

Posudek bakalářské práce "Konvergence Fourierových řad" studentky Jany Lipkové

Bakalářská práce prezentuje především Fejérovu větu o konvergenci v L^1 a o bodové konvergenci a jejich zobecnění, resp. zesílení. Provedení je založeno na citované knize Katznelsona.

Studentka pokryla prací rozsáhlé množství látky a z formálního zpracování je patrné, že mu věnovala značné úsilí. Množství výtek, které k práci mám, se týká několika málo logických nedostatků v důkazech, mnoha možností, jak výklad učinit úplnějším a jasnějším, jak by odpovídalo druhu práce. Konečně se domnívám, že uspořádání a motivace některých výsledků by malými změnami mohly přispět k vylepšení celkového dojmu.

Přes uvedené nedostatky či námitky se domnívám, že práce aspiruje na velmi dobré hodnocení, pokud studentka nebude mít problém s vysvětlením některého z několika problematických či neúplně vysvětlených míst (např. A-G).

V každém případě se domnívám, že práce splňuje nároky, které by bakalářská práce měla splňovat.

- A. Str. 18, řádek 1 ... Proč lze užít Fubiniovu větu?
- B. Str. 17-18 ... Kde se vzalo s.v. v rovnostech?
- C. Lemma 3.4 ... Jak je to s existencí a trojúhelníkovou nerovností pro integrál s hodnotami v B ?
- D. Jaký je správný postup důkazu Lemmatu 3.6?
- E. Str. 27, řádek 9 ... Jak lze ověřit rovnost?
- F. Jaký je správný postup důkazu Věty 4.6? (Volba δ závisí na n , pak i M závisí na n .)
- G. Str. 43 ... Jak má být formulována 3. poznámka?

Seznam dalších nejasných formulací, ne dost úplných argumentů či drobných nepřesností:

Ztotožnění 0 a 2π , význam prostorů $L^p(\mathbb{T})$ a $C(\mathbb{T})$, ztotožnění s 2π -periodickými funkcemi, s třídami funkcí by si zasloužily jasnějšího vysvětlení na počátku.

Definice 2.1 ... $N = 0, 1, \dots$ namísto $n \in \mathbb{N}$? Co je frekvence P ?

Důkaz Lemmatu 2.2 ... $j \in \mathbb{N}$ nebo $j \in \mathbb{Z}$?

Definice 2.3, Příklad ... trigonometrická řada je výraz, který lze zapsat podle Eulerových vzorců jako jiný výraz. Co to znamená?

Tvrzení 2.7 ... Důkaz užívá argument s periodičností implicitně (opakuje se na str. 12 dvakrát). Podrobný důkaz by na to měl upozornit.

Tvrzení 2.9 ... $f \in L^1(\mathbb{T})$?, v (i) a (ii) je f reálná?

Věta 2.13 ... "lokálně" je nadbytečné (v citované knize není?).

Str. 16 ... φ do \mathbb{R} nebo do \mathbb{T} ? Závisí na vysvětlení práce s \mathbb{T} .

Str. 17 ... h je periodické by se mělo zmínit.

Str. 17, řádek 9 ... užití Fubiniovy věty pro F by se mohlo znovu zmínit.

Věta 2.17 ... substituce $u + \tau$ při pevném τ .

Lemma 2.18 ... $n \in \mathbb{N}$ či $n \in \mathbb{Z}$?; $\varphi(t) = e^{int}$?

Str. 19, řádek 2 odzdola ... $d\tau$ namísto dt .

Str. 20 ... proč limsup?, neostrá nerovnost?

Definice jádra ... $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$?

Definice 3.7 ... namísto D_n má být přesněji $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$?

- Str. 23, řádek 1 ... co je $C(\mathbb{T})$ a proč jsou prvky stejnoměrně spojité?
 Str. 24, řádek 1 ... t je pevné, má být pro každé $\tau \in \mathbb{T}$.
 Lemma 3.10(ii) ... $t \neq 0$.
 Str. 29, řádek 1 ... $\dots + \frac{n-n_0}{n} \cdot \varepsilon$, co je C ?
 Poznámka na str. 29 ... $f \in L^1(\mathbb{T})$?, jak ii) z Důsledku 2.19, ...?
 Str. 29, řádek 2 zdola ... z důkazu Tvzení 3.14.
 Lemma 3.20 ... formulace $B \subset L^1(\mathbb{T})$ Banachův prostor je zavádějící (vektorový podprostor s úplnou normou $\|\cdot\|_B$).
 Důkaz Věty 3.21 ... prvním krokem je existence integrálu v B ?, dovětek "tj. ..." je zavádějící, jde o rovnost v L^1 , ne bodovou.
 Důkaz věty 3.22 užívá i ii) a Lemma 3.11.
 Důsledek 3.23 ... zaslouží též odkazy na tvrzení, ze kterých plyne.
 Tvzení 3.24 ... co je Banachův prostor na \mathbb{T} ? (je $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_1$?).
 Důkaz Tvzení 3.25 ... $\|\cdot\|$ či $\|\cdot\|_1$, a tedy?, $\|F\|_1 \leq \|F(g)\|_1$...?, $K_n(f)$?
 Co je (S-1), (S-2) pro Poissonovo jádro? Lze dát do souvislosti s výkladem? (Např. pomocí $r_n \nearrow 1$ a Heineho věty?)
 Str. 35, řádek 2 zdola ... "Z Důsledku 2.19 plyne" - podrobněji?, n nebo j ?
 Str. 37 ... chce se říci, že namísto $\mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ se bude psát $L^1(\mathbb{T})$? Jde o funkce měřitelné nebo dokonce integrovatelné?
 (4.2) ... plyne z důkazu Lemmatu 3.10.
 Str. 38 ... $\check{f}(t_0) < \infty$ namísto $\check{f}(t_0) \in \mathbb{C}$? Pro $+\infty$ a $-\infty$ podobné?
 Str. 38, řádek 1 zdola ... jedenkrát - namísto +.
 (4.5) by mělo znít: existuje $c \in \mathbb{C}$, že $\lim 1/h \int |... - c| dr = 0$? $\check{f}(t_0)$ má svůj význam a hraje roli c jenom někdy. Např. ve Větě 4.6 ne.
 Důsledek 4.7 ... odkazy na tvrzení, ze kterých plyne.

Seznam některých poznámek k uspořádání práce a způsobu podání.

- a. Tvzení 2.7 je aplikací Věty 2.6, která je dokázána pod názvem Tvzení 3.14. Smysl uvedení Tvzení 2.7 bych chápal jako aplikaci Tvzení 3.14 za ním, společně s dalšími, např. Riemann-Lebesgueovým lemmatem.
 b. Věta 2.5 se užívá pro $L^p(\mathbb{T})$, bylo by lepší ji tak formulovat či dodat důsledek či poznámku.
 (c. Věta 2.10 by se ani nemusela nazývat větou?)
 d. Příklad na str. 15 by bylo lepší formulovat v $L^1(\mathbb{T})$.
 e. Lemma 3.1 lze formulovat v $L^p(\mathbb{T})$ a není třeba později říkat, že se provede analogicky.
 f. (3.4) by měla být jedna z hlavních vět, Věta 3.5 větou být může a nemusí?
 g. Lemma 3.11 by mohlo tvrdit silnější (S-3), totiž (4.2), které důkaz dokazuje a které se potřebuje později.
 h. Tvzení 3.14 = Věta 2.6 plyne z Věty 3.22, a ta plyne z Tvzení 3.24? To nevypadá optimálně. Tvzení o $\sigma_n(f) \rightarrow f$ v L^1 či B by mohla být explicitně zahrnuta v tvrzeních a ne jen v důkazech.
 i. Věty 3.16 a 3.17 ... jde spíš o 1 větu.
 j. Namísto odkazu na "metodu důkazu (A-2)", by bylo lepší ukázat snadný fakt, že $f_n \rightarrow f$ v B implikuje, že $(f_n)_\tau \rightarrow f_\tau$ stejnoměrně v τ ?
 k. Str. 31. Tato Poznámka by zasloužila název Lemma, Tvzení ap. Hodilo by se, kdyby se na ni dalo odkazovat. (Poznámka se obvykle nedokazuje?)

l. Věta 4.3 by mohla zahrnovat případ s.v. omezených funkcí a nemusela by se jmenovat věta?

m. Věta 4.8 by měla být doplněna nějakou informací o důkazu, Poissonovo jádro dáno do souvislosti s ostatní látkou, nebo přesunuta do nějaké poznámky či úplně vynechána?

n. Motivace pro Lemma 4.9 a Příklad je nejasná, mohlo by jít o poznámku (cvičení) k definici σ_n a S_n , ale s větami o konvergenci nemá nic společného?

V Praze dne 3. 6. 2009

Petr Holický

oponent bakalářské práce

