Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michal Bílek

Sturmův-Liouvilleův problém

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.
Studijní program: Matematika, Obecná matematika

2009

Děkuji vedoucímu práce za poskytnutí užitečných rad při tvorbě práce. Děkuji také své rodině za podporu ve studiu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 2.8.2009 Michal Bílek

Obsah

Název práce: Sturmův-Liouvilleův problém
Autor: Michal Bílek
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.
e-mail vedoucího: kaplicky@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V práci se zabýváme regulárním Sturm-Liouvilleovým problémem. Jsou vysloveny a dokázány základní vlastnosti jeho řešení a je vyložena teorie k těmto výsledkům vedoucí. V práci se nejpve věnujeme integrálním operátorům, což má za cíl najít podmínku postačující k jejich kompaktnosti. V kapitole o hermiteovských operátorech ukážeme, že z množiny jejich vlastních funkcí lze vybrat ortogonální systém a že jejich vlastní čísla jsou reálná. Následuje kapitola o integrálních hermiteovských operátorech. V ní, kromě několika vět a odhadů, které užijeme později, dokážeme Hilbert-Schmidtovu větu. Pak konečně přijde na řadu formulace Sturm-Liouvilleova problému. Převedeme ho na úlohu nalezení vlatních funkcí a čísel jistého integrálního hermiteovkého operátoru a aplikujeme předchozí výsledky. Zjistíme, že z množiny řešení Sturm-Liouvilleova problému lze vybrat ortogonální bázi určitého prostoru funkcí. Na závěr je uveden příklad Sturm-Liouvilleovy úlohy s řešením.

Klíčová slova: Sturmův-Liouvilleův problém, Integrální operátory, Hermiteovské operátory

Title: Sturm Liouville problem
Author: Michal Bílek
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: kaplicky@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In our work we study the regular Sturm-Liouville problem. We give and prove basic properties of solution of this problem with the theory leading to these results. In the work we first attend to integral operators and search for sufficient condidion for their compactness. In the chapter on hermitian operators we show, that from the set of their eigenfunctions is possible to choose an orthogonal system and their eigenvalues are real. It follows a chapter dedicated to integral hermitian operators. In it, we find some theorems and estimations what we will need later and the Hilbert-Schmidt Theorem. Then it is turn for the formulation of the Sturm-Liouville problem. It is reduced to problem of finding the eigenfunctions and eigenvalues of a certain integral hermitian operator. Then we can apply previous theory. We find out, from solutions of Sturm-Liouvile problem can be chosen an orthonormal system of a space of functions. At the end there is given an example of Sturm-Liouville problem with solution.

Keywords: Sturm-Liouville Problem, Integral Operators, Hermitian Operators

Kapitola 1

Úvod

V práci se zabýváme Sturm-Liouvilleovým problémem, tj. úlohou nalezení čísla λ a řešení u rovnice

$$-(pu')' + qu = \lambda u,$$

kde p a q jsou dané funkce, při zadaných okrajových podmínkách (popsaných v kapitole 3) na omezeném intervalu $I = (0, l)$. S úlohami tohoto typu se lze často setkat v kvantové mechanice při řešení Schrödingerovy rovnice, či při vyšetřování kmitů struny, membrány apod.

Smyslem práce je podat srozumitelný výklad vlastností řešení Sturm-Liovilleova problému spolu s teorií k těmto výsledkům vedoucí. Přitom se u čtenáře předpokládají znalosti z úvodního kurzu matematické analýzy. V práci se tedy věnujeme postupně integrálním operátorům a zkoumáme podmínky, za jakých jsou kompaktní, Hermiteovskými operátory a operátory patřícími do obou těchto skupin. Výsledky pak použijeme na Sturm-Liouvilleův problém. Práce končí uvedením řešeného příkladu.

Jako zdroj informací sloužila kniha [1], není-li uvedeno jinak. Uvedený příklad je vlastní.

Kapitola 2

Integrální hermiteovské operátory

2.1 Použitá označení

$\int$ ... Lebesgueův integrál
$\mathcal{L}_n(G),\ n \in [1, \infty]$ ... Lebesgueův prostor s příslušnou normou, G bude v našem případě oblast v $\mathbb{R}^m,\ m \in \mathbb{N}$, nebo její uzávěr
$\mathcal{C}^n(G),\ n \in \mathbb{N}$ ... třída funkcí, které mají v každém bodě G n-tou derivaci a tato derivace je na G spojitou funkcí. Na hranici uvažujeme jednostranné derivace
$\mathcal{C}(G),\ n \in \mathbb{N}$ ... totéž, co $\mathcal{C}^1(G)$

2.2 Integrální operátory

Označení 1. *V celé kapitole* 2 *budeme nadále symbolem G označovat souvislou oblast v $\mathbb{R}^n$.*

Definice 2. *Buď $\mathcal{K}(x, y) : \overline{G} \times \overline{G} \to \mathbb{R}$. Zobrazení $K : f \mapsto Kf$, které funkci f přiřadí funkci $Kf : \overline{G} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem*

$$Kf(x) = \int_G \mathcal{K}(x, y) f(y)\ dy,$$

nazveme integrální operátor *s* jádrem $\mathcal{K}(x, y)$*, má-li výraz na pravé straně smysl.*

Označení 3. *Nebude-li řečeno jinak, budeme v sekcích 2.2 a 2.4 symbolem $\mathcal{K}(x,y)$ značit stejnoměrně spojitou funkci na $\overline{G}\times\overline{G}$ a K integrální operátor s jádrem $\mathcal{K}(x,y)$ na $\mathcal{L}_2(G)$.*

Definice 4. *Zaveďme normy*

$$\|h\|_{max} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x\in G} |h(x)|\,, \quad h \in \mathcal{C}(G),$$

$$\|h\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_G |h(x)|^2 \, dx\right)^{1/2}, \quad h \in \mathcal{L}_2(G).$$

Lemma 5. *Buď G omezená. Pak K zobrazuje $\mathcal{L}_1(G)$ do $\mathcal{C}(\overline{G})$. Pro operátor K navíc platí*

$$\|Kf\|_{max} \leq M\sqrt{V}\,\|f\|_2\,,\ f \in \mathcal{L}_2(G), \tag{2.1}$$

$$\|Kf\|_{max} \leq MV\,\|f\|_{max}\,,\ f \in \mathcal{L}_\infty(G), \tag{2.2}$$

$$\|Kf\|_2 \leq MV\,\|f\|_2\,,\ f \in \mathcal{L}_2(G), \tag{2.3}$$

kde

$$M = \|\mathcal{K}(x,y)\|_{max}\,,$$

$$V = \int_G 1\,dx.$$

Důkaz. Spojitost funkce $[Kf](x)$ na $\overline{G}$ snadno dokážeme použitím věty o spojitosti integrálu závislého na parametru (viz [3]), protože $f \in \mathcal{L}_1(G)$ a $\mathcal{K} \in \mathcal{C}(\overline{G}\times\overline{G})$.

Ověřme první nerovnost. Podle Cauchyho-Buňakovského nerovnosti je

$$\|Kf\|_{max} \equiv \left\|\int_G f(y)\mathcal{K}(x,y)\,dy\right\|_{max}$$

$$\leq \left\|\left(\int_G |f(y)|^2\,dy\right)^{1/2}\left(\int_G |\mathcal{K}(x,y)|^2\,dy\right)^{1/2}\right\|_{max} \leq M\sqrt{V}\,\|f\|_2\,.$$

Zbylé dvě nerovnosti se dokáží podobně. □

Věta 6. *(Arzela-Ascoli) Buď $B \subseteq \mathcal{C}(K)$ nekonečná množina stejně stejnoměrně spojitých funkcí z kompaktní množiny K do $\mathbb{C}$ omezená vzhledem k normě $\|\cdot\|_{max}$. Pak lze z B vybrat posloupnost, která konverguje k jisté funkci spojité na K.*

Důkaz. Viz např. [3]. $\square$

Definice 7. *Lineární operátor $L : X \to Y$ mezi dvěma Banachovými prostory nazveme* kompaktní, *pokud z každé omezené posloupnosti $\{x_n\}$ v X lze vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ tak, že $\{Lx_{n_k}\}$ konverguje v Y.*

Věta 8. *Buď G omezená oblast. Pak integrální operátor K se spojitým jádrem $\mathcal{K}(x, y) \in \mathcal{C}(\overline{G} \times \overline{G})$ je kompaktní operátor z $\mathcal{L}_2(G)$ do $\mathcal{C}(\overline{G})$.*

Důkaz. Zvolme libovolnou omezenou (v normě $\|\cdot\|_2$) posloupnost funkcí $\{f_n\} \subset \mathcal{L}_2(G)$. Ukážeme, že z ní lze vybrat podposloupnost $\{f_{n_k}\}$ takovou, že $\{Kf_{n_k}\}$ konverguje v $\mathcal{C}(\overline{G})$. Označme $A := \sup \|f_n\|_2$. Využitím nerovnosti (2.1) dostaneme, že $\|Kf_n\|_{max} \leq M\sqrt{V}A$, tedy je $\{Kf_n\}$ omezená v normě $\|\cdot\|_{max}$. Jelikož je $\mathcal{K}(x, y)$ stejnoměrně spojitá, tak pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x_1, x_2, y \in G$, $|x_1 - x_2| < \delta$, platí

$$|\mathcal{K}(x_1, y) - \mathcal{K}(x_2, y)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{V}A}.$$

Použitím Hölderovy nerovnosti obdržíme

$$\begin{aligned} |[Kf_n](x_1) - [Kf_n](x_2)| &\leq \left| \int_G [\mathcal{K}(x_1, y) - \mathcal{K}(x_2, y)] f(y) dy \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{V}A} \sqrt{V}A = \varepsilon. \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali, že K zobrazuje $\{f_n\}$ na množinu $\{Kf_n\}$ stejně stejnoměrně spojitých funkcí. Jak je známo, je $\overline{G}$ kompaktní. Nyní stačí použít Arzela-Ascoliovu větu 6 a důkaz je hotov. $\square$

2.3 Hermiteovské operátory

Definice 9. *Zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{L}_2(G) \times \mathcal{L}_2(G) \to \mathbb{C}$ definované jako*

$$\langle g, f \rangle \overset{\text{def}}{=} \int_G g(x)\overline{f(x)}\, dx$$

budeme označovat jako skalární součin *na $\mathcal{L}_2(G)$.*

Definice 10. *Buď* $M_L \subset \mathcal{L}_2(G)$ *definiční obor operátoru* $L : M_L \to \mathcal{L}_2(G)$. *Lineární operátor* L *nazveme* hermiteovský, *pokud* M_L *je hustá v* $\mathcal{L}_2(G)$ *a pro* g *a* f *z* $M_L(G)$ *platí*

$$\langle Lf, g\rangle = \langle f, Lg\rangle.$$

Skalárnímu součinu tvaru $\langle Lf, f\rangle$ *budeme říkat* kvadratická forma příslušející L.

Tvrzení 11. *Lineární operátor* L*, jehož definiční obor* M_L *je hustý v* $\mathcal{L}_2(G)$*, je hermiteovský, právě když je kvadratická forma příslušející* L *reálná.*

Důkaz. Je $\langle Lf, f\rangle = \overline{\langle f, Lf\rangle} = \overline{\langle Lf, f\rangle}$, takže přímá implikace platí.

Dokažme implikaci opačnou. Je-li kvadratická forma L reálná, je pro $f, g \in M_L$

$$0 = \mathrm{Re}\frac{1}{i}\left[\langle L(f+ig), f+ig\rangle - \langle Lf, f\rangle - \langle Lg, g\rangle\right] = \mathrm{Re}(\langle Lg, f\rangle - \langle Lf, g\rangle),$$
$$0 = \mathrm{Im}\left[\langle L(f+g), f+g\rangle - \langle Lf, f\rangle - \langle Lg, g\rangle\right] = \mathrm{Im}(\langle Lg, f\rangle + \langle Lf, g\rangle).$$

Tím dostáváme

$$\mathrm{Re}\langle Lg, f\rangle = \mathrm{Re}\langle Lf, g\rangle$$
$$\mathrm{Im}\langle Lg, f\rangle = -\,\mathrm{Im}\langle Lf, g\rangle.$$

Po vynásobení druhé rovnice i a sečtením rovnic získáváme

$$\langle Lf, g\rangle \equiv \mathrm{Re}\langle Lf, g\rangle + i\,\mathrm{Im}\langle Lf, g\rangle = \mathrm{Re}\langle Lg, f\rangle - i\,\mathrm{Im}\langle Lg, f\rangle \equiv \overline{\langle Lg, f\rangle} = \langle f, Lg\rangle,$$

což dokazuje hermiteovost operátoru L. □

Definice 12. *Nechť* L *je komplexní operátor a* M_L *jeho definiční obor, tj.* $L : M_L \to \mathbb{C}$. *Nechť* $u \in M_L$, $u \neq 0$ *a* $\lambda \in \mathbb{C}$ *splňují rovnost*

$$Lu = \lambda u.$$

Pak λ *nazveme* vlastním číslem *či* hodnotou *operátoru* L *a* u vlastní funkcí *příslušející tomuto vlastnímu číslu.* Násobností vlastního čísla *rozumíme počet lineárně nezávislých vlastních funkcí příslušejících tomuto vlastnímu číslu. Odpovídající si vlastní číslo a funkci někdy budeme označovat jako dvojici* (λ, u). *Úlohu nalezení vlastních čísel a funkcí daného operátoru budeme zvát jako* vlastní úlohu.

Věta 13. *Nechť K je kompaktní operátor na Banachově prostoru X a σ_P značí množinu jeho vlastních čísel. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ je množina*

$$\sigma_P \cap \{y \in \mathbb{C}, |y| > \varepsilon\}$$

konečná.

Důkaz. Věta známá z funkcionální analýzy, viz [2]. □

Důsledek 14. *Nechť K je kompaktní operátor na Banachově prostoru X. Pak*

(i) množina jeho vlastních čísel je nejvýše spočetná,

(ii) vlastní čísla mají jen konečnou násobnost.

Věta 15. *Buď L hermiteovský operátor na $M_L \subseteq \mathcal{L}_2$. Pak každé dvě vlastní funkce příslušející různým vlastním číslům jsou ortogonální.*

Důkaz. Buďte $(\lambda_1, u_1), (\lambda_2, u_2)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dvě různá řešení vlastního problému $Lu = \lambda u$. Úpravami získáme:

$$\lambda_1 \langle u_1, u_2 \rangle = \langle Lu_1, u_2 \rangle = \langle u_1, Lu_2 \rangle = \lambda_2 \langle u_1, u_2 \rangle,$$

kde jsme využili hermiteovosti operátoru L a reálnosti jeho vlastních čísel. Jelikož $\lambda_1 \neq \lambda_2$, musí nutně být $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$, takže u_1 a u_2 jsou ortogonální. □

Pozorování 16. *Je-li λ vlastní číslo lineárního operátoru L a $u_1, u_2, \ldots, u_k$ jemu příslušející vlastní funkce, pak i libovolná linerní kombinace $u_1, u_2, \ldots, u_k$ je zřejmě vlastní funkcí L.*

Pozitivní operátory

Definice 17. *Buď $G \subseteq \mathbb{R}^n$ oblast, $M_L \subset \mathcal{L}_2(G)$ definiční obor operátoru $L : M_L \to \mathcal{L}_2(G)$ a M_L hustá podmnožina $\mathcal{L}_2(G)$. Lineární operátor L nazveme* pozitivní, *pokud L splňuje*

$$\langle Lf, f \rangle \in [0, \infty)$$

pro každou $f \in M_L$.

Pozn. 18. *Z tvrzení refth:he1 vyplývá, že je-li opetátor pozitivní, je i hermiteovský.*

Tvrzení 19. *Vlastní čísla pozitivního operátoru L jsou nezáporná.*

Důkaz. Buďte (λ, u), $\|u\|_2 = 1$, vlastní číslo a vlastní funkce operátoru L. Pozitivnost L nás vede k

$$0 \leq \langle Lu, u\rangle = \lambda\langle u, u\rangle = \lambda \|u\|_2^2 = \lambda.$$

□

2.4 Integrální hermiteovské operátory

Označení 20. *Je-li K integrální operátor z $\mathcal{L}_2(G)$ s jádrem $\mathcal{K}(x, y)$, je zvykem označovat λ jako vlastní číslo operátoru K a u jako jemu příslušející vlastní funkci, splňují-li*

$$u = \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y)u(y)\, dy \equiv \lambda K u.$$

Toto označení budeme do konce kapitoly používat.

Lemma 21. *Buď K integrální operátor a (μ, u) vlastní číslo a funkce operátoru $K^p \equiv \underbrace{K \circ K \circ \cdots \circ K}_{p}$. Pak alespoň jeden z kořenů rovnice $\lambda^p = \mu$ je vlastním číslem operátoru K.*

Důkaz. Pro $\mu = 0$ je tvrzení zřejmé, uvažujme tedy $\mu \neq 0$. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ značí kořeny rovnice $\lambda^p = \mu$. Nejprve dokážeme algebraickou identitu

$$(-1)^{p-1}(\mu z^p - 1) = (\lambda_1 z - 1)(\lambda_2 z - 1)\ldots(\lambda_p z - 1),\ z \in \mathbb{C}.$$

Rozmyslíme si, jak vypadá výraz na pravé straně po roznásobení všech členů: Pro každé $k \in \{1, 2\ldots, p-1\}$ bude u z^k koeficient 0, vzhledem k symetrickému rozložení kořenů rovnice $\lambda^p = \mu$ v komplexní rovině. Jak bude vypadat koeficient u z^p? Předpokládejme $\mu = |\mu|\, e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Pak

$$\lambda_k = \sqrt[p]{|\mu|}e^{i\frac{\varphi}{p}+2\pi i\frac{k}{p}},\ k = 0, 1, \ldots, p-1$$

a

$$\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p = |\mu|\, e^{i\varphi+\frac{2\pi i}{p}\sum_{k=0}^{p-1} k} = \mu e^{\frac{2\pi i}{p}\frac{p(p-1)}{2}} = \mu(-1)^{p-1}.$$

U z^0 jasně stojí koeficient $(-1)^p$, čímž jsme identitu dokázali.

Jejím důsledkem je operátorová identita, která pro vlastní funkci u dává

$$(\mu K^p - I)u = (-1)^{p-1}(\lambda_1 K - I)(\lambda_2 K - I)\dots(\lambda_p K - I)u = 0,$$

kde I značí operátor identity. Pokud položíme

$$v = (\lambda_2 K - I)\dots(\lambda_p K - I)u,$$

a $v \neq 0$, bude $(\lambda_1 K - I)v = 0$, tedy λ_1 je vlastní číslo operátoru K. Pokud $v = 0$, bude

$$(\lambda_2 K - I)\dots(\lambda_p K - I)u = 0.$$

Nyní stejnou úvahou můžeme shledat, že buď λ_2 je vlastní číslo K, anebo

$$(\lambda_3 K - I)\dots(\lambda_p K - I)u = 0,$$

atd. Protože u je, jakožto vlastní funkce K^p, nenulová, musí alespoň jedno z čísel $\lambda_i,\ i = 1\dots p$, být vlastním číslem K. $\square$

Věta 22. *Buď G omezená oblast. Pak hermiteovský integrální operátor K definovaný na $\mathcal{L}_2(G)$ s nenulovým jádrem $\mathcal{K}(x,y)$ má alespoň jedno vlastní číslo. Navíc existuje vlastní číslo λ_0 s nejmenší absolutní hodnotou a splňuje*

$$\frac{1}{|\lambda_0|} = \sup_{f\in\mathcal{L}_2(G), f\neq 0} \frac{\|Kf\|_2}{\|f\|_2}. \tag{2.4}$$

Důkaz. Označme ν normu operátoru K:

$$\nu := \sup_{\|f\|_2=1} \|Kf\|_2\,,\ f \in \mathcal{L}_2(G).$$

Podle (2.3) je $MV \geq \|Kf\|_2 \geq \nu$. Zřejmě $\nu \geq 0$. Ukažme, že $\nu > 0$: Pokud by $\nu = 0$, tak by $\|Kf\|_2 = 0$ pro každé $f \in \mathcal{L}_2(G)$ a tedy i $Kf = 0$. Po rozepsání této rovnosti

$$0 = \int_G \mathcal{K}(x,y) f(y)\, dy$$

snadno nahlédneme, že $\mathcal{K}(x,y) = 0$, což je v rozporu s předpokladem věty.

Podle definice suprema množiny reálných čísel musí existovat posloupnost funkcí $\{f_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathcal{L}_2(G),\ \|f_k\|_2 = 1$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, splňující $\|Kf_k\|_2 \to \nu, \quad k \to \infty$.

Připravíme si nerovnost

$$\left\|K^2 f\right\|_2 \equiv \left\|K\left(\frac{Kf}{\|Kf\|_2}\right)\right\|_2 \|Kf\|_2 \le \nu \|Kf\|_2, \ f \in \mathcal{L}_2(G).$$

S využitím těchto faktů a hermiteovosti K ověříme, že

$$\left\|K^2 f_k - \nu^2 f_k\right\|_2 \to 0, \ k \to \infty : \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\left\|K^2 f_k - \nu^2 f_k\right\|_2^2 &= \langle K^2 f_k - \nu^2 f_k, K^2 f_k - \nu^2 f_k\rangle = \langle K^2 f_k, K^2 f_k\rangle \\ &+ \nu^4\langle f_k, f_k\rangle - \nu^2\langle f_k, K^2 f_k\rangle - \nu^2\langle K^2 f_k, f_k\rangle \\ &= \left\|K^2 f_k\right\|_2^2 + \nu^4 - 2\nu^2\langle K f_k, K f_k\rangle \le \nu^2 \|K f_k\|_2^2 + \nu^4 \\ &- 2\nu^2 \|K f_k\|_2^2 = \nu^4 - \nu^2 \|K f_k\|_2^2 \to 0, \ k \to \infty.\end{aligned}$$

Protože je dle Věty 8 K kompaktní, zobrazuje omezenou množinu $\{f_k\} \subset \mathcal{L}_2(G)$ na kompaktní množinu $\{K f_k | k = 0, 1, 2 \dots\}$ v $\mathcal{C}(\overline{G})$. Z posloupnosti $\{K f_k\}$ lze tedy vybrat podposloupnost $\{\psi_i\} = \{K f_{k_i}\}$ konvergující v $\mathcal{C}(\overline{G})$ k jisté funkci ψ, tj. $\|\psi - \psi_i\|_{max} \to 0, \ i \to \infty$. S využitím nerovností (2.1) a (2.2) a vztahu (2.5) shledáváme, že

$$\begin{aligned}&\left\|K^2\psi - \nu^2\psi\right\|_{max} \le \left\|K^2(\psi - \psi_i)\right\|_{max} + \nu^2 \|\psi - \psi_i\|_{max} + \left\|K^2\psi_i - \nu^2\psi_i\right\|_{max} \\ &\le MV \|K(\psi - \psi_i)\|_{max} + \nu^2 \|\psi - \psi_i\|_{max} + \left\|K(K^2 f_{k_i} - \nu^2 f_{k_i})\right\|_{max} \\ &\le (M^2V^2 + \nu^2) \|\psi - \psi_i\|_{max} + M\sqrt{V} \left\|K^2 f_{k_i} - \nu^2 f_{k_i}\right\|_2 \to 0, \ i \to \infty,\end{aligned}$$

neboli $K^2\psi = \nu^2\psi$.

Podaří-li se nám dokázat, že $\psi \ne 0$, nalezli jsme vlastní číslo a vlastní funkci operátoru K^2. Ale dle (2.5) $\|K\psi_i\|_2 \to \nu^2$ a navíc máme $\|K\psi_i\|_2 \to \|K\psi\|_2, \ i \to \infty$. Tedy, díky jednoznačnosti limity, $\|K\psi\|_2 = \nu^2 > 0$ a opravdu $\psi \ne 0$. Dle Lemmatu 21 alespoň jedno z čísel $\pm\frac{1}{\nu}$ je vlastní číslo operátoru K. Označme jej λ_0.

Zbývá ověřit (2.4). Buďte (λ', φ') vlastní číslo a odpovídající vlastní funkce operátoru K, tj. $\lambda' K\varphi' = \varphi'$. Pak

$$\frac{1}{|\lambda_0|} = |\pm\nu| = \sup_{f \in \mathcal{L}_2(G)} \frac{\|Kf\|_2}{\|f\|_2} \ge \frac{\|K\varphi'\|_2}{\|\varphi'\|_2} = \frac{1}{|\lambda'|},$$

takže $|\lambda_0| \le |\lambda'|$. □

Důsledek 23. *Nemá-li hermiteovský integrální operátor na $\mathcal{L}_2(G)$ se spojitým jádrem na omezené oblasti žádné vlastní číslo, je nulový.*

Odvoďme několik vztahů, které nám později přijdou vhod. Buď G omezená a $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ nenulová vlastní čísla operátoru K seřazené vzestupně podle velikosti absolutní hodnoty (případ operátoru s konečně mnoha vlastními čísly si čtenář velmi snadno může rozmyslet sám) a $u_0, u_1, u_2, \dots$ jim odpovídající vlastní funkce K tvořící ortonormální systém. Je-li nějaké vlastní číslo k-násobné, ať se v posloupnosti vyskytne k-krát.

Zaveďme funkci

$$\mathcal{K}^p(x,y) := \mathcal{K}(x,y) - \sum_{i=0}^{p} \frac{u_i(x)\overline{u_i(y)}}{\lambda_i}$$

a jí odpovídající integrální operátor

$$[K^{(p)}(f)](x) := \int_G f(y)\mathcal{K}(x,y)dy - \sum_{i=0}^{p} \frac{\langle f, u_i \rangle}{\lambda_i} u_i(x) \ , \ x \in [0,l] \ , \ f \in \mathcal{L}_2(G).$$

Ukážeme, že $K^{(p)}$ *má vlastní čísla* $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots$ *a vlastní funkce* u_{p+1}, $u_{p+2}, \dots$ *a jiné ne.*

Vskutku, nechme působit $K^{(p)}$ na $u_j, \ j \geq p+1$:

$$K^{(p)}u_j = Ku_j - \sum_{i=0}^{p} \frac{\langle u_j, u_i \rangle}{\lambda_i} u_i = Ku_j = \frac{1}{\lambda_j} u_j,$$

tedy λ_j a u_j jsou vlastní číslo a vlastní funkce $K^{(p)}$.

Nechť naopak ν a v jsou vlastní číslo a odpovídající vlastní funkce $K^{(p)}$, tj:

$$v = \nu K^{(p)} v = \nu K v - \nu \sum_{i=0}^{p} \frac{\langle v, u_i \rangle}{\lambda_i} u_i. \tag{2.6}$$

Upravme součin $\langle v, u_j \rangle, \ j \in \{0, 1, \dots p\}$:

$$\begin{aligned}
\langle v, u_j \rangle &= \langle \nu K v - \nu \sum_{i=0}^{p} \frac{\langle v, u_i \rangle}{\lambda_i} u_i, u_j \rangle \\
&= \nu \langle Kv, u_j \rangle - \nu \sum_{i=0}^{p} \frac{\langle v, u_i \rangle \langle u_i, u_j \rangle}{\lambda_i} \\
&= \nu \langle v, Ku_j \rangle - \nu \sum_{i=0}^{p} \frac{\langle v, u_i \rangle \delta_{ij}}{\lambda_i} \\
&= \frac{\nu}{\lambda_j} \langle v, u_j \rangle - \frac{\nu}{\lambda_j} \langle v, u_j \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Využitím tohoto faktu v (2.6) dostáváme $v = \nu K v$, tj. v je vlastní funkce operátoru K. Protože je v ortogonální s $u_i, i = 0, 2, \ldots, p$, musí se pro nějaké $j \geq p+1$ $v = cu_j$, $c \in \mathbb{C}$, tudíž i $\nu = \lambda_j$.

Protože je λ_{p+1} nejmenší vlastní číslo operátoru $K^{(p)}$ platí dle (2.4) pro každou $f \in \mathcal{L}_2(G)$

$$\frac{\|f\|_2}{|\lambda_{p+1}|} \geq \left\|K^{(p)} f\right\|_2 \equiv \left\|Kf - \sum_{i=0}^{p} \frac{\langle f, u_i\rangle}{\lambda_i} u_i(x)\right\|_2 . \tag{2.7}$$

Má-li operátor K konečně mnoho vlastních čísel $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_N$, nemá $K^{(N)}$ žádná. Podle Důsledku 23 je funkce $\mathcal{K}^N(x, y)$ nulová, tedy dle definice $\mathcal{K}^N$ dostáváme

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{i=0}^{N} \frac{u_i(x)\overline{u_i(y)}}{\lambda_i}. \tag{2.8}$$

Připomeňme **Besselovu nerovnost**: *Je-li systém funkcí* $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots$ *ortonormální v* $\mathcal{L}_2(G)$ *a* $h \in \mathcal{L}_2(G)$*, pak platí*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle h, \varphi_k\rangle|^2 \leq \|h\|_2^2 . \tag{2.9}$$

Důkaz např. v [3].

Ukážeme, že

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|u_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \leq \int_G |\mathcal{K}(x, y)|^2 \, dy \quad , x \in \overline{G}. \tag{2.10}$$

Opravdu, volme pevně $x \in \overline{G}$. Přepišme součin

$$\langle \overline{\mathcal{K}(x, y)}, u_k(y)\rangle = \int_G \overline{\mathcal{K}(x, y) u_k(y)} \, dy = \overline{K u_k(x)} = \frac{1}{\lambda_k} \overline{u_k(x)}.$$

Protože jsou $u_k(y)$ ortonormální, lze použít Besselovu nerovnost (2.9) a dostáváme (2.10).

Věta 24 (Hilbert-Schmidt)**.** *Nechť* $f \in \mathcal{C}(\overline{G})$, K *je integrální hermiteovský operátor se stejnoměrně spojitým jádrem a nechť existuje* $h \in \mathcal{L}_2(G)$ *tak, že* $f = Kh$*. Buďte* $(\lambda_0, \varphi_0), (\lambda_1, \varphi_1), (\lambda_2, \varphi_2), \ldots$ *odpovídající si vlastní čísla a* *vlastní funkce operátoru K seřazené vzestupně dle velikosti absolutní hodnoty vlastního čísla. Pak*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle h,\varphi_k\rangle}{\lambda_k}\varphi_k(x), \tag{2.11}$$

přičemž řada konverguje stejnoměrně na $\overline{G}$.

Důkaz. Platí

$$\frac{\langle h,\varphi_k\rangle}{\lambda_k}=\langle h,K\varphi_k\rangle=\langle Kh,\varphi_k\rangle=\langle f,\varphi_k\rangle.$$

Již dříve jsme zjistili (vztah (2.8)), že má-li K jen konečně mnoho (označme N) vlastních čísel je

$$f(x)=Kh=\sum_{k=0}^{N}\frac{\langle h,\varphi_k\rangle}{\lambda_k}\varphi_k(x),$$

čímž je důkaz pro tento případ hotov.

Nechť naopak je množina vlastních čísel operátoru K nekonečná. Ověříme, že rozvoj f do řady (2.11) k této funkci skutečně konverguje. S využitím vztahu (2.7) a Věty 13 je

$$\left\|f-\sum_{k=0}^{p}\langle f,\varphi_k\rangle\varphi_k\right\|_2=\left\|Kh-\sum_{k=0}^{p}\frac{\langle h,\varphi_k\rangle}{\lambda_k}\varphi_k\right\|_2\le\frac{\|h\|_2}{|\lambda_{p+1}|}\to 0,\ p\to\infty.$$

Zbývá ukázat stejnoměrnou konvergenci. K tomu použijeme Bolzano-Cauchyho podmínku. Zvolme libovolně pevné $x\in\overline{G}$ a využijeme Cauchy-Buňakovského nerovnost a vztah (2.10):

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q}|\langle h,\varphi_k\rangle|\left|\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|&\le\left[\sum_{k=p}^{q}|\langle h,\varphi_k\rangle|^2\right]^{1/2}\left[\sum_{k=p}^{q}\frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2}\right]^{1/2}\\&\le\left[\sum_{k=p}^{q}|\langle h,\varphi_k\rangle|^2\right]^{1/2}\left[\int_G|\mathcal{K}(x,y)|^2\,dy\right]^{1/2}\le M\sqrt{V}\left[\sum_{k=p}^{q}|\langle h,\varphi_k\rangle|^2\right]^{1/2}.\end{aligned}$$

Z Besselovy nerovnosti víme, že $\sum_{k=0}^{\infty}|\langle h,\varphi_k\rangle|^2\le\|h\|_2^2$, tedy poslední člen se pro $p,q\to\infty$ blíží 0. Tím jsme prokázali i stejnoměrnou konvergenci. □

Kapitola 3

Sturmův-Liouvilleův problém

Definice 25. *Řešme obyčenou diferenciální rovnici*

$$-(pu')' + qu = \lambda u \tag{3.1}$$

na intervalu $(0, l)$, $l > 0$, *s okrajovou podmínkou*

$$\begin{aligned} h_1 u(0) - h_2 u'(0) &= 0 \\ H_1 u(l) + H_2 u'(l) &= 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

kde p *a* q *jsou reálné funkce,*

$$p \in \mathcal{C}^1[0, l],\ \ q \in \mathcal{C}[0, l],\ \ p > 0,\ \ q \geq 0$$

a h_1, h_2, H_1, H_2 *jsou zadaná reálná čísla splňující*

$$\begin{aligned} &h_1 \geq 0,\ \ h_2 \geq 0,\ \ H_1 \geq 0,\ \ H_2 \geq 0\ \ a \\ &h_1 + h_2 > 0,\ \ H_1 + H_2 > 0. \end{aligned}$$

Jako řešení označíme všechny dvojice (λ, u) *splňující* (3.1) *a* (3.2) *v každém bodě* $(0, l)$, *pro něž je*

$$u \in \mathcal{C}^2(0, l) \cap \mathcal{C}^1[0, l] \wedge u'' \in \mathcal{L}_2(0, l)$$

funkce s komplexními hodnotami. Tuto úlohu nazveme Sturmův-Liouvilleův problém.

Definice 26. *Zaveďme diferenciální operátor* L *jako*

$$Lu := -(pu')' + qu,$$

definovaný na množině

$$M_L := \{u : (0,l) \to \mathbb{C}|\ u \in \mathcal{C}^2(0,l) \cap \mathcal{C}^1[0,l] \wedge u'' \in \mathcal{L}_2(0,l)\}.$$

Rovnici (3.1) lze s jeho pomocí zapsat jako

$$Lu = \lambda u,$$

což je vlastní úloha operátoru L.

Lemma 27. *L je pozitivní operátor na množině funkcí splňujících okrajové podmínky* (3.2).

Důkaz. Snadno ověříme pomocí integrace per partes a využitím okrajových podmínek (3.2), že

$$\langle Lf, f\rangle = \int_0^l \left(p\,|f'|^2 + q\,|f|^2\right)\,dx + \frac{h_1}{h_2}p(0)\,|f(0)|^2 + \frac{H_1}{H_2}p(l)\,|f(l)|^2 \geq 0.$$

Jsou-li H_2 nebo $h_2 = 0$, odpovídající člen z posledních dvou vypadne. Tím jsme zjistili, že L je pozitivní operátor. □

Budeme se snažit převést Sturm-Liouvilleovu úlohu na nalezení vlastních čísel a vlastních funkcí nějakého integrálního operátoru. Za tím účelem nejprve najdeme Greenovu funkci úlohy. Nejprve vyslovme

Lemma 28. *$\lambda_0 = 0$ je vlastní hodnota operátoru L právě tehdy, když $q \equiv 0$ a $h_1 = 0$ a $H_1 = 0$. Navíc vlastní číslo λ_0 je jenonásobné a odpovídá vlastní funkci $u_0 = konst$.*

Důkaz. Nechť $\lambda_0 = 0$ je vlastní číslo operátoru L a u_0 odpovídající vlastní funkce, tj. $Lu_0 = 0$. Jak jsme již zjistili, je

$$0 = \langle Lu_0, u_0\rangle = \int_0^l \left(p\,|u_0'|^2 + q\,|u_0|^2\right)\,dx + \frac{h_1}{h_2}p(0)\,|u_0(0)|^2 + \frac{H_1}{H_2}p(l)\,|u_0(l)|^2.$$

S přihlédnutím k okrajovým podmínkám (3.2) vidíme, že musí být (protože $u_0 = 0$ za řešení nepovažujeme) $q = 0$ a $u_0' = 0$, tedy $u_0 = konst \neq 0$. To podle okrajových podmínek (3.2) dále znamená, že i $h_1 = 0$ a $H_1 = 0$. Jelikož jen $u_0 = konst$ řeší úlohu, je λ_0 jednonásobné vlastní číslo.

Ukažme opačnou implikaci: Je-li $h_1 = H_1 = 0$ a $q = 0$, musí být podle okrajových podmínek (3.2) $H_2 > 0$ a $h_2 > 0$. Rovnice (3.1) a (3.2) dostávají po dosazení $\lambda_0 = 0$ tvar

$$-(pu')' = 0,$$
$$u'(0) = 0, \quad u'(l) = 0$$

a řeší je $u = konst$. Tedy λ_0 je vlastní číslo operátoru L. $\square$

Předpokládejme prozatím, že $\lambda = 0$ není vlastní číslo operátoru L. Z právě dokázaného lemmatu vyplývá, že $q \not\equiv 0$, nebo $h_1 \neq 0$, nebo $H_1 \neq 0$.

Zabývejme se nyní vyřešením rovnice

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = f, \tag{3.3}$$

kde $u \in M_L$ a splňuje okrajovou podmínku (3.2) a $f \in \mathcal{C}^1(0,l) \cap \mathcal{L}_2(0,l)$ je komplexní funkce. Protože $\lambda = 0$ není vlastní číslo, nemůže mít homogenní rovnice $Lu = 0$ řešení a tudíž z teorie obyčejných diferenciálních rovnic dostáváme (viz [4]), že řešení (3.3), (3.2) existuje a je jednoznačné. Tvar řešení získáme variací konstant.

Je známo (viz [4]), že existují dvě lineárně nezávislá řešení v_1 a v_2, obě třídy $\mathcal{C}^2[0,l]$, rovnice

$$Lv_i = 0, \ i = 1, 2 \tag{3.4}$$

splňující okrajové podmínky

$$h_1 v_1(0) - h_2 v_1'(0) = 0, \quad H_1 v_2(l) + H_2 v_2'(l) = 0. \tag{3.5}$$

Díky lineární nezávislosti v_1 a v_2 je wronskián

$$w(x) = \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{vmatrix}$$

nenulový pro všechna $x \in (0,l)$. Řešení u nehomogenní rovnice (3.3) lze předpokládat ve tvaru

$$u(x) = C_1(x)v_1(x) + C_2(x)v_2(x). \tag{3.6}$$

Podle metody variace konstant funkce $C_1(x)$ a $C_2(x)$ splňují

$$C_1'v_1 + C_2'v_2 = 0 \quad \text{a} \quad C_1'v_1' + C_2'v_2' = -\frac{f}{p}. \tag{3.7}$$

Tuto soustavu rovnic pro $C_1(x)$ a $C_2(x)$ vyřešíme pomocí Cramerova pravidla a použijeme přitom
Ostrogradského-Liouvilleovu identitu

$$p(x)w(x) = p(0)w(0) \text{ pro } x \in [0, l],$$

kterou lze snadno ověřit zderivováním. Získáváme

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= \frac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} 0 & v_2(x) \\ -\frac{f(x)}{p(x)} & v_2'(x) \end{vmatrix} = \frac{f(x)v_2(x)}{p(0)w(0)}, \\ C_2'(x) &= \frac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} v_1(x) & 0 \\ v_1'(x) & -\frac{f(x)}{p(x)} \end{vmatrix} = -\frac{f(x)v_1(x)}{p(0)w(0)}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Jaké nároky musí C_1 a C_2 splňovat, aby platily okrajové podmínky (3.5) ?

$$\begin{aligned} 0 &= h_1u(0) - h_2u'(0) \\ &= h_1[C_1(0)v_1(0) + C_2(0)v_2(0)] - h_2[C_1(0)v_1'(0) + C_1'(0)v_1(0) \\ &\quad + C_2(0)v_2'(0) + C_2'(0)v_2(0)] \\ &= C_1(0)[h_1v_1(0) - h_2v_1'(0)] + C_2(0)[h_1v_2(0) - h_2v_2'(0)] \\ &= C_2(0)[h_1v_2(0) - h_2v_2'(0)]. \end{aligned}$$

Kdybychom předpokládali, že $C_2(0) \neq 0$, dal by tento vztah, spolu s (3.5) soustavu rovnic

$$\begin{aligned} h_1v_2(0) - h_2v_2'(0) = 0 \\ h_1v_1(0) - h_2v_1'(0) = 0, \end{aligned}$$

z níž plyne spor s lineární nezávislostí v_1 a v_2. Musí tedy být $C_2(0) = 0$. Podobným výpočtem pro $x = l$ bychom zjistili, že $C_1(l) = 0$. Díky tomu můžeme psát

$$C_1(x) = C_1(l) - \int_x^l C_1'(y)\,dy = -\frac{1}{p(0)w(0)} \int_x^l f(y)v_2(y)\,dy,$$

$$C_2(x) = C_2(0) + \int_0^x C_2'(y)\,dy = -\frac{1}{p(0)w(0)} \int_0^x f(y)v_1(y)\,dy.$$

Tím dospíváme k řešení úlohy (3.3), (3.2)

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{p(0)w(0)} \left(v_2(x) \int_0^x f(y)v_1(y)\,dy + v_1(x) \int_x^l f(y)v_2(y)\,dy \right) \\ &= \int_0^l \mathcal{G}(x, y)f(y)\,dy, \end{aligned} \tag{3.9}$$

kde funkce

$$\mathcal{G}(x,y) := \frac{-1}{p(0)w(0)} \begin{cases} v_1(x)v_2(y) & \text{pro } 0 \le x \le y \le l \\ v_2(x)v_1(y) & \text{pro } 0 \le y \le x \le l \end{cases}$$

se nazývá Greenova funkce úlohy (3.3), (3.2). Povšimněme si, že je, jakožto řešení úlohy (3.4), (3.5), reálná.

Vlastnosti Greenovy funkce $\mathcal{G}$

Věta 29. *(i) $\mathcal{G}$ je spojitá na $[0,l]^2$ a je třídy $\mathcal{C}^2$ na trojúhelnících $0 \le x \le y \le l$ a na $0 \le y \le x \le l$.*

(ii) Na úsečce $y = x,\ x \in [0,l]$, platí

$$\lim_{x\to y^+} \frac{\partial \mathcal{G}(x,y)}{\partial x} - \lim_{x\to y^-} \frac{\partial \mathcal{G}(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{p(y)} \equiv -\frac{1}{p(x)}.$$

(iii) Integrální operátor G,

$$Gf(x) := \int_0^l \mathcal{G}(x,y) f(y)\, dy,\ f \in M_L,$$

je hermiteovský.

Důkaz. (i) Zřejmé.

(ii) Volme $y \in (0,l)$ pevně. Je

$$\begin{aligned} \text{pro } x > y \quad \lim_{x\to y^+} \frac{\partial \mathcal{G}(x,y)}{\partial x} &= \lim_{x\to y^+} -\frac{1}{p(0)w(0)} v_2'(x)|_{x=y} v_1(y) \\ &= -\frac{1}{p(0)w(0)} v_2'(x) v_1(x), \\ \text{pro } x < y \quad \lim_{x\to y^-} \frac{\partial \mathcal{G}(x,y)}{\partial x} &= \lim_{x\to y^-} -\frac{1}{p(0)w(0)} v_1'(x)|_{x=y} v_2(y) \\ &= -\frac{1}{p(0)w(0)} v_1'(x) v_2(x). \end{aligned}$$

Odečtením výrazů dostaneme hledaný rozdíl limit:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{p(0)w(0)} \left(v_2'(x)v_1(x) - v_1'(x)v_2(x)\right) = -\frac{w(x)}{p(0)w(0)} \\ &= -\frac{w(x)p(x)}{p(0)w(0)} \frac{1}{p(x)} = \frac{-1}{p(x)}. \end{aligned}$$

(iii) Ověříme opět výpočtem. Pro $f, g \in M_L$ máme

$$\langle Gf, g\rangle = \int_0^l [Gf](x)\overline{g(x)}\, dx = \int_0^l \overline{g(x)} \int_0^l \mathcal{G}(x,y) f(y)\, dy\, dx.$$

Nyní jsme oprávněni použít Fubiniho větu, protože jsou $\overline{g(x)}$, $f(y)$ i $\mathcal{G}(x,y)$ spojité na $[0,l]^2$ a tudíž leží jejich součin v $\mathcal{L}_1[0,l]^2$.

$$\int_0^l \int_0^l \overline{g(x)}\mathcal{G}(x,y) f(y)\, dy\, dx = \int_0^l f(y) \int_0^l \mathcal{G}(x,y)\overline{g(x)}\, dx\, dy.$$

Využijeme reálnosti $\mathcal{G}$ a její symetričnosti vůči záměně x a y.

$$\int_0^l f(y) \overline{\int_0^l \mathcal{G}(y,x) g(x)\, dx}\, dy = \langle f, Gg\rangle.$$

□

Převedení Sturmova-Liouvilleova problému na integrální rovnici

Věta 30. *Dvojice* (λ, u), $u \in M_L$, $\lambda \neq 0$ *řeší*

$$Lu = \lambda u + f,\ \ f \in \mathcal{C}(0,l) \cap \mathcal{L}_2(0,l), \tag{3.10}$$

právě tehdy, když (λ, u), $u \in \mathcal{C}[0,l]$ *řeší integrální rovnici*

$$u(x) = \lambda \int_0^l \mathcal{G}(x,y) u(y)\, dy + \int_0^l \mathcal{G}(x,y) f(y)\, dy. \tag{3.11}$$

Důkaz. Že z (3.10) plyne (3.11) jsme již ukázali, stačí dosadit do (3.9) za f $\lambda u + f$. Dostaneme

$$u(x) = \int_0^l \mathcal{G}(x,y)[\lambda u(y) + f(x)]\, dy.$$

Ukažme opačnou implikaci. Nechť (v, λ), $v \in \mathcal{C}[0,l]$ splňuje (3.11), tedy

$$v(x) = \int_0^l \mathcal{G}(x,y)[\lambda v(y) + f(y)]\, dy$$

Výraz na pravé straně bychom dostali, kdybychom řešili úlohu

$$Lu = \lambda v + f$$

pro u, jejíž řešení je jednoznačné (viz odstavec mezi (3.3) a (3.4)). Tím pádem $v(x) = u(x)$ a $v \in M_L$.

□

Použitím této věty s $f \equiv 0$ dostaneme ekvivalentní vyjádření Sturm-Liouvilleovy úlohy

$$u(x) = \lambda \int_0^l \mathcal{G}(x,y)u(y)\,dy, \tag{3.12}$$

za předpokladu $\lambda \neq 0$.

Dalším ekvivalentním přeformulováním Sturm-Liouvilleovy úlohy se zbavíme podmínky nenulovosti vlastního čísla, která bude nahrazena podmínkou $\lambda \neq -1$. Uvažme úlohu

$$Nu := -(pu')' + (q+1)u = \mu u \tag{3.13}$$

s okrajovou podmínkou (3.2), kde μ je nenulová konstanta. Pozorujeme, že definiční obor operátoru N $M_N = M_L$. Tudíž je to problém ekvivalentní úloze (3.1), (3.2) s $\lambda = \mu - 1$. Označíme-li $\mathcal{G}_N$ Greenovu funkci operátoru N, platí pro řešení

$$u(x) = \mu \int_0^l \mathcal{G}_N(x,y)u(y)\,dy. \tag{3.14}$$

Podmínka $\lambda \neq -1$ pro nás není omezující, neboť již víme, že L je pozitivní operátor.

Symbolem G_N označíme integrální operátor s jádrem $\mathcal{G}_N$, tj.

$$[G_N f](x) = \int_0^l \mathcal{G}_N(x,y)f(y)dy, \ \ f \in M_N.$$

G_N je hermiteovský.

Vlastnosti řešení Sturm-Liouvilleovy úlohy

Věta 31. *Definujme operátor L jako*

$$Lu = -(pu')' + qu$$

na definičním oboru

$$\mathcal{D}(L) = \{u \in M_L : u \text{ splňuje podmínku } (3.2)\}$$

Pro jeho vlastní čísla platí následující:

(i) Každé vlastní číslo má násobnost 1.

(ii) Každé vlastní číslo je nezáporné.

(iii) Každé dvě lineárně nezávislé vlastní funkce operátoru L jsou ortogonální.

(iv) Množina vlastních čísel je nekonečná spočetná. Seřadíme-li vlastní čísla do posloupnosti $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ je $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$.

(v) Pro každou vlastní funkci u operátoru L existuje reálná vlastní funkce u_r tak, že $u = cu_r,\ c \in \mathbb{C}$.

(vi) Každá vlastní funkce operátoru L je třídy $\mathcal{C}^2[0,l]$.

Důkaz. (i) Nechť existují dvě funkce φ_1 a φ_2 příslušící vlastnímu číslu λ_0. Podle okrajové podmínky (3.2) musí v $x = 0$ splňovat

$$h_1\varphi_1(0) - h_2\varphi_1'(0) = 0 \quad \text{a}$$
$$h_1\varphi_2(0) - h_2\varphi_2'(0) = 0\ .$$

Když se na tyto rovnice podíváme jako na soustavu rovnic pro h_1 a h_2 dostaneme, že buď jsou h_1 a h_2 obě nulová, což je ve sporu s podmínkou $h_1 + h_2 > 0$, anebo je determinant soustavy

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(0) & -\varphi_1'(0) \\ \varphi_2(0) & -\varphi_2'(0) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_2(0) \\ \varphi_1'(0) & \varphi_2'(0) \end{vmatrix} = 0.$$

Tím dostáváme spor s lineární nezávislostí $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$ (viz [4]).

(ii) Plyne z toho, že L je pozitivní operátor.

(iii) Plyne z přeformulování Sturm-Liouvilleovy úlohy (3.14) a z toho, že G_N je hermiteovský operátor.

(iv) Spočetnost množiny vlastních čísel plyne z přeformulování Sturm-Liouvilleovy úlohy na tvar (3.14) a z Vět 14 a 8.

Nekonečnost množiny vlastních čísel dokážeme sporem: předpokládejme, že je konečná. Uspořádejme tedy její prvky podle velikosti do posloupnosti $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$ a vlastní funkce do posloupnosti $u_1, u_2, \ldots, u_N$ v pořadí jejich vlastních hodnot tak, aby tvořily ortonormální systém. Potom jsou i u_i a μ_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, vlastní čísla a funkce operátoru G_N, tj. $G_N u_i = \frac{1}{\mu_i} u_i$, navíc G_N je hermiteovský.

Tím docházíme ke sporu. Kdyby množina vlastních čísel operátoru L byla konečná, byla by podle (2.8) funkce

$$\mathcal{G}_N(x, y) = \sum_{i=0}^{N} \frac{u_i(x)\overline{u_i(y)}}{\mu_i},$$

jakožto konečná lineární kombinace funkcí $u_i(x) \in \mathcal{C}^2[0, l], i = 1, 2, \ldots, N,$ také třídy $\mathcal{C}^2[0, l]$, což už víme, že není.

(v) Jistě $u = u_r + iu_i$, kde u_r a u_i značí postupně reálnou a imaginární část u. Protože je operátor linearní, platí $Lu = Lu_r + iLu_i = \lambda u_r + i\lambda u_i$, kde λ je vlastní číslo příslušné funkci u. Tedy $Lu_r = \lambda u_r$ a $Lu_i = \lambda u_i$, takže u_r a u_i představují vlastní funkce příslušející témuž vlastnímu číslu. Z bodu (i) dostáváme, že musí být u_r a u_i lineárně závislé.

(vi) Plyne z definice L a M_L.

□

Věta 32 (Steklov)**.** *Libovolná funkce f z množiny M_L může být zapsána ve tvaru stejnoměrně konvergentní Fourierovy řady*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, u_k \rangle u_k(x),$$

kde $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ označuje maximální ortonormální systém složený z funkcí z řešení Sturm-Liouvilleovy úlohy.

Důkaz. Aplikujme operátor N definovaný formulí (3.13) na funkci $f \in M_L$:

$$Nf \equiv Lf + f =: h.$$

Funkce $h \in \mathcal{C}(0, l) \cap \mathcal{L}_2(0, l)$ (z definice L). Protože $M_L = M_N$ je f i řešením rovnice

$$Nf = h, \quad f \in M_N.$$

Jak jsme již dříve zjistili (rovnice (3.9)) je toto řešení dáno

$$f(x) = \int_0^l \mathcal{G}_N(x, y) h(y)\, dy.$$

Nyní stačí použít vztah (3.14), hermiteovost N, Hilbert-Schmidtovu větu 24 a důkaz je hotov. □

Pozn. 33. *Lze ukázat, že z množiny vlastních funkcí* L *lze vybrat ortonormální bázi* $\mathcal{L}_2(0, l)$*, viz [1].*

Kapitola 4

Příklad

Zkusme vyřešit následující Sturm-Liovilleův problém:

$$-\alpha u'' + \beta u = \lambda u, \quad \alpha > 0, \beta \geq 0,$$

kde α, β jsou konstanty, na intervalu $(0,1)$ s okrajovou podmínkou $h_1 = H_1 = 1$ a $h_2 = H_2 = 0$, tedy

$$u(0) = 0,$$
$$u(1) = 0.$$

Po vydělení rovnice α a označení $a = \beta/\alpha \geq 0$ a $b = 1/\alpha > 0$ obdržíme

$$-u'' + au = b\lambda u.$$

Tato rovnice má řešení

a) $u = C_1 e^{\sqrt{a-b\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{a-b\lambda}x}, \qquad a - b\lambda > 0$

b) $u = C_1 + C_2 x, \qquad a - b\lambda = 0$

c) $u = C_1 \sin\sqrt{b\lambda - a}x + C_2 \cos\sqrt{b\lambda - a}x, \qquad a - b\lambda < 0$

Po přihlédnutí k okrajovým podmínkám se snadno přesvědčíme, že v případech a) a b) dostaneme jen nulová řešení. V případě c) $C_2 = 0$ a navíc musí platit podmínka $\sqrt{b\lambda - a} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Řešením úlohy tedy jsou vlastní funkce

$$u = C_1 \sin(k\pi x)$$

a vlastní čísla

$$\lambda = \frac{1}{b}[(k\pi)^2 + a] = \pi^2 k^2 \alpha + \beta.$$

Po aplikaci normovací podmínky

$$1 = \int_0^1 \left|u^2\right| dx = \int_0^1 [|C_1| \sin(\pi k x)]^2 dx = \frac{|C_1|^2}{2}$$

získáme známou reálnou ortonormální bázi prostoru $\mathcal{L}_2(0,1)$

$$u_k(x) = \sqrt{2} \sin(\pi k x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Literatura

[1] Vladimirov V. S. (1981): Equations of Mathematical Physics. Nauka, Moskva, 1981, [anglický překlad: Mir Publisher, Moskva, 1984].

[2] Lukeš J. (2005): Úvod do funkcionální analýzy. Karolinum, Praha.

[3] Rudin W. (1977): Analýza v reálném a komplexním oboru. Academia, Praha.

[4] Kurzweil J. (1978): Obyčejné diferenciální rovnice. SNTL.