Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Alena Straňáková

Markovovy řetězce vyšších řádů a jejich aplikace v ekonometrii

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc.

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie
Studijní plán: Ekonometrie

2009

Moje poďakovanie patrí predovšetkým doc. RNDr. Zuzane Práškovej, CSc. za venovaný čas, ochotu, odborné rady a príjemnú spoluprácu a taktiež pánovi Janovi Kubíkovi z agentúry Reuters za poskytnutie dát.

Prehlásenie:
Prehlasujem, že som svoju diplomovú prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa 3.8.2009 Alena Straňáková

Obsah

Názov práce: Markovovy řetězce vyšších řádů a jejich aplikace v ekonometrii
Autor: Alena Straňáková
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc.
e-mail vedúceho: praskova@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V práci sa zaoberáme zovšeobecnením Rafteryho modelu Markovovho reťazca na viacrozmerný model Markovovho reťazca vyšších rádov. Tento model má menší počet nezávislých parametrov než všeobecný model viacrozmerného Markovovho reťazca a preto je vhodnejší pre praktické výpočty. Sformulujeme úlohu odhadov jednotlivých parametrov tohoto modelu a potom ho aplikujeme na meranie rizika portfólia. Spočítame Value at Risk a Expected Shortfall v danom portfóliu. Teoretické výsledky aplikujeme na reálne ekonomické dáta.

Kľúčové slová: Markovove reťazce, odhad pravdepodobností prechodu, Value at Risk, Expected Shortfall

Title: Higher-order Markov chains and applications in econometrics
Author: Alena Straňáková
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc.
Supervisor's e-mail address: praskova@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In this paper, we generalize Raftery's model of Markov chain to a higher-order multivariate Markov chain model. This model is more suitable for practical applications because of smaller number of independent parameters. We propose a method of estimation of parameters of the model and apply it to the Credit risk measuring of a portfolio. We compute Value at Risk and Expected Shortfall in this portfolio. Theoretical results are applied to real data.

Keywords: Markov chain, transition probability estimation, Value at Risk, Expected shortfall

Úvod

Markovove reťazce sa používajú na modelovanie rôznych praktických systémov napríklad zásobovacích systémov alebo systémov obsluhy. Postupnosti dát alebo časové rady sa často vyskytujú v rôznych aplikáciách. Na analýzu takýchto postupností je potrebné dôkladne zvoliť matematický model, ktorý by umožnil predpovedať a testovať hypotézy o dátach. Markovove reťazce sú tiež dôležité pri modelovaní dynamiky prechodov medzi ratingami v kreditnom riziku.
Kreditným rizikom rozumieme riziko, že určitá investícia alebo portfolio nebudú dávať očakávané výnosy kôli neschopnosti dlžníka splácať istinu a náležitý úrok. Kreditné riziko portfolia je riziko, že defaulty alebo straty kôli defaultom sú omnoho väčšie, než sa pôvodne predpokladalo. Kreditné riziko portfolia sa určuje podľa kreditných rizík základných aktív. Na meranie a riadenie kreditného rizika portfolia je dôležité vytvoriť modely, ktoré popisujú závislosť medzi ratingami jednotlivých aktív v portfoliu, pretože straty aktív závisia na ich ratingoch. Tieto závislosti sa dajú dobre popísať pomocou viacrozmerného Markovovho reťazca vyšších rádov, kde matica prechodu predstavuje pravdepodobnosť budúceho vývoja ratingov.

Prvá kapitola obsahuje definície základných pojmov, dôležité tvrdenia a odvodenia niektorých vlastností Markovových reťazcov. Markovove reťazce vyšších rádov predstavíme v druhej kapitole a odvodíme model, ktorý budeme ďalej zovšeobecňovať. V kapitole 3 popisujeme viacrozmerné Markovove reťazce a ich vlastnosti. V kapitole 4 zovšeobecníme model Markovovho reťazca vyšších rádov z druhej kapitoly na viacrozmerný model výšších rádov a popíšeme metódu odhadov paramertov tohoto modelu. Vytvorený model aplikujeme na meranie kreditného rizika v portfoliu. V poslednej kapitole sú ukážky použitia jednotlivých modelov. V appendixe sú zdrojové kódy k príkladom z predchádzajúcej kapitoly v programoch GAMS a R.

Kapitola 1

Markovove reťazce prvého rádu

1.1 Základné pojmy a vlastnosti

Definícia 1.1. Nech $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravdepodobnostný priestor, nech $T \subset \mathbb{R}$. Rodina reálnych náhodných veličín $\{X_t, t \in T\}$ definovaných na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sa nazýva *náhodný proces*. Nech $\{X_t, t \in T\}$ je náhodný proces taký, že pre každé $t \in T$ existuje stredná hodnota EX_t. Potom funkcia $\mu_t = EX_t$ definovaná na T sa nazýva *stredná hodnota procesu* $\{X_t, t \in T\}$.
Ak $\{X_t, t \in T\}$ je proces s konečnými druhými momentmi, tj. $E|X_t|^2 < \infty$ pre všetky $t \in T$, potom funkcia dvoch premenných definovaná na $T \times T$ predpisom $R(s,t) = E(X_s - \mu_s)(\overline{X_t} - \overline{\mu_t})$ sa nazýva *autokovariančná funkcia* procesu $\{X_t, t \in T\}$. $\triangle$

Definícia 1.2. Dvojica (S, ε), kde S je množina hodnôt náhodných veličín $\{X_t\}$ a ε je σ-algebra podmnožín S, sa nazýva *stavový priestor* procesu $\{X_t, t \in T\}$. Ak náhodné veličiny $\{X_t\}$ nadobúdajú len diskrétne hodnoty, hovoríme, že ide o *proces s diskétnymi stavmi*, ak nadobúdajú hodnoty z nejakého intervalu, hovoríme o *procese so spojitými stavmi*. $\triangle$

Definícia 1.3. Hovoríme, že proces $\{X_t, t \geq 0\}$ je *Markovov proces* so stavovým priestorom (S, ε), ak pre všetky $t > 0$ platí

$$P(X_t \leq j | X_{t-1}, ..., X_0) = P(X_t \leq j | X_{t-1}) \quad \text{skoro iste} \tag{1.1}$$

pre každé $j \in \mathbb{R}$. $\triangle$

Vlastnosť (1.1) sa nazýva *markovská vlastnosť*.

Definícia 1.4. Postupnosť celočíselných náhodných veličín $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ sa nazýva *Markovov reťazec s diskrétnym časom* a množinou stavov S, ak spĺňa

$$P(X_t = j|X_{t-1} = i_1, X_{t-2} = i_2, ..., X_0 = i_t) = P(X_t = j|X_{t-1} = i_1) \tag{1.2}$$

pre všetky $t > 0$ a všetky $j, i_1, ..., i_t \in S$ také, že $P(X_{t-1} = i_1, X_{t-2} = i_2, ..., X_0 = i_t) > 0$. $\triangle$

Podmienené pravdepodobnosti $P(X_{t+m} = j|X_t = i) = p_{ij}(t, t+m)$, pre $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, kde $i, j \in S$ a $P(X_t = i) > 0$, sú *pravdepodobnosti prechodu m-tého rádu.* Hovoríme, že Markovov reťazec je *homogénny*, ak pravdepodobnosti prechodu $p_{ij}(t, t+m)$ nezávisia na časových okamžikoch t a $t+m$ ale len na ich rozdiely m. V prípade, že $m = 1$, ide o *pravdepodobnosti prechodu prvého rádu.* Značíme ich p_{ij} a spĺňajú

$$p_{ij} \geq 0, \quad i, j \in S \quad \text{a} \quad \sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \quad i \in S.$$

Pravdepodobnosti prechodu prvého rádu môžme zostaviť do štvorcovej matice $\mathbf{P} = \{p_{ij}, i, j \in S\}$.

Pravdepodobnosti $p_i = P(X_0 = i)$, $i \in S$ nazývame *počiatočné pravdepodobnosti.* Platí pre ne

$$p_i \geq 0 \quad \text{a} \quad \sum_{i \in S} p_i = 1.$$

Pravdepodobnostné rozdelenie $\mathbf{p} = \{p_i, i \in S\}$ sa nazýva *počiatočné rozdelenie* Markovovho reťazca. Predpokladáme, že $\mathbf{p}$ je stĺpcový vektor, taktiež ďalšie uvažované vektory budú stĺpcové. Potom $\mathbf{p}^T$ označuje transponovaný vektor.
Označme $p_{ij}^{(t)}$ prvok matice $\mathbf{P}^t$, kde $t \in \mathbb{N}_0$.

Veta 1.5. *Nech $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ je homogénny Markovov reťazec s maticou pravdepodobností prechodu $\mathbf{P}$. Potom pre pravdepodobnosti prechodu t-tého rádu platí*

$$P(X_{m+t} = j|X_m = i) = p_{ij}^{(t)}, \qquad i, j \in S \tag{1.3}$$

pre všetky celé $m \geq 0$, $t \geq 0$, a $P(X_m = i) > 0$.

Dôkaz vety je uvedený v [5], Veta 2.2.

Ďalej nás zaujímajú *absolútne pravdepodobnosti* $p_j(t) = P(X_t = j)$, $j \in S$, ktoré predstavujú pravdepodobnosť, že Markovov reťazec $\{X_t\}$ sa v čase t nachádza v j-tom stave. Zapíšeme ich vektorovo pomocou počiatočného rozdelenia $\mathbf{p}$ a matice pravdepodobností prechodu t-tého rádu $\mathbf{P}^t$ výrazom

$$\mathbf{p}(t)^T = \mathbf{p}^T\mathbf{P}^t, \qquad t \in \mathbb{N}_0. \tag{1.4}$$

Poznámka. Vzťah (1.4) sa dá tiež vyjadriť v tvare

$$\mathbf{p}(t)^T = \mathbf{p}^T\mathbf{P}^t = \mathbf{p}^T\mathbf{P}^{t-1}\mathbf{P} = \mathbf{p}(t-1)^T\mathbf{P}. \tag{1.5}$$

Definícia 1.6. Nech $\{X_t, t \in N_0\}$ je homogénny reťazec s množinou stavov S a maticou pravdepodobností prechodu $\mathbf{P}$. Nech $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_j, j \in S\}$ je nejaké pravdepodobnostné rozdelenie na množine S, teda platí $\pi_j \geq 0$, $j \in S$, $\sum_{j\in S} \pi_j = 1$. Potom $\boldsymbol{\pi}$ sa nazýva *stacionárne rozdelenie* daného reťazca, ak platí:

$$\boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\pi}^T\mathbf{P}. \tag{1.6}$$

△

Poznámka. Transponovaním vzťahu (1.6) dostávame $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{P}^T\boldsymbol{\pi}$.

Definícia 1.7. Náhodnú veličinu $\tau_j(1) := \inf\{t > 0 : X_t = j\}$, kde $j \in S$, nazývame *čas prvého návratu do stavu* j. Ďalej položme $\tau_j(0) = 0$ a $\inf\{\emptyset\} = \infty$. △

Definícia 1.8. Stav j Markovovho reťazca sa nazýva *trvalý*, ak reťazec, ktorý vychádza zo stavu j, sa do j vráti s pravdepodobnosťou 1 po konečne mnoho krokoch, teda platí $P(\tau_j(1) < \infty | X_0 = j) = 1$. △

Definícia 1.9. Trvalý stav j sa nazýva *nenulový*, ak

$$E[\tau_j(1)|X_0 = j] < \infty.$$

△

Definícia 1.10. Stav j sa nazýva *periodický s periódou* d_j, ak platí $d_j > 1$, kde d_j je najväčší spoločný delitel čísel $t \geq 1$, pre ktoré $p_{jj}^{(t)} > 0$. V prípade, že $d_j = 1$ sa stav j nazýva *neperiodický*. △

Uvažujme homogénny Markovov reťazec $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavov S a diskrétnym časom, ktorého počiatočné rozdelenie je $\mathbf{p} = \{p_j, j \in S\}$ a matica pravdepodobností prechodu je $\mathbf{P}$. Potom pre strednú hodnotu a rozptyl procesu platí:

$$EX_t = \sum_{j \in S} jP(X_t = j) = \sum_{j \in S} jp_j(t),$$

$$varX_t = E(X_t - EX_t)^2 = EX_t^2 - (EX_t)^2 = \sum_{j \in S} j^2 p_j(t) - \left(\sum_{j \in S} jp_j(t) \right)^2,$$

kde $p_j(t) = \sum_{k \in S} p_k p_{kj}^{(t)}$.
Ďalej pre autokovariančnú funkciu $R(m, n)$ platí:

$$R(m, n) = cov(X_m, X_n) = EX_m X_n - EX_m EX_n,$$

kde v prípade, že $m < n$ dostávame:

$$\begin{aligned} EX_m X_n &= \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} ijP(X_m = i, X_n = j) = \\ &= \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} ijP(X_n = j | X_m = i)P(X_m = i) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} ijp_{ij}^{(n-m)} p_i(m). \end{aligned}$$

Keď $m > n$ dostávame:

$$\begin{aligned} EX_m X_n &= \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} ijP(X_m = j, X_n = i) = \\ &= \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} ijP(X_m = j | X_n = i)P(X_n = i) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} ijp_{ij}^{(m-n)} p_i(n). \end{aligned}$$

Príklad 1.1. Uvažujme Markovov reťazec $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavov $S = \{0, 1\}$ a diskrétnym časom, ktorého počiatočné rozdelenie je $\mathbf{p} = (p_0, p_1)^T$ a matica pravdepodobností prechodu je

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$

Podľa Perronovho vzorca spočítame maticu pravdepodobností prechodu n-tého rádu. (Uvedené v [5], Veta B.6.)
Teda

$$\mathbf{P}^n = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b + a(1-a-b)^n & a - a(1-a-b)^n \\ b - b(1-a-b)^n & a + b(1-a-b)^n \end{pmatrix}.$$

V našom prípade bude mať vektor absolútnych pravdepodobností vyjadrenie

$$\mathbf{p}(n)^T = \frac{1}{a+b}\left[b + (p_0a - p_1b)(1-a-b)^n, a - (p_0a - p_1b)(1-a-b)^n\right] = (p_0(n), p_1(n)).$$

Stredná hodnota, rozptyl a autokovariančná funkcia procesu sa dajú zapísať vzťahmi:

$$EX_n = \frac{a - (p_0a - p_1b)(1-a-b)^n}{a+b},$$

$$EX_{n+k}X_n = \left(\frac{a + b(1-a-b)^k}{a+b}\right)^k \frac{[a - (p_0a - p_1b)(1-a-b)^n]}{a+b},$$

$$varX_n = \frac{[a - (p_0a - p_1b)(1-a-b)^n][b + (p_0a - p_1b)(1-a-b)^n]}{(a+b)^2},$$

$$\begin{aligned} cov(X_{n+k}, X_n) &= \frac{a - (p_0a - p_1b)(1-a-b)^n}{a+b}\left(\frac{a + b(1-a-b)^k}{a+b}\right)^k \\ &- \frac{[a - (p_0a - p_1b)(1-a-b)^n][a - (p_0a - p_1b)(1-a-b)^{n+k}]}{(a+b)^2}. \end{aligned}$$

V mnohých prípadoch sa stáva, že matica pravdepodobností prechodu nie je známa a musí sa odhadnúť z dát. Vieme, že pre homogénny Markovov reťazec s množinou stavov $S = \{1, ..., m\}$, počiatočným rozdelením $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_m)^T$ a maticou prechodu $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}_{i,j\in S}$ platí

$$P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, ..., X_m = i_m) = p_{i_1}(1)p_{i_1i_2}...p_{i_{m-1}i_m}, \tag{1.7}$$

kde $p_{i_1}(1)$ sú absolutné pravdepodobnosti v čase 1, o ktorých predpokladáme, že sú známe konštanty alebo tzv. rušivé parametry, ktoré nie sú predmetom odhadu.

Označme f_{ij} počet prechodov zo stavu i do stavu j. Potom môžme (1.7) prepísať do tvaru

$$l(\mathbf{P}) = p_{i_1}(1)p_{i_1i_2}...p_{i_{m-1}i_m} = p_{i_1}(1)\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{m}p_{ij}^{f_{ij}}.$$

Počet nezávislých parametrov p_{ij} matice $\mathbf{P}$ je $m(m-1)$ a dajú sa odhadnúť pomocou metódy maximálnej vierohodnoti, kde maximalizujeme vierohodnostnú funkciu

$$L(\mathbf{P}) = \log p_{i_1}(1) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} f_{ij} \log p_{ij}$$

za podmienky, že riadkové súčty matice $\mathbf{P}$ sú rovné 1, teda

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1 \qquad i = 1, ..., m. \tag{1.8}$$

Túto optimalizačnú úlohu budeme riešiť pomocou metódy Lagrangeových multiplikátorov. Derivujeme funkciu

$$L(\mathbf{P}) - \sum_{i=1}^{m} \mu_i \left(\sum_{j=1}^{m} p_{ij} - 1 \right)$$

podľa parametrov μ_i a p_{ij}. Máme teda

$$\frac{\partial L(\mathbf{P})}{\partial \mu_i} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} - 1, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{P})}{\partial p_{ij}} = \frac{f_{ij}}{p_{ij}} - \mu_i. \tag{1.10}$$

Keď výraz (1.9) položíme rovný 0, dostaneme podmienku pre jednotkové riadkové súčty matice $\mathbf{P}$ a pre výraz (1.10) dostaneme

$$p_{ij} = \frac{f_{ij}}{\mu_i}.$$

Použitím podmienky (1.8) získame

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \frac{\sum_{j=1}^{m} f_{ij}}{\mu_i} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mu_i = \sum_{j=1}^{m} f_{ij}.$$

Potom odhad parametrov matice prechodu je

$$\hat{p_{ij}} = \frac{f_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} f_{ij}}. \tag{1.11}$$

Kapitola 2

Markovove reťazce vyšších rádov

V mnohých situáciách, keď pozorovania procesu s konečnou množinou stavov nespĺňajú Markovskú vlastnosť (1.1), sa ako vhodný matematický nástroj javí model Markovovho reťazca vyšších rádov, teda model $\{X_t\}$ spĺňajúci nasledujúce zovšeobecnenie Markovskej vlastnosti:

Definícia 2.1. Postupnosť celočíselných náhodných veličín $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ definovaných na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sa nazýva *Markovov reťazec n-tého rádu* s množinou stavov S, ak spĺňa:

$$\begin{aligned} &P(X_t = j | X_{t-1} = i_1, X_{t-2} = i_2, ..., X_0 = i_t) = \\ &\quad = P(X_t = j | X_{t-1} = i_1, X_{t-2} = i_2, ..., X_{t-n} = i_n) \end{aligned} \tag{2.1}$$

pre všetky $t \geq n$ a všetky $j, i_1, ..., i_t \in S$ také, že $P(X_{t-1} = i_1, X_{t-2} = i_2, ..., X_0 = i_t) > 0$. $\triangle$

Pri používaní bežného modelu Markovovho reťazca n-tého rádu s m stavmi nastáva problém s množstvom parametrov. V tomto prípade je počet parametrov (pravdepodobností prechodu) $m^n(m-1)$, ktorý rastie exponenciálne vzhľadom k rádu modelu. Pre praktické aplikácie sú preto vhodnejšie Rafteryho [6], [8] a Chingov [2] model Markovovho reťazca n-tého rádu, pretože majú menší počet parametrov. Rafteryho model sa dá napísať ako

$$P(X_t = j | X_{t-1} = i_1, X_{t-2} = i_2, ..., X_{t-n} = i_n) = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h p_{i_h j} \qquad t \geq n, \tag{2.2}$$

kde $\sum_{h=1}^{n} \lambda_h = 1$ a $\mathbf{P} = (p_{kl})$ je stochastická matica prechodu taká, že $0 \leq \sum_{h=1}^{n} \lambda_h p_{i_h j} \leq 1$ pre všetky $j, i_h \in S$. Počet nezávislých parametrov modelu je $m(m-1) + n - 1$. Parametre $p_{i_h j}$, λ_h sa dajú odhadnúť pomocou metódy maximálnej vierohodnosti tak, že maximalizujeme výraz

$$\sum_{j,i_1,...,i_n:l(j,i_1,...,i_n)>0} l(j,i_1,...,i_n)\log\sum_{h=1}^{n}\lambda_h p_{i_h j},$$

kde $l(j,...,i_n)$ znamená, koľkokrát sa postupnosť $(j,i_1,...,i_n)$ vyskytuje v dátach, za podmienok

$$\sum_{h:\lambda_h\geq 0}\lambda_h \min_{1\leq i\leq m} p_{ih} + (1-\sum_{h:\lambda_h\geq 0}\lambda_h)\max_{1\leq i\leq m} p_{ih}\geq 0 \qquad h=1,...,n$$

$$\sum_{h=1}^{n}\lambda_h = 1 \qquad p_{i_h j}\geq 0 \qquad \sum_{r=1}^{m} p_{i_h r} = 1 \qquad j, i_h\in S.$$

Pre absolútne pravdepodobnosti $p_j(t)$ v čase t platí

$$\begin{aligned}
p_j(t) &= P(X_t=j) = \\
&= \sum_{i_1\in S}\sum_{i_2\in S}...\sum_{i_n\in S} P(X_t=j|X_{t-1}=i_1,...,X_{t-n}=i_n)P(X_{t-1}=i_1,...,X_{t-n}=i_n) = \\
&= \sum_{i_1\in S}\sum_{i_2\in S}...\sum_{i_n\in S}(\lambda_1 p_{i_1 j}+...+\lambda_n p_{i_n j})P(X_{t-1}=i_1,...,X_{t-n}=i_n) = \\
&= \sum_{i_1\in S}\lambda_1 p_{i_1 j}\sum_{i_2\in S}...\sum_{i_n\in S}P(X_{t-1}=i_1,...,X_{t-n}=i_n) + \\
&+ \sum_{i_2\in S}\lambda_2 p_{i_2 j}\sum_{i_1\in S}\sum_{i_3\in S}...\sum_{i_n\in S}P(X_{t-1}=i_1,...,X_{t-n}=i_n) + ... + \\
&+ \sum_{i_n\in S}\lambda_n p_{i_n j}\sum_{i_1\in S}...\sum_{i_{n-1}\in S}P(X_{t-1}=i_1,...,X_{t-n}=i_n) =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i_1\in S}\lambda_1 p_{i_1 j}P(X_{t-1}=i_1) + \sum_{i_2\in S}\lambda_2 p_{i_2 j}P(X_{t-2}=i_2) + ... + \sum_{i_n\in S}\lambda_n p_{i_n j}P(X_{t-n}=i_n) =$$

$$= \lambda_1\sum_{i_1\in S}p_{i_1 j}p_{i_1}(t-1) + \lambda_2\sum_{i_2\in S}p_{i_2 j}p_{i_2}(t-2) + ... + \lambda_n\sum_{i_n\in S}p_{i_n j}p_{i_n}(t-n). \qquad (2.3)$$

Platí vzťah:

$$\sum_{i_k\in S} p_{ik}(t-k)p_{i_k j} = \mathbf{p}(t-k)^T\mathbf{P}_{(j)},$$

kde $\mathbf{P}_{(j)}$ značí j-ty stĺpec matice $\mathbf{P}$.
Vektorovo sa teda výraz (2.3) dá zapísať ako

$$\mathbf{p}^T(t) = \lambda_1 \mathbf{p}^T(t-1)\mathbf{P} + \lambda_2 \mathbf{p}^T(t-2)\mathbf{P} + ... + \lambda_n \mathbf{p}^T(t-n)\mathbf{P}$$

alebo

$$\mathbf{p}(t) = \lambda_1 \mathbf{P}^T \mathbf{p}(t-1) + \lambda_2 \mathbf{P}^T \mathbf{p}(t-2) + ... + \lambda_n \mathbf{P}^T \mathbf{p}(t-n),$$

kde $\mathbf{p}(t) = (P(X_t = 1), P(X_t = 2), ..., P(X_t = m))^T$ je vektor pravdepodobnostného rozdelenia v čase t. Teda

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h \mathbf{P}^T \mathbf{p}(t-h).$$

Veta 2.2. *Nech $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ je Markovov reťazec n-tého rádu definovaný vzťahom (2.2). Nech pre maticu $\mathbf{P}$ existuje stacionárny vektor $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_j, j \in S\}$, taký, že $\pi_j > 0$ pre $j = 1, ..., n$ a $\sum_{j=1}^{n} \pi_j = 1$ a $\boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{P}$. Potom*

$$\lim_{t\to\infty} P(X_t = j | X_{t-1} = i_1, ..., X_{t-n} = i_n) = \pi_j, \qquad j, i_1, ..., i_n \in S.$$

Dôkaz. Viď [6], Veta 1.

Označme $\boldsymbol{\chi} = (\chi_t(1), ..., \chi_t(m))^T$ vektor, pre ktorý $\chi_t(j) = 1$ ak $X_t = j$ a $\chi_t(j) = 0$ inak. Dá sa teda tiež písať, že $X_t = j$ práve keď $\boldsymbol{\chi}_t = \mathbf{e}_j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, kde 1 predstavuje j-tu zložku vektoru.
Potom vzťah (2.2) sa dá vyjadriť v tvare

$$P(X_t = j | X_{t-1}, ..., X_{t-n}) = \left[\sum_{h=1}^{n} \lambda_h \mathbf{P}^T \boldsymbol{\chi}_{t-h} \right]_j,$$

kde $[.]_j$ značí j-tu zložku vektoru a

$$P(X_t = j | X_{t-1} = i_1, ..., X_{t-n} = i_n) = \left[\sum_{h=1}^{n} \lambda_h \mathbf{P}^T \mathbf{e}_{i_h} \right]_j. \tag{2.4}$$

V ďalšom texte budeme používať so zvykmi v literatúre, ktorá sa zaoberá Markovovými reťazcami vyšších rádov, označenie $\mathbf{p}(t) = \mathbf{X}_t$. Potom sa teda dá Rafteryho model (2.2) napísať v tvare

$$\mathbf{X}_{t+1} = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h \mathbf{P}^T \mathbf{X}_{t+1-h} \qquad t = n, n+1, ..., \tag{2.5}$$

kde $\mathbf{X}_{t+1-h}$ je pravdepodobnostné rozdelenie reťazca v čase $(t+1-h)$. Model navrhnutý Chingom [2] zovšeobecňuje Rafteryho model tým, že umožňuje, aby sa matica $\mathbf{P}$ menila v závislosti na velkosti rádu. Výraz (2.5) môžme teda zovšeobecniť:

$$\mathbf{X}_{t+1} = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h \mathbf{P}_h^T \mathbf{X}_{t+1-h}, \tag{2.6}$$

kde $\mathbf{P}_h$ je napríklad matica prechodu po h krokoch, teda $\mathbf{P}_h = \mathbf{P}^h$.
Podobne ako (2.4) sa dá Chingov model pre podmienené pravdepodobnosti vyjadriť v tvare

$$P(X_t = j | X_{t-1} = i_1, ..., X_{t-n} = i_n) = \left[\sum_{h=1}^{n} \lambda_h \mathbf{P}_h^T \mathbf{e}_{i_h} \right]_j, \tag{2.7}$$

kde $[.]_j$ je j-ta zložka vektoru.

Kapitola 3

Viacrozmerné Markovove reťazce

Definícia 3.1. Postupnosť $\{\boldsymbol{Y}_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ celočíselných s-rozmerných náhodných vektorov sa nazýva *s-rozmerný Markovov reťazec* so množinou stavov $S \subset \mathbb{N}_0^s$, ak platí:

$$P(\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{i}_t | \boldsymbol{Y}_{t-1} = \boldsymbol{i}_{t-1}, ..., \boldsymbol{Y}_0 = \boldsymbol{i}_0) = P(\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{i}_t | \boldsymbol{Y}_{t-1} = \boldsymbol{i}_{t-1}) \tag{3.1}$$

pre $t > 0$ a pre všetky celočíselné vektory $\boldsymbol{i}_t, \boldsymbol{i}_{t-1}, ..., \boldsymbol{i}_0 \in S$ také, že $P(\boldsymbol{Y}_{t-1} = \boldsymbol{i}_{t-1}, ..., \boldsymbol{Y}_0 = \boldsymbol{i}_0) > 0$. $\triangle$

Nech $\{\boldsymbol{Y}_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ je s-rozmerný Markovov reťazec s množinou stavov $\tilde{S}$. Označme $\boldsymbol{Y}_t = (Y_{t1}, ..., Y_{ts})^T$. Potom matice pravdepodobností prechodu $\mathbf{P}_{\boldsymbol{Y}}$ rádu $|\tilde{S}| \times |\tilde{S}|$, kde $|\tilde{S}|$ je počet prvkov množiny $\tilde{S}$, je matica prvkov

$$p_{i_1 \dots i_s, j_1 \dots j_s} = P(\boldsymbol{Y}_t = (j_1, ..., j_s)^T | \boldsymbol{Y}_{t-1} = (i_1, ..., i_s)^T) =$$

$$P(Y_{t1} = j_1, ..., Y_{ts} = j_s | Y_{t-1,1} = i_1, ..., Y_{t-1,s} = i_s)$$

pre všetky $(i_1, ..., i_s)^T \in \tilde{S}$ a $(j_1, ..., j_s)^T \in \tilde{S}$.
Vektor $\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{Y}}$ taký, že $\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{Y}} = \{\pi_j, j = 1, ..., |\tilde{S}|\}$, kde $\pi_j > 0$ a $\sum_{j=1}^{|\tilde{S}|} \pi_j = 1$, a pre ktorý ďalej platí

$$\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{Y}}^T = \boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{Y}}^T \mathbf{P}_{\boldsymbol{Y}},$$

sa nazýva *vektor stacionárneho rozdelenia* procesu $\{\boldsymbol{Y}_t, t \in \mathbb{N}_0\}$.
Podobne sa dajú zovšeobecniť ďalšie definície z kapitoly 1.

Dá sa ukázať, že jednorozmerný reťazec vyššieho rádu sa dá prepísať na viacrozmerný reťazec prvého rádu.

Príklad 3.1. Uvažujme jednorozmerný Markovov reťazec druhého rádu $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavov S, teda $n = 2$. Položme $\boldsymbol{Y}_t = \binom{X_t}{X_{t-1}}$, kde $t > 0$. Ukážeme, že $\{\boldsymbol{Y}_t, t \in \mathbb{N}\}$ je dvojrozmerný Markovov reťazec prvého rádu s množinou stavov $\tilde{S} = S \times S = S^2$.

Chceme overiť, že platí vzťah

$$P\left(\boldsymbol{Y}_t = \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \middle| \boldsymbol{Y}_{t-1} = \begin{pmatrix} i_{11} \\ i_{12} \end{pmatrix}, \boldsymbol{Y}_{t-2} = \begin{pmatrix} i_{21} \\ i_{22} \end{pmatrix}, ..., \boldsymbol{Y}_1 = \begin{pmatrix} i_{t1} \\ i_{t2} \end{pmatrix}\right) =$$
$$= P\left(\boldsymbol{Y}_t = \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \middle| \boldsymbol{Y}_{t-1} = \begin{pmatrix} i_{11} \\ i_{12} \end{pmatrix}\right) \tag{3.2}$$

pre $k, l, i_{11}, i_{12}, ..., i_{t1}, i_{t2} \in S$.
Zrejme môžme napísať

$$P\left(\boldsymbol{Y}_t = \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \middle| \boldsymbol{Y}_{t-1} = \begin{pmatrix} i_{11} \\ i_{12} \end{pmatrix}, \boldsymbol{Y}_{t-2} = \begin{pmatrix} i_{21} \\ i_{22} \end{pmatrix}, ..., \boldsymbol{Y}_1 = \begin{pmatrix} i_{t1} \\ i_{t2} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= P(X_t = k, X_{t-1} = l | X_{t-1} = i_{11}, X_{t-2} = i_{12}, X_{t-2} = i_{21}, X_{t-3} = i_{22}, ..., X_1 = i_{t1}, X_0 = i_{t2}).$$

Posledný výraz je definovaný, ak $i_{12} = i_{21}, i_{31} = i_{22}, ...$ a je rovný 0 ak $l \neq i_{11}$.
Pre $l = i_{11}$ je rovný

$$\frac{P(X_t = k, X_{t-1} = i_{11}, X_{t-2} = i_{12}, X_{t-3} = i_{31}, ..., X_1 = i_{t1}, X_0 = i_{t2})}{P(X_{t-1} = i_{11}, X_{t-2} = i_{12}, X_{t-3} = i_{31}, ..., X_1 = i_{t1}, X_0 = i_{t2})}. \tag{3.3}$$

Pravdepodobnosť (3.3) sa dá ďalej zapísať ako

$$\frac{P(X_t = k | X_{t-1} = i_{11}, X_{t-2} = i_{12}, ..., X_0 = i_{t2}) P(X_{t-1} = i_{11}, X_{t-2} = i_{12}, ..., X_0 = i_{t2})}{P(X_{t-1} = i_{11}, X_{t-2} = i_{12}, X_{t-3} = i_{31}, ..., X_1 = i_{t1}, X_0 = i_{t2})} =$$

$$= P(X_t = k | X_{t-1} = i_{11}, X_{t-2} = i_{12}, X_{t-3} = i_{31}, ..., X_1 = i_{t1}, X_0 = i_{t2}) =$$

$$= P(X_t = k | X_{t-1} = i_{11}, X_{t-2} = i_{12}). \tag{3.4}$$

Podobne

$$P\left(\boldsymbol{Y}_t = \binom{k}{l} \middle| \boldsymbol{Y}_{t-1} = \binom{i_{11}}{i_{12}}\right) = P(X_t = k, X_{t-1} = l | X_{t-1} = i_{11}, X_{t-2} = i_{12}) =$$

$$= \frac{P(X_t = k, X_{t-1} = l, X_{t-1} = i_{11}, X_{t-2} = i_{12})}{P(X_{t-1} = i_{11}, X_{t-2} = i_{12})}.$$

V prípade, že $l \neq i_{11}$ je posledný výraz rovný 0, inak sa dá prepísať na

$$\frac{P(X_t = k, X_{t-1} = i_{11}, X_{t-2} = i_{12})}{P(X_{t-1} = i_{11}, X_{t-2} = i_{12})} =$$

$$= P(X_t = k | X_{t-1} = i_{11}, X_{t-2} = i_{12}). \tag{3.5}$$

Zrovnaním (3.4) a (3.5) vidíme, že $\{\boldsymbol{Y}_t, t \in \mathbb{N}\}$ je dvojrozmerný Markovov reťazec prvého rádu s množinou stavov $S \times S$.

Príklad 3.2. Nech $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ je Markovov reťazec 2. rádu s množinou stavov $S = \{0, 1\}$, pre ktorý platí Rafteryho model, tj.

$$P(X_t = j | X_{t-1} = i_1, X_{t-2} = i_2) = \lambda_1 p_{i_1 j} + \lambda_2 p_{i_2 j}.$$

Potom $\boldsymbol{Y}_t = \binom{X_t}{X_{t-1}}$ tvorí dvojrozmerný Markovov reťazec 1. rádu s množinou stavov

$$\tilde{S} = \left\{ \binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1} \right\} = S \times S.$$

Pravdepodobnosti prechodu

$$P\left(\boldsymbol{Y}_t = \binom{j_0}{j_1} \middle| \boldsymbol{Y}_{t-1} = \binom{i_0}{i_1}\right) = p_{i_0 i_1 j_0 j_1}$$

sú rovné

$$\begin{aligned} p_{i_0 i_1 j_0 j_1} &= P(X_t = j_0 | X_{t-1} = i_0, X_{t-1} = i_1) = \lambda_1 p_{i_0 j_0} + \lambda_2 p_{i_1 j_0}, \qquad \text{ak} \quad j_1 = i_0 \\ &= 0 \qquad \text{inak.} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Matica pravdepodobností prechodu $\mathbf{P}_{\boldsymbol{Y}}$ je teda

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{Y}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 p_{00} + \lambda_2 p_{00} & 0 & \lambda_1 p_{01} + \lambda_2 p_{01} & 0 \\ \lambda_1 p_{00} + \lambda_2 p_{10} & 0 & \lambda_1 p_{01} + \lambda_2 p_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_1 p_{10} + \lambda_2 p_{00} & 0 & \lambda_1 p_{11} + \lambda_2 p_{01} \\ 0 & \lambda_1 p_{10} + \lambda_2 p_{10} & 0 & \lambda_1 p_{11} + \lambda_2 p_{11} \end{pmatrix}.$$

Predpokladajme, že

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$$

je stochastická nerozložiteľná matica (viď [5] Dodatok B), potom je aj $\mathbf{P}_{\boldsymbol{Y}}$ stochastická vďaka predpokladu, že platí $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ a $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$. Matica $\mathbf{P}_{\boldsymbol{Y}}$ je nerozložiteľná a konečná, všetky stavy sú trvalé a nenulové, a ak $p_{00} > 0$, sú aj neperiodické. To znamená, že v reťazci $\{\boldsymbol{Y}_t, t \in \mathbb{N}\}$ existuje stacionarne rozdelenie

$$\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{Y}}^T = \boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{Y}}^T \mathbf{P}_{\boldsymbol{Y}},$$

kde

$$\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{Y}} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{pmatrix}.$$

Nech ďalej platí

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix},$$

kde $0 < a < 1$ a $0 < b < 1$.

Potom

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{Y}} = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & a & 0 \\ \lambda_1(1-a) + \lambda_2 b & 0 & \lambda_1 a + \lambda_2(1-b) & 0 \\ 0 & \lambda_1 b + \lambda_2(1-a) & 0 & \lambda_1(1-b) + \lambda_2 a \\ 0 & b & 0 & 1-b \end{pmatrix}.$$

Hľadáme stacionárne rozdelenie pre maticu $\mathbf{P}_{\boldsymbol{Y}}$:

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= (1-a)\pi_1 + [\lambda_1(1-a) + \lambda_2 b]\pi_2 \\
\pi_2 &= (\lambda_1 b + \lambda_2(1-a))\pi_3 + b\pi_4 \\
\pi_3 &= a\pi_1 + [\lambda_1 a + \lambda_2(1-b)]\pi_2 \\
\pi_4 &= [\lambda_1(1-b) + \lambda_2 a]\pi_3 + (1-b)\pi_4 \\
&\quad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1.
\end{aligned}$$

Úpravami dostaneme výsledné stacionárne rozdelenie v tvare:

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{b[\lambda_1(1-a) + \lambda_2 b]}{(a+b)[\lambda_1 + \lambda_2(a+b)]} \\
\pi_2 &= \frac{ab}{(a+b)[\lambda_1 + \lambda_2(a+b)]} \\
\pi_3 &= \frac{ab}{(a+b)[\lambda_1 + \lambda_2(a+b)]} \\
\pi_4 &= \frac{a[\lambda_1(1-b) + \lambda_2 a]}{(a+b)[\lambda_1 + \lambda_2(a+b)]}.
\end{aligned}$$

3.1 Model pre viacrozmerný Markovov reťazec prvého rádu

Preformulujeme Rafteryho model jednorozmerného Markovovho reťazca n-tého rádu z druhej kapitoly na model s-rozmerného reťazca prvého rádu. Predpokladajme, že máme k dispozícii s postupností dát $\{Y_t^{(j)}, t \in \mathbb{N}_0\}$, $j = 1, ..., s$, ktoré nadobúdajú hodnoty z množiny stavov $S = \{1, ..., m\}$. Ďalej predpokladajme, že rozdelenie j-tej postupnosti v čase $t+1$ závisí len na rozdelení všetkých s postupností $\{Y_t^{(j)}, t \in \mathbb{N}_0\}$, $j = 1, ..., s$ v čase t. Označme $\mathbf{P}^{(jk)}$ maticu pravdepodobností prechodu zo stavov v k-tej postupnosti v čase t do stavov v j-tej postupnosti v čase $t+1$, ktorej súčet prvkov každého riadkového vektoru je rovný 1. Rozmer matice $\mathbf{P}^{(jk)}$ je teda $m \times m$.

Nech $\{Y_t^{(j)}, t \in \mathbb{N}_0\}$ je j-ta postupnosť dát $\boldsymbol{Y}_t = (Y_t^{(1)}, ..., Y_t^{(s)})^T$. Potom teda môžeme písať

$$P(Y_{t+1}^{(j)} = i | \boldsymbol{Y}_t, \boldsymbol{Y}_{t-1}, ..., \boldsymbol{Y}_0) = P(Y_{t+1}^{(j)} = i | \boldsymbol{Y}_t) = \left[\sum_{k=1}^{s} \lambda_{jk} (\mathbf{P}^{(jk)})^T \boldsymbol{\chi}_t^{(k)} \right]_i ,$$

kde $\boldsymbol{\chi}_t^{(k)} = \mathbf{e}_z$, ak $Y_t^{(k)} = z$, a $[.]_i$ značí i-tu zložku vektoru.
Teda

$$P(Y_{t+1}^{(j)} = i | Y_t^{(1)} = i_1, ..., Y_t^{(s)} = i_s) = \left[\sum_{k=1}^{s} \lambda_{jk} (\mathbf{P}^{(jk)})^T \mathbf{e}_{i_k} \right]_i . \tag{3.7}$$

Ak označíme $\mathbf{X}_{t+1}^{(j)}$ rozdelenie k-tej postupnosti v čase $t+1$, tj.

$$\mathbf{X}_{t+1}^{(j)} = (P(Y_{t+1}^{(j)} = 1), ..., P(Y_{t+1}^{(j)} = m))^T,$$

potom model môžme zapísať v tvare

$$\mathbf{X}_{t+1}^{(j)} = \sum_{k=1}^{s} \lambda^{(jk)} (\mathbf{P}^{(jk)})^T \mathbf{X}_t^{(k)} \qquad j = 1, 2, ..., s \qquad t = 0, 1, ... \tag{3.8}$$

kde

$$\lambda^{(jk)} \geq 0, \qquad 1 \leq j, k \leq s, \qquad \sum_{k=1}^{s} \lambda^{(jk)} = 1 \qquad j = 1, 2, ..., s.$$

Vektor $\mathbf{X}_0^{(j)}$, typu $m \times 1$, je počiatočné rozdelenie j-tej postupnosti a $\mathbf{X}_t^{(k)}$ je rozdelenie k-tej postupnosti v čase t. Vzťah (3.8) znamená, že pravdepodobnostné rozdelenie j-tej postupnosti $Y^{(j)}$ v čase $t+1$ závisí len na vážených priemeroch $(\mathbf{P}^{(jk)})^T \mathbf{X}_t^{(k)}$ v čase t. Ďalej sa dá vzťah (3.8) prepísať pomocou maticového zápisu

$$\mathbf{X}_{t+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{t+1}^{(1)} \\ \mathbf{X}_{t+1}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{t+1}^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{(11)}(\mathbf{P}^{(11)})^T & \lambda^{(12)}(\mathbf{P}^{(12)})^T & \dots & \lambda^{(1s)}(\mathbf{P}^{(1s)})^T \\ \lambda^{(21)}(\mathbf{P}^{(21)})^T & \lambda^{(22)}(\mathbf{P}^{(22)})^T & \dots & \lambda^{(2s)}(\mathbf{P}^{(2s)})^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^{(s1)}(\mathbf{P}^{(s1)})^T & \lambda^{(s2)}(\mathbf{P}^{(s2)})^T & \dots & \lambda^{(ss)}(\mathbf{P}^{(ss)})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_t^{(1)} \\ \mathbf{X}_t^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_t^{(s)} \end{pmatrix} . \tag{3.9}$$

Vektor $\mathbf{X}_{t+1}$ má rozmer $ms \times 1$. Výpočtom parametrov matice $\mathbf{P}^{(ij)}$ a $\lambda^{(ij)}$ sa budeme zaoberať v nasledujúcej kapitole.

Kapitola 4

Viacrozmerné Markovove reťazce vyšších rádov

V tejto časti zovšeobecníme model (2.6) na s-rozmerný model Markovovho reťazca n-tého rádu. Predpokladajme, že máme s postupností dát $\{Y_t^{(j)}, t \in \mathbb{N}_0\}$, $j = 1, ..., s$, ktoré nadobúdajú hodnoty z množiny stavov $S = \{1, ..., m\}$. V tomto modeli predpokladáme, že rozdelenie j-tej postupnosti v čase $t+1$ závisí len na rozdelení všetkých s postupností v časoch $t, t-1, t-2, ..., t-n+1$.
Takže v tomto modeli je vektor pravdepodobnostného rozdelenia j-tej postupnosti v čase $t+1$ daný vzťahom:

$$\mathbf{X}_{t+1}^{(j)} = \sum_{k=1}^{s} \sum_{h=1}^{n} \lambda_h^{(jk)} (\mathbf{P}_h^{(jk)})^T \mathbf{X}_{t+1-h}^{(k)}, \qquad j = 1, 2, ..., s, \qquad t = n, n+1, ... \tag{4.1}$$

za podmienok

$$\lambda_h^{(jk)} \geq 0, \qquad 1 \leq j, k \leq s, \qquad \sum_{k=1}^{s} \sum_{h=1}^{n} \lambda_h^{(jk)} = 1 \qquad j = 1, 2, ..., s.$$

Vektor $\mathbf{X}_{t+1}^{(j)}$ má rozmer $m \times 1$. Ďalej $\mathbf{P}_h^{(jk)}$ je matica pravdepodobností prechodu h-teho rádu zo stavov v k-tej postupnosti v čase $t-h+1$ do stavov v j-tej postupnosti v čase $t+1$, ktorej súčet prvkov každého riadkového vektoru je rovný 1. $\mathbf{P}_h^{(jk)}$ je typu $m \times m$.

Položme $\mathbf{\Pi}_t^{(j)} = ((\mathbf{X}_t^{(j)})^T, (\mathbf{X}_{t-1}^{(j)})^T, ..., (\mathbf{X}_{t-n+1}^{(j)})^T)^T$, kde $j = 1, 2, ..., s$. Každý z vektorov $\mathbf{X}_t^{(j)}$ má rozmer $m \times 1$. Potom má teda vektor $\mathbf{\Pi}_t^{(j)}$ rozmer $nm \times 1$. Vzťah (4.1) sa dá prepísať pomocou maticového zápisu

$$\mathbf{\Pi}_{t+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_{t+1}^{(1)} \\ \mathbf{\Pi}_{t+1}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{\Pi}_{t+1}^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \dots & \mathbf{B}_{1s} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \dots & \mathbf{B}_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{s1} & \mathbf{B}_{s2} & \dots & \mathbf{B}_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_{t}^{(1)} \\ \mathbf{\Pi}_{t}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{\Pi}_{t}^{(s)} \end{pmatrix} = \mathbf{R}\mathbf{\Pi}_t, \tag{4.2}$$

kde

$$\mathbf{B}_{ii} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(ii)}(\mathbf{P}_1^{(ii)})^T & \lambda_2^{(ii)}(\mathbf{P}_2^{(ii)})^T & \dots & \lambda_{n-1}^{(ii)}(\mathbf{P}_{n-1}^{(ii)})^T & \lambda_n^{(ii)}(\mathbf{P}_n^{(ii)})^T \\ \mathbf{I} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

kde $\mathbf{I}$ značí jednotkovú maticu.
Ak $i \neq j$ potom

$$\mathbf{B}_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(ij)}(\mathbf{P}_1^{(ij)})^T & \lambda_2^{(ij)}(\mathbf{P}_2^{(ij)})^T & \dots & \lambda_{n-1}^{(ij)}(\mathbf{P}_{n-1}^{(ij)})^T & \lambda_n^{(ij)}(\mathbf{P}_n^{(ij)})^T \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

kde $\mathbf{B}_{ij}$ je matica typu $mn \times mn$ a vektor $\mathbf{\Pi}_{t+1}$ je rozmeru $mns \times 1$. Poznamenajme, že jednotlivé stĺpcové súčty matice $\mathbf{R}$ sa nemusia rovnať jednej, ale matica $(\mathbf{P}_h^{(jk)})^T$ má všetky stĺpcové súčty rovné jednej.

Veta 4.1. *Predpokladajme, že $(\mathbf{P}_h^{(jk)})^T$ $(1 \leq j,k \leq s)$ sú nerozložiteľné matice a $\lambda_{jk} > 0$ pre $1 \leq j,k \leq s$. Potom existuje vektor $\mathbf{\Pi} = ((\mathbf{\Pi}^{(1)})^T, (\mathbf{\Pi}^{(2)})^T, ..., (\mathbf{\Pi}^{(s)})^T)^T$ rozmeru $mns \times 1$ taký, že $\mathbf{\Pi} = \mathbf{R}\mathbf{\Pi}$. Pre vektory $\mathbf{\Pi}^{(j)}$ rozmeru $mn \times 1$ ďalej platí, že $\mathbf{\Pi}^{(j)} = ((\boldsymbol{\pi}^{(j)})^T, (\boldsymbol{\pi}^{(j)})^T, ..., (\boldsymbol{\pi}^{(j)})^T)^T$ a $\sum_{i=1}^m [\boldsymbol{\pi}^{(j)}]_i = 1$ pre $1 \leq j \leq s$, kde $[.]_i$ označuje i-tu zložku daného vektoru.*

Dôkaz. Ide o zovšeobecnenie dôkazu Vety 4 v [1] a plynie ako dôsledok Vety 3 v [3].

Takže pre každé $j = 1, 2, ..., s$ predstavuje vektor $\mathbf{\Pi}^{(j)} = ((\boldsymbol{\pi}^{(j)})^T, (\boldsymbol{\pi}^{(j)})^T, ..., (\boldsymbol{\pi}^{(j)})^T)^T$ združené stacionárne rozdelenie j-tej postupnosti (viď poznámka za definíciou (1.6)).

Nasledujúca veta je uvedená v [5] len pre jednorozmerný Markovov reťazec, ale v prípade viacrozmerného Markovovho reťazca $\{\boldsymbol{Y}_t, t \in \mathbb{N}\}$ ju aplikujeme na každú zložku vektoru zvlášť. Tým získame odhad (silne konzistentný) stacionárneho rozdelenia jednotlivých zložiek vektoru $\boldsymbol{Y}_t$.

Veta 4.2. *V nerozložiteľnom reťazci $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ s trvalými nenulovými stavmi platí*

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{t} I\{X_\nu = j\}}{t} \to \pi_j \qquad \textit{pre} \quad t \to \infty \quad \textit{s pravdepodobnosťou} \quad 1,$$

kde $(\pi_j, j \in S)$ je stacionárne rozdelenie daného reťazca a $I\{A\}$ označuje indikátor javu A.

Dôkaz vety je uvedený v [5], str. 57.

Teraz popíšeme metódu, ktorou odhadneme parametre $\lambda_h^{(jk)}$ a matice prechodu $\mathbf{P}_h^{(jk)}$. Zo zadaných postupností spočítame počet prechodov $f_{i_j i_k}^{(jk,h)}$ zo stavu i_k v k-tej postupnosti v čase $t-1+h$ do stavu i_j v j-tej postupnosti v čase $t+1$, kde $i_j, i_k \in \{1, 2, ..., m\}$. Potom sa matica počtu prechodov zostrojí nasledovne:

$$\mathbf{F}_h^{(jk)} = \begin{pmatrix} f_{11}^{(jk,h)} & \dots & f_{m1}^{(jk,h)} \\ f_{12}^{(jk,h)} & \dots & f_{m2}^{(jk,h)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1m}^{(jk,h)} & \dots & f_{mm}^{(jk,h)} \end{pmatrix}.$$

Z $\mathbf{F}_h^{(jk)}$ získame odhad matice prechodu $\mathbf{P}_h^{(jk)}$:

$$\hat{\mathbf{P}}_h^{(jk)} = \begin{pmatrix} \hat{p}_{11}^{(jk,h)} & \dots & \hat{p}_{m1}^{(jk,h)} \\ \hat{p}_{12}^{(jk,h)} & \dots & \hat{p}_{m2}^{(jk,h)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{p}_{1m}^{(jk,h)} & \dots & \hat{p}_{mm}^{(jk,h)} \end{pmatrix},$$

kde

$$\hat{p}_{i_j i_k}^{(jk,h)} = \begin{cases} \frac{f_{i_j i_k}^{(jk,h)}}{\sum_{i_k=1}^{m} f_{i_j i_k}^{(jk,h)}} & \text{keď} \quad \sum_{i_k=1}^{m} f_{i_j i_k}^{(jk,h)} \neq 0 \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Markovov reťazec n-tého rádu má podľa Vety 4.1 vektor združeného stacionárneho rozdelenia $\mathbf{\Pi}$. Stacionárne rozdelenie j-tej postupnosti $\mathbf{\Pi}^{(j)}$ môžme podľa Vety 4.2 odhadnúť zo zadaných postupností tak, že spočítame pomer výskytov jednotlivých stavov v každej postupnosti. Označme

$$\hat{\mathbf{\Pi}} = ((\hat{\mathbf{\Pi}}^{(1)})^T, (\hat{\mathbf{\Pi}}^{(2)})^T, ..., (\hat{\mathbf{\Pi}}^{(s)})^T)^T,$$

kde

$$\hat{\mathbf{\Pi}}^{(j)} = ((\boldsymbol{\pi}^{(j)})^T, (\boldsymbol{\pi}^{(j)})^T, ..., (\boldsymbol{\pi}^{(j)})^T)^T.$$

Podľa Vety 4.1 je $\mathbf{R\Pi} = \mathbf{\Pi}$, teda

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{B}}_{11} & \hat{\mathbf{B}}_{12} & \dots & \hat{\mathbf{B}}_{1s} \\ \hat{\mathbf{B}}_{21} & \hat{\mathbf{B}}_{22} & \dots & \hat{\mathbf{B}}_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{B}}_{s1} & \hat{\mathbf{B}}_{s2} & \dots & \hat{\mathbf{B}}_{ss} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{\Pi}} \approx \hat{\mathbf{\Pi}}.$$

Úlohu odhadu parametrov $\lambda_h^{(jk)}$, kde $j, k = 1, ..., s$, $h = 1, ..., n$ sformulujeme nasledovne:

$$\min_{\lambda^{(ij)}} \max_i \left| \left[\sum_{k=1}^{s} \sum_{h=1}^{n} \lambda_h^{(jk)} (\hat{\mathbf{P}}_h^{(jk)})^T \hat{\mathbf{\Pi}}^{(k)} - \hat{\mathbf{\Pi}}^{(j)} \right]_i \right| \tag{4.5}$$

za podmienok:

$$\sum_{k=1}^{s} \sum_{h=1}^{n} \lambda_h^{(jk)} = 1, \quad \lambda_h^{(jk)} \geq 0, \quad \forall h, j, k,$$

kde $[.]_i$ značí i-tu zložku vektoru.
Uvedená optimalizačná úloha (4.5) sa dá prepísať na úlohu lineárneho programovania:

$$\min_{\lambda^{(ij)}} w^j \tag{4.6}$$

za podmienok:

$$\begin{aligned} w^j &\geq \left[\hat{\mathbf{\Pi}}^{(j)}\right]_1 - \left[\sum_{k=1}^{s} \sum_{h=1}^{n} \lambda_h^{(jk)} (\hat{\mathbf{P}}_h^{(jk)})^T \hat{\mathbf{\Pi}}^{(k)} \right]_1 \\ w^j &\geq \left[\hat{\mathbf{\Pi}}^{(j)}\right]_2 - \left[\sum_{k=1}^{s} \sum_{h=1}^{n} \lambda_h^{(jk)} (\hat{\mathbf{P}}_h^{(jk)})^T \hat{\mathbf{\Pi}}^{(k)} \right]_2 \\ &\vdots \\ w^j &\geq \left[\hat{\mathbf{\Pi}}^{(j)}\right]_m - \left[\sum_{k=1}^{s} \sum_{h=1}^{n} \lambda_h^{(jk)} (\hat{\mathbf{P}}_h^{(jk)})^T \hat{\mathbf{\Pi}}^{(k)} \right]_m \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
w^j &\geq -\left[\hat{\mathbf{\Pi}}^{(j)}\right]_1 + \left[\sum_{k=1}^{s}\sum_{h=1}^{n}\lambda_h^{(jk)}(\hat{\mathbf{P}}_h^{jk})^T\hat{\mathbf{\Pi}}^{(k)}\right]_1 \\
w^j &\geq -\left[\hat{\mathbf{\Pi}}^{(j)}\right]_2 + \left[\sum_{k=1}^{s}\sum_{h=1}^{n}\lambda_h^{(jk)}(\hat{\mathbf{P}}_h^{jk})^T\hat{\mathbf{\Pi}}^{(k)}\right]_2 \\
&\vdots \\
w^j &\geq -\left[\hat{\mathbf{\Pi}}^{(j)}\right]_m + \left[\sum_{k=1}^{s}\sum_{h=1}^{n}\lambda_h^{(jk)}(\hat{\mathbf{P}}_h^{jk})^T\hat{\mathbf{\Pi}}^{(k)}\right]_m
\end{aligned}
$$

$$
w^j \geq 0, \qquad \sum_{k=1}^{s}\sum_{h=1}^{n}\lambda_h^{(jk)} = 1, \qquad \lambda_h^{(jk)} \geq 0 \qquad \forall h, j, k,
$$

kde $[.]_i$ je i-ta zložka vektoru. (Viď [3]).

4.1 Aplikácia na kreditné riziko

Uvažujme portfolio s s korelovanými kreditnými rizikami. Na pravdepodobnostnom priestore $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ definujme časové rady $Y^{(1)}, Y^{(2)}, ..., Y^{(s)}$ tak, že pre každé $j = 1, ..., s$ je $Y^{(j)} := \{Y_t^{(j)}\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ stochastický proces s diskrétnym časom a množinou stavov $S = \{1, 2, ..., m\}$. Náhodná veličina $Y_t^{(j)}$ pre $t \in \mathbb{N}_0$ predstavuje rating j-teho kreditného rizika v čase t a $\boldsymbol{Y}_t = (Y_t^{(1)}, ..., Y_t^{(s)})^T$ je náhodný vektor ratingov portfolia v čase t.

Nech F_t je množina ratingov portfolia pozorovaných do času t, tj. $F_t = \{\boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{Y}_1, ..., \boldsymbol{Y}_t\}$. Označme $\{\mathbf{X}_t^{(j)}\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ pravdepodobnostné rozdelenie ratingov j-teho rizika v čase t, teda $\mathbf{X}_t^{(j)} = (P(Y_t^{(j)} = 1), P(Y_t^{(j)} = 2), ..., P(Y_t^{(j)} = m))^T$. Budeme predpokladať, že pravdepodobnostné rozdelenie ratingov j-teho rizika v čase $t+1$ za podmienky, že poznáme množinu $F_t = \{\boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{Y}_1, ..., \boldsymbol{Y}_t\}$ závisí na rozdelení ratingov celého portfolia v časoch $t, t-1, ..., t-n+1$. Vývoj pravdepodobnostného rozdelenia ratingov teda budeme modelovať pomocou s-rozmerného Markovovho reťazca rádu n, tj. predpokladáme, že $\mathbf{X}_{t+1}^{(j)}$ sa riadi vzťahom (4.1)

$$
\mathbf{X}_{t+1}^{(j)} = \sum_{k=1}^{s}\sum_{h=1}^{n}\lambda_h^{(jk)}(\mathbf{P}_h^{(jk)})^T\mathbf{X}_{t+1-h}^{(k)}, \qquad j = 1, 2, ..., s, \qquad t = n, n+1, ... \tag{4.7}
$$

za podmienok

$$\lambda_h^{(jk)} \geq 0, \qquad 1 \leq j,k \leq s, \qquad \sum_{k=1}^{s}\sum_{h=1}^{n} \lambda_h^{(jk)} = 1 \qquad j = 1,2,...,s.$$

Vzťah (4.1) sa dá prepísať pomocou maticového zápisu na tvar (4.2) $\mathbf{\Pi}_{t+1} = \mathbf{R}\mathbf{\Pi}_t$. Matica $\mathbf{R}$ závisí na maticiach $\mathbf{P}_h^{(jk)}$ a parametroch $\lambda_h^{(jk)}$, ktoré môžme odhadovať metódami popísanými v predchádzajúcom odstavci. V praxi sa uvažujú aj iné odhady matic $\mathbf{P}_h^{jk}$ založené na nejakej apriornej informácii, napríklad na základe histórie ratingov podobných firiem alebo ako referenčná matica vytvorená renomovanou medzinárodnou agentúrou, napríklad Standard & Poor's. Označme túto apriornú maticu $\mathbf{Q}^{(jk)}$.

Tu budeme postupovať podobne ako v článku [7] a na odhad matice $\mathbf{P}_h^{(jk)}$ budeme uvažovať odhad

$$(\mathbf{P}_h^{(jk)})^T = w^{jk}(\mathbf{Q}^{(jk)})^T + (1 - w^{jk})(\hat{\mathbf{P}}_h^{(jk)})^T \qquad j,k = 1,2,...,s \quad h = 1,2,...n$$

kde $0 \leq w^{jk} \leq 1$ pre každé $j,k = 1,2,...,s$, $\mathbf{Q}_{m\times m}$ je referenčná matica a $\hat{\mathbf{P}}_h^{(jk)}$ je empirický odhad používaný rovnako ako v predchádzajúcej kapitole. V našom prípade budeme pre každú maticu $\hat{\mathbf{P}}_h^{(jk)}$ používať rovnakú apriornú maticu $\mathbf{Q}^{(jk)} = \mathbf{Q}$.

Položme $\tilde{\lambda}_h^{1(jk)} = \lambda_h^{(jk)} w^{jk}$ a $\tilde{\lambda}_h^{2(jk)} = \lambda_h^{(jk)}(1 - w^{jk})$. Potom platí: $\tilde{\lambda}_h^{1(jk)} + \tilde{\lambda}_h^{2(jk)} = \lambda_h^{(jk)}$ pre každé $j,k = 1,2,...,s$.
Označme $\mathbf{C}(h) := \tilde{\lambda}_h^{1(ii)}\mathbf{Q}^T + \tilde{\lambda}_h^{2(ii)}(\hat{\mathbf{P}}_h^{(ii)})^T$. Potom podľa (4.3) môžme písať:

$$\hat{\mathbf{B}}_{ii} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}(1) & \mathbf{C}(2) & \dots & \mathbf{C}(n-1) & \mathbf{C}(n) \\ \mathbf{I} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & ... & \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix},$$

ak $i \neq j$ potom podľa (4.4) je

$$\hat{\mathbf{B}}_{ij} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1^{1(ij)}\mathbf{Q}^T + \tilde{\lambda}_1^{2(ij)}(\hat{\mathbf{P}}_1^{(ij)})^T & \dots & \tilde{\lambda}_n^{1(ij)}\mathbf{Q}^T + \lambda_n^{2(ij)}(\hat{\mathbf{P}}_n^{(ij)})^T \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Úlohu odhadu porametrov modelu sformulujeme podľa (4.5):

$$\min_{\tilde{\lambda}_h^{1(jk)},\tilde{\lambda}_h^{2(jk)}} \max_i \left| \left[\sum_{k=1}^{s} \sum_{h=1}^{n} (\tilde{\lambda}_h^{1(jk)} \mathbf{Q}^T + \tilde{\lambda}_h^{2(jk)} (\hat{\mathbf{P}}_h^{(jk)})^T) \hat{\mathbf{\Pi}}^{(k)} - \hat{\mathbf{\Pi}}^{(j)} \right]_i \right| \tag{4.8}$$

za podmienok:

$$\sum_{k=1}^{s} \sum_{h=1}^{n} (\tilde{\lambda}_h^{1(jk)} + \tilde{\lambda}_h^{2(jk)}) = 1, \quad \tilde{\lambda}_h^{1(jk)} \geq 0, \quad \tilde{\lambda}_h^{2(jk)} \geq 0, \quad \forall h, j, k.$$

Túto úlohu môžme preformulovať podľa (4.6) ako s úloh lineárneho programovania:

$$\min_{\tilde{\lambda}_h^{1(jk)},\tilde{\lambda}_h^{2(jk)}} w^j \tag{4.9}$$

za podmienok

$$\begin{aligned}
w^j &\geq \left[\hat{\mathbf{\Pi}}^{(j)}\right]_1 - \left[\sum_{k=1}^{s} \sum_{h=1}^{n} (\tilde{\lambda}_h^{1(jk)} \mathbf{Q}^T + \tilde{\lambda}_h^{2(jk)} (\hat{\mathbf{P}}_h^{(jk)})^T) \hat{\mathbf{\Pi}}^{(k)} \right]_1 \\
w^j &\geq \left[\hat{\mathbf{\Pi}}^{(j)}\right]_2 - \left[\sum_{k=1}^{s} \sum_{h=1}^{n} (\tilde{\lambda}_h^{1(jk)} \mathbf{Q}^T + \tilde{\lambda}_h^{2(jk)} (\hat{\mathbf{P}}_h^{(jk)})^T) \hat{\mathbf{\Pi}}^{(k)} \right]_2 \\
&\vdots \\
w^j &\geq \left[\hat{\mathbf{\Pi}}^{(j)}\right]_m - \left[\sum_{k=1}^{s} \sum_{h=1}^{n} (\tilde{\lambda}_h^{1(jk)} \mathbf{Q}^T + \tilde{\lambda}_h^{2(jk)} (\hat{\mathbf{P}}_h^{(jk)})^T) \hat{\mathbf{\Pi}}^{(k)} \right]_m \\
w^j &\geq -\left[\hat{\mathbf{\Pi}}^{(j)}\right]_1 + \left[\sum_{k=1}^{s} \sum_{h=1}^{n} (\tilde{\lambda}_h^{1(jk)} \mathbf{Q}^T + \tilde{\lambda}_h^{2(jk)} (\hat{\mathbf{P}}_h^{(jk)})^T) \hat{\mathbf{\Pi}}^{(k)} \right]_1 \\
w^j &\geq -\left[\hat{\mathbf{\Pi}}^{(j)}\right]_2 + \left[\sum_{k=1}^{s} \sum_{h=1}^{n} (\tilde{\lambda}_h^{1(jk)} \mathbf{Q}^T + \tilde{\lambda}_h^{2(jk)} (\hat{\mathbf{P}}_h^{(jk)})^T) \hat{\mathbf{\Pi}}^{(k)} \right]_2 \\
&\vdots \\
w^j &\geq -\left[\hat{\mathbf{\Pi}}^{(j)}\right]_m + \left[\sum_{k=1}^{s} \sum_{h=1}^{n} (\tilde{\lambda}_h^{1(jk)} \mathbf{Q}^T + \tilde{\lambda}_h^{2(jk)} (\hat{\mathbf{P}}_h^{(jk)})^T) \hat{\mathbf{\Pi}}^{(k)} \right]_m
\end{aligned}$$

$$w^j \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{s} \sum_{h=1}^{n} (\tilde{\lambda}_h^{1(jk)} + \tilde{\lambda}_h^{2(jk)}) = 1, \quad \tilde{\lambda}_h^{1(jk)} \geq 0, \quad \tilde{\lambda}_h^{2(jk)} \geq 0, \quad \forall h, j, k,$$

kde $[.]_i$ predstavuje i-tu zložku vektoru.

4.2 Credit Value at Risk

Definícia 4.3. Uvažujme množinu V reálnych náhodných veličín. Funkciu $\rho : V \to \mathbb{R}$ nazývame *mierou rizika*, ak je:

- monotónna: $X \in V, X \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(X) \leq 0$
- sub-aditívna: $X, Y, X+Y \in V \quad \Rightarrow \quad \rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
- pozitívne homogénna: $X \in V, h > 0, hX \in V \quad \Rightarrow \quad \rho(hX) = h\rho(X)$
- translačne invariantná: $X \in V, a \in \mathbb{R}, (X+a) \in V \quad \Rightarrow \quad \rho(X+a) = \rho(X) - a.$

△

Definícia 4.4. Nech T je budúci časový horizont, $\alpha \in (0,1)$ je zvolená konfidenčná hladina a nech X je náhodná veličina, ktorá reprezentuje stratu uvažovaného portfolia. Potom *Value at Risk* definujeme vzťahom

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(X \leq x) \geq \alpha\}.$$

△

Value at Risk $VaR_\alpha(X)$ interpretujeme ako maximálnu možnú stratu portfolia za dané obdobie pri zvolenej konfidenčnej hladine. Znamená to, že náhodná strata väčšia než $VaR_\alpha(X)$ nastane len s malou pravdepodobnosťou $(1-\alpha)$.
VaR nie je mierou rizika, pretože nesplňa vždy podmienku sub-aditivity: pre portfolio zložené z viacerých sub-portfolií môže nastať situácia, že keď je VaR vyčíslené pre jednotlivé sub-portfoliá v rámci portfolia, súčet VaR jednotlivých sub-portfolií môže byť nižší než VaR pre celé portfolio. Preto bolo vytvorené Conditional Value at Risk (CVaR) nazývané aj Expected Shortfall, ktoré už podmienku sub-aditivity splňa. CVaR popíšeme v nasledujúcej časti.

Value at Risk je v súčastnosti štandardným nástrojom na riadenie rizika v bankách a ostatných finančných inštitúciách. Pomocou modelu viacrozmerného Markovovho reťazca popísaného na začiatku kapitoly môžme spočítať Credit Value at Risk pre portfolio kreditných rizík s korelovanými ratingami.

Uvažujme portfolio s s korelovanými kreditnými rizikami $\boldsymbol{Y} = \{Y^{(1)}, Y^{(2)}, ..., Y^{(s)}\}$ a proces $\{\boldsymbol{Y}_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ ratingov portfolia $\boldsymbol{Y}$, kde $\boldsymbol{Y}_t = (Y_t^{(1)}, ..., Y_t^{(s)})^T$. Nech jav $\{Y_t^{(j)} = i\}$ znamená, že j-te kreditné riziko je v i-tej ratingovej triede v čase t, kde $j = 1, ..., s$ a $i \in S = \{1, ..., m\}$.
Označme $L_{ti}^{(j)}$ stratu z j-teho kreditného rizika v čase t za podmienky, ze $Y_t^{(j)} = i$ pre každé $j = 1, 2, ..., s$, $i = 1, ..., m$ a $t \in \mathbb{N}_0$. Keď je táto strata záporná, potom zisk z j-teho rizika je $-L_{ti}^{(j)}$. Strata j-teho kreditného rizika v čase t závisí na $Y_t^{(j)}$, označme ju $\mathfrak{L}_t^{(j)}(Y_t^{(j)})$.
Potom platí:

$$\mathfrak{L}_t^{(j)}(Y_t^{(j)}) = \sum_{i=1}^{m} L_{ti}^{(j)} I\{Y_t^{(j)} = i\},$$

kde $I\{A\}$ značí indikátor javu A.
Celková strata portfolia $\mathfrak{L}_t$ v čase t je:

$$\mathfrak{L}_t(\boldsymbol{Y}_t) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{m} L_{ti}^{(j)} I\{Y_t^{(j)} = i\}.$$

V praxi sa v oblasti merania a riadenia kreditných rizík používa podmienené očakávanie celkovej straty portfolia $\mathfrak{L}_{t+1}$ v čase $t+1$, pričom poznáme množinu $F_t = \{\boldsymbol{Y}_0, ..., \boldsymbol{Y}_t\}$:

$$E(\mathfrak{L}_{t+1}(\boldsymbol{Y}_{t+1})|F_t) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{m} E(L_{t+1,i}^{(j)} I\{Y_{t+1}^{(j)} = i\}|F_t) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{m} L_{t+1,i}^{j} P(\{Y_{t+1}^{(j)} = i\}|F_t). \tag{4.10}$$

Ďalej predpokladáme len, že proces $\{\boldsymbol{Y}_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ se riadi viacrozmerným modelom prvého rádu (3.7), resp. (3.8). Potom

$$P(Y_{t+1}^{(j)} = i|F_t) = P(Y_{t+1}^{(j)} = i|\boldsymbol{Y}_t),$$

teda

$$P(Y_{t+1}^{(j)} = i|Y_t^{(1)} = i_1, ..., Y_t^{(s)} = i_s) = \left[\sum_{k=1}^{s} \lambda^{(jk)} (\mathbf{P}^{(jk)})^T \mathbf{e}_{i_k}\right]_i,$$

kde $[.]_i$ predstavuje i-tu zložku vektoru.
Ak odhadneme parametre modelu rovnako ako v odstavci 4.1 (pre n=1), môžeme písať

$$P(Y_{t+1}^{(j)} = i|F_t) \approx \left[\sum_{k=1}^{s} (\lambda^{1(jk)} \mathbf{Q}^T + \lambda^{2(jk)} (\hat{\mathbf{P}}^{(jk)})^T) \mathbf{e}_{i_k}\right]_i.$$

Potom podmienená stredná hodnota je

$$E(\mathfrak{L}_{t+1}(Y_{t+1})|F_t) \approx \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{m} L_{t+1,i}^{j}\left[\sum_{k=1}^{s}(\lambda^{1(jk)}\mathbf{Q}^T + \lambda^{2(jk)}(\hat{\mathbf{P}}^{(jk)})^T)\mathbf{e}_{i_k}\right]_i.$$

Predpokladajme, že straty z kreditných rizík v rôznych ratingových triedach sú predom známe. V portfoliu s aktív s korelovanými ratingami môžme celkovú stratu portfolia v čase $t+1$ spočítať ako súčet strát jednotlivých aktív v čase $t+1$

$$\mathfrak{L}_{t+1}(Y_{t+1}^{(1)}, Y_{t+1}^{(2)}, ..., Y_{t+1}^{(s)}) = \mathfrak{L}_{t+1}^{(1)}(Y_{t+1}^{(1)}) + \mathfrak{L}_{t+1}^{(2)}(Y_{t+1}^{(2)}) + ... + \mathfrak{L}_{t+1}^{(s)}(Y_{t+1}^{(s)}) \tag{4.11}$$

Rating j-teho aktíva $Y_{t+1}^{(j)}$ v čase $t+1$ nadobúda hodnoty v množine $\{1, 2, ..., m\}$ pre každé $j = 1, 2, ..., s$. Uvažujme rozklad $\bigcup_{i=1}^{m} P_i$ intervalu $[0, 1]$, kde $P_i = [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m})$, pre každé $i = 1, 2, ...m$. Ďalej predpokladajme, že strata z j-teho aktíva $\mathfrak{L}_{t+1}^{(j)}(Y_{t+1}^{(j)})$ za podmienky $Y_{t+1}^{(j)} = i$ nadobúda hodnoty z intervalu P_i, pre každé $j = 1, ..., s$ a $i = 1, ..., m$. Napríklad, ak počet ratingových tried je $m = 9$ a ak je j-te aktívum v čase $t+1$ v triede AAA, ktorú sme označili 1, potom $Y_{t+1}^{(j)} = 1$, a preto strata j-teho aktíva v čase $t+1$ nadobúda hodnoty v intervale $P_1 = [0, \frac{1}{9})$. Preto každej strate $\mathfrak{L}_{t+1}^{(j)}(Y_{t+1}^{(j)})$ z j-teho aktíva v čase $t+1$ za podmienky, že $Y_{t+1}^{(j)} = i$ pre každé $j = 1, ..., s$ a $i = 1, 2, ..., m$ priradíme náhodnu hodnotu z rovnomerného rozdelenia na intervale P_i.

Označme $I_{\tilde{k}} = (i_1, i_2, ..., i_s)$ usporiadanú množinu čísel z množiny $\{1, 2, ..., m\}$, teda $\{(i_1, i_2, ..., i_s) \in \{1, 2, ..., m\}^s\}$. Uvažujme všetky usporiadané s-tice s opakovaním prvkov z $\{1, 2, ..., m\}$. Takýchto množín bude teda $m^s = M$, kde $M \in \mathbb{N}$. Takže $\tilde{k} = 1, ..., M$. Prepokladajme, že pre prirodzené číslo M je $\mathfrak{L}_{t+1,1} < \mathfrak{L}_{t+1,2} < ... < \mathfrak{L}_{t+1,M}$. To znamená, že celková strata $\mathfrak{L}_{t+1,\tilde{k}}$ v čase $t+1$, ktorá odpovedá prvkom množiny $I_{\tilde{k}}$, sa zvyšuje so zväčšujúcim sa $\tilde{k}$. Takže množiny $I_{\tilde{k}}$ sú usporiadané tak, aby sa straty $\mathfrak{L}_{t+1,\tilde{k}}$ s rastúcim $\tilde{k}$ zvyšovali.
Predpoveď celkovej straty, ktorá odpovedá prvkom množiny $I_{\tilde{k}}$ pre všetky $\tilde{k} = 1, ..., M$, je podrobne odvodená v [7] a spočítame ju podľa vzťahu:

$$P(\mathfrak{L}_{t+1} = \mathfrak{L}_{t+1,\tilde{k}}|F_t) = \\ = \sum_{(i_1,i_2,...,i_s)\in I_{\tilde{k}}} \prod_{j=1}^{s}\left[\sum_{k=1}^{s}(\tilde{\lambda}^{1(jk)}\mathbf{Q}^T + \tilde{\lambda}^{2(jk)}(\hat{\mathbf{P}}^{(jk)})^T)\mathbf{e}_{i_k}\right]_{i_j}. \tag{4.12}$$

Podľa definície VaR pre portfolio s konfidenčnou hladinou $\alpha \in (0,1)$ v čase $t+1$ za podmienky, že poznáme množinu F_t je:

$$VaR_\alpha(\mathfrak{L}_{t+1}|F_t) := \inf\{L \in \mathbb{R} | P(\mathfrak{L}_{t+1} \geq L|F_t) \leq 1-\alpha\}.$$

Nech K^* je kladné celé číslo z $\{1, 2, ..., M\}$ také, že

$$P(\mathfrak{L}_{t+1} \geq \mathfrak{L}_{t+1,K^*}|F_t) = \sum_{\tilde{k}=K^*}^{M} P(\mathfrak{L}_{t+1} = \mathfrak{L}_{t+1,\tilde{k}}|F_t) > 1-\alpha \tag{4.13}$$

a

$$P(\mathfrak{L}_{t+1} \geq \mathfrak{L}_{t+1,K^*+1}|F_t) = \sum_{\tilde{k}=K^*+1}^{M} P(\mathfrak{L}_{t+1} = \mathfrak{L}_{t+1,\tilde{k}}|F_t) \leq 1-\alpha. \tag{4.14}$$

Potom platí:

$$VaR_\alpha(\mathfrak{L}_{t+1}|F_t) = \mathfrak{L}_{t+1,K^*}. \tag{4.15}$$

4.3 Credit Expected Shortfall

Definícia 4.5. Nech T je budúci časový horizont, $\alpha \in (0,1)$ je zvolená konfidenčná hladina a nech X reprezentuje náhodnú stratu uvažovaného portfolia. Potom *Conditional Value at Risk* definujeme vzťahom:

$$CVaR_\alpha(X) = E[X|X \geq VaR_{\alpha(X)}].$$

△

CVaR je teda priemerná strata zo $100(1-\alpha)\%$ najhorších prípadov strát portfolia. Niekedy sa CVaR nazýva Expected Shortfall (ES). ES teda predstavuje priemernú stratu veritela v prípade defaultu. CVaR dopĺňa informácie poskytované VaR. Platí CVaR $\geq$ VaR, takže portfoliá s malou CVaR majú tiež malú VaR.

Podľa článku [4] môžme ES definovať nasledujúcim spôsobom, ktorý použijeme v príklade 2.

Definícia 4.6. Nech X je reálna náhodná veličina z pravdepodobnostného priestoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, pre ktorú platí $EX < \infty$, a nech $\alpha \in (0,1)$ je pevné. Potom

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\left[E[X; X \geq VaR_\alpha(X)] + q_\alpha(1-\alpha-P(X \geq VaR_\alpha(X)))\right], \tag{4.16}$$

kde $q_\alpha = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(X \leq x) \geq \alpha\}$ je dolný α-kvantil X. △

Tu však budeme postupovať podľa článku [7] a prepíšeme vzťah (4.16) na tvar, ktorý budeme používať v nasledujúcej kapitole. ES pre kreditné portfolio v čase $t+1$ za podmienky, že množina F_t je známa až do času t s hladinou α, môžme prepísať na tento tvar:

$$ES_\alpha(\mathfrak{L}_{t+1}|F_t) \quad = \quad \frac{1}{1-\alpha} E(\mathfrak{L}_{t+1} I_{\{\mathfrak{L}_{t+1} \geq \mathfrak{L}_{t+1,K^*}\}}|F_t) + \mathfrak{L}_{t+1,K^*}\left[1 - \frac{P(\mathfrak{L}_{t+1} \geq \mathfrak{L}_{t+1,K^*}|F_t)}{1-\alpha}\right]. \tag{4.17}$$

Tento vzťah (4.17) sa dá podľa [7] prepísať na nasledujúci tvar, ktorý sa používa pri bežných výpočtoch:

$$\begin{aligned}
&ES_\alpha(\mathfrak{L}_{t+1}|F_t) = \frac{1}{1-\alpha}\sum_{\tilde{k}=K^*}^{M} \mathfrak{L}_{t+1,\tilde{k}} P(\mathfrak{L}_{t+1} = \mathfrak{L}_{t+1,\tilde{k}}|F_t) \\
- \quad & \frac{\mathfrak{L}_{t+1,K^*}}{1-\alpha}(P(\mathfrak{L}_{t+1} \geq \mathfrak{L}_{t+1,K^*}|F_t) - (1-\alpha)) = \\
= \quad & \frac{1}{1-\alpha}\sum_{\tilde{k}=K^*}^{M} \mathfrak{L}_{t+1,\tilde{k}} \sum_{(i_1,\dots,i_s)\in I_{\tilde{k}}} \prod_{j=1}^{s} \left[\sum_{k=1}^{s} (\tilde{\lambda}^{1(jk)}\mathbf{Q}^T + \tilde{\lambda}^{2(jk)}(\hat{\mathbf{P}}^{(jk)})^T)\mathbf{e}_{i_k}\right]_{i_j} \\
- \quad & \frac{\mathfrak{L}_{t+1,K^*}}{1-\alpha}\sum_{\tilde{k}=K^*}^{M} \sum_{(i_1,\dots,i_s)\in I_{\tilde{k}}} \prod_{j=1}^{s} \left[\sum_{k=1}^{s} (\tilde{\lambda}^{1(jk)}\mathbf{Q}^T + \tilde{\lambda}^{2(jk)}(\hat{\mathbf{P}}^{(jk)})^T)\mathbf{e}_{i_k}\right]_{i_j} + \mathfrak{L}_{t+1,K^*}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Podrobnejší popis výpočtu podľa (4.18) bude uvedený v ďalšej kapitole.

Kapitola 5

Aplikácie

5.1 Príklad 1

Máme k dispozícii dáta od agentúry Reuters o objeme spotreby kakaa v USA. Pozorovania sú mesačné od januára 2007 do júna 2009, celkom teda ide o 30 pozorovaní. Možné objemy spotreby sú rozdelené do piatich kategórií: veľmi nízky objem spotreby 1, nízky objem spotreby 2, priemerná spotreba 3, vysoký objem spotreby 4 a veľmi vysoký objem spotreby 5. Budeme pracovať s jednorozmerným Markovovym reťazcom druhého rádu ($n = 2, s = 1$). Postupnosť dát označíme S.

$$\begin{aligned} S: \quad & 1 \to 2 \to 2 \to 1 \to 5 \to 3 \to 3 \to 2 \to 2 \to 2 \to 1 \to 1 \to 4 \to 3 \to 5 \to \\ & 3 \to 3 \to 2 \to 2 \to 1 \to 2 \to 2 \to 1 \to 1 \to 1 \to 2 \to 1 \to 1 \to 1 \to 1 \end{aligned}$$

Spočítame matice počtu prechodov:

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ďalej spočítame odhad matice pravdepodobností prechodu $\hat{\mathbf{P}}_h, h = 1, 2$:

$$\hat{\mathbf{P}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{6}{11} & \frac{3}{11} & 0 & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\mathbf{P}}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{7}{10} & \frac{2}{10} & 0 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podľa Vety 4.2 spočítame odhad vektoru stacionárneho rozdelenia

$$\hat{\mathbf{\Pi}} = (\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{15})^T.$$

Úlohu sme vyriešili oboma spôsobmi, teda podľa (4.5) a (4.6) v programe GAMS. K dispozícii sme mali voľne dostupnú verziu. Zdrojový kód k obom riešeniam je uvedený v prílohe. Tu si ukážeme postup riešenia úlohy podľa (4.6). Najprv spočítame

$$\hat{\mathbf{P}}_1\hat{\mathbf{\Pi}} = (\frac{127}{330}, \frac{113}{330}, \frac{1}{6}, \frac{2}{55}, \frac{23}{330})^T,$$
$$\hat{\mathbf{P}}_2\hat{\mathbf{\Pi}} = (\frac{11}{30}, \frac{1}{3}, \frac{17}{90}, \frac{2}{45}, \frac{1}{15})^T.$$

Aby sme mohli odhadnúť λ_1 a λ_2, musíme vyriešiť optimalizačnú úlohu

$$\min_{\lambda_1,\lambda_2} w$$

za podmienok

$$\begin{aligned}
w &\geq \frac{2}{5} - \frac{127}{330}\lambda_1 - \frac{11}{30}\lambda_2 \\
w &\geq -\frac{2}{5} + \frac{127}{330}\lambda_1 + \frac{11}{30}\lambda_2 \\
w &\geq \frac{1}{3} - \frac{113}{330}\lambda_1 - \frac{1}{3}\lambda_2 \\
w &\geq -\frac{1}{3} + \frac{113}{330}\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2 \\
w &\geq \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\lambda_1 - \frac{17}{19}\lambda_2 \\
w &\geq -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\lambda_1 + \frac{17}{19}\lambda_2 \\
w &\geq \frac{1}{30} - \frac{2}{55}\lambda_1 - \frac{2}{45}\lambda_2 \\
w &\geq -\frac{1}{30} + \frac{2}{55}\lambda_1 + \frac{2}{45}\lambda_2 \\
w &\geq \frac{1}{15} - \frac{23}{330}\lambda_1 - \frac{1}{15}\lambda_2 \\
w &\geq -\frac{1}{15} + \frac{23}{330}\lambda_1 + \frac{1}{15}\lambda_2
\end{aligned}$$

$$w \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0.$$

Optimálnym riešením je

$$(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 0).$$

Hodnota účelovej funkcie v oboch riešeniach je $w = 0.15$. Odhadnutý model jednorozmerného Markovovho reťazca druhého rádu je

$$\mathbf{\Pi}_{t+1} = \hat{\mathbf{P}}_1 \mathbf{\Pi}_t.$$

Je vidieť, že objem spotreby kakaa by stačilo modelovať pomocou Markovovho reťazca prvého rádu.

5.2 Príklad 2

K tomu, aby sme spočítali VaR a ES, je potrebné najprv odhadnúť neznáme parametre s-rozmerného Markovovho reťazca n-tého rádu. Použité dáta sú poskytnuté agentúrou Reuters. Jedná sa o históriu ratingov spoločnosti Ford v rokoch 2000 až 2009. K dispozícii máme 30 pozorovaní LT Issuer a LT LC Debt ohodnotené ratingami A, BBB+, BBB, BBB-, BB+, BB-, B+, B, B-, CCC+, CCC, CCC-, CC, C. Pre lepšiu prehladnosť prechodov medzi ratingami vzhľadom k malému počtu pozorovaní sme zlúčili hodnotenia BBB+, BBB a BBB- do ratingovej triedy BBB, B+, B a B+ do ratingovej triedy B a CCC+, CCC, CCC- do ratingovej triedy CCC, CC a C do ratingovej triedy C (podľa [7], str.19). Označme AAA=1, AA=2, A=3, BBB=4, BB=5, B=6, CCC=7, C=8, Default=9.

Nech S_1 a S_2 označujú postupnosti ratingov LT Issuer a LT LC Debt.

$$\begin{aligned} S_1: \quad & 3 \to 3 \to 4 \to 4 \to 4 \to 4 \to 4 \to 4 \to 4 \to 4 \to 4 \to 4 \to 4 \to 5 \to 5 \to \\ & \quad 5 \to 5 \to 6 \to 6 \to 6 \to 6 \to 6 \to 6 \to 6 \to 6 \to 6 \to 6 \to 6 \to 7 \to 8 \\ \\ S_2: \quad & 3 \to 3 \to 4 \to 4 \to 4 \to 4 \to 4 \to 4 \to 4 \to 4 \to 4 \to 4 \to 4 \to 5 \to 5 \to \\ & \quad 5 \to 5 \to 6 \to 6 \to 6 \to 6 \to 7 \to 7 \to 7 \to 7 \to 7 \to 7 \to 7 \to 7 \to 8 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Budeme postupovať podľa [7]. Pre zjednodušenie vytvoríme model pre dvojrozmerný Markovov reťazec prvého rádu a z neho spočítame VaR a ES pre naše portfolio dvoch postupností ratingov.

Z S_1 a S_2 spočítame matice počtu prechodov:

$$\mathbf{F}^{(11)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F}^{(22)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}^{(21)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F}^{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ďalej musíme znormalizovať jednotlivé riadky matíc. V prípade, že matica obsahuje veľa nulových riadkov, teda chýbajú informácie o histórii počtu prechodov medzi týmito ratingami, odhadnutá matica prechodu $\hat{\mathbf{P}}^{(jk)}, j, k = 1, ..., 9$ nemusí byť nerozložiteľná. Preto každý nulový riadok nahradíme riadkom s rovnomerným rozdelením (podľa [7], str.20). Takže dostávame:

$$\hat{\mathbf{P}}^{(11)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{11} & \frac{1}{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10}{11} & \frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \qquad \hat{\mathbf{P}}^{(22)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{11} & \frac{1}{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{P}}^{(21)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{11} & \frac{1}{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{11} & \frac{8}{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \qquad \hat{\mathbf{P}}^{(12)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{11} & \frac{1}{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Na základe histórie ratingov spoločnosti Ford sme získali nasledujúce odhady stacionárneho rozdelenia ratingov prvého a druhého kreditného rizika spočítané podľa Vety 4.2:

$$\hat{\mathbf{\Pi}}^{(1)} = (0, 0, \frac{1}{15}, \frac{11}{30}, \frac{2}{15}, \frac{11}{30}, \frac{1}{30}, \frac{1}{30}, 0)^T, \qquad \hat{\mathbf{\Pi}}^{(2)} = (0, 0, \frac{1}{15}, \frac{11}{30}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{1}{30}, 0)^T. \tag{5.2}$$

Ako apriornú maticu $\mathbf{Q}$ sme použili maticu od S&P uvedenú v [9], ktorú predstavuje Tabuľka 5.1.

Vlastná optimalizácia úlohy prebiehala v programe GAMS. K dispozícii sme mali voľne dostupnú verziu tohoto programu. Podľa (4.5) sme pre prvú postupnosť dostali riešenie:

$$(\tilde{\lambda}^{1(11)}; \tilde{\lambda}^{2(11)}; \tilde{\lambda}^{1(12)}; \tilde{\lambda}^{2(12)}) = (0.348; 0.098; 0.000; 0.553).$$

Výsledok pre druhú postupnosť:

$$(\tilde{\lambda}^{1(21)}; \tilde{\lambda}^{2(21)}; \tilde{\lambda}^{1(22)}; \tilde{\lambda}^{2(22)}) = (0.000; 0.406; 0.237; 0.357).$$

Dvojrozmerný model Markovovho reťazca prvého rádu pre dve zadané postupnosti S_1 a S_2 je:

$$\mathbf{\Pi}_{t+1}^{(1)} = 0.348\mathbf{Q}^T\mathbf{\Pi}_t^{(1)} + 0.098(\hat{\mathbf{P}}^{(11)})^T\mathbf{\Pi}_t^{(1)} + 0.000\mathbf{Q}^T\mathbf{\Pi}_t^{(2)} + 0.553(\hat{\mathbf{P}}^{(12)})^T\mathbf{\Pi}_t^{(2)},$$

$$\mathbf{\Pi}_{t+1}^{(2)} = 0.000\mathbf{Q}^T\mathbf{\Pi}_t^{(1)} + 0.406(\hat{\mathbf{P}}^{(21)})^T\mathbf{\Pi}_t^{(1)} + 0.237\mathbf{Q}^T\mathbf{\Pi}_t^{(2)} + 0.357(\hat{\mathbf{P}}^{(22)})^T\mathbf{\Pi}_t^{(2)}.$$

Je vidieť, že obe postupnosti na sebe silno závisia a sú závislé aj na apriornej matici $\mathbf{Q}$.

Tabuľka 5.1: *Pravdepodobnosti prechodu medzi ratingami jednotlivých aktív za rok 2005 od S&P*

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	C	D
AAA	0.8598	0.1172	0.0176	0.0043	0.0012	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
AA	0.0178	0.8332	0.1207	0.0221	0.0031	0.0000	0.0003	0.0006	0.0024
A	0.0017	0.0358	0.8405	0.1031	0.0103	0.0002	0.0015	0.0017	0.0340
BBB	0.0033	0.0056	0.0506	0.8539	0.0744	0.0004	0.0032	0.0018	0.0032
BB	0.0001	0.0004	0.0042	0.0370	0.8260	0.0634	0.0383	0.0091	0.0215
B	0.0002	0.0007	0.0013	0.0020	0.0567	0.7185	0.1414	0.0232	0.0559
CCC	0.0000	0.0003	0.0066	0.0017	0.0054	0.0501	0.6909	0.0574	0.1795
C	0.0000	0.0000	0.0032	0.0000	0.0090	0.0109	0.1115	0.4686	0.3968
D	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Tento model sa môže použiť na zistenie predpovede veľkosti kreditného rizika v portfoliu ratingov LT Isuuer a LT TC Debt spoločnosti Ford. Podľa (4.11) v portfoliu dvoch aktív s korelovanými ratingami môžme celkovú stratu portfolia v čase $t+1$ spočítať ako súčet strát oboch aktív v čase $t+1$. Teda:

$$\mathfrak{L}_{t+1}(Y_{t+1}^{(1)}, Y_{t+1}^{(2)}) = \mathfrak{L}_{t+1}^{(1)}(Y_{t+1}^{(1)}) + \mathfrak{L}_{t+1}^{(2)}(Y_{t+1}^{(2)}) \tag{5.3}$$

V čase $t+1$ má rating j-teho aktíva $Y_{t+1}^{(j)}$ hodnotu z množiny $\{1, 2, ..., 9\}$ pre každé $j = 1, 2$. Podľa odstavca 4.2 každej strate $\mathfrak{L}_{t+1}^{(j)}(Y_{t+1}^{(j)})$ z j-teho aktíva v čase $t+1$, pričom platí $Y_{t+1}^{(j)} = i$ pre každé $j = 1, 2$ a $i = 1, 2, ..., 9$, priradíme náhodnu hodnotu z rovnomerného rozdelenia na intervale $P_i = [\frac{i-1}{9}, \frac{i}{9})$, kde $i = 1, 2, ..., 9$. Hodnoty strát jednotlivých aktív v intervaloch $P_i = [\frac{i-1}{9}, \frac{i}{9})$ nasimulované v programe R sú uvedené v Tabuľke 5.2.

Podľa vzťahu (5.3) a nasimulovaných strát $\mathfrak{L}_{t+1}^{(j)}(i)$ z Tabuľky 5.2 spočítame v Tabuľke 5.3 hodnoty celkovej straty $\mathfrak{L}_{\tilde{k}}$. Napríklad ak $I_{\tilde{k}} = (i_1, i_2)$ odpovedá $I_{18} = (3, 4)$, potom $\mathfrak{L}_{t+1,18} = \mathfrak{L}_{t+1}(3, 4) = \mathfrak{L}_{t+1}^{(1)}(3) + \mathfrak{L}_{t+1}^{(2)}(4)$, čomu podľa Tabuľky 5.2 odpovedajú hodnoty $\mathfrak{L}_{t+1}^{(1)}(3) = 0.3067$ a $\mathfrak{L}_{t+1}^{(2)}(4) = 0.3420$. Preto celková strata $\mathfrak{L}_{t+1,18} = 0.6487$. Tento výpočet prebiehal v programe EXCEL.

Tabuľka 5.2: *Nasimulované straty* $\mathfrak{L}_{t+1}^{(j)}(i)$

$j\backslash i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.0628	0.1832	0.3067	0.4132	0.5418	0.6606	0.6867	0.8356	0.9594
2	0.0613	0.2062	0.2972	0.3420	0.4464	0.5632	0.7161	0.8672	0.9321

V ďalšej Tabuľke 5.3, uvedenej v appendixe, sme zhrnuli možné budúce hodnoty celkovej straty portfolia $\mathfrak{L}_{t+1,\tilde{k}}$, ich možné odpovedajúce ratingy i_1, i_2 a budúce podmienené pravdepodobnosti, že celková strata portfolia $\mathfrak{L}_{t+1}$ v čase $t+1$ je rovná hodnote celkovej straty $\mathfrak{L}_{t+1,\tilde{k}}$ za podmienky množiny informácií o trhu F_t. Podmienené pravdepodobnosti celkovej straty za podmienky množiny F_t pre všetky kombinácie ratingov kreditných rizík v portfoliu, teda pre všetky množiny $I_{\tilde{k}}$, sú vyčíslené pomocou vzťahu (4.12). Najprv sme v programe R spočítali hodnotu výrazu

$$\sum_{k=1}^{s}(\tilde{\lambda}^{1(jk)}\mathbf{Q}^T + \tilde{\lambda}^{2(jk)}(\hat{\mathbf{P}}^{(jk)})^T)\mathbf{e}_{i_k},$$

kde $\mathbf{e}_{i_k} = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)^T$, pričom 1 je na i_k-tom mieste vektoru a i_k odpovedá prvkom množiny $I_{\tilde{k}} = (i_1, i_2)$. Zdrojový kód k tomuto výpočtu je uvedený v appendixe pre prípad $I_{18} = (3, 4)$. Výstupom programu sú pre každú usporiadanú množinu $I_{\tilde{k}}$ dva vektory (9×1). Súčinom i_1-zložky prvého vektoru a i_2-zložky druhého vektoru dostávame podmienenú pravdepodobnosť celkovej straty portfolia pre každú množinu $I_{\tilde{k}} = (i_1, i_2)$. Ostatné výpočty prebiehali v programe EXCEL.

Najprv spočítame Credit VaR:
Zvolíme číslo K^*, tak aby boli splnené rovnice (4.13) a (4.14) pre danú hladinu $\alpha = 0.05$. Z Tabuľky 5.3 zistíme, že $K^* = 74$, pretože platí:

$$\sum_{\tilde{k}=74+1}^{81} P(\mathfrak{L}_{t+1,\tilde{k}}|F_t) = 0.8182 \leq 0.95,$$

$$\sum_{\tilde{k}=74}^{81} P(\mathfrak{L}_{t+1,\tilde{k}}|F_t) = 0.9536 > 0.95.$$

Hodnote $\tilde{k} = 74$ odpovedá hodnota celkovej straty $\mathfrak{L}_{t+1,74}$ 1.5539 preto:

$$VaR_\alpha(\mathfrak{L}_{t+1}|F_t) = \mathfrak{L}_{t+1,74} = 1.5539.$$

Ďalej spočítame Expected shortfall pre portfolio pomocou VaR a hodnôt z Tabuľky 5.3 použitím vzťahu (4.18).

$$\frac{1}{1-\alpha}\sum_{\tilde{k}=74}^{81}\mathfrak{L}_{t+1,\tilde{k}}\sum_{(i_1,i_2)\in I_{\tilde{k}}}\prod_{j=1}^{2}\left[\sum_{k=1}^{2}(\tilde{\lambda}^{1(jk)}\mathbf{Q}^T+\tilde{\lambda}^{2(jk)}(\hat{\mathbf{P}}^{(jk)})^T)\mathbf{e}_{i_k}\right]_{i_j} = 1.7051$$

a

$$\frac{\mathfrak{L}_{t+1,74}}{1-\alpha}\left\{\sum_{\tilde{k}=74}^{81}\sum_{(i_1,i_2)\in I_{\tilde{k}}}\prod_{j=1}^{2}\left[\sum_{k=1}^{2}(\tilde{\lambda}^{1(jk)}\mathbf{Q}^T+\tilde{\lambda}^{2(jk)}(\hat{\mathbf{P}}^{(jk)})^T)\mathbf{e}_{i_k}\right]_{i_j} - (1-\alpha)\right\} = 0.0059.$$

Potom je Expected Shortfall

$$ES_\alpha(\mathfrak{L}_{t+1}|F_t) = 1.6992.$$

Vidíme, že platí ES $\geq$ VaR.

5.3 Príklad 3

Použijeme dáta z Príkladu 2 a vytvoríme model dvojrozmerného Markovovho reťazca vyššieho rádu. Budeme počítať s reťazcom druhého rádu, teda $(n = 2, s = 2)$, pretože matíc počtu prechodov je vždy ns^2.

Z S_1 a S_2 (5.1) spočítame matice počtu prechodov. Matice $\mathbf{F}_1^{(11)}, \mathbf{F}_1^{(12)}, \mathbf{F}_1^{(21)}, \mathbf{F}_1^{(22)}$ odpovedajú maticiam $\mathbf{F}^{(11)}, \mathbf{F}^{(12)}, \mathbf{F}^{(21)}, \mathbf{F}^{(22)}$ z príkladu 2.
Matice počtu prechodov po dvoch krokoch:

$$\mathbf{F}_2^{(11)} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&2&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&9&2&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&2&2&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&9&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F}_2^{(22)} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&2&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&9&2&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&2&2&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&2&2&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&6&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$
\mathbf{F}_2^{(21)} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 9 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\qquad
\mathbf{F}_2^{(12)} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 9 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Po znormovaní dostaneme matice pravdepodobností prechodu. Matice $\mathbf{P}_1^{(11)}, \mathbf{P}_1^{(12)}, \mathbf{P}_1^{(21)}, \mathbf{P}_1^{(22)}$ sú rovnaké ako matice $\mathbf{P}^{(11)}, \mathbf{P}^{(12)}, \mathbf{P}^{(21)}, \mathbf{P}^{(22)}$ z príkladu 2.

$$
\hat{\mathbf{P}}_2^{(11)} = \begin{pmatrix}
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{9}{11} & \frac{2}{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & 0 \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9}
\end{pmatrix}
\qquad
\hat{\mathbf{P}}_2^{(22)} = \begin{pmatrix}
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{9}{11} & \frac{2}{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9}
\end{pmatrix}
$$

$$
\hat{\mathbf{P}}_2^{(21)} = \begin{pmatrix}
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{9}{11} & \frac{2}{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{11} & \frac{8}{11} & \frac{1}{11} & 0 \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9}
\end{pmatrix}
\qquad
\hat{\mathbf{P}}_2^{(12)} = \begin{pmatrix}
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{9}{11} & \frac{2}{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9}
\end{pmatrix}
$$

Odhady stacionárneho rozdelenia ratingov oboch kreditných rizík odpovedajú odhadom spočítaným podľa Vety 4.2 v predchádzajúcom príklade (5.2). Matica prechodu

$\mathbf{Q}$ zostala tiež nezmenená. Znovu sme podľa (4.5) pre prvú postupnosť dostali riešenie spočítané v programe GAMS:

$$(\tilde{\lambda_1}^{1(11)}; \tilde{\lambda_1}^{2(11)}; \tilde{\lambda_2}^{1(11)}; \tilde{\lambda_2}^{2(11)}; \tilde{\lambda_1}^{1(12)}; \tilde{\lambda_1}^{2(12)}; \tilde{\lambda_2}^{1(12)}; \tilde{\lambda_2}^{2(12)}) = (0.000; 0.187; 0.378; 0.145; 0.000; 0.146; 0.000; 0.144).$$

Výsledok pre druhú postupnosť:

$$(\tilde{\lambda_1}^{1(21)}; \tilde{\lambda_1}^{2(21)}; \tilde{\lambda_2}^{1(21)}; \tilde{\lambda_2}^{2(21)}; \tilde{\lambda_1}^{1(22)}; \tilde{\lambda_1}^{2(22)}; \tilde{\lambda_2}^{1(22)}; \tilde{\lambda_2}^{2(22)}) = (0.000; 0.199; 0.061; 0.171; 0.048; 0.105; 0.239; 0.176).$$

Dvojrozmerný model Markovovho reťazca druhého rádu pre dve zadané postupnosti S_1 a S_2 je:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi}_{t+1}^{(1)} = {} & 0.000\mathbf{Q}^T\mathbf{\Pi}_t^{(1)} + 0.187(\hat{\mathbf{P}}_1^{(11)})^T\mathbf{\Pi}_t^{(1)} + 0.378\mathbf{Q}^T\mathbf{\Pi}_t^{(1)} + 0.145(\hat{\mathbf{P}}_2^{(11)})^T\mathbf{\Pi}_t^{(1)} + \\ & +0.000\mathbf{Q}^T\mathbf{\Pi}_t^{(2)} + 0.146(\hat{\mathbf{P}}_1^{(12)})^T\mathbf{\Pi}_t^{(2)} + 0.000\mathbf{Q}^T\mathbf{\Pi}_t^{(2)} + 0.144(\hat{\mathbf{P}}_2^{(12)})^T\mathbf{\Pi}_t^{(2)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi}_{t+1}^{(2)} = {} & 0.000\mathbf{Q}^T\mathbf{\Pi}_t^{(1)} + 0.199(\hat{\mathbf{P}}_1^{(21)})^T\mathbf{\Pi}_t^{(1)} + 0.061\mathbf{Q}^T\mathbf{\Pi}_t^{(1)} + 0.171(\hat{\mathbf{P}}_2^{(21)})^T\mathbf{\Pi}_t^{(1)} + \\ & +0.048\mathbf{Q}^T\mathbf{\Pi}_t^{(2)} + 0.105(\hat{\mathbf{P}}_1^{(22)})^T\mathbf{\Pi}_t^{(2)} + 0.239\mathbf{Q}^T\mathbf{\Pi}_t^{(2)} + 0.176(\hat{\mathbf{P}}_2^{(22)})^T\mathbf{\Pi}_t^{(2)}.\end{aligned}$$

Je vidno, že obe postupnosti na sebe silno závisia a tiež na apriornej matici $\mathbf{Q}$. To znamená, že podmienené rozdelenie ratingov jednotlivých kreditných rizík v nasledujúcom časovom okamžiku za podmienky, že v súčasnosti máme dostupné informácie o histórii ratingov všetkých kreditných rizík, nezávisí len na ratingu daného kreditného rizika, ale aj na ratingoch ostatných kreditných rizík v portfoliu.

Záver

Vytvorili sme model viacrozmerného Markovovho reťazca vyšších rádov pre postupností dát. Počet parametrov tohoto modelu rastie lineárne vzhľadom k rádu modelu preto je dobre použiteľný v praxi. Popísali sme metódu odhadu parametrov modelu a demonštrovali sme ju na príkladoch. Dôležitá je aplikácia tohoto modelu v oblasti merania a riadenia kreditných rizík. Matice pravdepodobností prechodu sme odhadli lineárnou kombináciou apriornej matice prechodu od S&P a maticou pravdepodobností prechodu vytvorenou z matice počtu prechodov. Tým sme vytvorili model, ktorý popisuje závislosti medzi ratingami jednotlivých kreditných rizík v portfoliu v prípade, že straty jednotlivých kreditných rizík závisia na svojich ratingoch. Potom sme použili model dvojrozmerného Markovoho reťazca prvého rádu na výpočet Value at Risk a Expected Shortfall v danom portfoliu kreditných rizík.

Appendix

Zdrojový kód pre príklad 1 podľa (4.5) v programe GAMS

```
*definujeme mnoziny a parametry
Sets
k pocetstavov / 1 * 5 /
j pocetStavov / 1 * 5 /;

Variables
z;
Positive variable lambda1;
Positive variable lambda2;
Positive variable a(j) ;
Positive variable b(j) ;

Table P1(j,k)
       1   2    3   4   5
1 0.5454 0.5    0   0   0
2 0.2727 0.5  0.4   0   0
3      0   0  0.4   1   1
4 0.0909   0    0   0   0
5 0.0909   0  0.2   0   0
;

Table P2(j,k)
       1   2    3    4    5
1 0.3333 0.7    0    0    0
2 0.3333 0.2  0.8    0    0
3 0.2222   0  0.2    0    1
4 0.1111   0    0    0    0
```

```
5      0 0.1    0    1    0
;

Parameter X1(k)
/1      0.4,
 2   0.3333,
 3   0.1667,
 4   0.0333,
 5   0.0667/;

Parameter X3(j) odpoveda X1(k)
/1      0.4,
 2   0.3333,
 3   0.1667,
 4   0.0333,
 5   0.0667/;

Equations
optimum ucelova funkce
abs(j) absolutna hodnota
omezlambda podmienky
;

omezlambda .. lambda1+lambda2 =e= 1;
abs(j) .. a(j)-b(j)=e=sum(k,lambda1*P1(j,k)*X1(k)+lambda2*P2(j,k)*X1(k))-X3(j);
optimum .. z =e= smax(j, a(j)+ b(j));

Model diplomka /all/ ;

solve diplomka using dnlp minimizing z;

*zobrazime vysledok, riesenie primarnej ulohy
display lambda1.l, lambda2.l, z.l;
```

Zdrojový kód pre príklad 1 podľa (4.6) v programe GAMS

```
Variables
w;
Positive variable lambda1;
Positive variable lambda2;

Equations
omezlambda podmienky
p1
p2
p3
p4
p5
p6
p7
p8
p9
p10;

omezlambda .. lambda1 + lambda2 =e= 1;
p1 .. w =g= 0.4 - 0.38485*lambda1 - 0.36667*lambda2;
p2 .. w =g= -0.4 + 0.38485*lambda1 + 0.36667*lambda2;
p3 .. w =g= 0.3333 - 0.34242*lambda1 - 0.33333*lambda2;
p4 .. w =g= -0.3333 + 0.34242*lambda1 + 0.33333*lambda2;
p5 .. w =g= 0.1667 - 0.16667*lambda1 - 0.18889*lambda2;
p6 .. w =g= -0.1667 + 0.16667*lambda1 + 0.18889*lambda2;
p7 .. w =g= 0.0333 - 0.03636*lambda1 - 0.04444*lambda2;
p8 .. w =g= -0.0333 + 0.03636*lambda1 + 0.04444*lambda2;
p9 .. w =g= 0.0667 - 0.06969*lambda1 - 0.06667*lambda2;
p10 .. w =g= -0.0667 + 0.06969*lambda1 + 0.06667*lambda2;

Model diplomka /all/ ;

solve diplomka using lp minimizing w;

*zobrazime vysledok, riesenie primarnej ulohy
display lambda1.l, lambda2.l, w.l;
```

Zdrojový kód v programe R pre príklad 2:

```
P11 <- matrix(c(0.1111,0.1111,0,0,0,0,0,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0,0,0,0,0,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0.5,0,0,0,0,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0.5,0.909,0,0,0,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0,0.09,0.75,0,0,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0,0,0.25,0.909,0,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0,0,0,0.09,0,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0,0,0,0,1,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0,0,0,0,0,0.1111,0.1111), nrow = 9, ncol=9,
byrow=TRUE, dimnames = NULL)

P22 <- matrix(c(0.1111,0.1111,0,0,0,0,0,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0,0,0,0,0,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0.5,0,0,0,0,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0.5,0.909,0,0,0,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0,0.09,0.75,0,0,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0,0,0.25,0.75,0,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0,0,0,0.25,0.875,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0,0,0,0,0.125,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0,0,0,0,0,0.1111,0.1111), nrow = 9, ncol=9,
byrow=TRUE, dimnames = NULL)

P21 <- matrix(c(0.1111,0.1111,0,0,0,0,0,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0,0,0,0,0,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0.5,0,0,0,0,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0.5,0.909,0,0,0,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0,0.09,0.75,0,0,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0,0,0.25,0.273,0,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0,0,0,0.727,0,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0,0,0,0,1,0.1111,0.1111,
0.1111,0.1111,0,0,0,0,0,0.1111,0.1111), nrow = 9, ncol=9,
byrow=TRUE, dimnames = NULL)

P12 <- matrix(c(0.1111,0.1111,0,0,0,0,0,0,0.1111,
0.1111,0.1111,0,0,0,0,0,0,0.1111,
0.1111,0.1111,0.5,0,0,0,0,0,0.1111,
0.1111,0.1111,0.5,0.909,0,0,0,0,0.1111,
```

```
0.1111,0.1111,0,0.09,0.75,0,0,0,0.1111,
0.1111,0.1111,0,0,0.25,1,0.857,0,0.1111,
0.1111,0.1111,0,0,0,0,0.123,0,0.1111,
0.1111,0.1111,0,0,0,0,0,1,0.1111,
0.1111,0.1111,0,0,0,0,0,0.1111,0.1111), nrow = 9, ncol=9,
byrow=TRUE, dimnames = NULL)

Q <- matrix(c(0.8598,0.0179,0.0017,0.0033,0.0001,0.0002,0,0,0,
0.1172,0.8332,0.0358,0.0056,0.0004,0.0007,0.0003,0,0,
0.0176,0.1207,0.8405,0.0506,0.0042,0.0013,0.0066,0.0032,0,
0.0043,0.0221,0.1031,0.8539,0.0370,0.0020,0.0017,0,0,
0.0012,0.0031,0.0103,0.0744,0.8260,0.0567,0.0054,0.0090,0,
0,0,0.0020,0.0040,0.0634,0.7185,0.0501,0.0109,0,
0,0,0.0015,0.0032,0.0383,0.1414,0.6990,0.1115,0,
0,0.0006,0.0017,0.0018,0.0091,0.0232,0.0574,0.4686,0,
0,0.0024,0.0034,0.0032,0.0215,0.0559,0.1795,0.3968,1), nrow = 9,
ncol=9, byrow=TRUE, dimnames = NULL)

ei1 <- c(0,0,1,0,0,0,0,0,0)
ei2 <- c(0,0,0,1,0,0,0,0,0)

### prva postupnost
V <- c(0,0,0,0,0,0,0,0,0)
W <- c(0,0,0,0,0,0,0,0,0)
 for(j in 1:9){
 for(k in 1:9){
 V[k]<-((0.348*Q[j,k]+0.098*P11[j,k])*ei1[k]+0.553*P12[j,k]*ei2[k])
 W[j] <- W[j]+V[k]}  }
W    #zobrazi vysledok

### druha postupnost
V <- c(0,0,0,0,0,0,0,0,0)
W <- c(0,0,0,0,0,0,0,0,0)
 for(j in 1:9){
 for(k in 1:9){
 V[k]<-(0.406*P21[j,k]*ei1[k]+(0.237*Q[j,k]+0.357*P22[j,k])*ei2[k])
 W[j] <- W[j]+V[k]}  }
W    #zobrazi vysledok
```

Tabuľka 5.3: *Celková strata*

$\tilde{k}$	Hodnota celkovej straty $\mathfrak{L}_{t+1,\tilde{k}}$	$P(\mathfrak{L}_{t+1} = \mathfrak{L}_{t+1,\tilde{k}} \mid F_t)$	$I_{\tilde{k}} = (i_1, i_2)$
1	0.1241	0.1072	$(1,1)$
2	0.2444	0.1045	$(2,1)$
3	0.3600	0.1311	$(1,3)$
4	0.3679	0.0980	$(3,1)$
5	0.2690	0.1048	$(1,2)$
6	0.3894	0.1022	$(2,2)$
7	0.4048	0.1773	$(1,4)$
8	0.4744	0.1089	$(4,1)$
9	0.4804	0.1271	$(2,3)$
10	0.5092	0.1577	$(1,5)$
11	0.5129	0.0955	$(3,2)$
12	0.5252	0.1720	$(2,4)$
13	0.6030	0.1028	$(5,1)$
14	0.6039	0.3588	$(3,3)$
15	0.6194	0.1061	$(4,2)$
16	0.6260	0.1498	$(1,6)$
17	0.6296	0.1530	$(2,5)$
18	0.6487	0.2492	$(3,4)$
19	0.7104	0.2503	$(4,3)$
20	0.7218	0.0975	$(6,1)$
21	0.7464	0.1453	$(2,6)$
22	0.7479	0.0741	$(7,1)$
23	0.7480	0.1001	$(5,2)$
24	0.7531	0.1582	$(3,5)$
25	0.7552	0.7964	$(4,4)$
26	0.7789	0.1622	$(1,7)$
27	0.8390	0.1363	$(5,3)$

$\tilde{k}$	Hodnota celkovej straty $\mathfrak{L}_{t+1,\tilde{k}}$	$P(\mathfrak{L}_{t+1} = \mathfrak{L}_{t+1,\tilde{k}} \vert F_t)$	$I_{\tilde{k}} = (i_1, i_2)$
28	0.8596	0.1931	$(4, 5)$
29	0.8668	0.0949	$(6, 2)$
30	0.8699	0.1495	$(3, 6)$
31	0.8838	0.2164	$(5, 4)$
32	0.8929	0.0722	$(7, 2)$
33	0.8968	0.0679	$(8, 1)$
34	0.8993	0.1573	$(2, 7)$
35	0.9300	0.0607	$(1, 8)$
36	0.9578	0.1280	$(6, 3)$
37	0.9764	0.1691	$(4, 6)$
38	0.9839	0.0918	$(7, 3)$
39	0.9882	0.5957	$(5, 5)$
40	0.9949	0.1195	$(1, 9)$
41	1.0026	0.1786	$(6, 4)$
42	1.0206	0.1212	$(9, 1)$
43	1.0228	0.1632	$(3, 7)$
44	1.0287	0.1281	$(7, 4)$
45	1.0418	0.0664	$(8, 2)$
46	1.0504	0.0589	$(2, 8)$
47	1.1050	0.1947	$(5, 6)$
48	1.1070	0.2212	$(6, 5)$
49	1.1153	0.1165	$(2, 9)$
50	1.1293	0.1846	$(4, 7)$
51	1.1328	0.0735	$(8, 3)$
52	1.1331	0.1127	$(7, 5)$
53	1.1656	0.1186	$(9, 2)$
54	1.1739	0.0514	$(3, 8)$

$\tilde{k}$	Hodnota celkovej straty $\mathfrak{L}_{t+1,\tilde{k}}$	$P(\mathfrak{L}_{t+1} = \mathfrak{L}_{t+1,\tilde{k}} \vert F_t)$	$I_{\tilde{k}} = (i_1, i_2)$
55	1.1776	0.0995	$(8,4)$
56	1.2238	0.4896	$(6,6)$
57	1.2388	0.1114	$(3,9)$
58	1.2499	0.1065	$(7,6)$
59	1.2566	0.1517	$(9,3)$
60	1.2579	0.1725	$(5,7)$
61	1.2804	0.0582	$(4,8)$
62	1.2820	0.0884	$(8,5)$
63	1.3041	0.2052	$(9,4)$
64	1.3453	0.1238	$(4,9)$
65	1.3767	0.6286	$(6,7)$
66	1.3988	0.0840	$(8,6)$
67	1.4028	0.1487	$(7,7)$
68	1.4058	0.1825	$(9,5)$
69	1.4090	0.0544	$(5,8)$
70	1.4739	0.1168	$(5,9)$
71	1.5226	0.1733	$(9,6)$
72	1.5278	0.0511	$(6,8)$
73	1.5517	0.0910	$(8,7)$
74	1.5539	0.1354	$(7,8)$
75	1.5927	0.1108	$(6,9)$
76	1.6188	0.0842	$(7,9)$
77	1.6755	0.1877	$(9,7)$
78	1.7028	0.1423	$(8,8)$
79	1.7677	0.0757	$(8,9)$
80	1.8266	0.0823	$(9,8)$
81	1.8915	0.1352	$(9,9)$

Literatúra

[1] Ching, W.K., Fung, E.S., Ng, M.K.: *A multivariate Markov chain model for categorical data sequences and its applications in demand predictions*, IMA Journal of Management Mathematics 13, 187-199, 2002.

[2] Ching, W.K., Fung E.S., Ng M.K.: *Higher-Order Markov Chain Models for Categorical Data Sequences*, Wiley Periodicals, Inc. Naval Research Logistics 51: 557-574, 2004.

[3] Ching, W.K., Ng, M.K., Fung, E.S.: *Higher-order Multivariate Markov Chains and their Applications*, Linear Algebra Applications 428, No. 2-3, 492-507, 2008.

[4] Frey, R., McNeil, A.J.: *VaR and Expected Shortfall in Portfolios of Dependent Credit Risks: Conceptual and Practical Insights*, Journal of Banking and Finance, 26, 1317-1334, 2002.

[5] Prášková, Z., Lachout, P.: *Základy náhodných procesů*, Nakladatelství Karolinum, Praha, 2005.

[6] Raftery, A.E.: *A Model for High-order Markov Chains*, J.R. Statist. Soc. B, 47, 528-539, 1985.

[7] Siu, T.K., Ching W.K., Fung E.S., Ng M.K.: *On a Multivariate Markov Chain Model for Credit Risk Measurement*, Quantitative finance, 5, 543-556, 2005.

[8] Tavare, S., Raftery, A.E.: *Estimation in the Mixture Transition Distribution Model for High Order Markov Chain*, Applied Statist. 43, 179-199, 1994.

[9] Zhang, J., Avasarala, V., Subbu, R.: *Evolutionary optimization of transition probability matrices for credit decision-making*, European Journal of Operational Research, 2009.