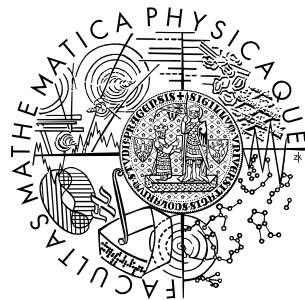


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## DIPLOMOVÁ PRÁCE



Iva Zymáková

### Dopravní problém

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Petr Lachout, CSc.

Studijní program: Ekonometrie

2009

Děkuji Doc. RNDr. Petru Lachoutovi, CSc. za vedení, konzultace a rady při vytváření této diplomové práce.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a s jejím zveřejňováním.

V Praze dne 5. dubna 2009

Iva Zymáková

# Obsah

<b>1</b>	<b>Formulace problému</b>	<b>4</b>
1.1	Kantorovichův dopravní problém . . . . .	4
1.2	Mongeův dopravní problém . . . . .	5
1.3	Vícerozměrný Kantorovichův problém . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Dualita</b>	<b>8</b>
2.1	Kantorovichova dualita . . . . .	8
2.2	Cenová funkce je vzdálenost . . . . .	11
2.2.1	Formulace s divergencí . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Kvadratická cenová funkce</b>	<b>13</b>
3.1	Konvexní analýza . . . . .	13
3.2	Dopravní problém s kvadratickou cenovou funkcí . . . . .	15
3.3	Knott-Smithovo kritérium optimality . . . . .	16
3.4	Alternativní argumenty – Cyklická monotonie . . . . .	17
3.5	Kvadratická cenová funkce na přímce . . . . .	18
3.6	Ryze konvexní cenová funkce . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Monge-Ampérova rovnice</b>	<b>21</b>
4.1	Monge-Ampérova diferenciální rovnice . . . . .	21
4.2	Existence řešení Monge-Ampérový rovnice . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Konkávní cenová funkce</b>	<b>24</b>
5.1	Konkávní cenová funkce na přímce . . . . .	24
5.1.1	Charakterizace optimálního plánu přesunu . . . . .	25
5.1.2	Optimální plán přesunu – snadný případ . . . . .	27
5.1.3	Optimální plán přesunu – složitější případ . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Časově závislá minimalizační úloha</b>	<b>33</b>
6.1	Formulace úlohy . . . . .	33
6.2	Interpolace přesunu . . . . .	34

---

6.2.1	Ryze konvexní cenová funkce . . . . .	34
6.2.2	McCannova interpolace . . . . .	35
6.3	Konvexita přesunu . . . . .	36
6.4	Eulerovský přístup . . . . .	37
6.4.1	Lagrangeovský a Eulerovský přístup . . . . .	37
6.4.2	Rovnice optimality . . . . .	38
<b>7</b>	<b>Monge-Kantorovichova vzdálenost</b>	<b>39</b>
<b>8</b>	<b>Diskrétní dopravní problém</b>	<b>41</b>
8.1	Formulace úlohy . . . . .	41
8.2	Lineární programování a simplexová metoda . . . . .	42
8.2.1	Lineární programování a dualita . . . . .	43
8.2.2	Simplexová metoda . . . . .	44
8.3	Duální úloha k diskrétnímu dopravnímu problému . . . . .	44
8.3.1	Dualita . . . . .	45
<b>9</b>	<b>Aproximace obecné úlohy pomocí diskrétní</b>	<b>47</b>
9.1	Zadání . . . . .	47
9.2	Řešení spojité úlohy . . . . .	48
9.3	Diskretizace . . . . .	50
9.3.1	Různě velké ekvidistantní body . . . . .	50
9.3.2	Stejně velké body různě daleko od sebe . . . . .	52
9.4	Výsledky . . . . .	53
9.5	Diskuse výsledků . . . . .	54

**Název práce:** Dopravní problém

**Autor:** Iva Zymáková

**Katedra:** Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

**Vedoucí diplomové práce:** Doc. RNDr. Petr Lachout, CSc.

**E-mail vedoucího:** lachout@karlin.mff.cuni.cz

**Abstrakt:** Názvem dopravní problém se obvykle označuje jedna z klasických úloh lineárního programování. To je ale jen speciální případ podstatně obecnější úlohy označované také jako Kantorovichův dopravní problém.

V této práci se věnuji obecné Kantorovichově úloze a jejímu řešení v některých speciálních případech. Podrobněji se zaměřuji na popis řešení úlohy s kvadratickou cenovou funkcí a řešení úlohy dopravního problému s konkávní cenovou funkcí na reálné přímce.

Ve druhé části práce ukazuji, jak by se dalo řešení obecné úlohy aproximovat pomocí řešení diskrétní úlohy se zvyšujícím se počtem proměnných v účelové funkci. Úlohu řeším s některými standardními rozděleními a se třemi typickými cenovými funkcemi – lineární, ryze konvexní a ryze konkávní.

**Klíčová slova:** Monge-Kantorovichův problém, optimální plán přesunu, vzdálenost mezi pravděpodobnostními mírami, diskretizace

**Title:** Transportation problem

**Author:** Iva Zymáková

**Department:** Department of Probability and Mathematical Statistics

**Supervisor:** Doc. RNDr. Petr Lachout, CSc.

**Supervisor's e-mail address:** lachout@karlin.mff.cuni.cz

**Abstract:** As a transportation problem we usually denote one of the classical problems of the linear programming. This is just a very special case of more general problem, which is sometimes called Kantorovich transportation problem.

I describe Kantorovich problem and its solution in some special cases in this work. Particularly, I describe the solution of the problem with quadratic cost and the solution of the problem with concave cost on the real line, in detail.

At the end of the text, I show how the solution of the general problem could be approximated by the solutions of linear task. I solve the problem with some common distributions and with three typical cost functions – linear, strictly convex and strictly concave.

**Keywords:** Monge-Kantorovich problem, optimal mass transport, distance between probability measures, discretization

# Formulace problému

Představme si, že máme hromadu písku a jámu. Obě dvě mají stejný, řekněme jednotkový, objem. Dále máme zadanou funkci, která říká, kolik je zapotřebí peněz (energie, ...) k přesunutí jedné jednotky písku z daného místa hromady do nějakého místa v jámě. Tuto funkci budeme označovat jako cenovou funkci. Snahou je přemístit písek z hromady do jámy tak, aby nás to stálo co nejméně.

## 1.1 Kantorovichův dopravní problém

Hromadu i jámu budeme modelovat pomocí pravděpodobnostních měr  $\mu$  a  $\nu$  definovaných na prostorech  $X$  a  $Y$ . Samotný přesun pak bude reprezentován pravděpodobnostní mírou  $\pi$  na součinném prostoru  $X \times Y$ . (Nevylučujeme ani případ, kdy se hmota situovaná v jednom místě prostoru  $X$  rozdělí do více míst v prostoru  $Y$ .)

Je samozřejmě nutné, aby hmota, která se přesune z každé měřitelné podmnožiny  $A \subset X$ , měla objem  $\mu[A]$ , stejně tak objem hmoty přesunuté do  $B \subset Y$  by měl být  $\nu[B]$ . Požadujeme tedy, aby pro všechny měřitelné  $A \subset X$  a  $B \subset Y$  platilo

$$\pi[A \times Y] = \mu[A], \quad \pi[X \times B] = \nu[B]. \quad (1.1)$$

Množinu všech pravděpodobnostních měr  $\pi$ , pro které podmínka (1.1) platí, budu značit  $\Pi(\mu, \nu)$ . Tato množina je vždycky neprázdná, protože musí obsahovat alespoň součin měr  $\mu$  a  $\nu$ .

Podmínka (1.1) je ekvivalentní tomu, že pro všechny funkce  $\varphi$  a  $\psi$  (z vhodného prostoru funkcí) platí

$$\int_{X \times Y} [\varphi(x) + \psi(y)] d\pi(x, y) = \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_Y \psi(y) d\nu(y). \quad (1.2)$$

Dvojice funkcí  $(\varphi, \psi)$  se bere z  $L^1(\mu) \times L^1(\nu)$ , ale většinou stačí tento prostor zúžit jen na prostor spojitých a omezených funkcí  $C_b(X) \times C_b(Y)$ .

Cenovou funkci budu značit  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ . Je rozumné požadovat, aby byla měřitelná a nezáporná.

Nyní už se dá dopravní problém jasně formulovat.

**Kantorovichova formulace dopravního problému:**

$$\text{Minimalizovat } I[\pi] = \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y) \quad (1.3)$$

přes všechna  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ .

Takto úlohu dopravního problému formuloval a zkoumal ve čtyřicátých letech 20. století ruský matematik Leonid Kantorovich (nositel Nobelovy ceny za ekonomii).

Označme ještě jako optimální cenu přesunu mezi  $\mu$  a  $\nu$  hodnotu

$$\mathcal{T}_c(\mu, \nu) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} I[\pi]. \quad (1.4)$$

Každé  $\pi$ , pro které  $I[\pi] = \mathcal{T}_c(\mu, \nu)$ , pokud nějaké takové existuje, budu nazývat optimálním plánem přesunu.

Ekvivalentní formulace Kantorovichovy úlohy je s využitím rozdělení náhodných veličin.

**Pravděpodobnostní interpretace:**

$$\text{Minimalizovat } I(U, V) = \mathbb{E}[c(U, V)]$$

přes všechny možné náhodné vektory  $(U, V)$  takové, že  $U$  je náhodná veličina (náhodný vektor) s hodnotami v  $X$  a s rozdělením  $\mu$ ,  $V$  je náhodná veličina (vektor) v  $Y$  a má rozdělení  $\nu$ .

Přesněji náhodná veličina  $U$  je měřitelné zobrazení z pravděpodobnostního prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  do měřitelného prostoru  $(X, \mathcal{S})$ . Rozdělením náhodné veličiny  $U$  rozumím obraz pravděpodobnostní míry  $P$  při zobrazení  $U$ . Tedy pro každou měřitelnou  $B \in \mathcal{S}$  je  $\mu[B] = P[U^{-1}(B)]$ , kde symbol  $U^{-1}(B)$  značí vzor množiny  $B$  při zobrazení  $U$ .

## 1.2 Mongeův dopravní problém

Jiná (původní) formulace dopravního problému pochází už z druhé poloviny 18. století, kdy se tímto tématem zabýval francouzský matematik Gaspard Monge.

Jediný rozdíl oproti Kantorovichově formulaci je ten, že se žádná hmota nemůže dělit. S každým místem  $x \in X$  je spojeno **jediné** místo v  $Y$ , do kterého se hmota z  $x$  přesune.

Jedná se o speciální případ Kantorovichova problému. V pravděpodobnostní interpretaci to znamená, že  $V$  musí být funkcí  $U$ .

Plán přesunu  $\pi = \pi_T \in \Pi(\mu, \nu)$  pak musí mít speciální tvar. Musí existovat měřitelná funkce  $T$  z  $X$  do  $Y$  taková, že míra  $\nu$  bude obrazem míry  $\mu$  při zobrazení  $T$ . Znamená to tedy, že pro každou měřitelnou funkci  $\zeta$  na  $X \times Y$  platí rovnost

$$\int_{X \times Y} \zeta(x, y) d\pi_T(x, y) = \int_X \zeta(x, T(x)) d\mu(x). \quad (1.5)$$

Podmínka (1.1) se v tomto případě přepíše jako

$$\nu[B] = \mu[T^{-1}(B)], \quad (1.6)$$

pro každou měřitelnou  $B \subset Y$ .

Ekvivalentní podmínka, která odpovídá rovnosti (1.2), je

$$\int_{X \times Y} [\varphi(x) + \psi \circ T(x)] d\mu(x) = \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_Y \psi(y) d\nu(y),$$

což je po upravení

$$\int_X \psi \circ T(x) d\mu(x) = \int_Y \psi(y) d\nu(y). \quad (1.7)$$

To by mělo platit pro všechny  $\psi \in L^1(\nu)$ . Přesněji pro každou  $\psi \in L^1(\nu)$  by měla být funkce  $\psi \circ T$  prvkem  $L^1(\mu)$  a měla by pro ni platit rovnost (1.7).

**Mongeova formulace dopravního problému:**

$$\text{Minimalizovat } I[T] = \int_X c(x, T(x)) d\mu(x) \quad (1.8)$$

přes všechna měřitelná zobrazení  $T$  z  $X$  do  $Y$  taková, že obraz míry  $\mu$  při zobrazení  $T$  je  $\nu$ .

Řešení původní Mongeovy úlohy dopravního problému může být dost komplikované. Obecně ani nemusí být jasné, zda existuje přípustné řešení. Je to způsobeno nelinearitou omezujících podmínek na zobrazení  $T$  (viz článek [Evans \(2001\)](#)).

Kantorovichův přínos spočívá především v tom, že uvolněním Mongeovy úlohy dosáhl linearity účelové funkce  $I[\pi]$ . Optimální řešení Kantorovichovy úlohy obecně nemusí být řešením Mongeova problému (může docházet k dělení hmoty z jednoho místa v  $X$  do více míst v  $Y$ ).

### 1.3 Vícerozměrný Kantorovichův problém

Existují i jiné formulace dopravního problému. Některé se dají nalézt v knize [Rachev \(1991\)](#).



Zajímavé zobecnění úlohy formulované v části 1.1 je vícerozměrný Kantorovichův problém.

Uvažujme systém pravděpodobnostních měr  $\mu_i$  pro  $i = 1, \dots, n$  definovaných na prostoru  $X$ . Přesun pak bude reprezentován pravděpodobnostní mírou  $\pi$  na součinném prostoru  $X^n$ . Míra  $\pi$  musí mít marginály  $\mu_i$ , chceme tedy, aby pro každou měřitelnou podmnožinu  $A \subset X$  a pro jakékoli  $i \in \{1, \dots, n\}$  bylo

$$\pi[X \times \dots \times A \times \dots \times X] = \mu_i[A]. \quad (1.9)$$

( $A$  je ve výrazu  $X \times \dots \times A \times \dots \times X$  na  $i$ -tém místě.) Množinu pravděpodobnostních měr  $\pi$ , které splňují podmínku (1.9), označím  $\Pi(\mu_1, \dots, \mu_n)$ .

Dále mějme cenovou funkci  $c$  na  $X^n$ .

**Kantorovichův vícerozměrný dopravní problém:**

$$\text{Minimalizovat } I[\pi] = \int_{X^n} c(x_1, \dots, x_n) d\pi(x_1, \dots, x_n) \quad (1.10)$$

přes všechna  $\pi \in \Pi(\mu_1, \dots, \mu_n)$ .

# Dualita

**Příklad 2.1** (Převrácův problém). Tento příklad je převzatý z knihy Villani (2003).

Majitel uhelných dolů, který má kromě nich také továrny, kde se uhlí zpracovává, potřebuje přepravit uhlí ze svých dolů do svých továren. Firma vlastní kamiony si účtuje cenu za přepravu metráku uhlí na vzdálenost jednoho kilometru. Továrník a uhlobaron v jedné osobě si klade otázku, jak přesun uhlí realizovat, aby ho to stálo co nejméně, a kolik ho to tedy nakonec bude stát.

V tento moment na scénu přichází matematik a slibuje, že mu jeho problém vyřeší. Říká, že mu všechno uhlí převezme a bude si účtovat (různé) ceny za naložení metráku uhlí v jednotlivých dolech a (jiné, opět různé) ceny za vyložení uhlí v jednotlivých továrnách. Zároveň slibuje, že uhlobaron ušetří. Jak si prý bude moci snadno zkontrolovat, naložení metráku uhlí v jednom dole a jeho vyložení v nějaké továrně bude levnější nebo nejvýše tak drahé jako přeprava metráku uhlí z tohoto dolu do této továrny. Dokonce mu matematik za naložení uhlí v některých dolech (nebo vyložení v některých továrnách) může peníze vrátet, jenom aby to podnikatele vyšlo levněji. Navíc si podnikatel nemusí lámat hlavu s tím, odkud kam uhlí vozit.

Zdá se tedy výhodné přenechat problém matematikovi.

A teď co se skutečně stane? Z Kantorovichovy duality (věta 2.1) plyne, že matematik může své ceny nastavit tak, aby to továrníka stálo právě tolik, jako kdyby si najal kamiony.

## 2.1 Kantorovichova dualita

Tvrzení formulované v této kapitole jsou dokázaná v monografii Villani (2003).

**Definice 2.1** (Polský prostor). Úplný separabilní (existuje v něm spočetná hustá podmnožina) metrický prostor nazvu **Polským prostorem**.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Existuje i obecnější definice Polského prostoru.

**Definice 2.2** (Polospojité funkce). Funkce  $F$  na metrickém prostoru  $X$  je **zdola polospojité**, pokud pro každé  $x \in X$  platí

$$F(x) \leq \liminf_{y \rightarrow x} F(y).$$

**Věta 2.1** (Kantorovichova dualita). *Nechť  $X$  a  $Y$  jsou Polské prostory,  $\mu \in P(X)$  a  $\nu \in P(Y)$  jsou Borelovské pravděpodobnostní míry. Nechť  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  je zdola polospojité (cenová) funkce.*

*Pro  $\pi \in P(X \times Y)$  a  $(\varphi, \psi) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu)$  definujeme*

$$I[\pi] = \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y), \quad J(\varphi, \psi) = \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu.$$

*Dále definujeme  $\Pi(\mu, \nu)$  jako systém všech takových Borelovských pravděpodobnostních měr  $\pi$  na  $X \times Y$ , že pro každou měřitelnou podmnožinu  $A \subset X$  a  $B \subset Y$  platí*

$$\pi[A \times Y] = \mu[A], \quad \pi[X \times B] = \nu[B].$$

*Systém všech měřitelných funkcí  $(\varphi, \psi) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu)$  splňujících*

$$\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y),$$

*pro  $\mu$ -skoro všechna  $x \in X$  a  $\nu$ -skoro všechna  $y \in Y$  budeme značit  $\Phi_c$ .*

*Pak platí*

$$\inf_{\Pi(\mu, \nu)} I[\pi] = \sup_{\Phi_c} J(\varphi, \psi). \quad (2.1)$$

*Navíc infima na levé straně rovnosti (2.1) se nabývá.*

*Hodnota suprema na pravé straně rovnosti (2.1) se nezmění, pokud se v definici  $\Phi_c$  omezíme jen na ty funkce  $(\varphi, \psi)$ , které jsou spojité a omezené.*

*Důkaz.* Přesný důkaz je v [Villani \(2003\)](#).

Tady ukážu jenom „snadnou“ nerovnost  $\inf_{\Pi(\mu, \nu)} I[\pi] \geq \sup_{\Phi_c} J(\varphi, \psi)$ , opačnou nerovnost naznačím. V přesném důkazu této nerovnosti se používá fakt, že jsou-li prostory  $X$  a  $Y$  kompaktní, duální prostor k prostoru všech spojitých funkcí na  $X \times Y$  se dá reprezentovat prostorem Radonových měr na  $X \times Y$ . (Duální úlohou je tedy minimalizace na levé straně rovnosti (2.1).)

**„Snadná“ nerovnost:** Platí

$$\sup_{\Phi_c \cap C_b} J(\varphi, \psi) \leq \sup_{\Phi_c} J(\varphi, \psi) \leq \inf_{\Pi(\mu, \nu)} I[\pi].$$

Levá nerovnost plyne z toho, že  $C_b(X) \times C_b(Y) \subset L^1(\mu) \times L^1(\nu)$ .

Pro libovolné  $(\varphi, \psi) \in \Phi_c$  a  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$  je

$$J(\varphi, \psi) = \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu = \int_{X \times Y} [\varphi(x) + \psi(y)] d\pi.$$

Pro  $\mu$ -skoro všechna  $x$  a  $\nu$ -skoro všechna  $y$  platí nerovnost

$$\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y). \quad (2.2)$$

Můžu najít měřitelné množiny  $N_x$  a  $N_y$  tak, že  $\mu[N_x] = \nu[N_y] = 0$  a nerovnost (2.2) platí pro všechny  $(x, y) \in N_x^c \times N_y^c$ . Ale míra množiny  $N_x^c \times N_y^c$  je jedna, neboť  $\pi[N_x \times Y] = \mu[N_x] = 0$ , stejně tak  $\pi[X \times N_y] = 0$  a proto  $\pi[(N_x^c \times N_y^c)^c] = 0$ .

Takže nerovnost (2.2) platí pro  $\pi$ -skoro všechna  $(x, y)$ .

Z toho plyne, že

$$\int_{X \times Y} [\varphi(x) + \psi(y)] d\pi(x, y) \leq \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y) = I[\pi].$$

To platí pro libovolné  $(\varphi, \psi) \in \Phi_c$  a  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ , dá se tedy udělat supremum přes všechny možné dvojice funkcí  $(\varphi, \psi)$  a infimum přes  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$  a nerovnost zůstane zachovaná.

**Náznak důkazu opačné nerovnosti:** Základní myšlenka, která se použije v důkazu opačné nerovnosti, je převést úlohu hledání vázaného infima na hledání infima ze suprem a provést záměnu inf a sup.

Označím-li prostor všech nezáporných Borelovských měr na  $X \times Y$  symbolem  $M_+(X \times Y)$ , můžu infimum z rovnosti (2.1) přepsat ve tvaru

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} I[\pi] = \inf_{\pi \in M_+(X \times Y)} \left( I[\pi] + \begin{cases} 0 & \text{je-li } \pi \in \Pi(\mu, \nu) \\ +\infty & \text{jinak} \end{cases} \right).$$

Funkci, která nabývá pro  $\pi$  z  $\Pi(\mu, \nu)$  hodnoty nula a jinde je nekonečno, můžeme přepsat ve tvaru

$$\begin{cases} 0 & \text{je-li } \pi \in \Pi(\mu, \nu) \\ +\infty & \text{jinak} \end{cases} = \sup_{(\varphi, \psi)} \left[ \int \varphi d\mu + \int \psi d\nu - \int [\varphi(x) + \psi(y)] d\pi(x, y) \right],$$

supremum se bere přes všechny  $(\varphi, \psi) \in C_b(X) \times C_b(Y)$ .

Infimum na levé straně rovnosti (2.1) je potom rovno výrazu

$$\inf_{\pi \in M_+(X \times Y)} \sup_{(\varphi, \psi)} \left\{ \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y) + \int \varphi d\mu + \int \psi d\nu - \int [\varphi(x) + \psi(y)] d\pi(x, y) \right\}.$$

Můžeme-li zaměnit infimum a supremum, dá se předchozí výraz přepsat jako

$$\begin{aligned} \sup_{(\varphi, \psi)} \inf_{\pi \in M_+(X \times Y)} \left\{ \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y) \right. \\ \left. + \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu - \int_{X \times Y} [\varphi(x) + \psi(y)] d\pi(x, y) \right\} \end{aligned}$$

$$= \sup_{(\varphi, \psi)} \left\{ \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu - \sup_{\pi \in M_+(X \times Y)} \int_{X \times Y} [\varphi(x) + \psi(y) - c(x, y)] d\pi(x, y) \right\}.$$

Pokud funkce  $\zeta(x, y) \equiv \varphi(x) + \psi(y) - c(x, y)$  nabývá v nějakém bodě  $(x_0, y_0)$  kladné hodnoty, dá se volbou  $\pi = \lambda \delta_{(x_0, y_0)}$  pro  $\lambda \rightarrow +\infty$  dosáhnout libovolně veliké hodnoty  $\int_{X \times Y} \zeta(x, y) d\pi(x, y)$  a supremum bude  $+\infty$ . Pokud je  $\zeta$  nekladná ( $\mu \otimes \nu$ -skoro všude), suprema se nabývá pro  $\pi = 0$ . Platí tedy

$$\sup_{\pi \in M_+(X \times Y)} \int_{X \times Y} \zeta(x, y) d\pi(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } (\varphi, \psi) \in \Phi_c, \\ +\infty & \text{jinak.} \end{cases}$$

Celkově tedy dostaneme požadovanou rovnost

$$\sup_{(\varphi, \psi)} \left( \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu - \begin{cases} 0 & \text{je-li } (\varphi, \psi) \in \Phi_c \\ +\infty & \text{jinak} \end{cases} \right) = \sup_{(\varphi, \psi) \in \Phi_c} J(\varphi, \psi).$$

□

*Poznámka.* Hodnota infima v rovnosti (2.1) může být i nekonečná.

## 2.2 Cenová funkce je vzdálenost

V případě, že cenová funkce  $c(x, y) = d(x, y)$  je metrikou na  $X = Y$ , platí Kantorovich-Rubinsteinova věta. Ta v podstatě říká to, že hmota, která je společná oběma pravděpodobnostním mírám, se v optimálním případě nemusí nikam přesouvat.

**Věta 2.2** (Kantorovich-Rubinstein). *Nechť  $X = Y$  je Polský prostor a  $d$  je zdola polospojitá metrika na  $X$ . Nechť  $\mathcal{T}_d$  je cena optimálního přesunu pro cenovou funkci  $c(x, y) = d(x, y)$ ,*

$$\mathcal{T}_d(\mu, \nu) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times X} d(x, y) d\pi(x, y).$$

*Nechť  $\text{Lip}(X)$  značí prostor všech Lipschitzovských funkcí na  $X$ , konstantu Lipschitzovskosti budu značit*

$$\|\varphi\|_{\text{Lip}} \equiv \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{d(x, y)}.$$

*Potom*

$$\mathcal{T}_d(\mu, \nu) = \sup \left\{ \int_X \varphi d(\mu - \nu); \quad \varphi \in L^1(|\mu - \nu|); \quad \|\varphi\|_{\text{Lip}} \leq 1 \right\}. \quad (2.3)$$

*Navíc hodnota suprema se nezmění pokud přidáme podmínku, že  $\varphi$  je omezená.*

### 2.2.1 Formulace s divergencí

Když  $X = Y = \mathbb{R}^n$  a  $c = d$  je standardní Eukleidovská vzdálenost, dá se formulovat další „duální“ úloha:

$$\mathcal{T}_d(\mu, \nu) = \inf \{ \|\sigma\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}; \quad \nabla \cdot \sigma = \mu - \nu \}. \quad (2.4)$$

Symbol  $\nabla \cdot$  značí operátor divergence.

*Poznámka.* Pokud je  $v$  hladká a prostor  $X = \mathbb{R}^n$  je s Eukleidovskou metrikou, je operátor divergence  $\nabla \cdot$  definován jako

$$\nabla \cdot v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

Následující příklad, který je z knihy Villani (2003), se pokusí vzorec (2.4) trochu objasnit.

**Příklad 2.2** (Stěhování mraveniště). Mravenci se stěhují. Současné mraveniště je hromada jehličí o jednotkovém objemu. Dá se popsat pravděpodobnostní mírou  $\mu$ . Nové mraveniště bude mít tvar  $\nu$ .

Každý mravenec popadne svojí jehličku a vydá se s ní konstantní rychlostí předem určeným směrem na místo, kam má jehlička přijít v novém mraveništi. Celé stěhování probíhá od času  $t = 0$  do  $t = 1$  minuta.

Každý mravenec má přidělenou (konstantní) rychlost, kterou se pohybuje. To udělala mravenčí královna tak, aby se původní mraveniště zmenšovalo konstantní rychlostí a stejně tak nové mraveniště bude konstantní rychlostí narůstat. Tj. v čase  $t$  jsou jehličky ve tvaru určeném pravděpodobnostní mírou  $(1 - t)\mu + t\nu$ .

Podíváme-li se na okolí  $dx$  místa  $x$  v čase  $t$ , vidíme mravence nesoucí jehličky o objemu  $\rho(t, x)$  běžící rychlostí  $u(t, x)$ . Za „nekonečně krátký“ časový okamžik  $dt$  bude práce vykonaná mravenci přímo úměrná objemu jehličí, co nesou, a jejich rychlosti. Práce se tedy dá modelovat pomocí vektorového pole  $\sigma = \rho u$ .

Když počítáme práci přes všechny mravence, dostaneme celkovou „cenu“ přesunu  $\int |\sigma|$  (nezávisí na čase).

Dále víme, že divergence  $\sigma$  je mínus derivace hromady jehličí podle času. To je z předpokladů  $\mu - \nu$ .

Tak dostáváme  $\nabla \cdot \sigma = \mu - \nu$ .

# Kvadratická cenová funkce

V této kapitole se budu zabývat kvadratickou cenovou funkcí v  $\mathbb{R}^n$ . Na začátek shrnu některé poznatky týkající se konvexních funkcí, v druhé části pak budu formulovat Knott-Smithovu větu o existenci optimálního řešení s kvadratickou cenovou funkcí. Pak naznačím, jak by se k některým výsledkům dalo dojít s použitím cyklické monotonie. Na konci kapitoly se podrobněji zaměřím na řešení dopravního problému na  $\mathbb{R}$ . Pak se ještě zmíním o řešení s obecnou ryze konvexní cenovou funkcí.

Závěry formulované v této kapitole jsem převzala z knihy [Villani \(2003\)](#).

## 3.1 Konvexní analýza

**Definice 3.1** (Konvexní funkce). Funkce  $\varphi$  na  $\mathbb{R}^n$  je **konvexní**, pokud

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, 1], \quad \varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y).$$

Funkce  $\varphi$  je **ryze konvexní**, pokud předchozí nerovnost platí pro  $x \neq y$  a  $t \in (0, 1)$  ostře.

**Graf konvexní funkce leží nad tečnou.** Pro každý bod  $x$ , kde je (konvexní) funkce  $\varphi$  diferencovatelná, platí nerovnost

$$\forall z \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(z) \geq \varphi(x) + \nabla\varphi(x) \cdot (z - x). \quad (3.1)$$

Geometrická interpretace je taková, že celý graf  $\varphi$  leží nad tečnou nadrovinou v bodě  $x$ .

**Definice 3.2** (Subdiferenciál). Definice gradientu se dá s využitím nerovnosti (3.1) zobecnit i na body, kde funkce  $\varphi$  není diferencovatelná. **Subdiferenciálem** (konvexní) funkce  $\varphi$  v bodě  $x$  rozumím množinu takových  $y$ , pro které leží graf funkce  $\varphi$  nad „tečnou“ v bodě  $x$  se směrem  $y$ . Subdiferenciál budu značit  $\partial\varphi$ . Je definován vztahem

$$y \in \partial\varphi(x) \Leftrightarrow \left[ \forall z \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(z) \geq \varphi(x) + \langle y, z - x \rangle \right].$$

V dalším budu subdiferenciál ztotožňovat s jeho grafem, bude to tedy podmnožina  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

Konvexní funkce  $\varphi$  je v bodě  $x$  diferencovatelná, právě když  $\partial\varphi(x)$  je jednoprvková množina. Tímto prvkem je pak gradient  $\nabla\varphi(x)$ .

**Definice 3.3** (Legendreova transformace). Pro jakoukoliv funkci  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , která není identicky rovna  $+\infty$ , se definuje její **Legendreova transformace** (její konvexní konjugovaná funkce) rovností

$$\varphi^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (x \cdot y - \varphi(x)),$$

kde symbolem  $x \cdot y$  značí skalární součin vektorů  $x$  a  $y$ .

Funkce  $\varphi^*$  je pak konvexní, zdola polospojité. Z definice taky plyne, že pro všechna  $x, y \in \mathbb{R}^n$  je

$$x \cdot y \leq \varphi(x) + \varphi^*(y). \quad (3.2)$$

Tato vlastnost se využije při řešení úlohy dopravního problému s kvadratickou cenovou funkcí.

**Tvrzení 3.1.** *Nechť  $\varphi$  je zdola polospojité konvexní funkce na  $\mathbb{R}^n$  (ne identicky rovná  $+\infty$ ). Potom pro všechna  $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$x \cdot y = \varphi(x) + \varphi^*(y) \Leftrightarrow y \in \partial\varphi(x) \Leftrightarrow x \in \partial\varphi^*(y).$$

**Definice 3.4** (Inf-konvoluce). Nechť  $\varphi$  a  $\psi$  jsou konvexní funkce, ne identicky rovné nekonečnu. **Inf-konvoluci** definujeme jako funkci

$$(\varphi \square \psi)(z) = \inf_{x+x'=z} [\varphi(x) + \psi(x')].$$

**Tvrzení 3.2.** *Legendreova transformace inf-konvoluce dvou funkcí je rovna součtu Legendreových transformací těchto funkcí*

$$(\varphi \square \psi)^* = \varphi^* + \psi^*.$$

**Legendreova transformace a derivování** Je-li  $\varphi$  striktně konvexní na okolí nějakého  $x \in \mathbb{R}^n$ , pak je funkce  $\varphi^*$  v  $\partial\varphi(x)$  diferencovatelná a pro všechna  $y \in \partial\varphi(x)$  platí  $\nabla\varphi^*(y) = x$ .

Je-li  $\varphi$  diferencovatelná a striktně konvexní, pak je taková i  $\varphi^*$  a  $\nabla\varphi$  je bijekce. A platí následující důležitá rovnost

$$(\nabla\varphi)^{-1} = \nabla\varphi^*. \quad (3.3)$$



## 3.2 Dopravní problém s kvadratickou cenovou funkcí

Předpokládejme nyní, že  $X = Y = \mathbb{R}^n$  a cenová funkce je teď na chvíli

$$c(x, y) = \frac{|x - y|^2}{2}.$$

Hodnota  $c(x, y)$  je tedy polovina druhé mocniny Eukleidovské vzdálenosti mezi body  $x$  a  $y$ . Konstanta (polovina) nemá na řešení Kantorovichova problému žádný vliv.

Pak  $I[\pi]$  je

$$I[\pi] = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|x - y|^2}{2} d\pi(x, y).$$

Nechť  $\mu$  a  $\nu$  jsou pravděpodobnostní míry na  $\mathbb{R}^n$  s konečnými druhými momenty ve smyslu

$$M_2 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{2} d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|^2}{2} d\nu(y) < +\infty. \quad (3.4)$$

Tato podmínka zaručuje, že je hodnota funkcionálu  $I$  na  $\Pi(\mu, \nu)$  vždycky konečná. Je-li  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ , pak je

$$I[\pi] = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|x - y|^2}{2} d\pi(x, y) \leq \int (|x|^2 + |y|^2) d\pi(x, y) = 2 M_2.$$

Z věty 2.1 pak víme, že

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} I[\pi] = \sup_{(\varphi, \psi) \in \Phi_c} J(\varphi, \psi). \quad (3.5)$$

Podmínka, kterou dvojice funkcí  $(\varphi, \psi)$  musí splňovat, aby  $\varphi$  a  $\psi$  patřily do  $\Phi_c$ , je

$$\varphi(x) + \psi(y) \leq \frac{|x - y|^2}{2},$$

pro  $\mu$ -skoro všechna  $x$  a  $\nu$ -skoro všechna  $y$  z  $\mathbb{R}^n$ . To je po úpravě

$$x \cdot y \leq \left[ \frac{|x|^2}{2} - \varphi(x) \right] + \left[ \frac{|y|^2}{2} - \psi(y) \right]. \quad (3.6)$$

Výrazy na pravé straně (3.6) označím

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{|x|^2}{2} - \varphi(x) \quad \tilde{\psi}(y) = \frac{|y|^2}{2} - \psi(y).$$

S použitím vztahu (3.4) je pak

$$\inf_{\Pi(\mu, \nu)} I[\pi] = M_2 - \sup \left\{ \int x \cdot y d\pi(x, y); \quad \pi \in \Pi(\mu, \nu) \right\}$$

a

$$\sup_{\tilde{\Phi}_c} J = M_2 - \inf \left\{ J(\varphi, \psi); \quad (\varphi, \psi) \in \tilde{\Phi} \right\},$$

kde  $\tilde{\Phi}$  je množina všech dvojic funkcí  $(\varphi, \psi) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu)$  takových, že pro skoro všechna  $x, y$  platí

$$x \cdot y \leq \varphi(x) + \psi(y). \quad (3.7)$$

Rovnost (3.5) se tedy dá přepsat jako

$$\sup \left\{ \int x \cdot y \, d\pi(x, y); \quad \pi \in \Pi(\mu, \nu) \right\} = \inf \left\{ J(\varphi, \psi); \quad (\varphi, \psi) \in \tilde{\Phi} \right\}. \quad (3.8)$$

Následující věta říká, že existuje dvojice konvexních konjugovaných funkcí (z  $\tilde{\Phi}$ ) minimalizujících  $J$  na  $\tilde{\Phi}$ .

**Věta 3.3.** *Nechť  $\mu$  a  $\nu$  jsou pravděpodobnostní míry na  $\mathbb{R}^n$  s konečnými druhými momenty. Nechť  $\tilde{\Phi}$  je definovaná vztahem (3.7). Pak existuje dvojice zdola polospojitéch konvexních konjugovaných funkcí  $(\varphi, \varphi^*)$  na  $\mathbb{R}^n$ , které nejsou všude nekonečno, takových, že  $(\varphi, \varphi^*) \in \tilde{\Phi}$*

a

$$\inf_{\tilde{\Phi}} J = J(\varphi, \varphi^*).$$

### 3.3 Knott-Smithovo kritérium optimality

V následující větě je popsáno optimální řešení Monge-Kantorovichova dopravního problému s kvadratickou cenovou funkcí. Toto řešení je monotónní.

**Věta 3.4** (Knott-Smithovo kritérium optimality). *Nechť  $\mu$  a  $\nu$  jsou pravděpodobnostní míry na  $\mathbb{R}^n$  s konečnými druhými momenty ve smyslu (3.4). Uvažujme Monge-Kantorovichův problém s kvadratickou cenovou funkcí  $c(x, y) = |x - y|^2$ .*

*Potom  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$  je optimální plán přesunu, právě když existuje konvexní, zdola polospojité funkce  $\varphi : X = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  taková, že*

$$\text{Supp}(\pi) \subset \text{Graph}(\partial\varphi),$$

*což je ekvivalentní podmínce, že pro  $\pi$ -skoro všechny  $(x, y)$  je  $y \in \partial\varphi(x)$ .*

*Navíc je pak dvojice funkcí  $(\varphi, \varphi^*)$  optimálním řešením úlohy*

$$\inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \psi \, d\nu; \quad \forall(x, y) \quad x \cdot y \leq \varphi(x) + \psi(y) \right\}$$

*Poznámka.* Dvojice funkcí  $(\varphi, \varphi^*)$  není optimálním řešením duální úlohy k Monge-Kantorovichovu problému, tím jsou funkce

$$\left( \frac{|x|^2}{2} - \varphi(x), \frac{|y|^2}{2} - \varphi^*(y) \right).$$

**Věta 3.5** (Brenier). *Nechť  $\mu$  a  $\nu$  jsou pravděpodobnostní míry na  $\mathbb{R}^n$  s konečnými druhými momenty. Uvažujme Monge-Kantorovichův problém s kvadratickou cenovou funkcí  $c(x, y) = |x - y|^2$ .*

*Pokud  $\mu \ll \lambda$  (míra  $\mu$  je absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře, má-li množina  $A$  Lebesgueovu míru nula, pak  $\mu(A) = 0$ ), pak existuje jediný optimální plán přesunu  $\pi$ , který je obrazem míry  $\mu$  při zobrazení  $\text{Id} \times \nabla\varphi$ , kde  $\nabla\varphi$  je jednoznačný (jednoznačně definovaný  $\mu$ -skoro všude) gradient konvexní funkce a zobrazuje míru  $\mu$  na  $\nu$ .*

*Navíc je*

$$\text{Supp}(\nu) = \overline{\nabla\varphi(\text{Supp}(\mu))}.$$

**Věta 3.6.** *Za stejných předpokladů jako ve větě 3.5 je  $\nabla\varphi$  jediné řešení Mongeova problému*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x - \nabla\varphi(x)|^2 d\mu(x) = \inf_{\{T; T\#\mu=\nu\}} \int_{\mathbb{R}^n} |x - T(x)|^2 d\mu(x),$$

*nebo ekvivalentně, podle vzorce (3.8)*

$$\int_{\mathbb{R}^n} x \cdot \nabla\varphi(x) d\mu(x) = \sup_{\{T; T\#\mu=\nu\}} \int_{\mathbb{R}^n} x \cdot T(x) d\mu(x).$$

*Poznámka.* Označení  $T\#\mu = \nu$  znamená, že míra  $\nu$  je obrazem míry  $\mu$  při zobrazení  $T$ .

**Věta 3.7.** *Za předpokladů jako ve větě 3.5, je-li navíc i míra  $\nu$  absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře ( $\nu \ll \lambda$ ), pak pro  $\mu$ -skoro všechna  $x$  a  $\nu$ -skoro všechna  $y$  platí*

$$\nabla\varphi^* \circ \nabla\varphi(x) = x, \quad \nabla\varphi \circ \nabla\varphi^*(y) = y,$$

*a  $\nabla\varphi^*$  je ( $\nu$ -skoro všude) jednoznačný gradient konvexní funkce, která zobrazuje  $\nu$  na  $\mu$  a současně je také řešením Mongeova problému přesunu  $\nu$  na  $\mu$  s kvadratickou cenovou funkcí.*

## 3.4 Alternativní argumenty – Cyklická monotonie

V této části uvedu tvrzení, které umožňují dojít k podobným závěrům jako v sekci 3.3 s využitím pojmu cyklická monotonie. Podrobněji se tímto směrem zabývá Villani (2003).

**Definice 3.5** (Cyklická monotonie). *Podmnožina  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  je cyklicky monotónní, když pro každé  $m \geq 1$  a pro všechny  $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$  z množiny  $\Gamma$  platí*

$$\sum_{i=1}^m |x_i - y_i|^2 \leq \sum_{i=1}^m |x_i - y_{i-1}|^2, \quad (3.9)$$

kde  $y_0 = y_m$ .

Podmínka (3.9) je ekvivalentní podmínce

$$\sum_{i=1}^m y_i \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq 0, \quad (3.10)$$

kde  $x_{m+1} = x_1$ .

**Tvrzení 3.8** (Optimální plán přesunu má cyklicky monotónní nosič). *Nechť  $\mu$  a  $\nu$  jsou pravděpodobnostní míry na  $\mathbb{R}^n$  a nechť  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$  je optimální řešení Kantorovichova problému s kvadratickou cenovou funkcí  $c(x, y) = |x - y|^2$ . Pak nosič  $\pi$  je cyklicky monotónní.*

**Tvrzení 3.9** (Rockafellarova věta). *Neprázdňá podmnožina  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  je cyklicky monotónní právě tehdy, když je podmnožinou (grafu) subdiferenciálu nějaké zdola polospojité konvexní funkce  $\varphi$  na  $\mathbb{R}^n$ , která není všude rovna  $+\infty$ .*

*Maximální cyklicky monotónní množiny jsou právě subdiferenciály zdola polospojité konvexních funkcí.*

Z těchto tvrzení se dá dokázat následující věta. Jedná se o zobecnění části věty 3.4, nekladou se zde žádné podmínky na momenty.

**Věta 3.10** (Nosičem optimálního plánu přesunu je subdiferenciál). *Nechť  $\mu$  a  $\nu$  jsou pravděpodobnostní míry na  $\mathbb{R}^n$  a nechť  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$  je plán přesunu. Když je  $\pi$  optimální řešení Kantorovichova problému s kvadratickou cenovou funkcí  $c(x, y) = |x - y|^2$ , pak nosičem  $\pi$  je subdiferenciál nějaké zdola polospojité konvexní funkce, která není identicky  $+\infty$ .*

## 3.5 Kvadratická cenová funkce na přímce

Speciálním případem je úloha, kdy  $X = Y = \mathbb{R}$ .

Na  $\mathbb{R}$  si odpovídají gradienty konvexních funkcí a neklesající funkce. Subgradienty (subdiferenciály) pak odpovídají „maximálním monotónním podmnožinám“  $\mathbb{R}^2$ .

**Definice 3.6.** Podmnožina  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  je monotónní, pokud platí implikace

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Gamma \quad \Rightarrow \quad [x_1 \leq x_2 \text{ a } y_1 \leq y_2] \text{ nebo } [x_1 \geq x_2 \text{ a } y_1 \geq y_2].$$

Pravděpodobnostní míry na  $\mathbb{R}$  mohou být reprezentované pomocí distribučních funkcí. Distribuční funkce  $F$  příslušná k pravděpodobnostní míře  $\mu$  na  $\mathbb{R}$  je  $\forall x \in \mathbb{R}$  definována předpisem

$$F(x) = \int_{(-\infty, x]} d\mu = \mu[(-\infty, x]].$$

Distribuční funkce je neklesající, zprava spojitá,  $F(-\infty) = 0$  a  $F(\infty) = 1$ .

K distribuční funkci  $F$  definujeme kvantilovou funkci  $F^{-1}$  předpisem

$$F^{-1}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R}; \quad F(x) > t\}.$$

Distribuční funkce příslušná k pravděpodobnostní míře  $\mu$  na  $\mathbb{R}^n$  je  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  definována předpisem

$$F(x_1, \dots, x_n) = \mu[(-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]].$$

V knize Villani (2003) je dokázáno, jak vypadá optimální plán přesunu na  $\mathbb{R}$  s kvadratickou cenovou funkcí.

**Věta 3.11** (Optimální přesun s kvadratickou cenovou funkcí na přímce). *Nechť  $\mu$  a  $\nu$  jsou pravděpodobnostní míry na  $\mathbb{R}$  s distribučními funkcemi  $F$  a  $G$ . Nechť  $\pi$  je taková pravděpodobnostní míra na  $\mathbb{R}^2$ , která má (dvojrozměrnou) distribuční funkci*

$$H(x, y) = \min(F(x), G(y)).$$

*Pak  $\pi$  patří do množiny  $\Pi(\mu, \nu)$  a je to optimální plán přesunu mezi  $\mu$  a  $\nu$  v Kantorovichově problému s cenovou funkcí  $c(x, y) = |x - y|^2$ .*

*Navíc cena optimálního přesunu je pak*

$$\mathcal{T}_2(\mu, \nu) = \int_0^1 |F^{-1}(t) - G^{-1}(t)|^2 dt.$$

Následující věta říká, že míra  $\pi$  z věty 3.11 je optimální pro jakoukoliv konvexní cenovou funkci. Tento závěr je formulovaný v Villani (2003). Druhá část věty, která říká, jak vypadá optimální cena přesunu, se dá nalézt i v knize Rachev (1991).

**Věta 3.12** (Optimální přesun s konvexní cenovou funkcí na přímce). *Nechť  $\mu$  a  $\nu$  jsou pravděpodobnostní míry na  $\mathbb{R}$  s distribučními funkcemi  $F$  a  $G$ .*

*Je-li cenová funkce tvaru  $c(x - y)$ , kde  $c$  je nezáporná konvexní a symetrická funkce na  $\mathbb{R}$ , pak míra  $\pi$  z věty 3.11, tj. pravděpodobnostní míra na  $\mathbb{R}^2$ , která má (dvojrozměrnou) distribuční funkci*

$$H(x, y) = \min(F(x), G(y)),$$

*je optimálním řešením Kantorovichova problému přesunu  $\mu$  a  $\nu$  s cenovou funkcí  $c$ .*

*Optimální cena přesunu je potom*

$$\mathcal{T}_c(\mu, \nu) = \int_0^1 c(F^{-1}(t) - G^{-1}(t)) dt.$$

*Poznámka.* Je-li  $\mu \ll \lambda$ , pak  $T = G^{-1} \circ F$  zobrazí  $\mu$  na  $\nu$  a platí

$$\int_{-\infty}^x d\mu = \int_{-\infty}^{T(x)} d\nu.$$

Jedná se o monotónní přeskupení  $\mu$  na  $\nu$  („písek se do jámy začne sypat zleva“). Body nespojitosti  $G$  odpovídají atomům míry  $\nu$ . Když má  $\nu$  atom,  $G^{-1} \circ F$  je na příslušném intervalu konstantní („chvíli se písek sype do jednoho místa a pak se pokračuje dál doprava“).

## 3.6 Ryze konvexní cenová funkce

**Definice 3.7.** Nechť  $X$  a  $Y$  jsou neprázdné množiny a  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  je daná funkce.

Řekneme, že funkce  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  je  **$c$ -konkávní**, pokud existuje funkce  $\psi : Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $\psi \not\equiv -\infty$  taková, že

$$\forall x \in X, \quad \varphi(x) = \inf_{y \in Y} [c(x, y) - \psi(y)].$$

**Definice 3.8.** Funkce  $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je **superlineární**, jestliže

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{c(|z|)}{|z|} = +\infty.$$

V následující větě budu označením „ryze konvexní, superlineární cenová funkce“ rozumět ryze konvexní, superlineární funkci, která navíc splňuje následující podmínku.

**Gangbo-McCannova podmínka.** Pro každé  $r > 0$  a  $\theta \in (0, \pi)$ , kdykoliv  $p \in \mathbb{R}^n$  je dostatečně daleko od počátku soustavy souřadné, existuje takový směr  $z \in \mathbb{R}^n$ , že na („useknutém“) kuželu  $K(p, z, \theta)$  s úhlem  $\theta/2$ , vrcholem  $p$  a se směrem  $z$  definovaném

$$K(p, z, \theta) = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad |x - p| |z| \cos(\theta/2) \leq \langle z, x - p \rangle \leq r |z|\},$$

nabývá funkce  $c$  svého maxima v bodě  $p$ .

**Věta 3.13** (Optimální přesun pro ryze konvexní cenovou funkci). *Nechť  $c$  je ryze konvexní, superlineární cenová funkce na  $\mathbb{R}^n$  a nechť  $\mu$  a  $\nu$  jsou pravděpodobnostní míry na  $\mathbb{R}^n$  takové, že existuje přesun s konečnou cenou (tj.  $\exists \tilde{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$ , že  $\int c(x, y) d\tilde{\pi} < +\infty$ ). Dále předpokládejme, že  $\mu$  je absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře.*

*Pak v Monge-Kantorovichově problému existuje jediný optimální plán přesunu  $\pi$ . Je obrazem míry  $\mu$  při zobrazení  $\text{Id} \times T$ , kde  $T$  je určeno  $\mu$ -skoro všude jednoznačně z požadavků, aby zobrazovalo míru  $\mu$  na  $\nu$ , a aby pro nějakou  $c$ -konkávní funkci  $\varphi$  platilo*

$$T(x) = x - \nabla c^*(\nabla \varphi(x)).$$

*Poznámka.* Symbol  $*$  značí Legendreovu transformaci.

# Monge-Ampérova rovnice

V kapitole 3 bylo popsáno, jak vypadá řešení Monge-Kantorovichovy úlohy s kvadratickou cenovou funkcí. Nosičem optimálního plánu přesunu je subdiferenciál nějaké konvexní funkce.

V této kapitole se zaměřím na to, jak lze tuto konvexní funkci nalézt. Jedná se totiž o řešení Monge-Ampérovy parciální diferenciální rovnice.

## 4.1 Monge-Ampérova diferenciální rovnice

Nechť  $\mu$  a  $\nu$  jsou pravděpodobnostní míry na  $\mathbb{R}^n$ , absolutně spojitě vzhledem k Lebesgueově míře, které mají hustoty  $f$  a  $g$ . Uvažujeme dopravní problém s kvadratickou cenovou funkcí.

Z Brenierovy věty 3.5 víme, že existuje ( $\mu$ -skoro všude) jednoznačně určený gradient konvexní funkce,  $\nabla\varphi$ , takový, že pro všechny spojitě a omezené funkce  $\zeta$  na  $\mathbb{R}^n$  platí

$$\int \zeta(y) g(y) dy = \int \zeta(\nabla\varphi(x)) f(x) dx. \quad (4.1)$$

Předpokládejme dále, že  $\nabla\varphi$  je hladká (třídy  $C^1$ ) bijekce ( $\varphi$  je striktně konvexní). Pak se dá použít věta o substituci (substituuji  $y = \nabla\varphi(x)$ ) a dostanu rovnost

$$\int \zeta(y) g(y) dy = \int \zeta(\nabla\varphi(x)) g(\nabla\varphi(x)) \det(D^2\varphi(x)) dx. \quad (4.2)$$

Symbolem  $D^2\varphi(x)$  značím Hessián (matici druhých parciálních derivací) funkce  $\varphi$ .

Protože funkce  $\zeta$  může být libovolná, spojením (4.1) a (4.2) dostanu

$$f(x) = g(\nabla\varphi(x)) \det(D^2\varphi(x)). \quad (4.3)$$

Když je  $g$  kladná, dá se tato rovnice přepsat ve tvaru

$$\det(D^2\varphi(x)) = \frac{f(x)}{g(\nabla\varphi(x))}. \quad (4.4)$$

Vzorec (4.4) je speciálním případem obecné **Monge-Ampérovovy rovnice**

$$\det(D^2\varphi(x)) = F(x, \varphi(x), \nabla\varphi(x)). \quad (4.5)$$

Monge-Kantorovichova úloha s kvadratickou cenovou funkcí je tedy hledání řešení Monge-Ampérovovy parciální diferenciální rovnice (4.3), kde funkce  $\varphi$  musí být taková, aby míra  $\nu$  byla obrazem  $\mu$  při zobrazení  $\nabla\varphi$ .

**Řešení pro obecnou funkci  $\varphi$ .** K odvození rovnosti (4.4) byl nutný předpoklad, že  $\nabla\varphi \in C^1$ , tj.  $\varphi \in C^2$ . To ale nemusí platit vždycky.

Jak by se dal definovat výraz  $\det D^2\varphi$  a rovnice (4.5) i pro funkce  $\varphi$ , které nejsou hladké (z  $C^2$ )? Obecně se to dá udělat třemi způsoby.

**(i) Alexandrovovo řešení:** Definuji tzv. Hessovu míru příslušnou funkci  $\varphi$ , kterou budu značit  $\det_{\mathbb{H}} D^2\varphi$ . Pro každou Borelovskou množinu  $E \subset \mathbb{R}^n$  definuji

$$\det_{\mathbb{H}} D^2\varphi[E] = \lambda[\partial\varphi(E)],$$

kde

$$\partial\varphi(E) = \bigcup_{x \in E} \partial\varphi(x).$$

Symbol  $\partial\varphi(x)$  značí subdiferenciál funkce  $\varphi$  v bodě  $x$ , Hessova míra množiny  $E$  příslušná zobrazení  $\varphi$  je tedy Lebesgueova míra obrazu množiny  $E$  při zobrazení pomocí subdiferenciálu  $\partial\varphi$ .

Řekneme, že funkce  $\varphi$  je Alexandrovovo řešení rovnice (4.5), pokud je Hessova míra absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově, a když je její hustota skoro všude rovna pravé straně (4.5).

Ekvivalentní formulace je taková, že  $\det_{\mathbb{H}} D^2\varphi$  nemá žádnou singulární část a Monge-Ampérovova rovnice (4.5) platí skoro všude s  $\det D^2\varphi = \det D_{\mathbb{A}}^2\varphi$  (determinant Alexandrovovy druhé derivace, který existuje skoro všude).

**(ii) Viskózní řešení:** Řekneme, že funkce  $\varphi$  je viskózní řešení rovnice (4.5) na otevřené množině  $\Omega$ , pokud

1. pro každou konvexní testovací funkci  $\psi$  z  $C^2$  takovou, že  $\varphi - \psi$  má v bodě  $x_0$  striktní lokální maximum, platí

$$\det D^2\psi(x_0) \geq F(x_0, \varphi(x_0), \nabla\psi(x_0)),$$

2. pro každou konvexní testovací funkci  $\psi$  z  $C^2$  takovou, že  $\varphi - \psi$  má v bodě  $x_0$  striktní lokální minimum, platí

$$\det D^2\psi(x_0) \leq F(x_0, \varphi(x_0), \nabla\psi(x_0)).$$

Existence  $\det D^2\psi(x_0)$  je zaručena tím, že  $\psi \in C^2$ .



(iii) **Brenierovo řešení:** Brenierovo řešení se definuje jen pro speciální tvar Monge-Ampérovoy rovnice, pro rovnici (4.4).

Řekneme, že funkce  $\varphi$  je Brenierovo řešení rovnice (4.4), jestliže míra  $\nu$  je obrazem míry  $\mu$  při zobrazení  $\nabla\varphi$ . Pravděpodobnostní míry  $\mu$  a  $\nu$  jsou definované pomocí hustot  $f$  a  $g$ .

## 4.2 Existence řešení Monge-Ampérovoy rovnice

Následující věty jsou uvedeny i s důkazy v monografii Villani (2003).

**Věta 4.1** (Monge-Ampérová rovnice má řešení skoro všude). *Nechť  $\mu$  a  $\nu$  jsou absolutně spojitě pravděpodobnostní míry na  $\mathbb{R}^n$  s hustotami  $f$  a  $g$ . Nechť  $\varphi$  je konvexní funkce taková, že  $\nu$  je obrazem  $\mu$  při zobrazení  $\nabla\varphi$  a nechť  $\Omega = \text{Int}(\text{Dom}(\varphi))$ . Nechť  $\det D_A^2\varphi$  je determinant matice druhých parciálních derivací funkce  $\varphi$  v Alexandrovově smyslu, tj. nezáporná funkce z  $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  definovaná skoro všude. Označme  $M \subset \Omega$  množinu všech bodů, kde je  $D_A^2\varphi$  definovaná a invertibilní.*

*Potom  $\mu[M] = 1$ ,  $\nu[\partial\varphi(M)] = 1$  a pro skoro všechna  $x \in \mathbb{R}^n$  platí Monge-Ampérová rovnice*

$$\det D_A^2\varphi(x) g(\nabla\varphi(x)) = f(x).$$

*Poznámka.* Věta 4.1 neříká nic o chování singulární části Hessovy míry. Tvrzení věty neimplikuje to, že by  $\varphi$  bylo řešením Monge-Ampérovoy rovnice (v Alexandrovově smyslu).

Následující věta říká, že pokud je prostor  $Y = \text{Supp}(\nu)$  konvexní, pak funkce  $\varphi$  Monge-Ampérovou rovnici (4.3) řeší (v Alexandrovově smyslu).

**Věta 4.2** (Monge-Ampérová rovnice pro konvexní  $Y$ ). *Nechť  $\mu$  a  $\nu$  jsou absolutně spojitě pravděpodobnostní míry na  $\mathbb{R}^n$  s hustotami  $f$  a  $g$  a s nosiči  $X$  a  $Y$ . Nechť  $\varphi$  je konvexní funkce taková, že  $\nu$  je obrazem  $\mu$  při zobrazení  $\nabla\varphi$ . Dále předpokládáme, že  $Y$  je konvexní a  $g$  je kladná skoro všude na  $Y$ .*

*Pak Hessova míra  $\det_{\mathbb{H}} D^2\varphi$  nemá na  $X$  žádnou singulární část. Speciálně, funkce  $\varphi$  řeší rovnici*

$$\det D_A^2\varphi(x) g(\nabla\varphi(x)) = f(x)$$

*v Alexandrovově smyslu.*

## Konkávni cenová funkce

Na rozdíl od kapitol 3 a 4, které se věnovaly konvexní (speciálně kvadratické) cenové funkci, se v této kapitole zaměřím na úlohu dopravního problému s konkávni cenovou funkcí.

V této části tedy budu uvažovat cenovou funkci, která bude tvaru

$$c(x, y) = c(|x - y|), \quad c(0) = 0,$$

kde  $c : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  je ryze konkávni funkce na  $\mathbb{R}_+$ . Takové cenové funkce se často vyskytují třeba v ekonomii.

Dva hlavní rozdíly mezi ryze konkávni a konvexni cenovými funkcemi jsou následující.

- Všechna hmota, která je oběma míram  $\mu$  a  $\nu$  společná, **musí** zůstat na místě. Konkávni cenová funkce definuje metriku a z věty 2.2 plyne, že společná hmota může zůstat na místě. Pokud je cenová funkce striktně konkávni, společná hmota dokonce musí zůstat, kde je. V tomto případě se dá úloha zjednodušit na řešení případu, kdy mají míry  $\mu$  a  $\nu$  disjunktní nosiče.
- Když je cenová funkce konkávni, optimální plán přesunu „má tendenci obracet orientaci“. V ekonomické interpretaci to znamená, že jeden transport na větší vzdálenost je lepší než několik krátkých.

### 5.1 Konkávni cenová funkce na přímce

Problematicke řešení dopravního problému s konkávni cenovou funkcí na  $\mathbb{R}$  se podrobně věnuje článek [McCann \(1999\)](#), odkud pocházejí hlavní závěry uvedené v této části.

Uvažujme tedy nyní cenovou funkci tvaru  $c(x, y) = h(|x - y|)$ , kde  $h \geq 0$  je ryze konkávni,  $X = Y = \mathbb{R}$ .

Pokud je cenová funkce konvexní, optimální přeskupení  $\mu$  na  $\nu$  bude monotónní (viz věta 3.12). V případě konkávní cenové funkce se ukazuje, že jeden transport na velkou vzdálenost a jeden krátký jsou lepší než dva středně dlouhé. Optimální plán přesunu tedy může obsahovat taková místa, kdy „se na jednom úseku dálnice potkají dva kamiony převážející stejnou komoditu a jedoucí v protisměru“. Takovýto plán přesunu může být optimální, pokud jeden z kamionů je lokální dopravce a druhý převáží danou komoditu na dlouhou vzdálenost.

**Příklad 5.1** (Lokální a globální dodavatelé). Tento příklad je, až na drobnou úpravu, převzatý z článku [McCann \(1999\)](#).

Nechť  $X = Y = \mathbb{R}$ ,  $\mu$  má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{20} \sin\left(\frac{\pi}{5}x\right) & \text{pro } x \in (-10, -5) \cup (0, 5), \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$\nu$  má hustotu

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{20} \sin\left(\frac{\pi}{5}x\right) & \text{pro } x \in (-5, 0) \cup (5, 10), \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a

$$c(x, y) = \sqrt{2|x - y|}.$$

Pak optimální plán přesunu je zobrazen pomocí šipek na obrázku 5.1 a je určen funkcí

$$T(x) = \begin{cases} -x - 10 & \text{pro } -9 < x < -5, \\ -x & \text{pro } |x| < 1 \text{ nebo } |x| > 9, \\ x + 10 & \text{pro } 1 < x < 5. \end{cases}$$

Na obrázku 5.1 jsou pomocí půlkružnic se šipkami spojena místa  $x \in \text{Supp}(\mu)$ , odkud se hmota bere, a místa  $y \in \text{Supp}(\nu)$ , kam se tato hmota vozí. Důležité pozorování, které platí pro jakékoliv dvě míry  $\mu$  a  $\nu$  a pro jakoukoli konkávní cenovou funkci, je to, že se žádné dvě takovéto půlkružnice neprotínají. Optimální plán přesunu je tedy po částech nerostoucí funkce, jak je vidět z obrázku 5.2.

K vyřešení příkladu tedy stačí nalézt body nespojitosti funkce  $T$ .

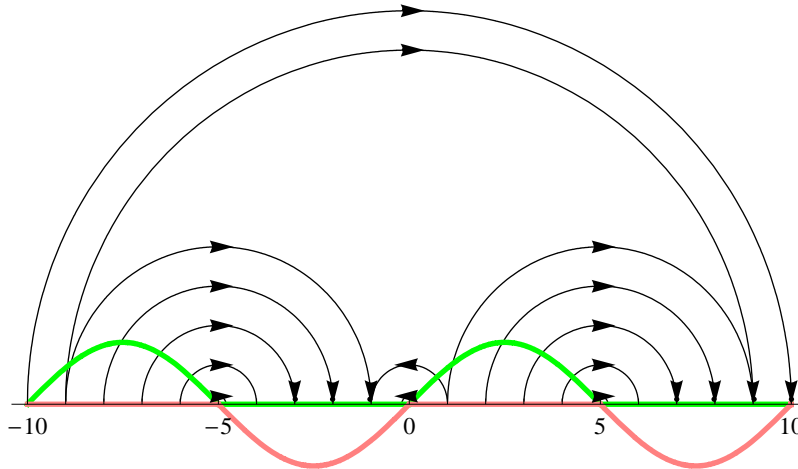
V tomto příkladě jsou tyto body určeny z rovnosti

$$c(1, -1) + c(-9, 9) = c(1, 9) + c(-9, 1).$$

### 5.1.1 Charakterizace optimálního plánu přesunu

Pro optimální přesun,  $\pi(\mu, \nu)$ , platí následující nerovnost. Leží-li body  $(x, y)$  a  $(x', y')$  v nosiči optimálního plánu přesunu, pak musí platit

$$c(x, y) + c(x', y') \leq c(x, y') + c(x', y). \quad (5.1)$$



Obrázek 5.1. Přesun s konkávní cenovou funkcí. Zeleně je znázorněna míra  $\mu$ , růžově (mínus)  $\nu$ . Šipky naznačují, odkud kam se hmota přesouvá.

Pokud by tato nerovnost neplatila, bylo by lepší přesouvat hmotu z  $x$  do  $y'$  a z  $x'$  do  $y$ .

Důsledkem tohoto pozorování je následující věta.

Označme  $O(x, y)$  pro  $x, y \in \mathbb{R}$  nejmenší kružnici, která protíná vodorovnou osu v bodech  $(x, 0)$  a  $(y, 0)$ .

**Věta 5.1.** *Nechť  $c(x, y) = h(|x - y|)$ , kde  $h$  je rostoucí a ryze konkávní.*

1. *Jsou-li  $(x, y), (x', y') \in \text{Supp}(\pi)$ , kde  $\pi$  je optimální přesun, pak se kružnice  $O(x, y)$  a  $O(x', y')$  mohou protínat (dotýkat) jedině tehdy, když  $x = x'$  nebo  $y = y'$ .*
2. *Pokud kružnice  $O(x', y')$  obklopuje kružnici  $O(x, y)$  a  $(y - x)(y' - x') < 0$ , pak  $O(x', y')$  obklopuje (aniž by se dotýkala) i kružnici  $O(2x - y, 2y - x)$ , jejíž poloměr je třikrát větší než poloměr  $O(x, y)$ .*

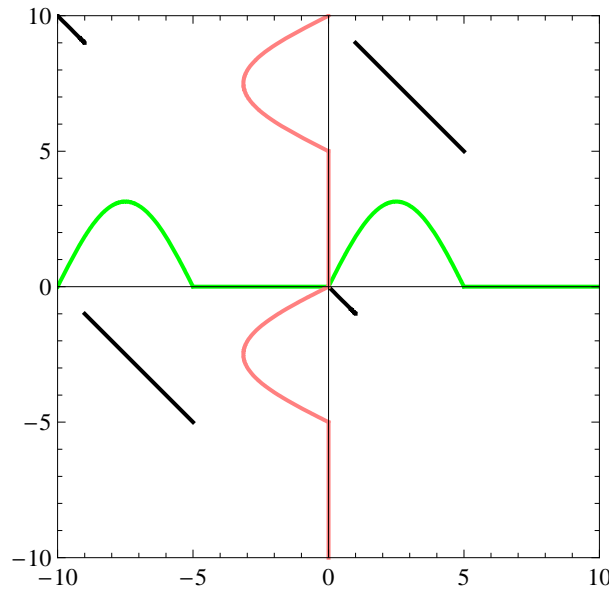
*Poznámka.* Kvantitativní závěr v druhé části věty 5.1 nezávisí na volbě konkávní cenové funkce.

*Poznámka.* Druhá část věty 5.1 v podstatě rozlišuje dodejce na lokální a dálkové.

**Definice 5.1** (Křížení). Řekneme, že množina  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  **nemá křížení**, pokud se pro žádné dva body  $(x, y), (x', y') \in \Omega$  kružnice  $O(x, y)$  a  $O(x', y')$  neprotínají (nebo nanejvýš dotýkají).

Míra  $\pi$  na  $\mathbb{R}^2$  **nemá křížení**, pokud její nosič nemá křížení.

*Poznámka.* Pokud se vrátím k příkladu 5.1, množinou  $\Omega$  myslím nosič optimálního plánu přesunu, který je na obrázku 5.2 znázorněn černými šikmými úsečkami. Příslušné kružnice, které se nanejvýš dotýkají, jsou na obrázku 5.1.



Obrázek 5.2. Přesun s konkávní cenovou funkcí. Osa  $x$  reprezentuje prostor  $X = \mathbb{R}$ , osa  $y$  prostor  $Y = \mathbb{R}$ . Hustota míry  $\mu$  je zeleně, (mínus) hustota  $\nu$  růžově. Černé šikmé čáry představují nosič optimálního plánu přesunu  $\text{Supp}(\pi)$ .

### 5.1.2 Optimální plán přesunu – snadný případ

Pro větší názornost teď převedu reálnou přímku na kružnici  $\mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  a to tak, že k reálným číslům přidám bod reprezentující nekonečno (společný pro  $+\infty$  i  $-\infty$ ). Dál si zavedu znaménkovou míru  $\rho = \mu - \nu$ .

Pokud míra  $\rho$  mění na  $\mathring{\mathbb{R}}$  znaménko pouze dvakrát, optimální plán přesunu  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$  je určen jednoznačně a nezávisle na volbě konkávní cenové funkce. Je to jediná míra, jejíž nosič nemá žádná křížení.

**Věta 5.2.** *Nechť  $\mu$  a  $\nu$  jsou pravděpodobnostní míry na  $\mathring{\mathbb{R}}$ . Předpokládejme, že míra  $\nu$  je nulová na nějakém intervalu  $I \subset \mathring{\mathbb{R}}$ , míra  $\mu$  je nulová na jeho doplňku  $J = \mathring{\mathbb{R}} \setminus I$ . Pak existuje jediná míra  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ , která nemá křížení. Tato míra určuje optimální plán přesunu mezi  $\mu$  a  $\nu$  s jakoukoliv konkávní cenovou funkcí.*

### 5.1.3 Optimální plán přesunu – složitější případ

Pokud míra  $\rho$  mění na  $\mathring{\mathbb{R}}$  znaménko častěji, existuje měř bez křížení více.

**Definice 5.2** (Interval nabídky, poptávky). **Intervalem nabídky** nazveme maximální interval  $I \subset \mathring{\mathbb{R}}$ , pro který  $\nu(I) = 0$  a  $\mu(I) > 0$ .

Pokud se nosič míry  $\mu$  skládá z  $m + 1$  intervalů nabídky, řekneme, že znaménková míra  $\rho$  mění na  $\mathring{\mathbb{R}}$  znaménko  $2m + 2$  krát,  $\rho \in \mathcal{M}_0^m(\mathring{\mathbb{R}})$ .

Z maximality intervalů nabídky plyne, že jsou disjunktí, dají se označit (proti směru hodinových ručiček) symboly  $I_0, \dots, I_m$ .

Doplňěk  $\mathring{\mathbb{R}} \setminus \bigcup I_j$  je taky z  $m + 1$  intervalů  $J_0, \dots, J_m$ , na kterých je tentokrát  $\mu$  nulová a  $\nu$  ne. Tyto intervaly budu značit jako **intervaly poptávky**.

Nosič míry  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$  je částí sjednocení součinu intervalů nabídky a poptávky

$$\text{Supp}(\pi) \subset \bigcup_{i,j=1}^m I_i \times J_j.$$

Pokud je plán přesunu  $\pi$  optimální, musí být bez křížení, na některých intervalech  $I_i \times J_j$  je tedy  $\pi$  nulový.

Intervaly nabídky a poptávky stačí reprezentovat pomocí jejich zástupců – bodů z těchto intervalů. Místo  $2m + 2$  intervalů tedy budu brát  $2m + 2$  bodů  $x_{2i+1} \in I_i$  a  $x_{2i+2} \in J_i$ ,  $i = 0, \dots, m$ .

**Definice 5.3** (Graf bez křížení). **Grafem bez křížení** nazvu orientovaný graf  $G$  mající následující vlastnosti.

1.  $G$  má sudý počet vrcholů, které jsou tvořeny po dvou různými body na jednotkové kružnici (případně na  $\mathring{\mathbb{R}}$ ). Množinu vrcholů budu značit  $\text{node}(G)$ .
2. Hrany grafu  $G$  označím  $\text{arc}(G)$ . Kdykoliv  $(x_i, x_j) \in \text{arc}(G)$ ,  $i$  musí být liché a  $j$  sudé.
3. Hrany  $\text{arc}(G) \subset \mathring{\mathbb{R}}$  se neprotínají.
4. Do grafu se už nedají přidat žádné další hrany, aniž by se porušil bod 2. nebo 3.

Vrcholy grafu  $G$  tvoří vrcholy mnohoúhelníku vepsaného do jednotkové kružnice. Pokud hrany grafu nahradím úsečkami spojujícími příslušné vrcholy, tyto úsečky budou tvořit hrany mnohoúhelníku a navíc rozdělí vnitřek na  $m$  menších konvexních oblastí – čtyřúhelníků. Ty, dohromady s  $2m + 2$  oblastmi nacházejícími se mezi hranami mnohoúhelníku a kružnicí, tvoří stěny grafu  $G$  a budu je značit  $\text{face}(G)$ . Čtyřúhelníky budou označovat jako vnitřní stěny a zbylé stěny budu nazývat hraničními stěnami.

**Dualita rovinných grafů.** Stěny grafu  $G$  si jednoznačně odpovídají s vrcholy duálního grafu  $G^*$ . Hrany duálního grafu  $(L, R) \in \text{arc}(G^*)$  jsou definovány pro  $L$  a  $R$  stěny  $G$ , které mají společnou hranu  $(I, J) \in \text{arc}(G)$ ,  $L$  leží nalevo od této hrany (vedoucí z  $I$  do  $J$ ) a  $R$  napravo. Hrany  $G^*$  proto jednoznačně odpovídají hranám  $G$ .

Pro pevné  $m$  a pevně zvolené zástupce intervalů nabídky a poptávky  $x_i$  je počet různých grafů bez křížení roven

$$d_m = \binom{3m}{m} \cdot \frac{1}{2m+1}. \quad (5.2)$$

**Hustoty, toky a potenciály.** Funkce na vrcholech grafu budu nazývat **hustoty**, funkce na hranách **toky** a na stěnách **potenciály**.

Každý tok  $s : \text{arc}(G) \rightarrow \mathbb{R}$  indukuje hustotu  $\rho = \text{div } s$ , která je pro  $I \in \text{node}(G)$  určena vztahem

$$\rho(I) = \text{div } s(I) = \sum_{(I,J) \in \text{arc}(G)} s(I, J) - \sum_{(J,I) \in \text{arc}(G)} s(J, I) \quad (5.3)$$

Podobně každý potenciál  $\phi : \text{face}(G) \rightarrow \mathbb{R}$  indukuje tok  $s = \text{curl } \phi : \text{arc}(G) \rightarrow \mathbb{R}$  definovaný pro  $L, R \in \text{face}(G)$  a pro hranu  $a$ , která má  $L$  nalevo a  $R$  napravo, jako

$$s(a) = \text{curl } \phi(a) = \phi(R) - \phi(L). \quad (5.4)$$

**Definice 5.4.** Nechť  $\rho \in \mathcal{M}_0^m(\mathbb{R})$  je daná znaménková míra a graf  $G$  je graf bez křížení na jejích intervalech nabídky a poptávky (tj. na reprezentantech těchto intervalů).

Řekneme, že plán přesunu  $\pi$  (míra na  $(\mathbb{R}^2)$ ) je **kompatibilní s grafem**  $G$ , pokud nemá křížení a  $\pi[I \times J] = 0$ , kdykoliv  $(I, J)$  není hranou  $G$ .

Systém měr  $\pi$  kompatibilních s  $G$ , které mají marginály  $\mu$  a  $\nu$ , budu značit  $\Pi_G(\mu, \nu)$ .

*Poznámka.* V dalším budu ztotožňovat vrcholy  $G$  s intervaly nabídky a poptávky, znaménková míra  $\rho$  bude totožná s hustotou, kterou určuje na vrcholech  $I \in \text{node}(G)$ .

Ke každému plánu přesunu, který je bez křížení, existuje graf bez křížení, se kterým je kompatibilní.

Duální graf  $G^*$  ke grafu bez křížení  $G$  je strom, tedy souvislý graf neobsahující kružnice.

Protože jsou vnitřní stěny grafu  $G$  čtyřúhelníky s vrcholy nabídky (poptávky) diagonálně proti sobě, každý vnitřní vrchol duálního grafu má dvě vstupující a dvě vystupující hrany, spojující ho se 4 sousedními vrcholy. Hraniční vrcholy  $G^*$  jsou spojeny s jediným vrcholem jedinou hranou, ať už směřuje jakýmkoliv směrem.

**Věta 5.3.** Pro každý tok  $s : \text{arc}(G) \rightarrow \mathbb{R}$  na grafu bez křížení  $G$  existuje potenciál  $\phi : \text{face}(G) \rightarrow \mathbb{R}$  takový, že tok  $s$  se dá vyjádřit jako

$$s = \text{curl } \phi.$$

Potenciál  $\phi$  je určený až na aditivní konstantu jednoznačně a splňuje

$$(\text{div } s)(I) = \phi(B) - \phi(A),$$

když  $A$  a  $B$  jsou hraniční stěny sousedící s  $I \in \text{node}(G)$  a  $A, I, B$  jsou seřazeny proti směru hodinových ručiček.

**Postup řešení.** Základní myšlenkou je řešit úlohu minimalizace ceny přesunu na intervalech nabídky a poptávky určených znaménkovou mírou  $\rho = \mu - \nu$  na systému všech grafů bez křížení. Každý z těchto intervalů budu reprezentovat jediným bodem. Pak existuje konečná množina grafů bez křížení na těchto vrcholech. Na každém takovémto grafu se dá najít nejlevnější přesun a z nich pak vybrat ten úplně nejlevnější.

Pokud mám daný graf bez křížení, hledání nejlevnějšího plánu přesunu z těch, které jsou s daným grafem kompatibilní, je řešení minimalizační úlohy s konvexní účelovou funkcí na konvexní kompaktní množině.

Navíc se ukazuje, že postup hledání řešení může být ještě jednodušší. Stačí najít jakýkoliv plán přesunu  $\pi$ , který je bez křížení a který má marginály  $\mu$  a  $\nu$ , a minimalizační úlohu řešit jen na těch grafech, se kterými je přesun  $\pi$  kompatibilní. Viz věta 5.8.

Následující věta říká, že každá míra  $\pi \in \Pi_G(\mu, \nu)$  je jednoznačně určená tokem, který indukuje na  $G$ .

**Věta 5.4.** *Nechť  $\rho \in \mathcal{M}_0^m(\mathbb{R})$  je daná znaménková míra a graf  $G$  je graf bez křížení na jejích intervalech nabídky a poptávky. Pak každý plán přesunu  $\pi$  kompatibilní s  $G$  definuje tok  $s_\pi(I, J) = \pi[I \times J]$  na  $G$  takový, že  $s_\pi \geq 0$  a  $\operatorname{div} s_\pi = \mu - \nu$ .*

*(Marginály  $\mu$  a  $\nu$  jsou vyhodnocovány na vrcholech grafu  $G$ , nikoliv na celých intervalech.)*

*Pokud  $\tilde{\pi} \in \Pi_G(\mu, \nu)$  a  $s_{\tilde{\pi}} = s_\pi$ , pak  $\tilde{\pi} = \pi$ .*

**Definice 5.5** (Přípustný potenciál). Nechť  $\rho \in \mathcal{M}_0^m(\mathbb{R})$  je daná znaménková míra a graf  $G$  je graf bez křížení na příslušných intervalech nabídky a poptávky. Potenciál  $\phi : \operatorname{face}(G) \rightarrow \mathbb{R}$  nazvu **přípustný**, pokud tok  $\operatorname{curl} \phi \geq 0$  je nezáporný a když platí  $2m + 2$  hraničních podmínek

$$\phi(B) = \rho[(-\infty, I)], \quad (5.5)$$

kde  $B$  je hraniční stěna po směru ručiček hned vedle vrcholu  $I \in \operatorname{node}(G)$ .

*Poznámka.* Značení.

- Pro intervaly v  $\mathbb{R}$  značení  $(-\infty, I)$  znamená souvislou podmnožinu  $\mathbb{R} \setminus I$ , která je zdola neomezená. Interval  $(-\infty, I] = (-\infty, I) \cup I$ .
- Pro intervaly  $I \subset \overset{\circ}{\mathbb{R}}$ , v jejichž vnitřku je  $\infty$ , je  $\mathbb{R} \cap I$  sjednocením dvou intervalů  $I^+$  (shora neomezený) a  $I^-$  (zdola neomezený).

Interval  $(-\infty, I)$  pak bude  $(-\infty, I) = \mathbb{R} \setminus I^+$  a  $(-\infty, I] = I^-$

Pro takto definované intervaly a míru  $\rho$  pak platí

$$\rho[(-\infty, I]] = \rho[(-\infty, I)] + \rho[I] = \rho[(-\infty, J)],$$

kde  $J$  je interval ležící hned vedle  $I$  proti směru hodinových ručiček.

Následující věta říká, že si jednoznačně odpovídají plány přesunu  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$  a přípustné potenciály.

**Věta 5.5.** *Nechť  $\rho \in \mathcal{M}_0^m(\mathbb{R})$  je znaménková míra a  $G$  je graf bez křížení na intervalech nabídky a poptávky určených  $\rho$ .*

*Plány přesunu  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$  kompatibilní s  $G$  si jednoznačně odpovídají s přípustnými potenciály  $\phi$  na  $G$ . Vztah mezi nimi je dán vzorcem*

$$\operatorname{curl} \phi(I, J) = \pi[I \times J] \quad \text{na } \operatorname{arc}(G). \quad (5.6)$$



*Poznámka.* Speciálně restrikce  $\pi|_{I \times J}$  má jako marginály míry  $M \# \lambda_{[n+\phi(L), n+\phi(R)]}$  a  $N \# \lambda_{[p+\phi(R), p-\phi(L)]}$ , kde  $M, N : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  jsou neklesající zobrazení taková, že  $M \# \lambda_{[0,1]} = \mu$  a  $N \# \lambda_{[0,1]} = \nu$  a periodicky dodefinované na celé  $\mathbb{R}$ ,  $n = \nu[(-\infty, I)]$ ,  $p = \mu[(-\infty, J)]$  a  $L, R \in \text{face}(G)$  jsou stěny nalevo a napravo od  $(I, J) \in \text{arc}(G)$  a  $\lambda$  je Lebesgueova míra.

Z věty 5.5 plyne důležitý závěr formulovaný v následující větě.

**Věta 5.6.** *Nechť  $\rho = \mu - \nu \in \mathcal{M}_0^m(\mathbb{R})$  je znaménková míra a  $G$  je graf bez křížení na intervalech nabídky a poptávky určených  $\rho$ . Nechť  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$  je plán přesunu kompatibilní s  $G$ , kterému podle vztahu  $\text{curl } \phi = \pi$  odpovídá přípustný potenciál  $\phi$ . Nechť  $c(x, y)$  je cenová funkce na  $\mathbb{R}^2$ . Potom*

$$\int_{I \times J} c \, d\pi = \int_{\phi(L)}^{\phi(R)} c(M(n + \theta), N(p - \theta)) \, d\theta, \quad (5.7)$$

kde  $M, N, n$  a  $p$  jsou jako výše a  $L$  a  $R$  jsou stěny nalevo a napravo od hrany  $(I, J)$ .

**Hledání optimálního plánu přesunu pro daný graf bez křížení.** Systém všech přípustných potenciálů  $\phi$  (pro danou  $\rho$  a  $G$ ) tvoří kompaktní konvexní množinu. Očísluji si vnitřní stěny grafu  $G$  jako  $F_1, \dots, F_m$ , pak si jednoznačně odpovídají přípustné potenciály a  $m$ -tice reálných čísel  $(\phi_1, \dots, \phi_m) = (\phi(F_1), \dots, \phi(F_m))$ . Systém všech takových  $m$ -tic tvoří konvexní mnohostěn  $\Phi_G \subset \mathbb{R}^n$ .

Pro pevně zvolenou vnitřní stěnu  $F \in \text{face}(G)$  plyne z předpokladu konkavity cenové funkce  $c(x, y)$ , že cena přesunu je konvexní funkcí proměnné  $\phi(F)$ .

Každá vnitřní stěna má dvě hrany jdoucí proti směru hodinových ručiček. Tyto hrany označím  $(I_1, J_1)$  a  $(I_2, J_2)$ . Pak funkce  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\theta) &= c(M(n_1 + \theta), N(p_1 - \theta)) + c(M(n_2 + \theta), N(p_2 - \theta)) \\ &\quad - c(M(n_1 + \theta), N(p_2 - \theta)) - c(M(n_2 + \theta), N(p_1 - \theta)) \end{aligned} \quad (5.8)$$

je (pro konkávní cenovou funkci  $c$ ) neklesající. Symboly použité ve vzorci (5.8) jsou

$$\begin{aligned} a &= \max\{\rho[(-\infty, I_1)], \rho[(-\infty, J_1)], \rho[(-\infty, I_2)], \rho[(-\infty, J_2)]\}, \\ b &= \min\{\rho[(-\infty, I_1)], \rho[(-\infty, J_1)], \rho[(-\infty, I_2)], \rho[(-\infty, J_2)]\}, \\ n_j &= \nu[(-\infty, I_j)], \quad p_j = \mu[(-\infty, J_j)], \quad \text{pro } j = 1, 2 \end{aligned}$$

a zobrazení  $M$  a  $N$  jsou jako výše, tj. neklesající zobrazení intervalu  $[0, 1]$  taková, že obraz Lebesgueovy míry při zobrazení  $M$  je  $\mu$  a při zobrazení  $N$  míra  $\nu$ .

Pokud ke každé vnitřní stěně  $F_i \in \text{face}(G)$  přiřadím neklesající funkci  $f_i : (a_i, b_i) \rightarrow \mathbb{R}$  definovanou jako v (5.8), je funkce

$$C_i(s) = \int_{z_i}^s f_i(\theta) \, d\theta \quad (5.9)$$

na  $[a_i, b_i]$  konvexní. Symbolem  $z_i$  tady značím střed úsečky  $[a_i, b_i]$ ,  $z_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i)$ .

Je dobré dále požadovat, aby cena přesunu  $I[\pi]$  byla konečná

$$\int c(x, q) d\mu(x) < +\infty, \quad \int c(q, y) d\nu(y) < +\infty \quad (5.10)$$

pro nějaké  $q$ .

**Věta 5.7.** *Nechť  $\rho \in \mathcal{M}_0^m(\mathbb{R})$  je znaménková míra a  $G$  je graf bez křížení na příslušných intervalech nabídky a poptávky. Uvažuj konkávní cenovou funkci  $c(x, y) \geq 0$  s konečnou cenou přesunu ve smyslu (5.10).*

*Ke každému přípustnému potenciálu  $\phi$  se dá jednoznačně přiřadit cena přesunu  $\mathcal{C}_G(\phi) = I[\pi]$ , kde  $\text{curl } \phi = \pi$  pro  $\pi \in \Pi_G(\mu, \nu)$ . Očísluji-li si vnitřní stěny  $F_1, \dots, F_m \in \text{face}(G)$ , pak pro nějakou konstantu  $C_0 \in \mathbb{R}$  platí*

$$\mathcal{C}_G(\phi) = C_0 + \sum_{i=1}^m C_i(\phi(F_i)), \quad (5.11)$$

kde  $C_i(s)$  je konvexní funkce definovaná vztahem (5.9) příslušná stěně  $F_i$ .

Minimalizace ceny přesunu  $I[\pi]$  přes všechny míry  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$  kompatibilní s  $G$  je tedy ekvivalentní minimalizaci konvexní funkce

$$\mathcal{C}_G(\phi_1, \dots, \phi_m) = \sum_{i=1}^m C_i(\phi_i) \quad (5.12)$$

na konvexním mnohoúhelníku  $\Phi_G \subset \mathbb{R}^m$ .

Jednostranné parciální derivace  $\mathcal{C}_G$  se dají spočítat z definice  $C_i$  ze vztahu (5.9) jako

$$\frac{\partial \mathcal{C}_G}{\partial \phi_i^\pm}(\phi_1, \dots, \phi_m) = \lim_{\theta \rightarrow \phi_i^\pm} f_i(\theta), \quad (5.13)$$

kde  $f_i$  jsou dané vztahem (5.8).

### Hledání optimálního plánu přesunu.

**Věta 5.8.** *Je daná znaménková míra  $\rho = \mu - \nu \in \mathcal{M}_0^m(\mathbb{R})$  a spojitá konkávní cenová funkce  $c(x, y) \geq 0$ . Míra  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$  je optimálním plánem přesunu právě tehdy, když*

1.  $\pi$  je bez křížení,
2.  $I[\pi] < \infty$  a
3.  $I[\pi] \leq I[\tilde{\pi}]$  kdykoliv  $\pi$  a  $\tilde{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$  a kdy jsou obě kompatibilní se stejným grafem bez křížení  $G$  na intervalech nabídky a poptávky určených znaménkovou mírou  $\rho$ .

Znamená to tedy, že optimální plán přesunu se dá hledat následujícím způsobem. Najde se jakýkoliv přesun  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ , který je bez křížení. Pokud  $\pi$  není optimální, existuje graf  $G$  bez křížení, se kterým je  $\pi$  kompatibilní a na kterém se dá cena přesunu snížit. Minimalizuje se tedy  $\mathcal{C}_G(\phi_1, \dots, \phi_m)$  na  $\Phi_G$  a získá se tak plán přesunu  $\tilde{\pi}$ . Ten je lepší než  $\pi$ . Není-li ani  $\tilde{\pi}$  optimální, postup se opakuje, jen se místo původní míry  $\pi$  bere  $\tilde{\pi}$ .

Celý algoritmus se nejpозději po  $d_m$  iteracích zastaví. Často je ale počet minimalizací podstatně menší, protože není třeba  $\pi$  porovnávat s grafy, se kterými není kompatibilní.

# Časově závislá minimalizační úloha

Dosud jsem se zabývala problémem, který se v čase neměnil. Cena přesunu jednotky hmoty z jednoho místa do druhého záležela pouze na počátečním a na koncovém místě. Nezávisela tedy na tom, kudy hmotu nesu. V této kapitole dosavadní úlohu změním tak, že může záležet i na cestě, po které přesun realizuji.

Na původní Monge-Kantorovichův problém (formulovaný v kapitole 1) se můžu dívat jako na problém **vzdálenosti** (nalézt vzdálenost mezi pravděpodobnostními mírami  $\mu$  a  $\nu$ ), naproti tomu teď budu řešit **geodetický** problém (nalézt nejkratší cestu mezi pravděpodobnostními mírami  $\mu$  a  $\nu$ ).

Tato kapitola opět čerpá z monografie [Villani \(2003\)](#).

## 6.1 Formulace úlohy

Připomenu označení zavedené v kapitole 1, které pro pravděpodobnostní míry  $\mu$  na  $X$  a  $\nu$  na  $Y$  značí symbolem

$$T\#\mu = \nu \tag{6.1}$$

to, že míra  $\nu$  je obrazem míry  $\mu$  při zobrazení  $T$ .

Z kapitoly 1 víme, že Mongeův problém se dá zapsat jako

$$\inf \left\{ \int_X c(x, T(x)) d\mu(x); \quad T\#\mu = \nu \right\}. \tag{6.2}$$

Označme nyní pro každé místo  $x \in X$  trajektorii, po které se hmota z  $x$  přesouvá, jako  $(T_t(x))_{0 \leq t \leq 1}$ . Pro zjednodušení zápisu budu někdy tuto trajektorii značit jen  $(T_t x)$ . Cena daného přesunu pak bude  $C[(T_t x)]$ .

Dále budu chtít, aby pro  $\mu$ -skoro všechna  $x$  byla funkce  $t \mapsto T_t x$  spojitá a po částech hladká ( $C^1$ ).

Nyní už se dá formulovat **časově závislý minimalizační problém**

$$\inf \left\{ \int_X C[(T_t x)_{0 \leq t \leq 1}] d\mu(x); \quad T_0 = \text{Id}, \quad T_1 \# \mu = \nu \right\}. \quad (6.3)$$

Takto formulovaná úloha vychází z Mongeovy formulace dopravního problému. Existuje i zobecnění na úlohu podobnou Kantorovichově formulaci.

Úlohy (6.2) a (6.3) jsou ekvivalentní, pokud jakýkoliv optimální přesun  $(T_t)$  z (6.3) dává optimální  $T$  v úloze (6.2) (ve smyslu  $T = T_1$ ). Postačující podmínka pro to, aby obě úlohy měly stejná řešení, je

$$c(x, y) = \inf \{C[(z_t)_{0 \leq t \leq 1}]; \quad z_0 = x, \quad z_1 = y\} \quad \text{pro } \forall x \in X, y \in Y. \quad (6.4)$$

Pak taky pro  $\mu$ -skoro všechna  $x$  platí

$$c(x, T(x)) = C[(T_t x)_{0 \leq t \leq 1}].$$

V aplikacích jsou významné úlohy, kdy existuje derivace trajektorií  $z_t$  podle  $t$  (budu ji značit  $z'_t$ ) a kdy se dá cenová funkce zapsat ve tvaru

$$C[(z_t)] = \int_0^1 c(z'_t) dt. \quad (6.5)$$

Funkci  $c(z)$  nazvu **přírůstkovou cenovou funkcí**.

*Poznámka.* Tvar (6.5) má například cenová funkce

$$C[(z_t)] = \int_0^1 |z'_t|^p dt \quad \text{v } \mathbb{R}^n, \quad p \geq 1,$$

v tomto případě je pak

$$c(x, y) = |x - y|^p. \quad (6.6)$$

## 6.2 Interpolace přesunu

### 6.2.1 Ryze konvexní cenová funkce

Následující věta je důsledkem věty 3.13. Popisuje, jak vypadá řešení úlohy (6.3) pro ryze konvexní cenovou funkci – pro ryze konvexní cenovou funkci jsou optimální trajektorie přímky.

**Věta 6.1** (Časově závislý optimální přesun). *Uvažujme cenovou funkci  $c(x, y) = c(x - y)$ , kde  $c$  je ryze konvexní funkce na  $\mathbb{R}^n$  a  $c(0) = 0$ . Nechť  $\mu$  a  $\nu$  jsou absolutně spojitě*

pravděpodobnostní míry na  $\mathbb{R}^n$  a necht'  $C[(z_t)] = \int_0^1 c(z'_t) dt$ . Necht'  $\nabla\psi$  je ( $\mu$ -skoro všude) jednoznačně určený gradient  $c$ -konkávní funkce  $\psi$  takové, že  $[\text{Id} - \nabla c^*(\nabla\psi)]\#\mu = \nu$ .

Pak řešení úlohy

$$\inf \left\{ \int_X C[(T_t x)_{0 \leq t \leq 1}] d\mu(x); \quad T_0 = \text{Id}, \quad T_1 \#\mu = \nu \right\}$$

je

$$T_t(x) = x - t \nabla c^*(\nabla\psi(x)), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (6.7)$$

### 6.2.2 McCannova interpolace

Důležitý speciální případ problému (6.3) je úloha s kvadratickou cenovou funkcí  $c(x, y) = |x - y|^2$  v  $\mathbb{R}^n$ . V tomto případě je řešení shodné s McCannovou interpolací, která se někdy nazývá interpolace přesunu.

Necht'  $\mu$  a  $\nu$  jsou absolutně spojitě pravděpodobnostní míry na  $\mathbb{R}^n$ . Víme, že existuje  $\mu$ -skoro všude jednoznačně určený gradient konvexní funkce  $\nabla\varphi$  takový, že  $\nabla\varphi\#\mu = \nu$ .

Definujme nyní pro každé  $0 \leq t \leq 1$  pravděpodobnostní míru („směs rozdělení“)

$$\rho_t = [\mu, \nu]_t \equiv [(1-t) \text{Id} + t \nabla\varphi]\#\mu. \quad (6.8)$$

Systém pravděpodobnostních měr  $(\rho_t)_{0 \leq t \leq 1}$  interpoluje mezi mírami  $\mu$  a  $\nu$ , nazývá se **McCannova interpolace** a je optimálním řešením úlohy (6.3) s kvadratickou cenovou funkcí.

McCannova interpolace se od běžné lineární interpolace

$$\tilde{\rho}_t = (1-t)\mu + t\nu$$

liší tím, že míry  $\mu$  a  $\nu$  nespojuje lineárně ale „podle křivky  $\nabla\varphi$ “.

Pro McCannovu interpolaci zavedenou vztahem (6.8) platí

$$[\mu, \nu]_0 = \mu, \quad [\mu, \nu]_1 = \nu.$$

Dále platí

$$(1-t) \text{Id} + t \nabla\varphi = \nabla \left[ \frac{(1-t)|\cdot|^2}{2} + t\varphi \right],$$

takže se jedná o gradient konvexní funkce. Podle věty 3.6 je tedy optimální cena přesunu  $\mu$  na  $[\mu, \nu]_t$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_2(\mu, \rho_t) &= \int_{\mathbb{R}^n} |x - [(1-t)x + t \nabla\varphi(x)]|^2 d\mu(x) \\ &= t^2 \int_{\mathbb{R}^n} |x - \nabla\varphi(x)|^2 d\mu(x) = t^2 \mathcal{T}_2(\mu, \nu). \end{aligned}$$

Když zavedeme označení Wassersteinova vzdálenost mezi pravděpodobnostními mírami vzorcem  $W_2 = \sqrt{T_2}$ , pak platí

$$W_2(\mu, \rho_t) = t W_2(\mu, \nu). \quad (6.9)$$

**Tvrzení 6.2** (Vlastnosti McCannovy interpolace). *McCannova interpolace zavedená vztahem (6.8) má následující vlastnosti:*

1.  $[\mu, \nu]_t = [\nu, \mu]_{1-t}$ ;
2.  $[[\mu, \nu]_t, [\mu, \nu]_{t'}]_s = [\mu, \nu]_{(1-s)t + s t'}$ ;
3. *když je jedna z měr  $\mu, \nu$  absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře, je absolutně spojitá i  $[\mu, \nu]_t$ , pro jakékoliv  $t \in (0, 1)$ .*

### 6.3 Konvexita přesunu

Prostor všech absolutně spojitých pravděpodobnostních měr na  $\mathbb{R}^n$  budu značit  $P_{ac}(\mathbb{R}^n)$ .

Nechť  $\mu, \nu \in P_{ac}(\mathbb{R}^n)$ . McCannova interpolace mezi mírami  $\mu$  a  $\nu$  je systém pravděpodobnostních měr

$$\rho_t = [(1-t) \text{Id} + t \nabla \varphi] \# \mu, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

kde  $\varphi$  je konvexní funkce a  $\rho_1 = \nu$ .

McCannova interpolace řeší časově závislou minimalizační úlohu (6.3) s kvadratickou cenovou funkcí.

Mějme nyní funkcionál  $F$  na prostoru pravděpodobnostních měr. Zajímá nás, jak se bude chovat  $F(\rho_t)$  pro  $t \in [0, 1]$ .

**Definice 6.1** (Displacement convexity). Podmnožina  $\mathcal{P} \subset P_{ac}(\mathbb{R}^n)$  je **konvexní vzhledem k McCannově interpolaci**, pokud pro každou dvojici  $\mu$  a  $\nu$  z  $\mathcal{P}$  a pro každé  $t \in [0, 1]$  je míra  $\rho_t = [\mu, \nu]_t$  prvkem  $\mathcal{P}$ .

Nechť  $F$  je funkcionál na množině  $\mathcal{P} \subset P_{ac}(\mathbb{R}^n)$ , která je konvexní vzhledem k McCannově interpolaci. Řekneme, že  $F$  je **konvexní vzhledem k McCannově interpolaci** na  $\mathcal{P}$ , pokud pro každé  $\rho_0 = \mu, \rho_1 = \nu$  z  $\mathcal{P}$  a pro  $(\rho_t)_{0 \leq t \leq 1}$  jejich McCannovu interpolaci je funkce  $t \mapsto F(\rho_t)$  konvexní na  $[0, 1]$ .

*Poznámka.* Definice konvexity vzhledem k McCannově interpolaci se dá zobecnit i na míry, které mají singulární část (např. pro  $P_2(\mathbb{R}^n)$  viz Villani (2003)).

Z fyzikálního hlediska jsou zajímavé tři typy funkcionálů.

- **Vnitřní energie:**

$$\mathcal{U}(\rho) = \int_{\mathbb{R}^n} U(\rho(x)) dx,$$

kde pravděpodobnostní míru  $\rho$  ztotožňuji s její hustotou,  $U$  je měřitelná funkce z  $\mathbb{R}_+$  do  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

- **Potenciální energie:**

$$\mathcal{V}(\rho) = \int_{\mathbb{R}^n} V d\rho,$$

$V$  je měřitelná funkce z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

- **Energie vzájemného působení:**

$$\mathcal{W}(\rho) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} W(x-y) d\rho(x) d\rho(y),$$

$W$  je měřitelná funkce z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

**Věta 6.3** (Kritéria pro konvexitu vzhledem k McCannově interpolaci). *Nechť  $\mathcal{P} \subset P_{ac}(\mathbb{R}^n)$  je konvexní vzhledem k McCannově interpolaci. Nechť funkce  $\mathcal{U} : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,  $\mathcal{V} : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  a  $\mathcal{W} : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  jsou definované jako výše.*

1. Když  $U(0) = 0$  a

$$\Psi : r \mapsto r^n U(r^{-n})$$

je nerostoucí konvexní funkce na  $(0, +\infty)$ , pak  $\mathcal{U}$  je konvexní vzhledem k McCannově interpolaci na  $\mathcal{P}$ .

Na druhou stranu když  $\Psi$  je nerostoucí a  $\mathcal{U}$  je konvexní vzhledem k McCannově interpolaci na  $P_{ac}(\mathbb{R}^n)$ , potom  $\Psi$  je konvexní.

2. Je-li  $V$  konvexní, pak  $\mathcal{V}$  je na  $\mathcal{P}$  konvexní vzhledem k McCannově interpolaci.

Opačně když je  $\mathcal{V}$  je konvexní vzhledem k přesunutí na  $P_{ac}(\mathbb{R}^n)$ , pak je  $V$  konvexní.

3. Je-li  $W$  konvexní, pak  $\mathcal{W}$  je na  $\mathcal{P}$  konvexní vzhledem k McCannově interpolaci.

Opačně když je  $\mathcal{W}$  je konvexní vzhledem k McCannově interpolaci na  $P_{ac}(\mathbb{R}^n)$ , pak je  $W$  konvexní.

## 6.4 Eulerovský přístup

### 6.4.1 Lagrangeovský a Eulerovský přístup

K časově závislé minimalizační úloze (6.3) se dá přistupovat dvěma různými způsoby. Dají se zkoumat systémy trajektorií, popisující jak se jednotlivé části původní hromady v čase přesouvají, nebo se dá na přesun dívat jako na (v čase proměnné) pole rychlostí. První možnost je tzv. Lagrangeovský přístup, druhá se nazývá Eulerovský přístup.

Vztah mezi oběma přístupy se dá vyjádřit vzorcem

$$v(t, g(t, x)) = \frac{dg}{dt}(t, x), \quad (6.10)$$

kde  $v$  je v čase proměnné pole rychlostí a  $g(t, x)$  systém trajektorií.

Této situaci například vyhovují  $v$  funkce třídy  $C^1$  a  $(g(t, \cdot))_{t \geq 0}$  systém difeomorfismů.

V případě dopravního problému máme  $g(t, x) = T_t(x)$  – trajektorie přesunu hmoty z místa  $x$ .

Tyto trajektorie ale nemusejí vždycky definovat difeomorfismy. V případě, že cenová funkce je kvadratická, trajektorie  $(T_t(x))$  difeomorfismy definují. Když je cenová funkce na  $\mathbb{R}^n$  homogenní, jsou trajektorie  $(T_t(x))_{0 < t < 1}$  lokálně Lipschitzovské a dá se použít podobná teorie, jako když se jedná o difeomorfismy.

## 6.4.2 Rovnice optimality

Když známe řešení  $(T_t)_{0 \leq t \leq 1}$  časově závislé minimalizační úlohy (6.3), může nás zajímat, jak vypadají příslušné pravděpodobnostní míry v „mezičase“

$$\rho_t = T_t \# \mu.$$

Rovnici pro  $\rho_t$  dává následující věta.

**Věta 6.4.** *Nechť  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $(T_t)_{0 \leq t < T_*}$  je lokálně Lipschitzovská třída difeomorfismů na  $X$ ,  $T_0 = \text{Id}$  a  $v = v(t, x)$  je pole rychlostí příslušející trajektoriím  $(T_t)$ . Nechť  $\mu$  je pravděpodobnostní míra na  $X$  a  $\rho_t = T_t \# \mu$ .*

*Pak  $\rho_t = \rho(t, \cdot)$  je jednoznačně určené řešení rovnice přesunu*

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0, & 0 < t < T_*, \\ \rho_0 = \mu \end{cases} \quad (6.11)$$

*v  $C([0, T_*]; P(X))$ , kde  $P(X)$  je prostor pravděpodobnostních měr na  $X$  se slabou topologií.*

**Eulerovský systém optimality.** Řešení úlohy (6.3) v Eukleidovském smyslu se dá charakterizovat jako řešení následujícího systému rovnic:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0, & \rho(t = 0, \cdot) = \mu, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = 0. \end{cases} \quad (6.12)$$

Tento systém se nazývá Eulerovský systém optimality časově závislého přesunu. Odvození vzorců (6.12) je v monografii Villani (2003).



# Monge-Kantorovichova vzdálenost

Metrickou stránkou optimálního přesunu se podrobně zabývá kniha [Rachev \(1991\)](#). V této práci se o tom jen krátce zmíním. Zavedu metriku na prostoru pravděpodobnostních měr. Označení použité v této kapitole je převzato z práce [Villani \(2003\)](#).

Mějme nyní  $X$  Polský prostor, na kterém bude definovaná vzdálenost  $d$ . Nechť  $p \geq 0$  je nezáporné reálné číslo. Na  $X \times X$  uvažujeme cenovou funkci  $c(x, y) = d(x, y)^p$ . (Pro  $p = 0$  bude  $d(x, y) = 1_{x \neq y}$ .)

Pak optimální cenu přesunu mezi pravděpodobnostními mírami  $\mu$  a  $\nu$  na  $X$  s cenovou funkcí  $d^p$  budu značit  $\mathcal{T}_p(\mu, \nu)$ .

Systém všech pravděpodobnostních měr na  $X$  budu značit  $P(X)$  a pravděpodobnostní míry s konečnými momenty  $p$ -tého řádu budu značit  $P_p(X)$ .

**Věta 7.1** (Wassersteinova vzdálenost). *Nechť  $\mathcal{T}_p(\mu, \nu)$  je jako výše.*

1. Pro každé  $p \in [1, \infty)$  je  $W_p = \mathcal{T}_p^{1/p}$  metrika na prostoru  $P_p(X)$ .
2. Pro každé  $p \in [0, 1)$  je  $W_p = \mathcal{T}_p$  metrika na prostoru  $P_p(X)$ .

Funkce  $W_p$  se označují jako **Wassersteinovy vzdálenosti** nebo také **Monge-Kantorovichovy vzdálenosti řádu  $p$** .

*Poznámka.* Nechť  $\mu$  je pravděpodobnostní míra na Hilbertově prostoru  $X$ ,  $a \in X$ . Potom

$$W_2(\mu, \delta_a)^2 = \int_X \|x - a\|^2 d\mu(x).$$

To platí z duality:

$$\mathcal{T}_2(\mu, \delta_a) = W_2(\mu, \delta_a)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\varphi, \psi \in \Phi_c} \left[ \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_X \psi(y) d\delta_a(y) \right] \\
&= \sup_{\varphi, \psi \in \Phi_c} \left[ \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \psi(a) \right] \\
&= \sup_{\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x,y)} \int_X \varphi(x) + \psi(a) d\mu(x) \\
&= \int_X c(x, a) d\mu(x) \\
&= \int_X d(x, a)^2 d\mu(x) \\
&= \int_X \|x - a\|^2 d\mu(x)
\end{aligned}$$

Speciálně střední hodnota náhodné veličiny s rozdělením  $\mu$  je tedy jediné řešení minimalizační úlohy

$$\inf_{a \in X} W_2(\mu, \delta_a)$$

a příslušnou cenou přesunu  $\mathcal{T}_2$  je rozptyl této náhodné veličiny.

**Definice 7.1** (Slabá konvergence pravděpodobnostních měr). Nechť  $X$  je Polský prostor a  $P(X)$  prostor Borelovských pravděpodobnostních měr na  $X$ . Řekneme, že  $\mu_k \in P(X)$  **konverguje slabě** k  $\mu \in P(X)$  při  $k \rightarrow \infty$ , pokud pro všechny  $\varphi \in C_b(X)$  (tj. spojitě omezené) konverguje  $\int \varphi d\mu_k$  k  $\int \varphi d\mu$  při  $k \rightarrow \infty$ .

**Věta 7.2** (Wassersteinova vzdálenost metrizes slabou konvergenci). Nechť  $p \in (0, \infty)$ , nechť  $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$  je posloupnost pravděpodobnostních měr z  $P_p(X)$  a  $\mu \in P(X)$ .

Pak  $W_p(\mu_k, \mu) \rightarrow 0$  pro  $k \rightarrow \infty$  právě tehdy, když  $\mu_k \rightarrow \mu$  slabě a když k sobě konvergují momenty řádu  $p$ , ve smyslu

$$\int d(x_0, x)^p d\mu_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int d(x_0, x)^p d\mu(x), \quad \text{pro } x_0 \in X. \quad (7.1)$$

*Poznámka.* Platí-li podmínka (7.1) pro nějaké  $x_0 \in X$ , pak platí pro všechny.

# Diskrétní dopravní problém

Názvem dopravní problém se často označuje důležitý speciální případ úlohy formulované v kapitole 1 – diskrétní dopravní problém. Jedná se o Kantorovichův dopravní problém, ve kterém se navíc předpokládá, že jak míra  $\mu$  na prostoru  $X$ , tak i míra  $\nu$  na  $Y$  jsou diskrétní a jejich nosiče jsou tvořeny konečným počtem bodů.

Diskrétní dopravní problém je popsán například v knize [Plesník, Dupačová a Vlach \(1990\)](#).

## 8.1 Formulace úlohy

**Formulace diskrétního dopravního problému:**

$$\text{Minimalizovat } \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q c_{ij} x_{ij} \quad (8.1)$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q x_{ij} &= a_i \quad i = 1, \dots, p, \\ \sum_{i=1}^p x_{ij} &= b_j \quad j = 1, \dots, q, \\ x_{ij} &\geq 0 \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q, \end{aligned}$$

kde  $a_i, b_j \geq 0$ ,  $c_{ij} \in \mathbb{R}$  jsou pro  $i = 1, \dots, p$ ,  $j = 1, \dots, q$  dané hodnoty a  $p, q$  jsou přirozená čísla.

Úloha se dá interpretovat tak, že je  $p$  dodavatelů, z nichž každý může dodat množství  $a_i$ , a  $q$  odběratelů, každý z nich potřebuje množství  $b_j$ . Náklady na přesun jednoho výrobku

od daného dodavatele k danému spotřebiteli jsou  $c_{ij}$ . Cílem je minimalizovat celkovou cenu za přepravu.

Platí následující tvrzení.

**Tvrzení 8.1.** *Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

1. Úloha (8.1) má přípustné řešení.
2. Úloha (8.1) má optimální řešení.
3. Platí dodavatelsko-spotřebitelská rovnováha

$$\sum_{i=1}^p a_i = \sum_{j=1}^q b_j.$$

Můžeme se tedy omezit na případ, kdy  $\sum_{i=1}^p a_i = \sum_{j=1}^q b_j$ .

Po „znormování“ dostáváme obdobnou formulaci jako v kapitole 1.

Prostor  $X$  bude množina všech dodavatelů. Tj.  $X = \{1, \dots, p\}$ . Pravděpodobnostní míra  $\mu$  na  $X$  je diskrétní, každé množině odběratelů přiřadí „znormovaný“ součet jimi nabízených výrobků. Tj. počet jimi nabízených výrobků vydělený počtem všech výrobků. Podobně prostor  $Y$  značí odběratele a pravděpodobnostní míra  $\nu$  jednotlivé požadavky.

Cenová funkce  $c$  z  $X \times Y$  je  $c(i, j) = c_{ij}$ .

Podmínky

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q x_{ij} &= a_i \quad i = 1, \dots, p, \\ \sum_{i=1}^p x_{ij} &= b_j \quad j = 1, \dots, q \end{aligned}$$

jsou ekvivalentní podmínkám (1.1).

Nezápornost  $x_{ij}$  odpovídá nezápornosti míry  $\pi$ .

V dalším budu bez újmy na obecnosti uvažovat takovou úlohu, kde  $\sum_{i=1}^p a_i = \sum_{j=1}^q b_j = 1$ , neřeknu-li jinak.

## 8.2 Lineární programování a simplexová metoda

Diskrétní dopravní problém je úlohou lineárního programování. Dá se proto řešit klasickou simplexovou metodou. Pro úlohu dopravního problému je ale výhodnější využít modifikaci klasické simplexové metody – **metodu sloupcových a řádkových čísel**. Tato metoda využívá speciálního tvaru matice úlohy dopravního problému, která je velká a řídká.

### 8.2.1 Lineární programování a dualita

Úloha lineárního programování ve standardním tvaru:

$$\text{Minimalizovat } \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i \quad i = 1, \dots, m, \\ x_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  je daná matice,  $\mathbf{b} = (b_i)$  a  $\mathbf{c} = (c_j)$  jsou dané vektory a  $m, n$  jsou přirozená čísla.

Když označím vektory a matice tučně a symbolem  $\mathbf{x} \geq 0$  budu rozumět to, že  $x_i \geq 0$  pro všechna  $i$ , dá se úloha lineárního programování zapsat krátce

$$\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x}; \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}. \quad (8.2)$$

K takto formulované úloze (tzv. primární) existuje v jistém smyslu ekvivalentní úloha, která se označuje jako **duální**

$$\max\{\mathbf{b}^T \mathbf{y}; \quad \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}\}. \quad (8.3)$$

Vztah mezi primární a duální úlohou lineárního programování popisuje následující věta (z učebního textu [Lachout \(2006\)](#)).

**Věta 8.2.** Pro dvojici duálních úloh (8.2) a (8.3) nastane jedna z následujících možností:

- Ani jedna z úloh (8.2) a (8.3) nemá přípustné řešení.
- Primární úloha (8.2) má přípustné řešení, ale nemá optimální řešení. Duální úloha (8.3) nemá přípustné řešení.
- Primární úloha (8.2) nemá přípustné řešení. Duální úloha (8.3) má přípustné řešení, ale nemá optimální řešení.
- Obě úlohy (8.2) a (8.3) mají optimální řešení. Optimální hodnoty účelových funkcí se rovnají.

*Poznámka.* Zajímavá je především poslední možnost. Na optimální řešení duální úlohy (8.3), vektor  $\mathbf{y}$ , se dá nahlížet jako na Lagrangeovy multiplikátory příslušející omezením v primární úloze (8.2). Stejně tak řešení primární úlohy  $\mathbf{x}$ , jsou Lagrangeovy multiplikátory v úloze duální. Rovnost hodnot účelových funkcí říká, že bod  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  je sedlovým bodem Lagrangeovy funkce. Platí tedy

$$\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x}; \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\} = \max\{\mathbf{b}^T \mathbf{y}; \quad \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}\}. \quad (8.4)$$

### 8.2.2 Simplexová metoda

Simplexová metoda je postup hledání optimálního řešení úlohy lineárního programování.

Řeší se úloha, která je ve standardním tvaru, tj. ve tvaru rovností jako v úloze (8.2). Navíc je zapotřebí, aby matice  $A$  měla plnou řádkovou hodnotu.

**Názna simplexového algoritmu.** Nejdřív se najde přípustné řešení. Pak se zkoumá, jestli je také přípustným řešením úlohy duální. V tom případě by se jednalo o optimální řešení. Pokud nalezené řešení není duálně přípustné, hledá se směr, ve kterém účelová funkce z primární úlohy klesá. Je-li takový, najde se další a „lepší“ přípustné řešení primární úlohy a postup se opakuje.

Pokud je úloha nedegenerovaná, simplexový algoritmus po konečně mnoha krocích skončí. A to buď tak, že najde řešení, které je primárně i duálně přípustné, a tedy optimální, nebo se nalezne směr, ve kterém účelová funkce primární úlohy neomezeně klesá a nebo se zjistí, že řešená úloha nemá žádné přípustné řešení.

## 8.3 Duální úloha k diskretnímu dopravnímu problému

Dopravní problém (8.1) můžu přepsat do tvaru klasické úlohy lineárního programování

$$\min\{c^T x; \quad Ax = b, x \geq 0\}. \quad (8.5)$$

Vektor neznámých parametrů  $x$  je

$$x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1q}, x_{21}, \dots, x_{2q}, \dots, x_{pq})^T.$$

Stejně tak vypadá i vektor  $c$

$$c = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1q}, c_{21}, \dots, c_{2q}, \dots, c_{pq})^T.$$

Matice soustavy  $A$  je

$$A = \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} & \overbrace{\quad}^q & & \overbrace{\quad}^q & & \overbrace{\quad}^q & & & & & & \\ \left. \begin{array}{l} 1 \ 1 \ \dots \ 1 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ \vdots \quad \ddots \ \vdots \\ 0 \quad \dots \ 0 \end{array} \right\} & & & \left. \begin{array}{l} 0 \quad \dots \ 0 \\ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \\ \quad \quad \ddots \\ \quad \quad \quad 0 \end{array} \right\} & \dots & & \left. \begin{array}{l} 0 \quad \dots \ 0 \\ \quad \quad \ddots \\ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \end{array} \right\} & & & & & \\ \hline & & & & & & & & & & & \\ \left. \begin{array}{l} 1 \ 0 \ \dots \ 0 \\ 0 \ 1 \quad \quad \quad \\ \vdots \quad \ddots \ \vdots \\ 0 \quad \dots \ 1 \end{array} \right\} & & & \left. \begin{array}{l} 1 \ 0 \ \dots \ 0 \\ 0 \ 1 \quad \quad \quad \\ \vdots \quad \ddots \ \vdots \\ 0 \quad \dots \ 1 \end{array} \right\} & \dots & & \left. \begin{array}{l} 1 \ 0 \ \dots \ 0 \\ 0 \ 1 \quad \quad \quad \\ \vdots \quad \ddots \ \vdots \\ 0 \quad \dots \ 1 \end{array} \right\} & & & & & \\ & & & \underbrace{\hspace{15em}} & & & & & & & & \\ & & & p \cdot q & & & & & & & & \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} p \\ \\ \\ \\ q \end{array}$$

a vektor pravých stran  $\mathbf{b}$  bude

$$\mathbf{b} = (a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q)^T.$$

### 8.3.1 Dualita

Duální úloha k úloze (8.5) je

$$\max\{\mathbf{b}^T \mathbf{y}; \quad \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}\}.$$

Když prvky vektoru  $\mathbf{y}$  označím

$$\mathbf{y} = (u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)^T,$$

mohu účelovou funkci  $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$  napsat jako

$$\sum_{i=1}^p a_i u_i + \sum_{j=1}^q b_j v_j.$$

Protože má matice  $\mathbf{A}$  v každém sloupci jen dvě jedničky, dá se podmínka  $\mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}$  přepsat jako

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q.$$

Celkově tedy dostáváme následující formulaci duální úlohy.

**Duální úloha:**

$$\text{Maximalizovat} \quad \sum_{i=1}^p a_i u_i + \sum_{j=1}^q b_j v_j \quad (8.6)$$

za podmínek

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q.$$

*Poznámka.* V článku [Evans \(2001\)](#) je naznačen vztah mezi duální úlohou ke spojitému dopravnímu problému a dualitou v lineárním programování.

Tabulka 8.1. Porovnání obecné formulace Kantorovichova dopravního problému a diskrétního dopravního problému.

Kantorovichův dopravní problém	Diskrétní dopravní problém
<b>Formulace</b>	
Minimalizovat	Minimalizovat
$\int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y)$	$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q c_{ij} x_{ij}$
za podmínek	
$\begin{aligned} \pi[A \times Y] &= \mu[A] & A \subset X \\ \pi[X \times B] &= \nu[B] & B \subset Y \end{aligned}$	$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q x_{ij} &= a_i & i = 1, \dots, p \\ \sum_{i=1}^p x_{ij} &= b_j & j = 1, \dots, q \\ x_{ij} &\geq 0 & i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q \end{aligned}$
<b>Duální úloha</b>	
Maximalizovat	Maximalizovat
$\int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_Y \psi(y) d\nu(y)$	$\sum_{i=1}^p a_i u_i + \sum_{j=1}^q b_j v_j$
za podmínek	
$\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y)$	$u_i + v_j \leq c_{ij}$
pro $\mu$ -skoro všechna $x \in X$ a pro $\nu$ -skoro všechna $y \in Y$	pro $i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q$



# Aproximace obecné úlohy pomocí diskrétní

Jak bylo popsáno v předchozích kapitolách, řešení obecné úlohy dopravního problému je poměrně složité. V literatuře jsem našla věty umožňující snadné řešení dopravního problému jen ve speciálních případech, například pokud je cenová funkce kvadratická nebo když se úloha řeší jen na  $\mathbb{R}$ . Ale i k nalezení řešení Kantorovичovy úlohy s kvadratickou cenovou funkcí v prostoru vyšší dimenze je třeba řešit parciální diferenciální rovnici.

Naproti tomu řešení diskrétního dopravního problému je jednou z typických úloh lineárního programování.

Jednodušší než řešení obecného dopravního problému se spojitými rozděleními  $\mu$  a  $\nu$  by tedy bylo úlohu převést na diskrétní, jejíž řešení je snadnější. Bohužel jsem nikde v literatuře nenašla tvrzení, které by tento postup ospravedlňovalo nebo doporučovalo. Zajímalo mě tedy, jak by pro některá typická rozdělení vypadalo řešení spojitě úlohy a jak by se k této optimální hodnotě přibližovalo řešení diskrétní úlohy, pokud budu zvyšovat počet bodů dělení nosičů měř  $\mu$  a  $\nu$ .

V této kapitole provádím numerickou studii přesnosti aproximace pro úlohu dopravního problému na  $\mathbb{R}$ .

## 9.1 Zadání

Mám dva prostory  $X = Y = \mathbb{R}$ , na každém z nich mám pravděpodobnostní míru ( $\mu$  a  $\nu$ ). Dále mám zadanou cenovou funkci  $c(x, y)$  na součinném prostoru  $X \times Y$ . Zajímá mě cena přesunu  $\mu$  na  $\nu$ .

Tu samou úlohu budu řešit jako diskrétní dopravní problém – diskretizuji  $\mu$  a  $\nu$  a budu řešit úlohu lineárního programování. Postupně budu sít zjemňovat a budu zkoumat, jestli se takto získaná řešení blíží k řešení spojitěho případu.

Úlohu budu řešit se třemi zajímavými cenovými funkcemi

$$\begin{aligned}c_1(x, y) &= |x - y|, \\c_2(x, y) &= |x - y|^2, \\c_3(x, y) &= \sqrt{|x - y|}.\end{aligned}$$

Pravděpodobnostní míry  $\mu$  a  $\nu$  budou mít rovnoměrné rozdělení, normální a exponenciální.

## 9.2 Řešení spojité úlohy

Pro výpočet optimální ceny přesunu s kvadratickou cenovou funkcí  $c_2$  se dá použít věta 3.11.

Podobně se spočte cena přesunu i pro lineární cenovou funkci, kde se využije věta 3.12. Optimální cena přesunu s cenovou funkcí  $c = c_1$  nebo  $c = c_2$  tedy bude

$$\mathcal{T}_c(\mu, \nu) = \int_0^1 c(F^{-1}(t) - G^{-1}(t)) dt,$$

kde  $F^{-1}$  a  $G^{-1}$  jsou kvantilové funkce rozdělení  $\mu$  a  $\nu$ .

Pro výpočet optimální ceny přesunu s cenovou funkcí  $c_3$  se použijí výsledky formulované v kapitole 5. V případě, že úlohu řeším s normálním rozdělením, s rovnoměrným nebo s exponenciálním, míra  $\mu - \nu$  mění na  $\mathbb{R}$  znaménko pouze dvakrát a existuje tudíž jediný plán přesunu  $\mu$  na  $\nu$ , který je bez křížení. Tento přesun je pak optimální v úloze s jakoukoliv konkávní cenovou funkcí.

Prakticky tedy úlohu řeším tak, že hmotu, která je oběma mírám společná nechám tak, jak je, a spočítám si hustotu míry  $\mu - \nu$ . Označím hustoty měř  $\mu$  a  $\nu$  symboly  $f$  a  $g$ . Spočtu si „novou“ hustotu míry  $\mu^* = (\mu - \nu)^+$  a to tak, že na intervalech, kde je  $f > g$ , bude

$$f^*(x) = f(x) - g(x),$$

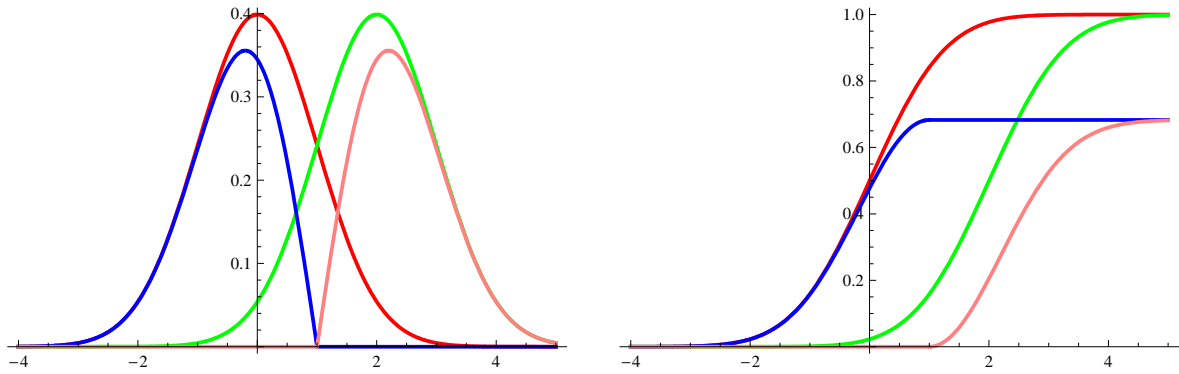
na intervalech, kde je  $f \leq g$  bude  $f^*(x) = 0$ . Podobně spočítám i  $g^*$ , hustotu míry  $\nu^*$ .

Dál si sestrojím analogie distribučních funkcí

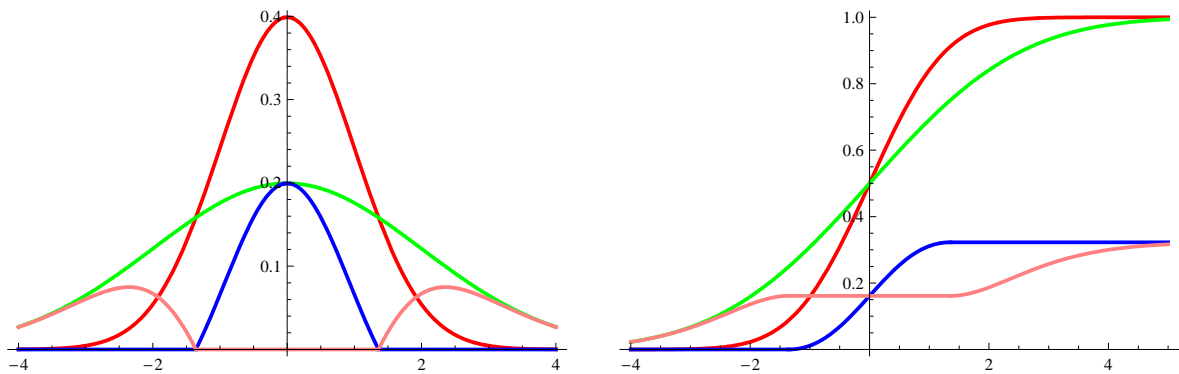
$$\begin{aligned}F^*(x) &= \int_{-\infty}^x f^*(t) dt, \\G^*(x) &= \int_{-\infty}^x g^*(t) dt.\end{aligned}$$

Nejedná se o distribuční funkce, protože

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F^*(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} G^*(x) = w \leq 1.$$



Obrázek 9.1. Na grafu vlevo jsou hustoty rozdělení  $\mu = N[0,1]$ ,  $\nu = N[2,1]$ ,  $\mu^*$  a  $\nu^*$ , vpravo jsou příslušné distribuční funkce. Červeně je znázorněna míra  $\mu$ , zeleně  $\nu$ . Míra  $\mu^*$  je modře a  $\nu^*$  růžově. Hodnota  $w = 0.682689$ .



Obrázek 9.2. Na grafu vlevo jsou hustoty rozdělení  $\mu = N[0,1]$ ,  $\nu = N[0,4]$ ,  $\mu^*$  a  $\nu^*$ , vpravo jsou příslušné distribuční funkce. Červeně je znázorněna míra  $\mu$ , zeleně  $\nu$ . Míra  $\mu^*$  je modře a  $\nu^*$  růžově. Hodnota  $w = 0.322675$ . Bod  $S = 0$  je v místě, kde se protínají distribuční funkce  $F^*$  (modrá) a  $G^*$  (růžová).

Pro míry  $\mu = N[0,1]$  a  $\nu = N[2,1]$  jsou hustoty a distribuční funkce na obrázku 9.1, pro  $\mu = N[0,1]$  a  $\nu = N[0,4]$  na obrázku 9.2.

Je-li míra  $\mu$  absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře a nosiče měr  $\mu^*$  a  $\nu^*$  jsou intervaly v  $\mathbb{R}$  (tj. konvexní), pak funkce

$$T(x) = G^{*-1}(w - F^*(x)) \quad (9.1)$$

zobrazí bez křížení  $\mu^*$  na  $\nu^*$ . Optimální cena přesunu je tedy

$$\mathcal{I}_{c_3}(\mu, \nu) = \int_0^w c_3(x, T(x)) f^*(x) dx.$$

V případě, že nosiče měr  $\mu^*$  a  $\nu^*$  jsou sice intervaly v  $\mathbb{R}$  ale ne v  $\mathbb{R}$ , existuje jediný bod  $S$  takový, že  $\mu^*[S, \infty) = \nu^*[S, \infty)$  a  $\mu^*(-\infty, S] = \nu^*(-\infty, S]$  a na těchto intervalech probíhá přesun analogicky jako v (9.1), optimální cena přesunu pak bude součet příslušných dvou cen.

To je například v případě, že je  $\mu = N[0,1]$  a  $\nu = N[0,4]$ , jak je zobrazeno na obrázku 9.2. Pak je bod  $S = 0$ , od něj doprava se hmota přesouvá do kladné poloosy, a od nuly doleva do záporné poloosy.

## 9.3 Diskretizace

K diskretizaci měr  $\mu$  a  $\nu$  se dá přistupovat různě. První popsaný způsob rozdělí nosiče měr na body, které jsou od sebe stejně vzdálené a které mají různou „velikost“. V druhém způsobu budou všechny body „stejně velké“, ale budou od sebe různě daleko. V místech, kde je hustota původní spojitě míry větší, jich bude víc.

Rozdíl mezi těmito dvěma způsoby je patrný z obrázků 9.3, 9.4, 9.5 a 9.6.

Při řešení optimalizační úlohy mezi oběma způsoby diskretizace není žádný rozdíl. Druhý zmiňovaný způsob je o něco jednodušší při výpočtu bodů dělení a jejich „velikostí“. Naproti tomu ve většině příkladů, které jsem řešila, se zdá, že výsledky počítané pomocí prvního způsobu se ke spojitému případu blíží trochu lépe.

### 9.3.1 Různě velké ekvidistantní body

Pro jednoduchost předpokládejme nyní, že míra  $\mu$  má omezený nosič. Konvexní obal  $\text{Supp}(\mu)$  je uzavřený interval, který označím  $[a, b]$ .

Základní myšlenka je následující. Interval  $[a, b]$  rozdělím pomocí  $n$  bodů  $\{d_1, \dots, d_n\}$  na  $n + 1$  stejně dlouhých dílků. Každému z  $n$  bodů tohoto dělení přiřadím vhodnou „velikost“  $\{D_1, \dots, D_n\}$ , a to tak, aby součet velikostí všech  $n$  bodů dohromady dal jedničku a aby si odpovídaly velikost každého bodu a míra  $\mu$  okolí tohoto bodu.

Body dělení budou

$$d_i = a + \frac{i}{n+1} \cdot (b-a).$$

Když označím  $F$  distribuční funkci rozdělení  $\mu$ , bude míra levého krajního bodu

$$D_1 = F\left(a + \frac{1}{n} \cdot (b-a)\right).$$

Podobně bude míra pravého krajního bodu

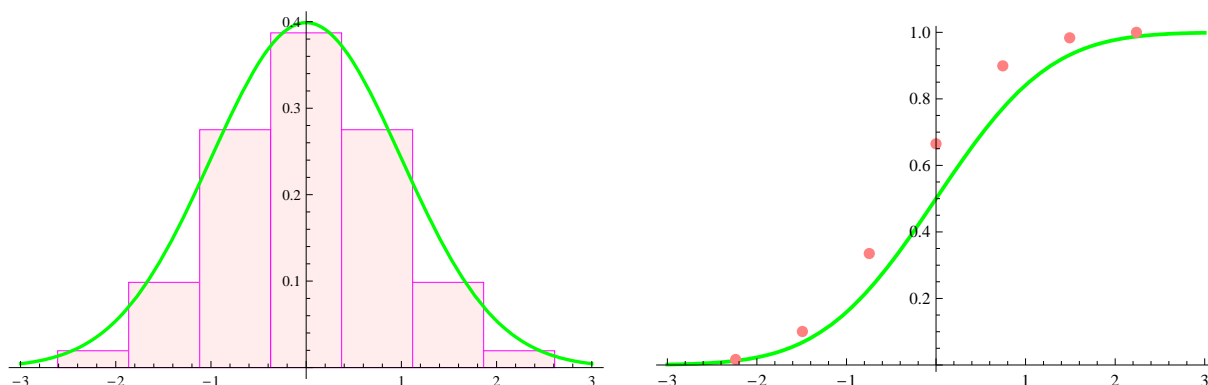
$$D_n = 1 - F\left(b - \frac{1}{n} \cdot (b-a)\right).$$

Ostatní body dělení

$$d_i = a + (b-a) \cdot \frac{i}{n+1}$$

dostanou míru

$$D_i = F\left(a + \frac{i}{n} \cdot (b-a)\right) - F\left(a + \frac{i-1}{n} \cdot (b-a)\right).$$



Obrázek 9.3. Diskretizace normálního rozdělení  $N(0,1)$  pro  $n = 7$ . Vlevo histogram, vpravo distribuční funkce.

Stejně postupuji i s mírou  $\nu$ . Sestrojím dělení  $\{e_0, \dots, e_n\}$  a jednotlivým bodům přiřadím příslušné míry  $\{E_0, \dots, E_n\}$ .

Pak řeším diskrétní dopravní problém

$$\text{Minimalizovat} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c(d_i, e_j) x_{ij} \quad (9.2)$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= D_i, \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= E_j \\ x_{ij} &\geq 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Nyní se vraťme k obecnému případu, kdy míry  $\mu$  a  $\nu$  mohou mít neomezené nosiče (například normální rozdělení). V tomto případě nemáme žádný jasně určený interval, který bychom mohli začít dělit. Je tedy potřeba nějaký vhodný interval najít.

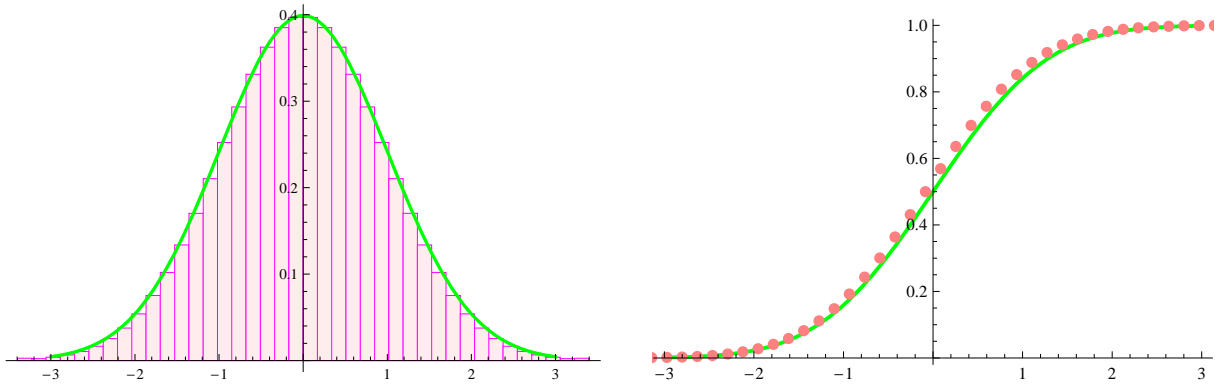
Ačkoliv by se mohlo zdát vhodné vzít jako interval  $[a, b]$  například interval  $[F^{-1}(0.001), F^{-1}(0.999)]$ , není tomu tak. Postupným zjemňováním dělení takového intervalu by se ukázalo, že se ceny přesunu blíží k menší hodnotě, než jaká je optimální hodnota v obecné úloze.

To by bylo způsobeno tím, že by se hmota ve skutečnosti situovaná „na neomezených okrajích“ zahrnula jen do krajních dílků.

Lepším řešením se ukázalo pro  $n \in \mathbb{N}$  vzít jako interval  $[a, b]$  interval

$$\left[ F^{-1} \left( \frac{0.01}{n} \right), F^{-1} \left( 1 - \frac{0.01}{n} \right) \right].$$

Tím se zaručí, že se zvětšováním  $n$  se dělený interval rozšiřuje, viz obrázky 9.3 a 9.4.



Obrázek 9.4. Diskretizace normálního rozdělení  $N(0,1)$  pro  $n = 40$ . Vlevo histogram, vpravo distribuční funkce.

### 9.3.2 Stejně velké body různě daleko od sebe

Vyjde se z kvantilové funkce. Interval  $[0, 1]$  rozdělím pomocí  $n$  stejně vzdálených bodů na  $n + 1$  částí. Pro dané  $n$  to budou body  $\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \dots, \frac{n}{n+1}$ .

Body dělení míry  $\mu$  pak budou

$$\{d_1, \dots, d_n\} = \left\{ F^{-1} \left( \frac{1}{n+1} \right), F^{-1} \left( \frac{2}{n+1} \right), \dots, F^{-1} \left( \frac{n}{n+1} \right) \right\}.$$

Každý z těchto bodů bude mít míru

$$D_i = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Podobně dělení míry  $\nu$  budou body

$$\{e_1, \dots, e_n\} = \left\{ G^{-1} \left( \frac{1}{n+1} \right), G^{-1} \left( \frac{2}{n+1} \right), \dots, G^{-1} \left( \frac{n}{n+1} \right) \right\},$$

z nichž každý bude mít míru

$$E_i = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

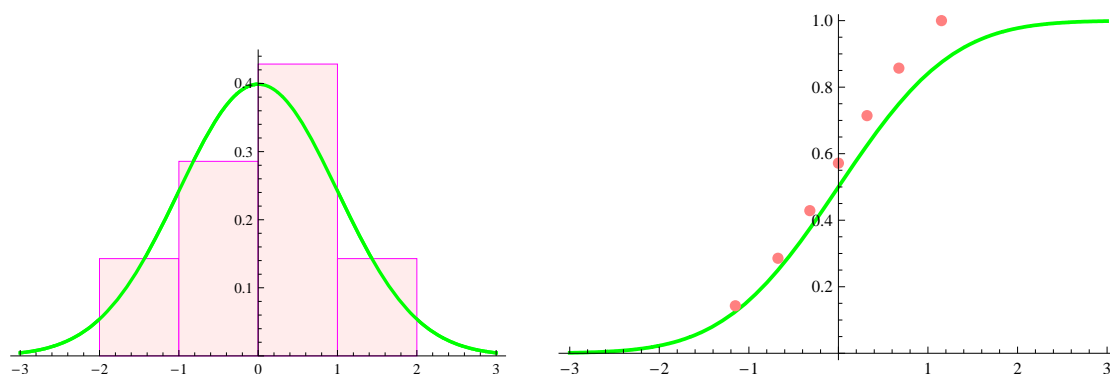
Jak takové dělení vypadá je vidět na obrázcích 9.5 a 9.6.

Potom se opět řeší diskretní dopravní problém

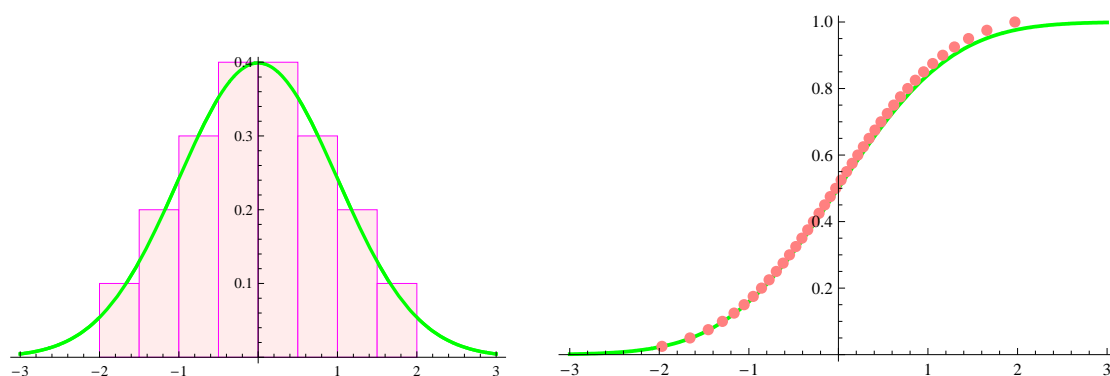
$$\text{Minimalizovat} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c(d_i, e_j) x_{ij} \quad (9.3)$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= D_i, \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= E_j \\ x_{ij} &\geq 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$



Obrázek 9.5. Diskretizace normálního rozdělení  $N(0,1)$  pomocí stejně velkých bodů, které jsou různě daleko od sebe, pro  $n = 7$ . Vlevo histogram, vpravo distribuční funkce.



Obrázek 9.6. Diskretizace normálního rozdělení  $N(0,1)$  pomocí stejně velkých bodů, které jsou různě daleko od sebe, pro  $n = 40$ . Diskretizacelevo histogram, vpravo distribuční funkce.

## 9.4 Výsledky

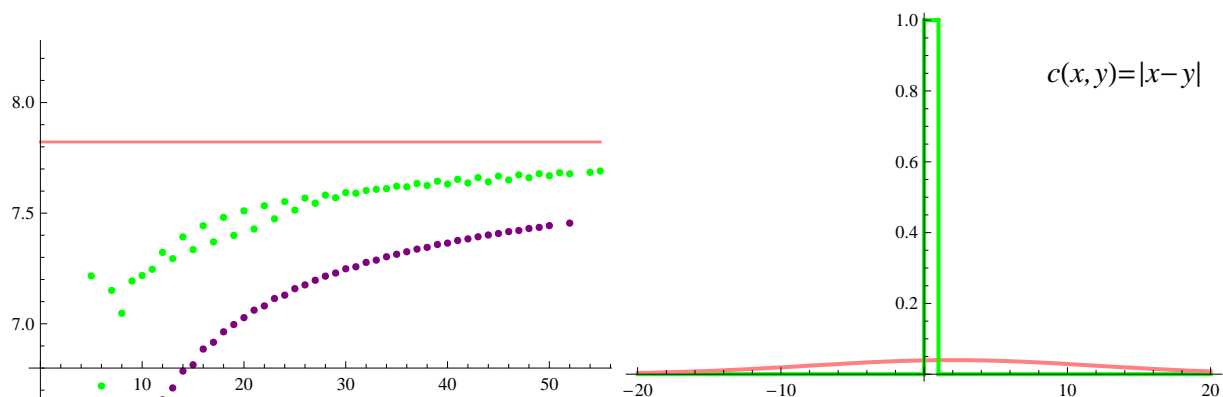
Následující obrázky (vlevo) ukazují cenu přesunu v obecném spojitém případě (konstantní přímka) a ceny přesunů, pokud míry  $\mu$  a  $\nu$  zdiskrétním (tečky). Na vodorovné ose je počet bodů dělení nosičů měr  $\mu$  a  $\nu$  a na svislé ose příslušné ceny přesunů. Zelené tečky jsou ceny přesunu v případě, že body dělení měr  $\mu$  a  $\nu$  jsou od sebe stejně vzdálené a mají různé velikosti. Fialové tečky ukazují cenu přesunu, když jsou dělení měr  $\mu$  a  $\nu$  konstruované druhým způsobem, tedy pomocí stejně velkých bodů různě daleko od sebe.

Obrázky napravo ukazují, jak „hromádky písku“ (hustoty pravděpodobnostních měr) vypadají (zeleně je  $\mu$ , růžově  $\nu$ ).

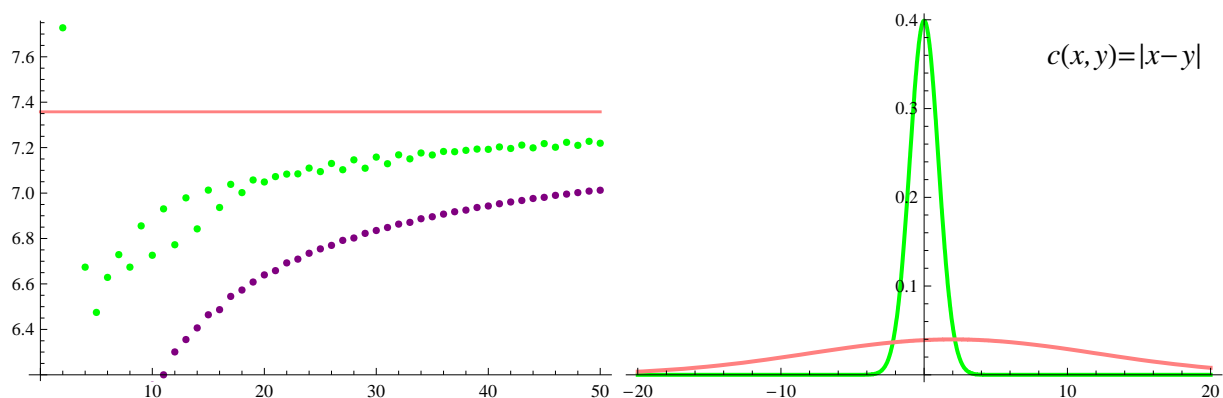
Z obrázků 9.10, 9.14 a 9.15 je vidět, že pro rovnoměrná rozdělení není mezi prvním a druhým způsobem zdiskrétnění rozdíl a zelené a fialové tečky se v těchto případech překrývají.

Na obrázcích 9.17 a 9.18 je vidět, že se výsledky počítané prvním způsobem (pomocí dělení s ekvidistantními různě velkými body) liší pro  $n$  liché a sudé. Je to způsobeno tím, že pro liché  $n$  je jak v dělení nosiče míry  $\mu$  tak i v dělení  $\nu$  stejný bod  $d_{(n+1)/2} = e_{(n+1)/2}$  a i „velikosti“ tohoto bodu jsou stejné  $D_{(n+1)/2} = E_{(n+1)/2}$ . Na řešení úlohy tedy vůbec

nemá vliv, protože cena přesunu této hmoty bude nulová. Pro  $n$  sudé žádný takovýto bod neexistuje a cena přesunu je tedy vyšší.



Obrázek 9.7. Míra  $\mu$  má rovnoměrné rozdělení na intervalu  $[0,1]$ ,  $\nu$  má normální rozdělení se střední hodnotou 2 a rozptylem 100,  $N[2,100]$ . Cenová funkce je  $c_1(x, y) = |x - y|$ . Cena optimálního přesunu (ve spojitém případě) je **7.82214**.



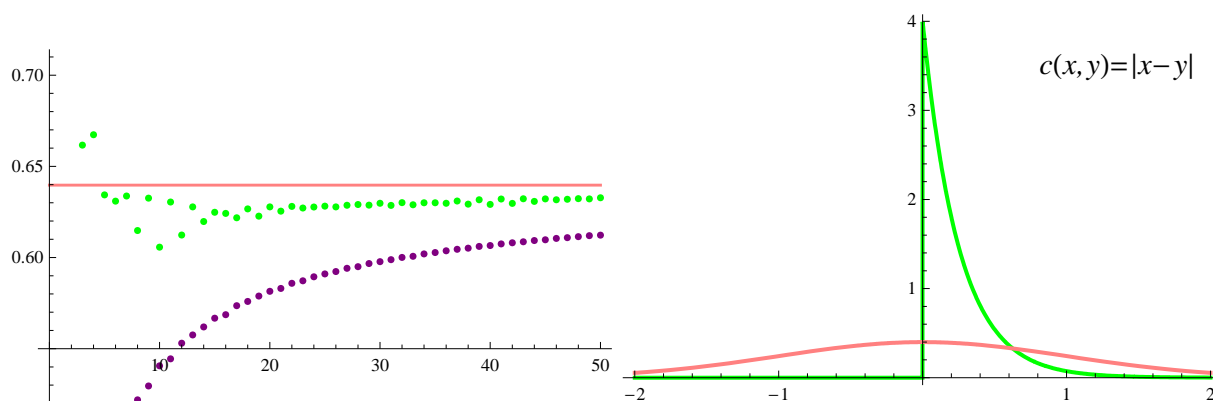
Obrázek 9.8. Míra  $\mu$  má normální rozdělení se střední hodnotou 0 a rozptylem 1,  $N[0,1]$ . Míra  $\nu$  má normální rozdělení se střední hodnotou 2 a rozptylem 100,  $N[2,100]$ . Cenová funkce je  $c_1(x, y) = |x - y|$ . Cena optimálního přesunu (ve spojitém případě) je **7.35754**.

## 9.5 Diskuse výsledků

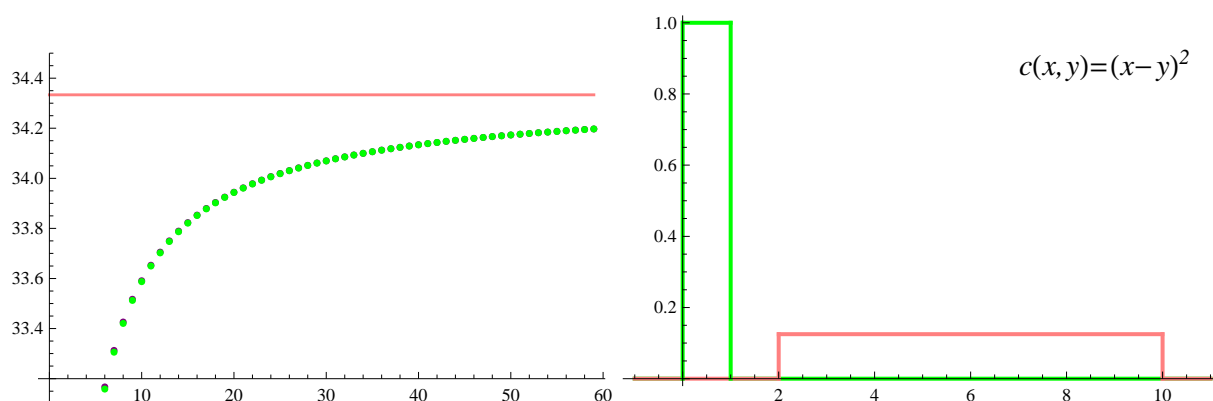
Ve všech řešených příkladech se optimální hodnota účelové funkce v diskrétní úloze blíží k řešení spojitě úlohy. Jak je ale vidět na obrázcích 9.7, 9.8, 9.9, 9.13, 9.16, 9.17 a 9.18, nebyla zvolená konstrukce dělení příliš vhodná.

Na grafech 9.7 a 9.8 se stejně jako na grafech 9.17 a 9.18 zdá, že se výsledky počítané prvním způsobem (zeleně) liší pro  $n$  sudé a liché. V grafech 9.16, 9.17 a 9.18 se pro oba postupy zdiskrétnění zdá, že jsou výsledky příliš „rozházené“.





Obrázek 9.9. Míra  $\mu$  má exponenciální rozdělení s parametrem  $\lambda = 4$ . Míra  $\nu$  má normální rozdělení se střední hodnotou 0 a rozptylem 1,  $N[0,1]$ . Cenová funkce je  $c_1(x, y) = |x - y|$ . Cena optimálního přesunu (ve spojitém případě) je **0.639727**.



Obrázek 9.10. Míra  $\mu$  má rovnoměrné rozdělení na intervalu  $[0,1]$ ,  $\nu$  má rovnoměrné rozdělení na intervalu  $[2,10]$ . Cenová funkce je  $c_2(x, y) = |x - y|^2$ . Cena optimálního přesunu (ve spojitém případě) je **34.3333**.

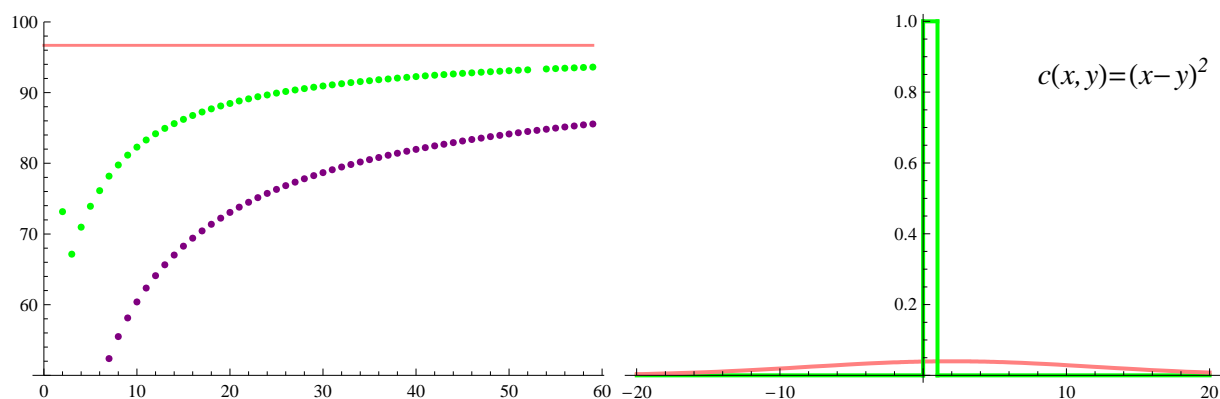
To je způsobeno tím, že místo postupného zjemňování dělení beru při každé změně  $n$  úplně jiné body. Řešení úloh i pro blízká ale různá  $n$  mohou být pak od sebe relativně daleko. Bylo by lepší brát takovou posloupnost dělení, aby každé další dělení bylo zjemněním dělení předcházejícího.

Druhý zmiňovaný způsob dělení (různě husté body se stejnou mírou), by se dal například vylepšit tak, že by se pro  $n \in \mathbb{N}$  braly jako body dělení

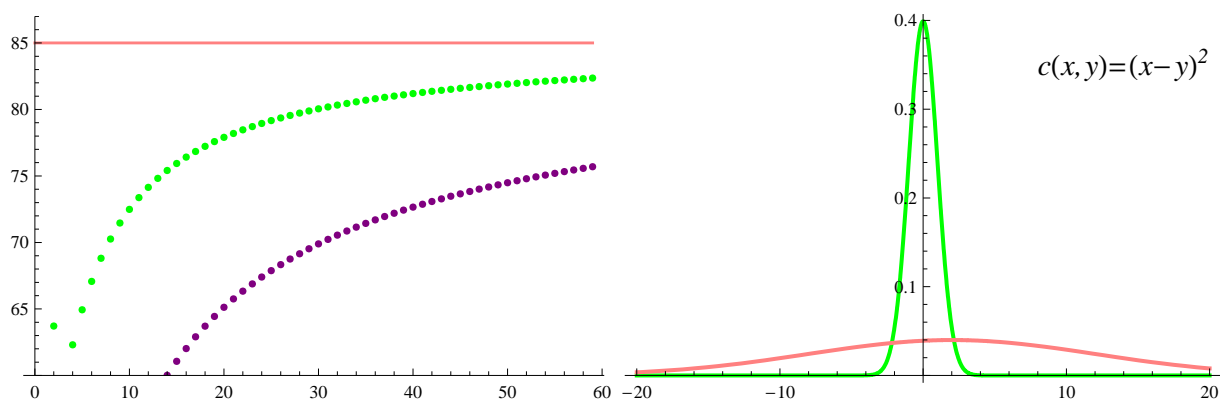
$$\{d_1, \dots, d_{2^n-1}\} = \left\{ F^{-1} \left( \frac{1}{2^n} \right), F^{-1} \left( \frac{2}{2^n} \right), \dots, F^{-1} \left( \frac{2^n - 1}{2^n} \right) \right\}.$$

Každý z těchto bodů by měl míru

$$D_i = \frac{1}{2^n - 1}, \quad i = 1, \dots, 2^n - 1.$$



Obrázek 9.11. Míra  $\mu$  má rovnoměrné rozdělení na intervalu  $[0,1]$ ,  $\nu$  má normální rozdělení se střední hodnotou 2 a rozptylem 100,  $N[2,100]$ . Cenná funkce je  $c_2(x, y) = |x - y|^2$ . Cena optimálního přesunu (ve spojitém případě) je **96.6914**.



Obrázek 9.12. Míra  $\mu$  má normální rozdělení se střední hodnotou 0 a rozptylem 1,  $N[0,1]$ . Míra  $\nu$  má normální rozdělení se střední hodnotou 2 a rozptylem 100,  $N[2,100]$ . Cenná funkce je  $c_2(x, y) = |x - y|^2$ . Cena optimálního přesunu (ve spojitém případě) je **85.00**.

Podobně by se dalo vylepšit i dělení pomocí stejně vzdálených bodů s různými „velikostmi“.

Nejdřív bych si zvolila nějaký interval, například

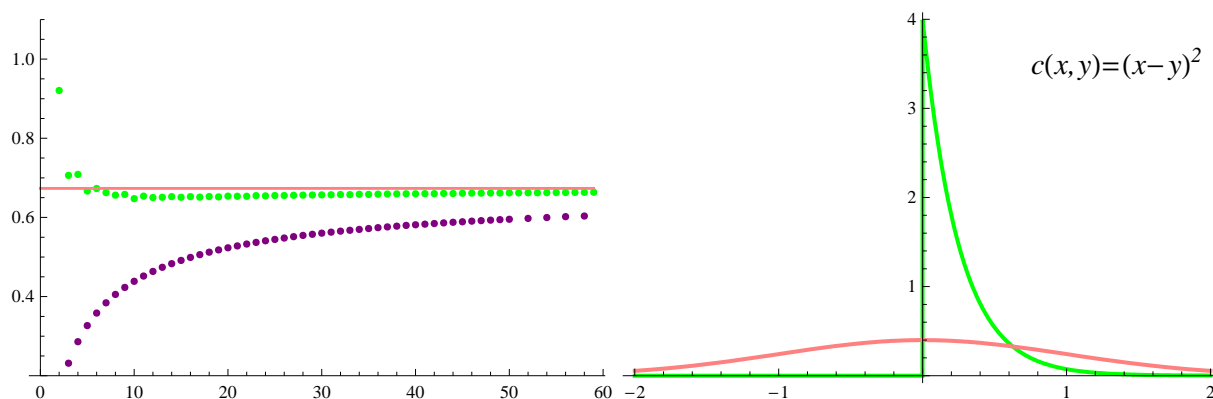
$$[a, b] = [F^{-1}(0.01), F^{-1}(0.99)].$$

Pro  $n = 1$  pak bude dělením jediný bod

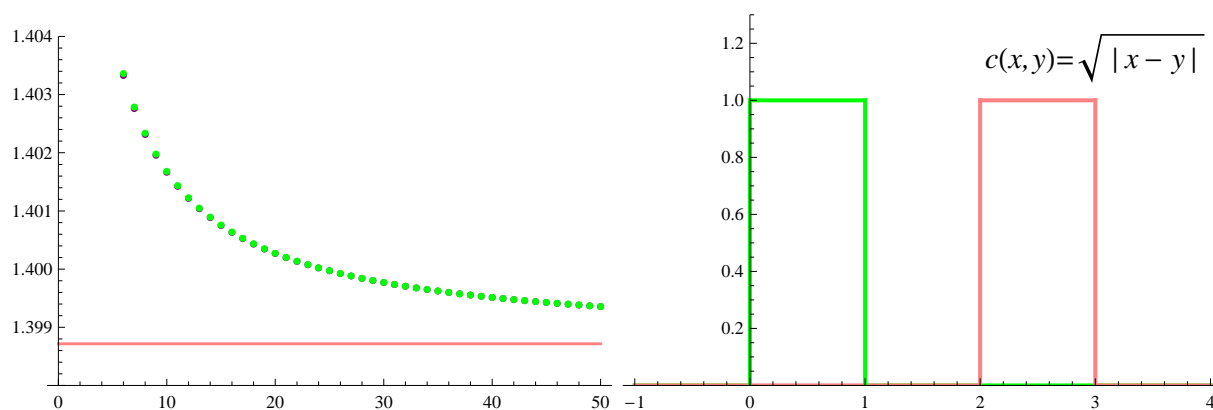
$$D_1 = a + \frac{1}{2}(b - a),$$

pro každé další  $n \in \mathbb{N}$  pak rozpůlím intervaly mezi body předchozího dělení a mezi „krajními“ body  $a$  a  $b$ . Ve stejných vzdálenostech pak doplním body i do rozšířeného intervalu

$$[a_n, b_n] = \left[ F^{-1} \left( \frac{0.01}{n} \right), F^{-1} \left( 1 - \frac{0.01}{n} \right) \right].$$



Obrázek 9.13. Míra  $\mu$  má exponenciální rozdělení s parametrem  $\lambda = 4$ . Míra  $\nu$  má normální rozdělení se střední hodnotou 0 a rozptylem 1,  $N[0,1]$ . Cenová funkce je  $c_2(x, y) = |x - y|^2$ . Cena optimálního přesunu (ve spojitém případě) je **0.673401**.



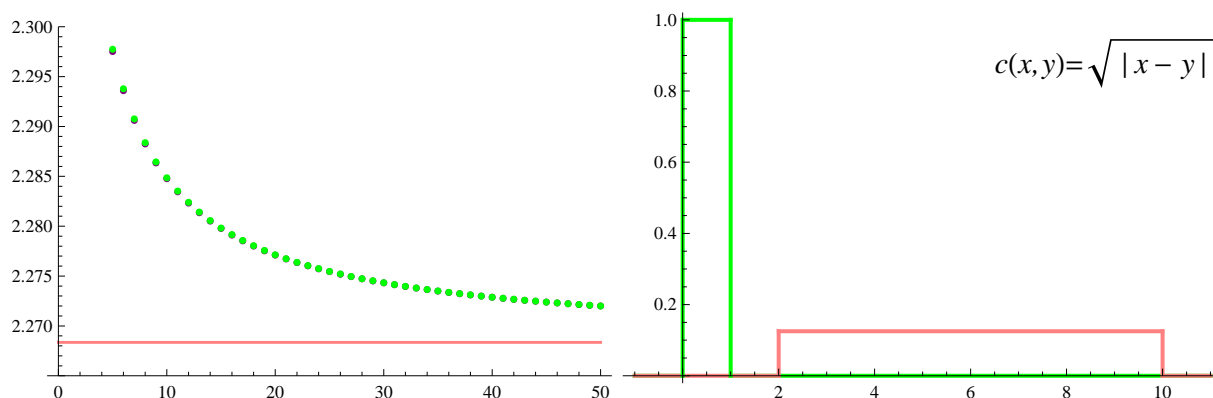
Obrázek 9.14. Míra  $\mu$  má rovnoměrné rozdělení na intervalu  $[0,1]$ ,  $\nu$  má rovnoměrné rozdělení na intervalu  $[2,3]$ . Cenová funkce je  $c_3(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ . Cena optimálního přesunu (ve spojitém případě) je **1.39872**.

Pro  $n \in \mathbb{N}$  pak tedy budu mít body dělení

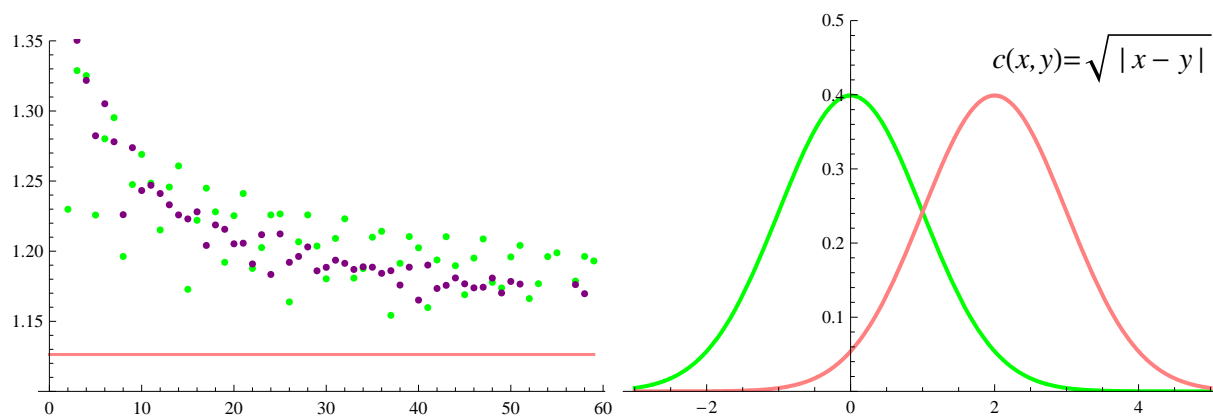
$$\{d_1, \dots, d_k\} = \left\{ a + \frac{j}{2^n} (b - a); \quad j \in \mathbb{Z}; \quad a_n < a + \frac{j}{2^n} (b - a) < b_n \right\}.$$

Každému z těchto bodů se pak přiřadí vhodná velikost stejně jako výše.

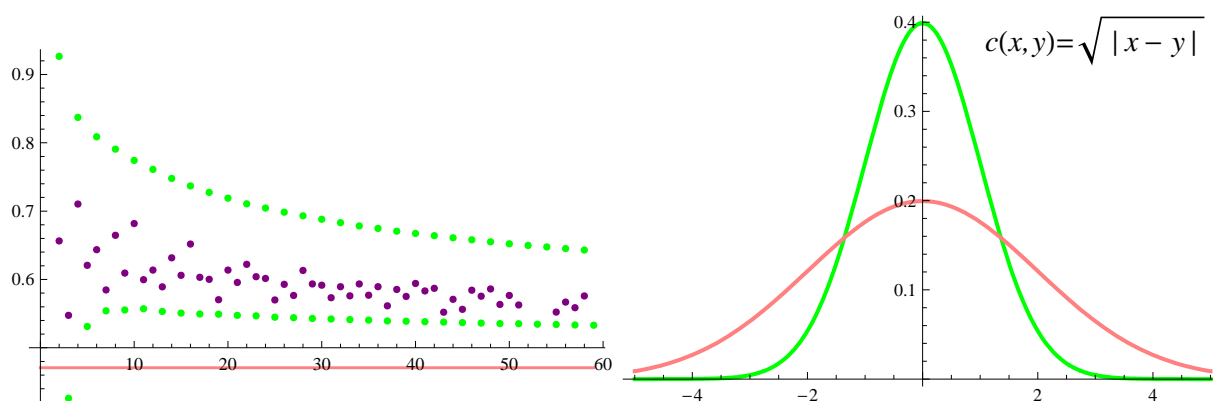
Tímto postupem by se už pro relativně malá  $n$  dosáhlo vysokého počtu bodů dělení. Diskrétní úloha by se tak počítala o něco déle.



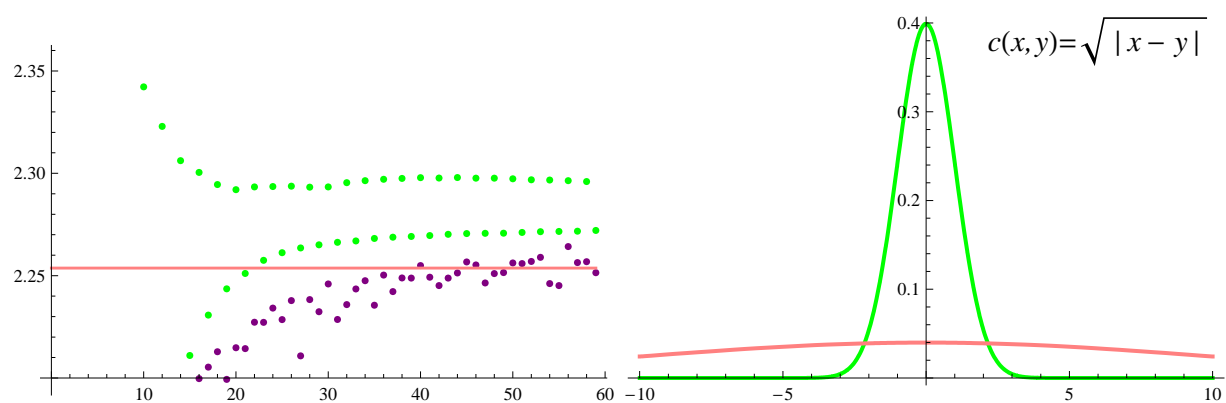
Obrázek 9.15. Míra  $\mu$  má rovnoměrné rozdělení na intervalu  $[0,1]$ ,  $\nu$  má rovnoměrné rozdělení na intervalu  $[2,10]$ . Cenová funkce je  $c_3(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ . Cena optimálního přesunu (ve spojitém případě) je **2.26835**.



Obrázek 9.16. Míra  $\mu$  má normální rozdělení se střední hodnotou 0 a rozptylem 1,  $N[0,1]$ . Míra  $\nu$  má normální rozdělení se střední hodnotou 2 a rozptylem 1,  $N[2,1]$ . Cenová funkce je  $c_3(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ . Cena optimálního přesunu (ve spojitém případě) je **1.12635**.



Obrázek 9.17. Míra  $\mu$  má normální rozdělení se střední hodnotou 0 a rozptylem 1,  $N[0,1]$ . Míra  $\nu$  má normální rozdělení se střední hodnotou 0 a rozptylem 4,  $N[0,4]$ . Cenová funkce je  $c_3(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ . Cena optimálního přesunu (ve spojitém případě) je **0.470715**.



Obrázek 9.18. Míra  $\mu$  má normální rozdělení se střední hodnotou 0 a rozptylem 1,  $N[0,1]$ . Míra  $\nu$  má normální rozdělení se střední hodnotou 0 a rozptylem 100,  $N[0,100]$ . Cenová funkce je  $c_3(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ . Cena optimálního přesunu (ve spojitém případě) je **2.25368**.

# Literatura

- EVANS, L. C. Partial Differential Equations and Monge–Kantorovich Mass Transfer. Technical report, Department of Mathematics, University of California, Berkeley (2001).
- LACHOUT, P. Matematické Programování (pracovní text k přednášce) (2006).
- MCCANN, R. J. Exact Solutions to the Transportation Problem on the Real Line. *Proceedings of the Royal Society A*, volume 455(1984):1341–1380 (1999).
- PLESNÍK, J., DUPAČOVÁ, J. A VLACH, M. *Lineárne Programovanie*. Alfa, Bratislava (1990).
- RACHEV, S. T. *Probability Metrics and the Stability of Stochastic Models*. John Wiley & Sons (1991).
- VILLANI, C. *Topics in Optimal Transportation*, volume 58 z *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (2003).