na přímku q. Úsečka XY se nazývá **příčka** mimoběžek. Ve své úvaze můžeme jít ještě dále. Najdeme-li rovinu ρ, která obsahuje přímku p a jejímž normálovým vektorem je vektor $\boldsymbol{XY}$, zjistíme, že přímka q je s ní rovnoběžná. Vzdálenost přímky q od roviny ρ je rovna délce jejich příčky.



- Směrový vektor $\boldsymbol{w}$ příčky XY je kolmý na vektory $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$. Takový vektor získáme jako $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$: $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (1; 1; -1)$.
- Rovina ρ s normálovým vektorem $\boldsymbol{w}$ má rovnici $x + y - z + d = 0$. Má-li rovina ρ obsahovat přímku p, musí kromě $\boldsymbol{u}$ obsahovat i bod A. Do rovnice ρ dosadíme souřadnice bodu A a dopočítáme koeficient d:
  $2 + 2 + d = 0$,
  $d = -4$.
- Hledáme d vzdálenost bodu B od roviny ρ: $x + y - z - 4 = 0$:
  $$d = |BQ| = \frac{|4 - 1 - 3 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Úlohy III

Úloha

Určete charakteristiky a typ kuželosečky dané rovnicí:

1. $y^2 - 8y - 4x + 36 = 0$

2. $9x^2 - 54x + 4y^2 + 40y + 145 = 0$

3. $x^2 + 8x - 4y^2 - 8y - 4 = 0$

4. $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 11 = 0$

Řešení

1. Doplníme výraz $y^2 - 8y$ na druhou mocninu dvojčlenu $y - 4$ na:
   $y^2 - 8y + 16 - 16 - 4x + 36 = 0$,
   $(y - 4)^2 = 4x - 20$,
   $(y - 4)^2 = 4(x - 5)$.
   Rovnice určuje parabolu[63] s vrcholem $V[5; 4]$, řídicí přímkou $y = 4$ a ohniskem $E[6; 4]$.

2. Rovnici upravíme na:
   $9(x^2 - 6x + 9 - 9) + 4(y^2 + 10y + 25 - 25) + 145 = 0$,
   $9(x - 3)^2 + 4(y + 5)^2 - 81 - 100 + 145 = 0$,
   $9(x - 3)^2 + 4(y + 5)^2 = 36$,
   $$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+5)^2}{9} = 1.$$
   Rovnice určuje elipsu[64] se středem $S[3; -5]$, hlavní poloosou $a = 3$, vedlejší poloosou $b = 2$ a výstředností $e = \sqrt{5}$.

3. Rovnici upravíme na:
   $x^2 + 8x + 16 - 16 - 4(y^2 + 2y + 1 - 1) - 4 = 0$,
   $(x + 4)^2 - 4(y + 2)^2 = 16$,
   $$\frac{(x+4)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$
   Rovnice určuje hyperbolu[65] se středem $S[-4; -2]$, hlavní poloosou $a = 4$, vedlejší poloosou $b = 2$ a výstředností $e = 2\sqrt{5}$.

4. Rovnici upravíme na:
   $x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2y + 1 - 1 - 11 = 0$,
   $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$.
   Jedná se tedy o kružnici[66] se středem $S[2; -1]$ a poloměrem $r = 4$.

Úloha

Určete střed a poloměr kružnice dané rovnicí $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 4 = 0$.

Řešení

[63] **Odkaz:** Definice paraboly.

[64] **Odkaz:** Definice elipsy.

[65] **Odkaz:** Definice hyperboly.

[66] **Odkaz:** Definice kružnice.

- Doplníme výrazy $x^2 - 4x$ a $y^2 - 6y$ na druhou mocninu dvojčlenů $x - 4$ a $y - 3$ a rovnici upravíme:
  $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 - 4 - 9 + 4 = 0$,
  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 9 = 0$,
  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$.

- Střed zadané kružnice je bod $S[2; 3]$ a její poloměr $r = 3$.

Úloha

Najděte rovnici kružnice určené body $A[3; 3]$, $B[1; 5]$, $C[5; 5]$.

Řešení

- Hledaná kružnice se středem $S[m; n]$ a poloměrem r má středovou rovnici:
  $(x - m)^2 + (y - n)^2 = \mathrm{r}^2$.
  Tři nekolineární body jednoznačně určují kružnici. My využijeme souřadnic bodů A, B, C, které nekolineární[67] jsou a dosadíme je do obecné rovnice hledané kružnice. Získáme tři rovnice o třech neznámých:
  $(3 - m)^2 + (3 - n)^2 = r^2$,
  $(1 - m)^2 + (5 - n)^2 = r^2$,
  $(5 - m)^2 + (5 - n)^2 = r^2$.

- Od druhé rovnice odečteme rovnici třetí a vyjádříme hodnotu proměnné m:
  $(1 - m)^2 - (5 - m)^2 = 0$,
  $1 - 2m + m^2 - 25 + 10m - m^2$,
  $8m = 24$,
  $m = 3$.

- Odečteme od první rovnice druhou a počítáme
  $(3 - m)^2 - (1 - m)^2 + (3 - n)^2 - (5 - n)^2 = 0$.
  Hodnotu m už známe, dopočítáme tedy $n = 5$.

- Z druhé rovnice teď můžeme po dosazení $m = 3$, $n = 5$ dopočítat $r^2 = 4$. Středová rovnice kružnice, určené body A, B a C je:
  $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$.

Úloha

Určete vzájemnou polohu přímky p: $x - y + 1 = 0$ a kružnice k: $x^2 - 6x + y^2 - 2y + 1 = 0$. Pokud existují, najděte jejich společné body.

Řešení

- Z obecné rovnice přímky p vyjádříme proměnnou x:
  $x = y - 1$.

- Vyjádřenou hodnotu x dosadíme do obecné rovnice kružnice a řešíme kvadratickou rovnici:
  $(y - 1)^2 - 6(y - 1) + y^2 - 2y + 1 = 0$,
  $y^2 - 2y + 1 - 6y + 6 + y^2 - 2y + 1 = 0$,
  $y^2 - 5y + 4 = 0$,
  $y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$,
  $y_1 = 4$, $y_2 = 1$.

[67] **Odkaz:** Nekolineární body.

- Rovnice má dvě řešení. Z toho plyne, že přímka p a kružnice k mají dva společné body. Přímka p je tedy sečna kružnice k. Pro hodnoty y_1 a y_2 dopočítáme z obecné rovnice přímky p příslušné x_1 a x_2. Jejich společné body jsou $P_1[0; 1]$ a $P_2[3; 4]$.

Úloha

Najděte tečny ke kružnici k: $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 5 = 0$, které procházejí bodem $B[7; 4]$.

Řešení

- Nejprve upravíme obecnou rovnici kružnice k na její středovou rovnici:
  $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 - 4 - 1 - 5 = 0$,
  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$.

- Víme, že body dotyku kružnice a hledaných tečen leží na poláře[68] bodu B vzhledem ke k. Polára má rovnici:
  $(x - 2)(7 - 2) + (y + 1)(4 + 1) = 10$,
  $5x - 10 + 5y + 5 = 10$,
  $5x + 5y - 15 = 0$,
  $x + y - 3 = 0$.

- Hledáme průsečíky poláry a kružnice k. Z rovnice poláry můžeme vyjádřit x:
  $x = 3 - y$.

- Do středové rovnice kružnice k dosadíme za x a řešíme kvadratickou rovnici s neznámou y:
  $(3 - y - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$,
  $(1 - y)^2 + (y + 1)^2 = 10$,
  $1 - 2y + y^2 + y^2 + 2y + 1 = 10$,
  $y^2 = 4$.

- Dopočítáme $y_1 = 2$, $y_2 = -2$ a příslušné $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. Body $T_1[1; 2]$ a $T_2[5; -2]$ jsou body dotyku. Zbývá určit rovnice tečen.

  Obecná rovnice tečny kružnice k v bodě[69] T_1 je:
  $(x - 2)(1 - 2) + (y + 1)(2+ 1) = 10$,
  $x - 3y + 5 = 0$.

  Obecnou rovnice tečny kružnice k v bodě T_2 najdeme stejným způsobem:
  $(x - 2)(5 - 2) + (y + 1)(-2 + 1) = 10$,
  $3x - y - 17 = 0$.

Úloha

Najděte střed, ohniska a hlavní poloosu elipsy dané rovnicí $9x^2 + 4y^2 + 18x + 24y + 9 = 0$.

Řešení

- Nejprve obecnou rovnici upravíme na rovnici středovou:
  $9x^2 + 18x + 9 + 4y^2 + 24y + 36 - 9 - 36 + 9 = 0$,
  $9(x^2 + 2x + 1) + 4(y^2 + 6y + 9) = 36$,
  $9(x + 1)^2 + 4(y + 3)^2 = 36$,
  $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$.

[68] **Odkaz:** Definice poláry bodu vzhledem ke kružnici.

[69] **Odkaz:** Věta o rovnici tečny kružnice v jejím libovolném bodě.

Ze středové rovnice snadno určíme jak střed elipsy, tak její hlavní a vedlejší poloosu. Navíc rozpoznáme i její orientaci a jsme tak schopni určit souřadnice ohnisek.

- Hlavní poloosa je rovnoběžná s osou y, což nám také napovídá, kde hledat ohniska E a F. Z rovnice určíme hlavní poloosu $a = 3$, vedlejší poloosu $b = 2$ a střed elipsy $S[-1; -3]$. Dopočítáme výstřednost $e = \sqrt{7}$. Zbývá určit ohniska E a F. Jelikož víme, jak je elipsa orientována, můžeme ohniska jednoduše určit z výstřednosti a souřadnic středu:
  $E = [-1; -3 + e]$,
  $F = [-1; -3 - e]$,
  $E = [-1; -3 - \sqrt{7}]$
  $F = [-1; -3 + \sqrt{7}]$.

Úloha

Vyšetřete vzájemnou polohu přímky p: $x = 5 + 2t$, $y = 4 + 4t$; $t \in \mathbb{R}$, a elipsy E: $\frac{(x-4)^2}{2} + \frac{(y-2)^2}{8} = 1$. Určete jejich společné body, pokud existují.

Řešení

- Vyjdářené souřadnice x a y z parametrické rovnice přímky p dosadíme do středové rovnice elipsy E a získáme
  $\frac{(5+2t-4)^2}{2} + \frac{(4+4t-2)^2}{8} = 1$,
  $4(1 + 2t)^2 + (2 + 4t)^2 = 8$,
  $4(1 + 4t + 4t^2) + (4 + 16t + 16t^2) = 8$,
  $32t^2 + 32t = 0$,
  $32t(t + 1) = 0$,
  $t_1 = 0$, $t_2 = -1$.

- Vypočítali jsme dvě hodnoty parametru t, které odpovídají průsečíkům přímky p a elipsy e. Přímka p je sečnou elipsy e a protíná ji v bodech $P_1[5; 4]$, $P_2[3; 0]$.

Úloha

Určete tečnu elipsy $\frac{(x+3)^2}{18} + \frac{(y-4)^2}{8} = 1$, v jejím bodě $T[0; 2]$.

Řešení

- Rovnici tečny[70] k dané elipse můžeme zapsat podle dokázané věty jako
  $\frac{(0+3)(x+3)}{18} + \frac{(2-4)(y-4)}{8} = 1$,
  $4(3x + 9) + 9(-2y + 8) = 72$,
  $12x + 36 - 18y + 72 - 72 = 0$,
  $12x - 18y + 36 = 0$,
  $2x - 3y + 6 = 0$.

Úloha

Určete rovnice tečen elipsy $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$, které procházejí bodem $B[6; 1]$.

[70] **Odkaz:** Věta o rovnici tečny elipsy v jejím libovolném bodě.

Řešení

- Tečna[71] této elipsy v bodě $X[x_0; y_0]$ má rovnici
  $$\frac{(x_0-1)(x-1)}{25}+\frac{(y_0+2)(y+2)}{9}=1,$$
  $9(x_0 - 1)(x - 1) + 25(y_0 + 2)(y + 2) = 225.$
  Má-li procházet bodem B, musí souřadnice bodu B tuto rovnici splňovat:
  $9(x_0 - 1)(6 - 1) + 25(y_0 + 2)(1 + 2) = 225,$
  $45(x_0 - 1) + 75(y_0 + 2) = 225,$
  $45x_0 + 75y_0 - 120 = 0,$
  $3x_0 + 5y_0 - 8 = 0.$ **(1)**
  Tato rovnice vyjadřuje vztah mezi souřadnicemi bodu $X[x_0; y_0]$, jenž je bodem dotyku elipsy a tečen procházejících bodem B.

- Protože víme, že bod X leží na elipse, musí pro jeho souřadnice platit
  $$\frac{(x_0-1)^2}{25}+\frac{(y_0+2)^2}{9}=1,$$
  $9(x_0 - 1)^2 + 25(y_0 + 2)^2 = 225.$ **(2)**
  Z **(1)** plyne
  $$x_0=\frac{8-5y_0}{3}.$$

- Dosadíme do rovnice **(2)** a počítáme
  $$9\left(\frac{8-5y_0}{3}-1\right)^2+25(y_0+2)^2=225,$$
  $$9\frac{(5-5y_0)^2}{9}+25(y_0+2)^2=225,$$
  $25 - 50y_0 + 25y_0^2 + 25y_0^2 + 100y_0 + 100 = 225,$
  $50y_0^2 + 50y_0 - 100 = 0,$
  $y_0^2 + y_0 - 2 = 0,$
  $y_{01} = 1, y_{02} = -2.$

- K y_{01} a y_{02} můžeme z **(1)** dopočítat $x_{01} = 1$, $x_{02} = 6$. To jsou body dotyku tečen elipsy, které procházejí bodem B. Když teď známe body dotyku, můžeme tečny snadno vyjádřit. Jedna z nich má rovnici:
  $9(1 - 1)(x - 1) + 25(1 + 2)(y + 2) = 225,$
  $75y + 150 = 225,$
  $y = 1.$
  Druhou dopočítáme obdobně, její rovnice je
  $x = 6.$

Úloha

Najděte vrcholovou rovnici paraboly určené ohniskem $E[6; 4]$ a řídicí přímkou q: $x = 2$.

Řešení

- Vrchol hledané paraboly leží na ose paraboly a jeho vzdálenost od ohniska E je rovna jeho vzdálenosti od řídicí přímky q. Souřadnice vrcholu V můžeme určit ze vzdálenosti ohniska a řídicí přímky a jejich polohy.
  $|Eq| = 4$, proto můžeme říci, že souřadnice vrcholu V jsou $[4; 4]$.

- Z toho už jednoduše vyjádříme vrcholovou rovnici[72]:
  $(x - 4)^2 = 8(y - 4).$

---

[71] **Odkaz:** Věta o rovnici tečny elipsy v jejím libovolném bodě.

[72] **Odkaz:** Definice vrcholové rovnice paraboly.

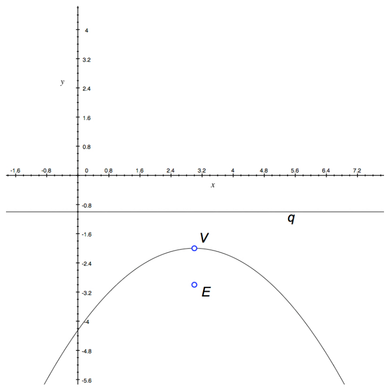
Úloha

Najděte ohnisko, vrchol a řídicí přímku paraboly, která je dána rovnicí $x^2 - 6x + 4y + 17 = 0$.

Řešení

- Nejprve převedeme obecnou rovnici paraboly na rovnici vrcholovou[73]:
  $x^2 - 6x + 4y + 17 = 0,$
  $(x - 3)^2 - 9 + 4y + 17 = 0,$
  $(x - 3)^2 = -4y - 8,$
  $(x - 3)^2 = -4(y + 2).$

- Z vrcholové rovnice umíme určit souřadnice vrcholu $V[3; -2]$, vzájemnou polohu její osy a osy y a vzdálenost p řídicí přímky a ohniska, $p = 2$[74]. Rovnice odpovídá parabole na obrázku. Její ohnisko je $E[3; -3]$ a její řídicí přímka q má rovnici:
  $y = -1.$



Úloha

Napište rovnici tečny paraboly $(y + 3)^2 = 4(x + 5)$ v jejím bodě $T[1; -1]$.

Řešení

- Podle dokázané věty[75] můžeme psát rovnici tečny v bodě paraboly $X[x_0; y_0]$ jako:
  $(y_0 + 3)(y + 3) = 2(x_0 + 5) + 2(x + 5).$

- Do této rovnice dosadíme souřadnice bodu T a upravíme ji na:
  $(1 + 3)(y + 3) = 2(-1 + 5) + 2(x + 5),$
  $4y + 12 = 8 + 2x + 10,$
  $2x - 4y + 6 = 0,$
  $x - 2y + 3 = 0.$

Úloha

Určete vzájemnou polohu a společné body přímky r: $x + 2y + 4 = 0$ a paraboly L: $(x - 2)^2 = 4(y + 5)$.

Řešení

---

73 **Odkaz:** Definice vrcholové rovnice paraboly.

74 **Nápověda:** Pravá strana rovnice odpovídá $2p(y + 2)$.

75 **Odkaz:** Věta o rovnici tečny paraboly v jejím libovolném bodě.

- Z rovnice přímky r vyjádříme $x = -2y - 4$ a dosadíme do rovnice paraboly:
  $(-2y - 4 - 2)^2 = 4(y + 5)$,
  $(-2y - 6)^2 = 4y + 20$,
  $4y^2 + 24y + 36 = 4y + 20$,
  $4y^2 + 20y + 16 = 0$,
  $y^2 + 5y + 4 = 0$.

- Diskriminant této rovnice je:
  $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$.

- Protože je diskriminant kladný, kvadratická rovnice má dvě řešení a parabola p má s přímkou r dva společné body. Přímka r je její sečnou. Dopočítáme souřadnice průsečíků P_1 a P_2:
  $y_1 = -1$, $y_2 = -4$, $x_1 = -2$, $x_2 = 4$. Tedy $P_1[-2; -1]$, $P_2[4; -4]$.

Úloha

Najděte střed, ohniska, hlavní vrcholy a asymptoty hyperboly, dané rovnicí: $9x^2 - 72x - 16y^2 - 32y - 16 = 0$.

Řešení

- Upravíme obecnou rovnici na středovou[76], ze které dokážeme celou řadu údajů přímo vyčíst.
  $9(x^2 - 8x) - 16(y^2 + 2y) - 16 = 0$,
  $9(x^2 - 8x + 16) - 9 \cdot 16 - 16(y^2 + 2y + 1) + 16 \cdot 1 - 16 = 0$,
  $9(x - 4)^2 - 16(y + 1)^2 = 144$,
  $\frac{(x-4)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$.

- Z této rovnice určíme souřadnice středu hyperboly, její hlavní a vedlejší poloosu. Střed S má souřadnice $S[4; -1]$, hlavní poloosa $a = 4$, vedlejší poloosa $b = 3$. Z a a b dopočítáme výstřednost $e = \sqrt{16+9} = 5$. Ze středové rovnice hyperboly zjistíme[77], že hlavní osa hyperboly je rovnoběžná s osou x. To nám stačí k určení souřadnic ohnisek E, F a hlavních vrcholů A, B. Jejich souřadnice jsou $E[-1; -1]$, $F[9; -1]$, $A[0; -1]$ a $B[8; -1]$.

- Rovnice asymptot[78] získáme úpravou rovnic
  $\frac{x-4}{4} = \pm \frac{y+1}{3}$.
  Ty upravíme na:
  a_1: $3x - 4y - 16 = 0$,
  a_2: $3x + 4y - 8 = 0$.

Úloha

Určete vzájemnou polohu přímky p: $6x + 8y - 14 = 0$ a hyperboly H: $\frac{(x-5)^2}{8} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$. Pokud existují, najděte jejich společné body.

Řešení

- Nejprve z rovnice přímky p vyjádříme x:
  $x = \frac{14 - 8y}{6}$. **(3)**

---

[76] **Odkaz:** Definice středové rovnice hyperboly.

[77] **Odkaz:** Souvislost tvaru středové rovnice hyperboly se vzájemnou polohou její osy a osy y.

[78] **Odkaz:** Asymptoty hyperboly.

- Dosadíme do rovnice hyperboly a řešíme kvadratickou rovnici:
$$\frac{\left(\frac{14 - 8y}{6} - 5\right)^2}{8} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1,$$
$$9\left(\frac{-16 - 8y}{6}\right)^2 - 8(y+2)^2 = 72,$$
$$\frac{(-16 - 8y)^2}{4} - 8\left(y^2 + 4y + 4\right) = 72,$$
$$(-16 - 8y)^2 - 32(y^2 + 4y + 4) = 288,$$
$$256 + 256y + 32y^2 - 128y - 128 = 288,$$
$$32y^2 + 128y - 160 = 0.$$
$$y_1 = 1, y_2 = -5.$$

- Rovnice má dvě řešení, a proto je přímka p sečnou hyperboly H. Jejich průsečíky jsou body $P_1[1; 1]$ a $P_2[9; -5]$, jejichž x-ové souřadnice získáme dosazením hodnot $y_{1,2}$ do rovnice **(3)**.

Úloha

Napište rovnici tečny hyperboly $4x^2 - 5y^2 - 24x - 10y + 11 = 0$ v jejím bodě $T[-2; 3]$.

Řešení

- Obecnou rovnici hyperboly převedeme na rovnici středovou[79]:
$$4(x^2 - 6x + 9 - 9) - 5(y^2 + 2y + 1 - 1) = -11,$$
$$4(x - 3)^2 - 5(y + 1)^2 - 36 + 5 = -11,$$
$$4(x - 3)^2 - 5(y + 1)^2 = 20,$$
$$\frac{(x-3)^2}{5} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1.$$

- Rovnici tečny k hyperbole v bodě T, určíme z dokázané věty[80]. Je to:
$$\frac{(-2-3)(x-3)}{5} - \frac{(3+1)(y+1)}{4} = 1,$$
$$-20(x - 3) - 20(y + 1) = 20,$$
$$-20x + 60 - 20y - 20 = 20,$$
$$x + y - 1 = 0.$$

Úloha

Určete rovnici kulové plochy vepsané do krychle $ABCDEFGH$, když $A[3; 1; 1]$, $B[3; 3; 1]$, $C[1; 3; 1]$, $D[1; 1; 1]$, $E[3; 1; 3]$, $F[3; 3; 3]$, $G[1; 3; 3]$, $H[1; 1; 3]$.

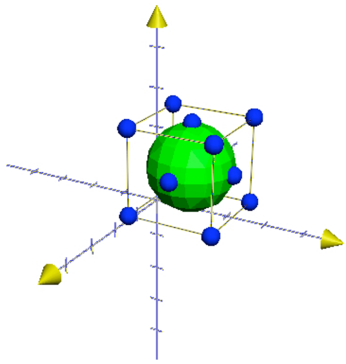
Řešení

- Poloměr r hledané kulové plochy odpovídá polovině velikosti hran krychle, můžeme použít například hranu AB. Střed vepsané kulové plochy je středem úhlopříčky AG.

---

[79] **Odkaz:** Definice středové rovnice hyperboly.

[80] **Odkaz:** Věta o rovnici tečny hyperboly v jejím libovolném bodě.



$r = \frac{|AB|}{2} = \frac{\sqrt{0^2+2^2+0^2}}{2} = 2,$

$S = S_{AG} = \left[\frac{3+1}{2}; \frac{1+3}{2}; \frac{1+3}{2}\right] = [2; 2; 2].$

- Rovnice kulové plochy se pak dá zapsat jako:
  $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 4.$

Úloha

Najděte společné body přímky $p(A; \boldsymbol{u})$ a kulové plochy dané rovnicí $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 36$, je-li $A[7; 9; 4]$ a $\boldsymbol{u} = (-3; -4; -1)$.

Řešení

- Nejprve si vyjádříme přímku p parametricky.
  p:
  $x = 7 - 3t,$
  $y = 9 - 4t,$
  $z = 4 - t; t \in \mathbb{R}.$

- Vyjádřené souřadnice dosadíme do rovnice sféry a získáme:
  $(7 - 3t - 2)^2 + (9 - 4t - 1)^2 + (4 - t + 1)^2 = 36,$
  $26t^2 - 104t + 78 = 0,$
  $t^2 - 4t + 3 = 0.$

- Kořeny této kvadratické rovnice jsou:
  $t_1 = 3, t_2 = 1.$
  Rovnice má dvě řešení, a proto můžeme říci, že přímka p je sečnou zadané sféry. Jejich průsečíky jsou body, které v parametrické rovnici přímky p odpovídají vypočítaným hodnotám parametrů t_1 a t_2, $P_1[-2; -3; 1]$, $P_2[4; 5; 3]$.

Úloha

Najděte průnik kulové plochy $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 32$ s rovinou yz[81].

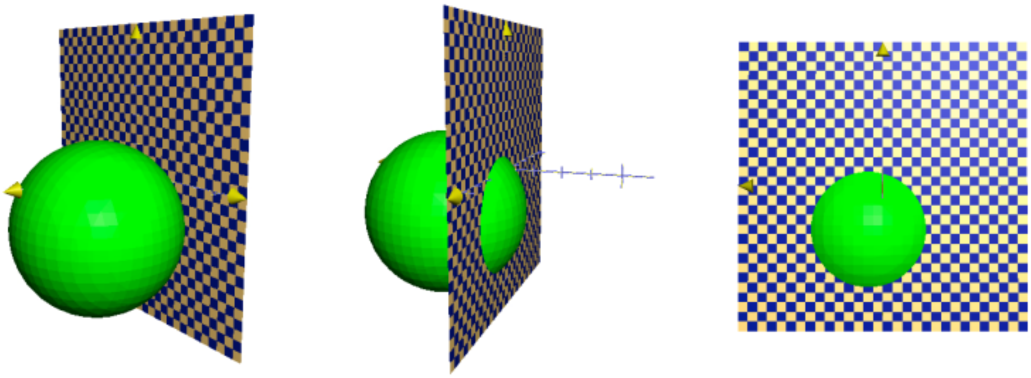
Řešení

- Rovina yz má rovnici $x = 0$, rovnice kulové plochy je $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 32$. Hledáme řešení soustavy:
  $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 32,$
  $x = 0.$

[81] **Nápověda:** To je rovina určená souřadnicovými osami y a z.

- Vyjádřené x můžeme dosadit do rovnice kulové plochy a získáme
  $(-4)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 32,$
  $(y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 16.$

- Průnikem roviny yz a kulové plochy je kružnice ležící v rovině yz. Jejím středem je bod $S[0; 1; -3]$ a poloměr $r = 4$.



Testy

Návod

Své nabyté znalosti si můžete vyzkoušet na automaticky generovaných testech. Připravené jsou testy s otázkami z následujících kapitol:

- **Vektory**[82] a **Geometrie v rovině**[83]
- **Geometrie v prostoru**[84]
- **Kuželosečky**[85]

Vyzkoušet si můžete i celkový test, který může obsahovat otázky ze všech uvedených kapitol.

Testové otázky jsou vybírány z databáze z více než čtyřiceti typů a dvou stovek různých zadání, takže si testy lze několikrát zopakovat, aniž by se otázky opakovaly. Test zahájíte kliknutím na příslušný odkaz v levém menu.

Typy odpovědí

V testech se setkáte s různými typy odpovědí. Můžete vybírat z několika nabízených odpovědí nebo svou odpověď zapisovat do jednoho či několika textových polí.

Pokud budete odpověď zapisovat do textového pole, dejte si pozor na zápis čísel. Jednotlivé cifry neoddělujte mezerou a v případě záporného čísla **nepište** mezeru mezi znaménko − a číslo. Pokud budete vyzváni k zadání reálného čísla a výsledkem je číslo celé, můžete desetinný rozvoj vyplnit buď nulami, nebo jej nechat nevyplněný.

Zápis:

−85	je správný,
− 85	je chybný,
−8 5	je chybný.

Hodnocení

Každá testová otázka je ohodnocena daným počtem bodů. Kolik to je, uvidíte vedle jejího zadání. Po skončení testu se získané body sečtou a test se vyhodnotí. Kritéria pro získání ohodnocení výborně až nedostatečně jsou v závislosti na procentu získaných bodů následující:

<100%, 95%)	výborně,
<95%, 80%)	chvalitebně,
<80%, 65%)	dobře,
<65%, 50%)	dostatečně,
<50%, 0%>	nedostatečně.

Při vyhodnocení je u každé otázky označeno, zda jste ji zodpověděli správně či špatně, a navíc je uvedena správná odpověď. Kde to bylo vhodné, byl doplněn i slovní komentář se správným postupem řešení.

[82] **Odkaz:** Kapitola vektory.

[83] **Odkaz:** Kapitola geometrie v rovině.

[84] **Odkaz:** Kapitola geometrie v prostoru.

[85] **Odkaz:** Kapitola kuželosečky.

Test na kapitolu kuželosečky

Vyhodnoceni testu

Počet bodů: 3 z 16 možných

Hodnocení: Nedostatečně

5

Učivo kapitoly Kuželosečky neovládáte. Vraťte se k teorii, řešeným příkladům a úlohám.

Nový test

Otázka 1 (za 3 body)

Rozhodněte, jaká kuželosečka je určena rovnicí: $x^2 - 6x + 4y + 3 = 0$.

Odpověď (vyberte jednu z následujících možností)

- Kružnice
- Elipsa ✗
- Parabola
- Hyperbola

Otázka 2 (za 3 body)

Najděte souřadnice středu kružnice, jejíž rovnice je: $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

Odpověď (zapište souřadnice bodu)

[2 ; -3] ✓

Otázka 3 (za 5 bodů)

Určete délku tětivy, kterou vytíná kružnice $x^2 + y^2 = 10$ na přímce $y = x - 2$. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

Odpověď (zapište reálné číslo)

5 , ✗ Správná odpověď je 5,66

Zdůvodnění
Délka tětivy je vzdálenost průsečíků zadané přímky a kružnice.

Otázka 4 (za 5 bodů)

Určete vzájemnou polohu přímky p: $x - 2y - 1 = 0$ a kružnice k: $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 5$.

Odpověď (vyberte jednu z následujících možností)

- *p* je vnější přímka *k*
- *p* je tečna *k*
- *p* je sečna *k* ✗

Zdůvodnění
Přímka má s kružnicí právě jeden společný bod.

Nový test

Závěr

Práce vznikala v průběhu několika let, proto je možné, že některé stránky nebo odkazy uvedené v kapitole 1.1 již neexistují nebo nefungují. Je také možné, že mezitím vznikly stránky nové, které se problematikou analytické geometrie zaobírají, které ale v této práci nejsou hodnoceny.

Věřím, že výsledkem mé práce jsou webové stránky, které jsou příjemné, kvalitní a moderní. Splnil jsem všechny cíle, které jsem si předsevzal. Učební text pokrývá vše, co se z analytické geometriie na střední škole vyučuje. Webové stránky obsahují velké množství interaktivních prvků, desítky obrázků a řešených úloh a navíc generované testy, které je možné mnohokrát opakovat.

Doufám, že práce bude přínosem jak studentům při studiu analytické geometrie, tak pedagogům při jejich výuce. Byl bych rád, kdyby některé její části, jako třeba applet na zobrazení matematických výrazů, byly využity dalšími autory webových stránek. V budoucnu bych chtěl práci ještě rozšířit o Java applety v prostoru a doplnit Java applet zobrazující výrazy tak, aby fungoval zcela korektně a umožňoval zobrazovat i jiné matematické zápisy než jen ty, které byly využity v této práci.

V kapitole 1.2 jsem v hodnocení webových stránek negativně komentoval neúplnost drtivé většiny zkoumaných webů. Na závěr bych tuto svou kritiku chtěl zmírnit, protože pokrýt celou látku, která je obsahově velmi rozsáhlá, není jednoduché.

Vytvořené webové stránky by se měly zařadit mezi další obdobné práce a weby, které vznikají na Katedře didaktiky matematiky MFF UK v Praze. Společně s nimi se stane součástí internetového portálu věnovanému výuce středoškolské matematiky. Věřím, že nezapadnou, a že přispějí k jeho rozšíření a obohacení.

Nakládání s prací

Souhlasím s vystavením své práce na webových stránkách Katedry didaktiky matematiky MFF UK v Praze. Dále souhlasím s jejími pozdějšími úpravami za účelem jejího zapojení do struktury matematického portálu, který vznikne z této a podobných diplomových prací. Portál vytvoří a bude spravovat právě a jedině Katedra didaktiky matematiky MFF UK, či osoba jí pověřená.

Jan Končel

Literatura

[1] Bostock L., Chandler S. (1992): Pure Mathematics 1. ST(P) Ltd, Avon.

[2] Bostock L., Chandler S. (1994): Pure Mathematics 2. ST(P) Ltd, Trowbridge.

[3] Bušek I. (2006): Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia. Analytická geometrie. Prometheus, Praha.

[4] Kočandrle M., Boček L. (2006): Matematika pro gymnázia. Analytická geometrie. Prometheus, Praha.

[5] Petáková J. (2005): MATEMATIKA – příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy. Prometheus, Praha.

[6] Čermák P., Červinková P. (2004): Odmaturuj z Matematiky 1. Didaktis, Brno.

[7] Boucník P., Herman J., Krupka P., Šimša J. (2004): Odmaturuj z Matematiky 3. Didaktis, Brno.