Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jaroslav Dufek

Reálná čísla

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc.
Studijní program: Matematika, obecná matematika

2009

Na tomto místě bych chtěl poděkovat Prof. RNDr. Luboši Pickovi, CSc., DSc. za pomoc při psaní bakalářské práce a za propůjčení literatury. Jiřímu Thomayerovi a Lukáši Bandasovi děkuji za upozornění na stylistické nedostatky.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 7. prosince 2009 Jaroslav Dufek

Obsah

Název práce: Reálná čísla
Autor: Jaroslav Dufek
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy, MFF UK
Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc.
e-mail vedoucího: pick@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V této práci studujeme zavedení reálných čísel. Nejprve zavádíme reálná čísla axiomaticky, pomocí axiomů tělesa, axiomů uspořádání a axiomu úplnosti. Poté provedeme podrobnou konstrukci reálných čísel. Reálná čísla lze konstruovat několika způsoby (např. pomocí Dedekindových řezů), my budeme konstruovat reálná čísla pomocí cauchyovských posloupností racionálních čísel. Reálná čísla byla v Evropě používána již v 18. století, ale korektně byla zavedena zásluhou německého matematika Georga Cantora až ve druhé polovině 19. století.
Klíčová slova: těleso, množina reálných čísel, cauchyovská posloupnost, ekvivalentní cauchyovské posloupnosti

Title: Real numbers
Author: Jaroslav Dufek
Department: Department of Mathematical Analysis, MFF UK
Supervisor: Prof. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc.
Supervisor's e-mail address: pick@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the presented work we study a construction of the set of real numbers. At first we set up real numbers by axioms of field, axioms of order and the completeness axiom. Then we accomplish the construction of the field of real numbers. There exists various constructions of real numbers (e.g. by Dedekind sections) but we will construct the set of real numbers by Cauchy sequences of racional numbers. Real numbers were used in Europe in the 18th century. The first correct definition of the set of real numbers was given by the Germen mathematician Georg Cantor in the second half of the 19th century.
Keywords: field, real numbers, Cauchy sequences, equivalent Cauchy sequences

Úvod

V této práci studujeme zavedení reálných čísel. Tato problematika provádí lidstvo již od pradávna. Už Egypťané používali zlomky kolem roku 1000 př. Kr. Zhruba kolem roku 500 př. Kr. si začínají řečtí matematici uvědomovat nutnost existence iracionálních čísel. V Evropě přichází přelom až v 18. století, kdy se začíná rozvíjet kalkulus a používat celá reálná osa. Ale až ve druhé polovině 19. století jsou korektně definována reálná čísla.

Nejprve zavádíme reálná čísla axiomaticky (tj. pomocí axiomů tělesa, axiomů uspořádání a axiomu úplnosti). Poté dokazujeme několik tvrzení, která používáme prakticky denně. Je potřeba si uvědomit, že ač jsou tato tvrzení dobře známa je nutné je axiomaticky dokázat (např. každý ví, že nula je menší než jedna).

Dále následuje konstrukce množiny přirozených čísel, její rozšíření na množinu celých čísel a následné rozšíření na množinu racionálních čísel. Poté provedeme podrobnou konstrukci reálných čísel. Konstrukcí reálných čísel je několik (např. pomocí Dedekindových řezů) my budeme konstruovat reálná čísla pomocí chauchyovských posloupností racionálních čísel. Na závěr dokážeme, že množina reálných čísel je určena jednoznačně.

Kapitola 1

Tělesové axiomy

V této kapitole zavedeme pojem tělesa. Postupně uvedeme axiomy tělesa.

Definice 1.1 (Kartézský součin)**.** *Kartézský součin množin A a B* je množina $A \times B = \{(a, b) : \ a \in A, \ b \in B\}$.

Definice 1.2 (Binární relace)**.** *Binární relace R* je jakákoli množina uspořádaných dvojic $(x, y) \in X \times Y$.

Definice 1.3 (Zobrazení)**.** *Zobrazení* je speciální případ binární relace, splňující že pro každé $a \in A \ \exists! b \in B : \ F(a) = b$.

Poznámka Skutečnost, že F je zobrazení z A do B budeme zapisovat následujícím způsobem: $F : \ A \to B$. Zobrazení $F : A \to \mathbb{R}$, kde $A \subseteq \mathbb{R}$ se nazývá funkce.

Definice 1.4 (Binární operace)**.** *Binární operace* na množině A je zobrazení z $A \times A$ do A.

Definice 1.5 (Těleso)**.** *Komutativní těleso* (dále jen *těleso*) je neprázdná množina F s binárními operacemi $\oplus$, $\odot$ a konstantami $0, 1 \in F$, splňující následující axiomy:

A 1. $\forall x, y \in F : \ x \oplus y = y \oplus x \quad a \quad x \odot y = y \odot x$

A 2. $\forall x, y, z \in F : \ (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) \quad a \quad (x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$

A 3. $\forall x \in F : \ x \oplus 0 = x \quad a \quad x \odot 1 = x$

A 4. $\forall x \in F \ \exists y \in F : \ x \oplus y = 0$

A 5. $\forall x \in F; \ x \neq 0 \ \exists y \in F : \ x \odot y = 1$

A 6. $\forall x, y, z \in F \ : \ x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$

Poznámka Pro označení tělesa F s binárními operacemi $\oplus$, $\odot$ a s konstantami 0, 1 se

obvykle používá notace: (F,$\oplus$,$\odot$,0,1). Operaci $\oplus$ nazýváme sčítání, operaci $\odot$ násobení, konstantu 0 nulový prvek tělesa a 1 jednotkový prvek tělesa. Konvencí je, že konstanty 0 a 1 si nejsou rovny. Tedy nejmenší možné těleso obsahuje dva prvky 0,1. Toto těleso nazýváme triviální.
Význam axiomů:

- **A1** ... komutativní zákon pro $\oplus$ a $\odot$
- **A2** ... asociativní zákon pro $\oplus$ a $\odot$
- **A3** ... existence neutrálního prvku 0 pro $\oplus$ a 1 pro $\odot$
- **A4** ... existence opačného prvku $y \overset{\text{ozn}}{=} -x$
- **A5** ... existence inverzního prvku $y \overset{\text{ozn}}{=} x^{-1} \overset{\text{ozn}}{=} \frac{1}{x}$
- **A6** ... distributivní zákon

Poznámka Opačný prvek a inverzní prvek je v tělese určen jednoznačně podle Věty 1.9.

Věta 1.6. *Nechť F je těleso. Pokud pro $x, y, z \in F$ platí: $x \oplus y = x \oplus z$. Potom $y = z$.*

Důkaz
$x, y, z \in F$ pevné, podle **A4** existuje $w \in F$ tak, že $x \oplus w = 0$

$$x \oplus y = x \oplus z$$

$$\begin{aligned} (x \oplus y) \oplus w &= (x \oplus z) \oplus w \\ (y \oplus x) \oplus w &= (z \oplus x) \oplus w && \text{z } \mathbf{A1} \\ y \oplus (x \oplus w) &= z \oplus (x \oplus w) && \text{z } \mathbf{A2} \\ y \oplus 0 &= z \oplus 0 && \text{z } (x + w = 0) \\ y &= z \end{aligned}$$

□

Věta 1.7. *Nechť F je těleso a $x \in F$. Potom pro každé $x \in F$ platí: $x \odot 0 = 0$.*

Důkaz
Nechť $x \in F$ pevné. Vyjdeme z rovnosti $0 = 0$, dále z **A3** máme $0 \oplus 0 = 0$. Odtud dostaneme $x \odot (0 \oplus 0) = x \odot 0$.

$$(x \odot 0) \oplus (x \odot 0) = x \odot 0 \qquad \text{z } \mathbf{A6}$$

Nyní použijeme opět **A3** : $(x \odot 0) \oplus 0 = x \odot 0$
Z předchozího : $(x \odot 0) \oplus (x \odot 0) = (x \odot 0) \oplus 0$
A z Věty 1.6 máme: $x \odot 0 = 0$ □

Věta 1.8. *Nechť F je těleso. Nechť $a, b, c \in F$, $a \neq 0$ a platí $a \odot b = a \odot c$. Potom $b = c$.*

Poznámka Pokud by $a = 0$, potom tvrzení neplatí, protože lze snadno nahlédnout z (Věty 1.7), že b a c mohou byt libovolné prvky tělesa F.

Důkaz
Nechť $a, b, c \in F$ pevné. Potom z **A5** existuje $d : a \odot d = 1$ Odtud:

$$(a \odot b) = (a \odot c)$$

$$\begin{aligned} d \odot (a \odot b) &= d \odot (a \odot c) \\ (d \odot a) \odot b &= (d \odot a) \odot c && \text{z } \mathbf{A2} \\ 1 \odot b &= 1 \odot c && \text{z } a \odot d = 1. \end{aligned}$$

□

Věta 1.9. *Nechť F je těleso;*

i) Potom pro každé x existuje právě jedno y tak, že $x \oplus y = 0$

ii) Potom pro každé $a \neq 0$ existuje právě jedno b tak, že $a \odot b = 1$

Důkaz
Existenci v prvním případě máme zaručenu z **A4**, ve druhém případě z **A5**. Dokážeme jednoznačnost.

i) Sporem nechť y a y_1 jsou dva různé opačné prvky k x. Odtud (podle **A4**): $x \oplus y = x \oplus y_1$, tedy z Věty 1.6 plyne: $y = y_1$. To je spor.

ii) Sporem nechť b a b_1 jsou dva různé inverzní prvky k a. Odtud (podle **A5**): $a \odot b = a \odot b_1$, tedy z Věty 1.8 plyne: $b = b_1$. To je spor.

□

Problém 1.10. *Nechť je $(F, \oplus, \odot, 0, 1)$ těleso. Nechť $a \in F$. Pokud pro nějaké $x \in F$ platí: $a \oplus x = x$. Potom $a = 0$.*

Řešení
Z **A4**: pro každé $x \in F$ existuje $w \in F$ tak,že $x \oplus w = 0$
z předpokladu máme: $a \oplus x = x$. Odtud:

$$w \oplus (a \oplus x) = w \oplus x$$

$$\begin{aligned} (w \oplus a) \oplus x &= w \oplus x && \text{z } \mathbf{A2} \\ (a \oplus w) \oplus x &= w \oplus x && \text{z } \mathbf{A1} \\ a \oplus (w \oplus x) &= w \oplus x && \text{z } \mathbf{A2} \\ a \oplus \underbrace{(w \oplus x)}_{=0} &= \underbrace{(w \oplus x)}_{=0} \\ a &= 0 \end{aligned}$$

△

Problém 1.11. *Nechť* $(F, \oplus, \odot, 0, 1)$ *je těleso. Dokažte, že pro každé* $a, b \in F$ *platí*

$$(a \odot b)^{-1} = b^{-1} \odot a^{-1}.$$

Řešení
Víme, že $(a \odot b)^{-1} \odot (a \odot b) = 1$, odtud máme $(a \odot b)^{-1} \odot (a \odot b) \odot b^{-1} = b^{-1}$. Nyní vynásobíme rovnost prvkem a^{-1} a z asociativity dostaneme: $(a \odot b)^{-1} \odot (a \odot a^{-1}) =$ $= b^{-1} \odot a^{-1}$, tedy $(a \odot b)^{-1} = (b^{-1} \odot a^{-1})$.

Problém 1.12. *Nechť je* $(F, \oplus, \odot, 0, 1)$ *těleso. Dokažte následující rovnost:* $1^{-1} = 1$.

Řešení
Pro každé $a \in F$ existuje $a^{-1} \in F$ tak, že $a \odot a^{-1} = 1$. Odtud $1^{-1} = (a \odot a^{-1})^{-1} \overset{\mathrm{Pr}1.11}{=}$ $a^{-1} \odot a \overset{\mathrm{A1}}{=} (a \odot a^{-1}) = 1$.

$\triangle$

Poznámka V dalším textu budeme místo $a \oplus b$, $a \odot b$ používat $a + b$, $a \cdot b$. Navíc budeme používat také standardní značení pro binární operaci odčítání: $a - b := a + (-b)$, kde $-b$ je opačný prvek k prvku b.

Problém 1.13. *Nechť je* $(F, +, \cdot, 0, 1)$ *těleso a nechť* $a, b, c \in F$. *Dokažte následující rovnost:* $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$.

Řešení
Ukážeme, že $(-a) \cdot b$ a $a \cdot (-b)$ jsou opačné prvky k $(-a) \cdot (-b)$. Potom z Věty 1.9 dostaneme rovnost: $(-a) \cdot b = a \cdot (-b)$.

$$(-a) \cdot b + (-a) \cdot (-b) \overset{\mathrm{A6}}{=} (-a) \cdot (b + (-b)) = 0 \Rightarrow (-a) \cdot b \text{ je opačný k } (-a) \cdot (-b)$$

$$a \cdot (-b) + (-a) \cdot (-b) \overset{\mathrm{A6}}{=} (a + (-a)) \cdot (-b) = 0 \Rightarrow a \cdot (-b) \text{ je opačný k } (-a) \cdot (-b)$$
$$\Rightarrow (-a) \cdot b = a \cdot (-b).$$

Teď ukážeme, že $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$. Víme, že $(-(a \cdot b))$ je opačný prvek k $a \cdot b$.
Nyní stačí ukázat, že $(-a) \cdot b$ je také opačný prvek k $(a \cdot b)$: $a \cdot b - a \cdot b = (a + (-a)) \cdot b = 0$, tedy $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$.
Dále máme, že $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$ to je opačný prvek k $(-a) \cdot (-b)$.
Tedy celkem $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = (a) \cdot (-b)$.

$\triangle$

Problém 1.14. *Nechť je* $(F, +, \cdot, 0, 1)$ *těleso a nechť* $a, b \in F$. *Dokažte následující rovnost:* $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Řešení

Ukážeme, že $(-a)\cdot(-b),\ a\cdot b$ jsou opačné prvky k $a\cdot(-b)$. Potom z Věty 1.9 dostaneme rovnost: $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$

$$(-a)\cdot(-b)+a\cdot(-b)\overset{\text{A6}}{=}(a+(-a))(-b)=0\Rightarrow(-a)\cdot(-b)\text{ je opačný k }a\cdot(-b)$$

$$a\cdot b+a\cdot(-b)\overset{\text{A6}}{=}a\cdot(b+(-b))=0\Rightarrow a\cdot b\text{ je opačný k }a\cdot(-b)$$ $\triangle$

Kapitola 2

Axiomy uspořádání

V následujícím odstavci definujeme uspořádané těleso. Na základě axiomů dokážeme několik tvrzení.

Definice 2.1 (Ekvivalence)**.** Relace R na množině A se nazývá *ekvivalence*, jestliže platí následující podmínky:

i) $\forall a \in A: \ (a,a) \in R$ (reflexivita)

ii) $\forall a,b \in A: \ (a,b) \in R \ \Rightarrow (b,a) \in R$ (symetrie)

iii) $\forall a,b,c \in A: [(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R] \Rightarrow (a,c) \in R$ (tranzitivita)

Definice 2.2 (Třída ekvivalence)**.** Je-li R ekvivalence na množině A, pak pro každé a definujeme *třídu ekvivalence prvku* a: $[a] := \{b \in A, (a,b) \in R\}$.

Poznámka Náleží-li dvojice (x,y) relaci R ($(x,y) \in R$), říkáme, že x a y jsou v relaci R. A můžeme psát: xRy. V dalším budeme pro relaci používat známé značení: $<$, $>$ ...

Definice 2.3 (Uspořádané těleso)**.** *Uspořádané těleso* je těleso F s binární relací uspořádání $<$, splňující následující axiomy:

O 1. *pro každé* $x,y \in F$ *platí právě jedna z následujících vlastností:*

- $x = y$
- $x > y$
- $x < y$

O 2. $\forall x,y,z \in F$*:* $[(x<y) \ \wedge (y<z)] \Rightarrow (x<z)$

O 3. $\forall x,y,z \in F$*:* $(x<y) \Rightarrow (x+z<y+z)$

O 4. $\forall x,y,z \in F$*:* $[(0<z) \wedge (x<y)] \Rightarrow (z \cdot x < z \cdot y)$

Poznámka Uspořádané těleso F budeme značit: $(F, +, \cdot, <, 0, 1)$.
Axiom **O1** se také označuje jako zákon trichotomie, axiom **O2** je tranzitivní vlastnost. Říkáme že x je kladné, pokud $x > 0$, obdobně pro x záporné. Říkáme, že x je nezáporné, pokud $x \geq 0$, obdobně pro x nekladné.

Věta 2.4. *Nechť F je uspořádané těleso, potom pro každé $x \in F$ platí:*

i) Pokud x je kladné, pak $-x$ je záporné.

ii) Pokud x je záporné, pak $-x$ je kladné.

Důkaz

i) Vezmeme pevné kladné $x \in F$, tedy $x > 0$. Nyní z **O3**: $x + (-x) > 0 + (-x)$ a z **A3** a **A4** plyne tvrzení $0 > (-x)$. Tedy $-x$ je záporné.

ii) Zcela analogicky jako i).

□

Věta 2.5. *Nechť $(F, +, \cdot, <, 0, 1)$ uspořádané těleso. Potom $0 < 1$.*

Důkaz
Podle **O1** platí právě jedna z následujících možností:

$$0 = 1, \quad 0 > 1, \quad 0 < 1.$$

První možnost neplatí, protože 0 a 1 jsou různé konstanty.
Tvrzení budeme dokazovat sporem. Proto budeme předpokládat platnost: $0 > 1$. Z Věty 2.4 máme $0 < (-1)$ a podle **O4** aplikovaného na $0 < (-1)$ a $0 < (-1)$ dostaneme: $(-1) \cdot 0 < (-1) \cdot (-1)$. Odtud s použitím Věty 1.7 a Problému 1.14 dostaneme $0 < 1 \cdot 1 \overset{A3}{\Longrightarrow} 0 < 1$.
To je spor s $0 > 1$, tedy i druhá možnost neplatí a platí pouze $0 < 1$.

□

Věta 2.6. *Nechť F je uspořádané těleso, nechť $x \in F$ tak, že platí $0 < x$. Potom $0 < \frac{1}{x}$.*

Důkaz
Sporem: nechť $\frac{1}{x} = x^{-1} < 0$.
Z předpokladu máme $x > 0 \overset{O4}{\Longrightarrow} x^{-1} \cdot x < 0 \Rightarrow 1 < 0$. To je spor s Větou 2.5. Tedy platí $0 < \frac{1}{x}$.

□

Věta 2.7. *Nechť F je uspořádané těleso, nechť $x, y \in F$ tak,že platí $0 < x < y$. Potom $x < \frac{x+y}{1+1} < y$.*

Důkaz
Nejprve ukážeme, že $(1+1)^{-1} > 0$. Víme, že $1 > 0 \Rightarrow [(1+1) > 1 > 0] \Rightarrow [(1+1) > 0]$, a tedy podle Věty 2.6 dostaneme $(1+1)^{-1} > 0$.

a) Máme $x < y \overset{\text{O3}}{\Longrightarrow} x + x < y + x \overset{\text{A6+A3}}{\Longrightarrow} x \cdot (1+1) < x + y$. Podle **O4** platí: $x \cdot (1+1) \cdot (1+1)^{-1} < (x+y) \cdot (1+1)^{-1}$. Tedy $x < \frac{x+y}{1+1}$.

b) Máme $x < y \overset{\text{O3}}{\Longrightarrow} x + y < y + y \overset{\text{A6+A3}}{\Longrightarrow} x + y < y \cdot (1+1)$ Podle **O4** platí: $(x+y) \cdot (1+1)^{-1} < y \cdot (1+1) \cdot (1+1)^{-1}$. Tedy $\frac{x+y}{1+1} < y$.

Tedy celkem dostáváme tvrzení $x < \frac{x+y}{1+1} < y$. △

Věta 2.8. *Nechť F je uspořádané těleso, nechť $x, y \in F$ tak, že platí $0 < x < y$. Potom $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.*

Důkaz
Z předpokladů máme $[(x > 0) \wedge (y > 0)]$, tedy podle Věty 2.6 platí $[(\frac{1}{y} > 0) \wedge (\frac{1}{x} > 0)]$.
Nyní ukážeme, že $\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} > 0$:
Vyjdeme z Věty 2.5 : $1 > 0$ dále víme, že $(\frac{1}{y} > 0)$ a podle **O4** platí: $1 \cdot \frac{1}{x} > 0 \cdot \frac{1}{x}$.
Dále víme, že $\frac{1}{x} > 0$, tedy z předchozí nerovnosti a **O4** dostaneme: $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} > 0 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$.
A podle Věty 1.7 máme: $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} > 0$.
Z předpokladů máme $(y > x)$ a navíc jsme ukázali, že $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} > 0$. Tedy podle **O4** platí: $y \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} > x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$. Odtud z komutativity násobení a z definice inverzního prvku dostaneme $(0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x})$.

□

Poznámka V důkazu není nutné ukazovat $\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} > 0$, ale o to pečlivěji je třeba zdůvodnit předposlední krok důkazu. (Tedy, že platí $(\frac{1}{y} > 0) \wedge (\frac{1}{x} > 0)$, proto lze rozšiřovat postupně $\frac{1}{y}$ a $\frac{1}{x}$.)

Problém 2.9. *Dokažte, že těleso komplexních čísel $\mathbb{C}$ není uspořádané.*

Řešení
Ukážeme sporem, pomocí zákonu trichotomie.

- $i \neq 0$
- Nechť $i > 0 \Rightarrow i \cdot i > i \cdot 0 \Rightarrow -1 > 0$ Spor.
- Nechť $i < 0 \Rightarrow (-i) \cdot (-i) < (-i) \cdot 0 \Rightarrow i \cdot i > 0 \Rightarrow -1 > 0$ Spor.

Tedy $(i \neq 0) \wedge (i > 0) \wedge (i < 0) \Rightarrow$ těleso $\mathbb{C}$ není uspořádané. △

Problém 2.10. *Ukažte, že pokud má rovnice*

$$1 + x \cdot x = 0 \ (*)$$

řešení v F, potom F není uspořádané těleso.

Řešení
Budeme postupovat podobně jako v Problému 2.9. Vyjdeme z Věty 2.5:
$1 > 0 \overset{\text{O3}}{\Longrightarrow} 1 + x \cdot x > x \cdot x \overset{*}{\Longrightarrow} 0 > x \cdot x$

- $x = 0 \Rightarrow 0 < 0$ To je spor.
- $x \neq 0 \Rightarrow x \cdot x > 0$ To je spor s $0 > x \cdot x$.

Tedy těleso F, ve kterém má rovnice $(*)$ řešení, není uspořádané.

△

Problém 2.11. *Ukažte, že žádné konečné těleso nemůže být uspořádané.*

Řešení
Nechť F je konečné uspořádané těleso o n prvcích. BÚNO: $a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}$, kde $a_0, \ldots, a_{n-1}$, jsou prvky tělesa. F je těleso, tedy existuje $a_i \in F$ tak, že $a_{n-2} + a_i = a_{n-1}$. Tedy platí, že $a_{n-2} < a_{n-1}$, potom podle **O3** platí, že $a_{n-2} + a_i < a_{n-1} + a_i$. Definujme $a_l := a_{n-1} + a_i$, potom máme, že $a_{n-1} = a_{n-2} + a_i < a_{n-1} + a_i = a_l$, tedy $a_{n-1} < a_l$. To je spor, protože $a_{n-1} > a_k$, pro každé $k \in \{0, \ldots, n-2\}$.

△

Problém 2.12. *Nechť F je uspořádané těleso a $x \in F$. Nechť pro každé $\varepsilon > 0$ platí $x < \varepsilon$. Ukažte, že potom $x \leq 0$.*

Řešení
Definujme číslo $2 := 1 + 1$, zřejmě platí, že $\frac{1}{2} < 1$ (tj. $2 > 1$).
Sporem nechť $x > 0$, potom zvolíme $\varepsilon = \frac{x}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{x}{2} < x \Rightarrow x > \varepsilon$. To je spor. △

Problém 2.13. *Nechť F je uspořádané těleso, nechť $a, b \in F$: $a \leq b$ a pro každé $\varepsilon > 0$ platí $a + \varepsilon > b$. Dokažte, že potom $a = b$.*

Řešení

- $a + \varepsilon > b \Rightarrow (\varepsilon > b - a) \Rightarrow (b - a < \varepsilon) \overset{\text{Pr2.12}}{\Longrightarrow} (b - a \leq 0) \Rightarrow b \leq a$.
- $(a \leq b) \wedge (b \leq a)$.

Tedy dohromady máme $a = b$. △

Problém 2.14. *Nechť F je uspořádané těleso a nechť $a, b \in F$. Dokažte, že pokud $0 \leq a < b$, potom platí $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$.*

Řešení

Z předpokladů máme $b > 0$, z Věty 2.5 $(1 > 0) \xRightarrow{O3} (b + 1 > 0)$
$\xRightarrow{V2.6} (b + 1)^{-1} > 0$. Analogicky pro $(1 + a)^{-1}$.

$$a < b$$
$$a + a \cdot b < b + a \cdot b$$
$$a \cdot (1 + b) < b \cdot (1 + a)$$
$$a \cdot (1 + b) \cdot (1 + b)^{-1} < b \cdot (1 + a) \cdot (1 + b)^{-1}$$
$$a < b \cdot (1 + b)^{-1} \cdot (1 + a)$$
$$a \cdot (1 + a)^{-1} < b \cdot (1 + b)^{-1} \cdot (1 + a) \cdot (1 + a)^{-1}$$
$$a \cdot (1 + a)^{-1} < b \cdot (1 + b)^{-1}$$
$$\frac{a}{1 + a} < \frac{b}{1 + b}$$

△

Problém 2.15. *Nechť F je uspořádané těleso a nechť $a, b, c, d \in F$. Dokažte, že pokud $b, d > 0$ a $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Potom platí $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.*

Řešení
Z předpokladů máme $b > 0$ a $d > 0$.

a)

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$
$$a \cdot b^{-1} < c \cdot d^{-1}$$
$$a \cdot d < b \cdot c$$
$$a \cdot b + a \cdot d < a \cdot b + b \cdot c$$
$$a \cdot (b + d) < b \cdot (a + c)$$
$$a \cdot b^{-1} < (a + c) \cdot (b + d)^{-1}$$
$$\frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d}$$

b)

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$
$$a \cdot d < b \cdot c$$
$$a \cdot d + c \cdot d < b \cdot c + c \cdot d$$
$$d \cdot (a + c) < c \cdot (b + d)$$
$$\frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d}$$

Tedy dohromady dostáváme $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

△

Kapitola 3

Axiom úplnosti

V tomto odstavci definujeme supremum a infimum množiny a zavedeme pojem úplného tělesa.

Definice 3.1. (Omezenost) Nechť F je uspořádané těleso, nechť S je podmnožina F.

- Řekneme, že S je shora omezená, pokud existuje $b \in F$ tak, že pro každé $x \in F$ platí, že $x \leq b$
- Řekneme, že S je zdola omezená, pokud existuje $a \in F$ tak, že pro každé $x \in F$ platí, že $x \geq a$
- Řekneme, že S je omezená, pokud S je shora i zdola omezená.

Definice 3.2. Nechť F je uspořádané těleso a S je neprázdná a omezená podmnožina F.

- Potom prvek $b \in F$ se nazývá *horní závora množiny* S, pokud pro každé $x \in S$ platí $x \leq b$.
- Prvek b se nazývá *nejmenší horní závora* S, pokud b je horní závora a pro každé $c \in F$ platí $b \leq c$, kde c je horní závora S.
- *Supremum* množiny S je nejmenší horní závora S. Skutečnost, že prvek b je supremum množiny S značíme $b = \sup S$. Pokud $b \in S$, potom je b největší prvek S a značíme $b = \max S$.
- Prvek $b \in F$ se nazývá *dolní závora množiny* S, pokud pro každé $x \in S$ platí $x \geq b$.
- Prvek b se nazývá *největší dolní závora* S, pokud b je dolní závora a pro každé $c \in F$ platí $b \geq c$, kde c je dolní závora S.
- *Infimum* množiny S je největší dolní závora S. Skutečnost, že prvek b je infimum množiny S značíme $b = \inf S$. Pokud $b \in S$ potom je b nejmenší prvek S a značíme $b = \min S$.

Věta 3.3. *Nechť F je uspořádané těleso a $H \subseteq F$. Pokud existuje $\sup H$ v F, pak je určeno jednoznačně.*

Důkaz
Sporem: Nechť b a c jsou dvě různá suprema H. Tedy b a c jsou horní závory H. Protože F je uspořádané těleso, potom BÚNO: $b < c$. Z toho plyne, že c není nejmenší horní závora H, a tedy ani supremum.

$\square$

Věta 3.4. *Nechť F je uspořádané těleso a $H \subseteq F$, $H \neq \emptyset$ a H je shora omezená prvkem $b \in F$. Potom $b = \sup H \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in H :\ b - \varepsilon < x \leq b]$.*

Důkaz
„$\Rightarrow$“: Zvolíme $\varepsilon > 0$: pak $b - \varepsilon < b$, tedy $b - \varepsilon$ není horní závora H. Tedy existuje $x \in H$: $b - \varepsilon < x$. A navíc $b = \sup H$, tedy $x \leq b$. Dohromady máme $b - \varepsilon < x \leq b$.
„$\Leftarrow$“: Budeme dokazovat sporem. Nechť b je horní závora F a platí, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in H$ tak, že $b - \varepsilon < x \leq b$ a nechť $b' < b$ je horní závora F. Zvolme $\varepsilon = b - b'$ potom dostaneme, že $b - (b - b') < x \leq b$, tedy $b' < x < b$, což je spor s tím, že b' je horní závora F.

$\square$

Definice 3.5 (Úplnost)**.** Nechť F je uspořádané těleso. Řekneme, že F je *úplné*, pokud pro každé $S \subseteq F$, kde S je neprázdná shora omezená množina, platí: $\exists s \in F$ tak, že $s = \sup S$.

Definice 3.6 (Axiom úplnosti)**.** Pro každou neprázdnou shora omezenou $S \subseteq \mathbb{R}$ existuje právě jedno $s \in \mathbb{R}$ tak, že $s = \sup S$.

Věta 3.7 (o $\mathbb{R}$)**.** *Existuje právě jedno uspořádané těleso $\mathbb{R}$ až na izomorfismus, na kterém jsou definovány operace $+$ a $\cdot$, konstanty 0 a 1 a binární relace $<$ splňující axiomy **A1-A6**, **O1-O4** a axiom úplnosti.*

Důkaz
Tuto větu dokážeme ve čtvrté kapitole.

Kapitola 4

Konstrukce reálných čísel

V této podkapitole budeme naše úvahy provádět nad tělesem racionálních čísel (pokud nebude řečeno jinak).

4.1 Zavedení množin $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

Nyní zavedeme postupně množinu všech přirozených, celých a racionálních čísel.

Definice 4.1 (Množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$)**.** $\mathbb{N}$ je *množina všech přirozených čísel*, jestliže existuje zobrazení $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které splňuje následující Peanovy axiomy:

1. ω je prosté (tj. pokud $\omega(a) = \omega(b)$, potom $a = b$)
2. ω není na (tj. $\omega(\mathbb{N}) \neq \mathbb{N}$)
3. (axiom indukce)
   Nechť $p \in (\mathbb{N} \setminus \omega(\mathbb{N}))$ a nechť množina $M \subseteq \mathbb{N}$ splňuje:
   i) $p \in M$;
   ii) $\forall n \in M \Rightarrow \omega(n) \in M$.

   Pak $M = \mathbb{N}$.

Poznámka

i) Množina $\mathbb{N} \setminus \omega(\mathbb{N})$ musí být jednoprvková. Kdyby $p \neq q \in \mathbb{N} \setminus \omega(\mathbb{N})$, pak množina $M = \mathbb{N} \setminus \{q\}$ vyhovuje třetímu axiomu, pak $M = \mathbb{N}$. To je spor. Tento prvek značíme $1 \in (\mathbb{N} \setminus \omega(\mathbb{N}))$

ii) ω nazveme zobrazení následníka ($\omega(n) = n + 1$).

Definice 4.2 (Operace sčítání)**.** *Operace sčítání* $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je definováno podmínkami:

S1 $\forall n \in \mathbb{N} :\ \omega(n) = n + 1$

S2 $\forall m, n \in \mathbb{N}: \ m + \omega(n) = \omega(m+n)$

Definice 4.3 (Operace násobení). *Operace násobení* $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je definováno podmínkami:

N1 $\forall n \in \mathbb{N}: \ n \cdot 1 = n$

N2 $\forall m, n \in \mathbb{N}: \ m \cdot \omega(n) = m \cdot n + m$

Definice 4.4 (Uspořádání). Říkáme, že m je *menší než* n (značíme $m < n$) právě tehdy, když existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $m + p = n$.

Definice 4.5 (Množina všech celých čísel $\mathbb{Z}$). *Množinu všech celých čísel* s binárními operacemi sčítání a násobení definujeme jako třídy ekvivalencí na množině všech uspořádaných dvojic přirozených čísel, splňují-li následující podmínky ($m_1,\ m_2,\ n_1,\ n_2 \in \mathbb{N}$):

- $[m_1, m_2] = [n_1, n_2] \Leftrightarrow \ m_1 + n_2 = m_2 + n_1$
- $[m_1, m_2] < [n_1, n_2] \Leftrightarrow \ m_1 + n_2 < m_2 + n_1$
- $[m_1, m_2] > [n_1, n_2] \Leftrightarrow \ m_1 + n_2 > m_2 + n_1$
- $[m_1, m_2] + [n_1, n_2] \Leftrightarrow \ [m_1 + n_1, m_2 + n_2]$
- $[m_1, m_2][n_1, n_2] \Leftrightarrow \ [m_1 n_1 + m_2 n_2, m_1 n_2 + m_2 n_1]$

Kladným celým číslem k nazýváme třídu obsahující dvojici tvaru $[k+1, 1]$ a ztotožňujeme je s přirozeným číslem k.
Záporným celým číslem $-k$ nazýváme třídu obsahující dvojici tvaru $[1, k+1]$.
Celým číslem nula nazýváme třídu obsahující dvojici tvaru $[1, 1]$.
Množina všech celých čísel je tedy rozšíření všech přirozených čísel o nulu a záporná čísla.

Poznámka Množina $\mathbb{Z}$ je uzavřená na odčítání.

Definice 4.6 (Množina všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$). *Množinu všech racionálních čísel* s binárními operacemi sčítání a násobení definujeme jako třídy ekvivalencí na množině všech uspořádaných dvojic celých čísel, splňují-li následující podmínky ($p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$; $p_2 \neq 0;\ q_2 \neq 0$):

- $[p_1, p_2] = [q_1, q_2] \Leftrightarrow \ p_1 q_2 = p_2 q_1$
- $[p_1, p_2] < [q_1, q_2] \Leftrightarrow \ (p_1 q_2 < p_2 q_1 \text{ pro } p_2 q_2 > 0) \vee (p_1 q_2 > p_2 q_1 \text{ pro } p_2 q_2 < 0)$
- $[p_1, p_2] > [q_1, q_2] \Leftrightarrow \ (p_1 q_2 > p_2 q_1 \text{ pro } p_2 q_2 > 0) \vee (p_1 q_2 < p_2 q_1 \text{ pro } p_2 q_2 < 0)$
- $[p_1, p_2] + [q_1, q_2] \Leftrightarrow \ [p_1 q_2 + p_2 q_1, p_2 q_2]$
- $[p_1, p_2][q_1, q_2] \Leftrightarrow \ [p_1 q_1, p_2 q_2]$

Třídu prvků obsahující dvojici tvaru $[p, 1]$ ztotožňujeme s celým číslem p.
Třídu prvků obsahují dvojici tvaru $[1, p]$ ztotožňujeme s inverzním číslem k číslu $p \neq 0$ a zapisujeme $\frac{1}{p}$, nebo p^{-1}. Třídu prvků obsahující dvojici tvaru $[p_1, p_2]$ pak zapisujeme $\frac{p_1}{p_2}$ (tj. operace dělení).
Poznámka Množina všech racionálních čísel je uzavřená vzhledem k operaci dělení (nenulovými celými čísly).

Věta 4.7 (o $\mathbb{Q}$)**.** *Množina všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je uspořádané těleso.*

Důkaz
Nechť $0, 1, p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$, kde $p_2, q_2, r \not= 0$ potom $[0, 1], [1, 1], [p_1, p_2], [q_1, q_2], [r_1, r_2] \in \mathbb{Q}$, kde $[0, 1]$ je nulový prvek $\mathbb{Q}$ a $[1, 1]$ je jednotkový prvek $\mathbb{Q}$. Nejprve ukážeme, že $\mathbb{Q}$ je těleso.

A1: $[p_1, p_2] + [q_1, q_2] = [p_1q_2 + p_2q_1, p_2q_2] = [q_1, q_2] + [p_1, p_2]$;
$[p_1, p_2][q_1, q_2] = [p_1q_1, p_2q_2] = [q_1, q_2][p_1, p_2]$

A2: $([p_1, p_2] + [q_1, q_2]) + [r_1, r_2] = [p_1q_2 + p_2q_1, p_2q_2] + [r_1, r_2] = [p_1q_2r_2 + p_2q_1r_2 + p_2q_2r_1, p_2q_2r_2] = [p_1, p_2] + [q_1r_2 + q_2r_1, q_2r_2] = [p_1, p_2] + ([q_1, q_2] + [r_1, r_2])$
$([p_1, p_2][q_1, q_2])[r_1, r_2] = [p_1q_1, p_2q_2][r_1, r_2] = [p_1q_1r_1, p_2q_2r_2] = [p_1, p_2][q_1r_1, q_2r_2] = [p_1, p_2]([q_1, q_2][r_1, r_2])$

A3: $[p_1, p_2] + [0, 1] = [p_1, p_2]$
$[p_1, p_2][1, 1] = [p_1, p_2]$

A4: Pro každé $[p_1, p_2] \in \mathbb{Q}$ existuje $[s_1, s_2] \in \mathbb{Q}$ tak, že $[p_1, p_2] + [s_1, s_2] = [0, 1]$.
Volme $[s_1, s_2] = [-p_1, p_2]$.

A5: Pro každé $[p_1, p_2] \in \mathbb{Q}$, kde $p_1 \neq 0$ existuje racionální číslo$[s_1, s_2] \neq [0, 1]$ tak, že $[p_1, p_2][s_1, s_2] = [1, 1]$.
Volme $[s_1, s_2] = [p_2, p_1]$.

A6: $[p_1, p_2]([q_1, q_2] + [r_1, r_2]) = [p_1, p_2][q_1r_2 + q_2r_1, q_2r_2] = [p_1q_1r_2 + p_1q_2r_1, p_2q_2r_2] = [p_1q_1, p_2q_2] + [p_1r_1, p_2q_2] = [p_1, p_2][q_1, q_2] + [p_1, p_2][r_1, r_2]$

Tímto jsme dokázali, že množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je těleso. V dalším textu budeme používat označení $-[p_1, p_2] := [-p_1, p_2]$. Nyní dokážeme jedno pomocné tvrzení, na které se budeme později odvolávat.

Tvrzení: Nechť $[p_1, p_2] > [0, 1]$ a nechť $[q_1, q_2] > [0, 1]$. Potom platí $[p_1, p_2][q_1, q_2] > [0, 1]$ a $[p_1, p_2] + [q_1, q_2] > [0, 1]$.
Důkaz
$[p_1, p_2] > [0, 1] \Leftrightarrow [p_1 > 0 \text{ pro } p_2 > 0] \vee [p_1 < 0 \text{ pro } p_2 < 0]$
$[q_1, q_2] > [0, 1] \Leftrightarrow [q_1 > 0 \text{ pro } q_2 > 0] \vee [q_1 < 0 \text{ pro } q_2 < 0]$
Tedy pokud dohromady dostáváme, že:
$[p_1q_1 > 0 \text{ pro } (p_2, q_2 > 0 \text{ nebo } p_2, q_2 < 0)] \vee$
$\vee [p_1q_1 < 0 \text{ pro } (p_2 > 0, q_2 < 0 \text{ nebo } p_2 < 0, q_2 > 0)] \qquad (*)$

Přímo z $(*)$ plyne, že $[p_1q_1 > 0 \text{ pro } p_2q_2 > 0] \vee [p_1q_1 < 0 \text{ pro } p_2q_2 < 0]$ což je ekvivalentní tomu, že $[p_1, p_2][q_1, q_2] > [0, 1]$.
První část $(*)$ lze podrobněji rozepsat:
$[(p_1, q_1 > 0 \text{ pro } p_2, q_2 > 0) \text{ nebo } (p_1, q_1 < 0 \text{ pro } p_2, q_2 < 0)]$.
Odtud dostáváme, že $p_2q_2 > 0$ a $p_1q_2 > 0$ a $p_2q_1 > 0$, tedy $p_1q_2 + p_2q_1 > 0$.
Druhou část $(*)$ lze podrobněji rozepsat:
$[(p_1 < 0, q_1 > 0 \text{ pro } p_2 < 0, q_2 > 0) \text{ nebo } (p_1 > 0, q_1 < 0 \text{ pro } p_2 > 0, q_2 < 0)]$
Odtud dostáváme, že $p_2q_2 < 0$ a $p_1q_2 < 0$ a $p_2q_1 < 0$, tedy $p_1q_2 + p_2q_1 < 0$.
Potom můžeme ekvivalentně přepsat $(*)$ jako:
$[p_1q_2 + p_2q_1 > 0 \text{ pro } p_2q_2 > 0] \vee [p_1q_2 + p_2q_1 < 0 \text{ pro } p_2q_2 < 0]$, což je ekvivalentní tomu, že $[p_1, p_2] + [q_1, q_2] > [0, 1]$. □

Nyní máme vše připraveno k důkazu uspořádanosti všech racionálních čísel.

O1: Trichotomie plyne přímo z definice racionálních čísel.

O2: Nechť $[p_1, p_2] < [q_1, q_1]$ a $[q_1, q_2] < [r_1, r_2]$, potom máme, že $[q_1, q_2] - [p_1, p_2] > [0, 1]$ a $[r_1, r_2] - [q_1, q_2] > [0, 1]$. Potom podle pomocného tvrzení máme, že $[q_1, q_2] - [p_1, p_2] + [r_1, r_2] - [q_1, q_2] > [0, 1]$, tedy $[0, 1] + [r_1, r_2] - [p_1, p_2] > [0, 1]$ odtud $[r_1, r_2] > [p_1, p_2]$.

O3: Nechť $[p_1, p_2] < [q_1, q_2]$ a $[r_1, r_2] \in \mathbb{Q}$, potom máme $[p_1, p_2] - [q_1, q_2] < [0, 1]$, potom $[p_1, p_2] - [q_1, q_2] + [r_1, r_2] - [r_1, r_2] < [0, 1]$, odtud
$([p_1, p_2] + [r_1, r_2]) - ([q_1, q_2] + [r_1, r_2]) < [0, 1]$, a tedy
$[p_1, p_2] + [r_1, r_2] < [q_1, q_2] + [r_1, r_2]$.

O4: Nechť $[r_1, r_2] > [0, 1]$ a $[p_1, p_2] < [q_1, q_2]$, potom máme, že $[q_1, q_2] - [p_1, p_2] > [0, 1]$ a $[r_1, r_2] > [0, 1]$, tedy podle pomocného tvrzení máme, že $([q_1, q_2] - [p_1, p_2])[r_1, r_2] > [0, 1]$, potom dostáváme $[p_1, p_2][r_1, r_2] < [q_1, q_2][r_1, r_2]$.

□

Poznámka V důkazu uspořádání používáme následující vlastnost racionálních čísel: $p < q \Leftrightarrow p - q < 0$, kde $p, q \in \mathbb{Q}$. Tato vlastnost plyne přímo z definice racionálních čísel.

Definice 4.8 (Absolutní hodnota)**.** Nechť a racionální číslo. Potom definujeme *absolutní hodnotu* a jako: $\mid a \mid = \max\{-a, a\}$.

4.2 Množina $\mathbb{R}$ jako těleso

V této podkapitole definujeme množinu všech reálných čísel a ukážeme, že množina reálných čísel splňuje všechny tělesové axiomy.

Definice 4.9 (Cauchyovská posloupnost racionálních čísel)**.** Říkáme, že posloupnost racionálních čísel $\{a_n\}$ je *cauchyovská*, jestliže
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N > 0,\; N \in \mathbb{N} \; \forall m, n > N : \mid a_n - a_m \mid < \varepsilon$, kde ε je racionální číslo.

Definice 4.10 (Ekvivalentní posloupnosti)**.** Řekneme, že dvě posloupnosti racionálních čísel $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou *ekvivalentní*, jestliže $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \geq 1,\ N \in \mathbb{Z}\ \forall n > N : \mid a_n - b_n \mid < \varepsilon$, kde ε je racionální číslo.

Poznámka V tento okamžik ještě nemáme zkonstruována reálná čísla, proto číslo ε uvažujeme jako kladné racionální číslo. Později však zkonstruujeme reálná čísla a ukážeme, že Definice 4.9 se nezmění budeme-li uvažovat ε kladné reálné. Toto tvrzení je náplní Věty 4.45.

Poznámka Pro ilustraci např. posloupnosti $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ a $\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$ jsou ekvivalentní. Protože $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \forall n \geq N : \mid (1+\frac{1}{n})^{n+1} - (1+\frac{1}{n})^n \mid = \mid (1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n}-1) \mid < \varepsilon$.

Poznámka Nyní máme všechno připraveno ke konstrukci reálných čísel. Zavedeme nový formální symbol LIM, jak zápis naznačuje, že později ukážeme (ve Větě 4.48), že formální limita je ekvivalentní limitě reálné cauchyovské posloupnosti.

Definice 4.11 (Reálná čísla $\mathbb{R}$)**.** Nechť S je množina cauchyovských posloupností. Definujeme $a_n \approx b_n$ pokud

$$\forall\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}\ \exists N \geq 1 \forall n (n > N \Rightarrow \mid a_n - b_n \mid < \varepsilon).$$

Potom $\approx$ je ekvivalence na S. Reálné číslo je potom prvek $S|_{\approx}$ (rozklad na ekvivalentní třídy). Třídu obsahující posloupnost $\{a_n\}$ značíme $LIM_{n\to\infty}a_n$.

Poznámka Řekneme, že dvě reálná čísla $LIM_{n\to\infty}a_n$, $LIM_{n\to\infty}b_n$ si jsou *rovna*, jestliže posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou ekvivalentní cauchyovské posloupnosti. Množinu všech reálných čísel značíme $\mathbb{R}$.
Symbolu $LIM_{n\to\infty}a_n$ budeme říkat *formální limita* posloupnosti $\{a_n\}$. V posledním odstavci této kapitoly zavedeme definici opravdové limity reálné posloupnosti a ukážeme, že formální limita cauchyovské posloupnosti je rovna limitě reálné cauchyovské posloupnosti. Poté již nebudeme formální limity dále používat.

Nyní ukážeme, že výše definovaná rovnost reálných čísel splňuje požadované vlastnosti rovnosti, tedy vlastnost ekvivalence.

Věta 4.12. *Nechť $x = LIM_{n\to\infty}a_n$, $y = LIM_{n\to\infty}b_n$ a $z = LIM_{n\to\infty}c_n$ jsou reálná čísla. Potom platí:*

i) $x = x$

ii) Pokud $x = y$, potom $y = x$.

iii) Pokud $x = y$ a $y = z$, potom $x = z$.

Důkaz

i) Cauchyovská posloupnost racionálních čísel $\{a_n\}$ je ekvivalentní s cauchyovskou posloupností racionálních čísel $\{a_n\}$.

ii) Z předpokladu víme, že $x = y$, tedy podle definice víme, že cauchyovská posloupnost racionálních čísel $\{a_n\}$ je ekvivalentní s cauchyovskou posloupností racionálních čísel $\{b_n\}$. Tedy posloupnost $\{b_n\}$ je ekvivalentní s posloupností $\{a_n\}$ (tj. $y = x$).

iii) Z předpokladu máme $x = y$, tedy $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \forall n \geq N : \mid a_n - b_n \mid < \frac{\varepsilon}{2}$ a navíc $y = z$, tedy $\forall \varepsilon > 0\ \exists M \geq 1\ \forall n \geq M : \mid b_n - c_n \mid < \frac{\varepsilon}{2}$, kde ε je racionální číslo. Tedy dohromady platí: $\forall \varepsilon > 0\ \exists K = \max\{M, N\} \geq 1\ \forall n \geq K : \mid a_n - b_n \mid + \mid b_n - c_n \mid < \varepsilon$. Z trojúhelníkové nerovnosti dostaneme: $\varepsilon > \mid a_n - b_n \mid + \mid b_n - c_n \mid > \mid a_n - c_n \mid$. Odtud $\forall \varepsilon > 0\ \exists K \geq 1\ \forall n \geq K : \mid a_n - c_n \mid < \varepsilon$, tedy $x = z$. $\triangle$

Definice 4.13 (Sčítání)**.** Nechť $x = LIM_{n\to\infty} a_n$ a $y = LIM_{n\to\infty} b_n$. Potom definujeme *součet* $x + y := LIM_{n\to\infty}(a_n + b_n)$.

Nyní ukážeme, že sčítání je korektně definované.

Věta 4.14. *Nechť $x = LIM_{n\to\infty} a_n$ a $y = LIM_{n\to\infty} b_n$, kde $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou cauchyovské posloupnosti racionálních čísel. Potom $x + y$ je reálné číslo (tj. posloupnost racionálních čísel $\{a_n + b_n\}$ je cauchyovská).*

Důkaz
Víme, že $\{a_n\}$ je chauchyovská posloupnost
(tj. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \forall m, n > N : \mid a_n - a_m \mid < \frac{\varepsilon}{2}$) a navíc $\{b_n\}$ je chauchyovská posloupnost
(tj. $\forall \varepsilon > 0\ \exists M \geq 1\ \forall m, n > M : \mid b_n - b_m \mid < \frac{\varepsilon}{2}$).
Tedy $\forall \varepsilon > 0\ \exists K = \max\{M, N\}\ \ \forall m, n > K \ \ \mid a_n - a_m \mid + \mid b_n - b_m \mid < \varepsilon$.
Potom $\mid (a_n + b_n) - (a_m + b_m) \mid = \mid (a_n - a_m) + (b_n - b_m) \mid < \mid a_n - a_m \mid + \mid b_n - b_m \mid < \varepsilon$.
Tedy posloupnost $\{a_n + b_n\}$ je cauchyovská.

$\square$

Věta 4.15. *Nechť $x = LIM_{n\to\infty} a_n$, $y = LIM_{n\to\infty} b_n$ a $x' = LIM_{n\to\infty} a'_n$ jsou reálná čísla. Nechť $x = x'$, potom $x + y = x' + y$.*

Důkaz
Podle předpokladu víme, že $x = x' \Rightarrow \{a_n\}$ *a* $\{a'_n\}$ jsou ekvivalentní, tedy
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \forall n > N : \mid a_n - a'_n \mid < \varepsilon$. Zřejmě $\forall n \geq 1 : \mid b_n - b_n \mid = 0$.
Tedy celkem $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \forall n > N : \mid a_n - a'_n \mid + \mid b_n - b_n \mid < \varepsilon$.
Potom $\mid (a_n + b_n) - (a'_n + b_n) \mid = \mid (a_n - a'_n) + (b_n - b_n) \mid = \mid a_n - a'_n \mid < \varepsilon$.
Odtud tedy dostáváme, že posloupnost $\{a_n + b_n\}$ je ekvivalentní s posloupností $\{a'_n + b_n\}$ (tj. $x + y = x' + y$). $\square$

Věta 4.16. *Nechť $x = LIM_{n\to\infty} a_n$, $x' = LIM_{n\to\infty} a'_n$, $y = LIM_{n\to\infty} b_n$, $y' = LIM_{n\to\infty} b'_n$, kde $\{a_n\}$, $\{a'_n\}$, $\{b_n\}$, $\{b'_n\}$ jsou cauchyovské posloupnosti racionálních čísel. Pak pro $x = x'$ a $y = y'$ platí, že $x + y = x' + y'$.*

Důkaz
Z předpokladů máme, že $x = x'$ a $y = y'$, tedy posloupnost $\{a_n\}$ je ekvivalentní s $\{a'_n\}$ a

posloupnost $\{b_n\}$ je ekvivalentní s $\{b'_n\}$, tj. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \forall n > N : \mid a_n - a'_n \mid < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \forall n > N : \mid b_n - b'_n \mid < \frac{\varepsilon}{2}$,
tedy celkem $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \forall n > N : \mid a_n - a'_n \mid + \mid b_n - b'_n \mid < \varepsilon$.
Potom $\mid (a_n + b_n) - (a'_n + b'_n) \mid = \mid a_n - a'_n + b_n - b'_n \mid \leq \mid a_n - a'_n \mid + \mid b_n - b'_n \mid < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Odtud tedy dostáváme, že posloupnost $\{a_n + b_n\}$ je ekvivalentní s posloupností $\{a'_n + b'_n\}$, a tedy $x + y = x' + y'$.

□

Definice 4.17 (Násobení)**.** Nechť $x = LIM_{n\to\infty} a_n$ a $y = LIM_{n\to\infty} b_n$ jsou reálná čísla, potom definujeme *součin* $xy := LIM_{n\to\infty}(a_n b_n)$.

Nyní se přesvědčíme, že jsme násobení definovali korektně.

Věta 4.18. *Nechť $x = LIM_{n\to\infty} a_n$, $y = LIM_{n\to\infty} b_n$ a $x' = LIM_{n\to\infty} a'_n$ jsou reálná čísla, kde $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou cauchyovské posloupnosti racionálních čísel. Potom také xy je reálné číslo. Pokud navíc platí, že $x = x'$ potom $xy = x'y$.*

Důkaz

1) Ukážeme, že xy je reálné číslo, tedy $\forall \varepsilon > 0\ \exists T \geq 1\ \forall m, n > T \ \ \mid a_n b_n - a_m b_m \mid < \varepsilon$.
Víme, že $\{a_n\}$ je cauchyovská posloupnost, tedy
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \forall m, n > N \ \ \mid a_n - a_m \mid < \varepsilon$
a navíc $\{b_n\}$ je cauchyovská posloupnost, tedy
$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \geq 1\ \forall m, n > M \ \ \mid b_n - b_m \mid < \varepsilon$.
Protože $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou cauchyovské posloupnosti, existují $L, K > 0$ tak, že pro každé $n \geq 1 : (\mid a_n \mid \leq K) \wedge (\mid b_n \mid \leq L)$. BÚNO: $K \geq L$ potom také pro každé $n \geq 1$ $\mid b_n \mid \leq K$. Potom máme
$\mid a_n b_n - a_m b_m \mid = \mid a_n b_n - a_n b_m + a_n b_m - a_m b_m \mid \leq \mid a_n(b_n - b_m) \mid + \mid (a_n - a_m) b_m \mid \leq$
$\leq K\varepsilon + K\varepsilon = 2K\varepsilon$.
Odtud dostáváme, že $\{a_n b_n\}$ je cauchyovská posloupnost racionálních čísel.
$(\forall \varepsilon > 0\ \exists T = \max\{M, N\}\ \forall m, n > T \ \ \mid a_n b_n - a_m b_m \mid < \varepsilon)$

2) Podle předpokladu $\{a_n\}$ a $\{a'_n\}$ jsou ekvivalentní posloupnosti, tedy podle definice máme: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \forall n > N : \mid a_n - a'_m \mid < \varepsilon$. Dále z předpokladu víme, že $\{b_n\}$ je cauchyovská posloupnost, tedy omezená (tj. existuje $K > 0$ tak, že pro každé $n \geq 1$ platí $\mid b_n \mid \leq K$). Tedy $\mid a_n b_n - a'_n b_n \mid = \mid (a_n - a'_n) b_n \mid \leq \mid a_n - a'_n \mid\mid b_n \mid \leq K\varepsilon$. Odtud dostaneme, že $\{a_n b_n\}$ a $\{a'_n b_n\}$ jsou ekvivalentní.

□

Věta 4.19. *Nechť $x = LIM_{n\to\infty} a_n$, $x' = LIM_{n\to\infty} a'_n$, $y = LIM_{n\to\infty} b_n$, $y' = LIM_{n\to\infty} b'_n$, kde $\{a_n\}$, $\{a'_n\}$, $\{b_n\}$, $\{b'_n\}$ jsou cauchyovské posloupnosti racionálních čísel. Pak pro $x = x'$ a $y = y'$ platí, že $xy = x'y'$.*

Důkaz

1) Ukážeme, že za předpokladu $x = x'$ je posloupnost $\{a_n b_n\}$ ekvivalentní s posloupností $\{a'_n b_n\}$, tj. že pro $x = x'$ platí $xy = x'y$. Toto ovšem podle Věty 4.18 platí.

2) Ukážeme, že za předpokladu $y = y'$ je posloupnost $\{a_n b'_n\}$ ekvivalentní s posloupností $\{a'_n b'_n\}$, tj. že pro $y = y'$ platí $x'y = x'y'$. Toto ovšem podle Věty 4.18 platí.

3) Ukázali jsme, že pro $x = x'$ a $y = y'$, platí, že 1) $xy = x'y$ a 2) $x'y = x'y'$, tedy také že $xy = x'y'$, což je tvrzením věty.

□

Definice 4.20 (Prvky 0,1)**.** Nechť $\{a_n\}$ je racionální posloupnost ekvivalentní nulové posloupnosti, potom $0 := LIM_{n\to\infty} a_n$.
Nechť $\{b_n\}$ je racionální posloupnost ekvivalentní jednotkové posloupnosti, potom $1 := LIM_{n\to\infty} b_n$.

Věta 4.21. *Nechť $x = LIM_{n\to\infty} a_n$, $y = LIM_{n\to\infty} b_n$ a $z = LIM_{n\to\infty} c_n$ jsou reálná čísla. Potom pro každé $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí:*

i) $x + y = y + x$ *a* $xy = yx$

ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ *a* $(xy)z = x(yz)$

iii) $x + 0 = x$ *a* $x \cdot 1 = x$

iv) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists x' \in \mathbb{R}$ *tak, že* $x + x' = 0$

v) $x(y + z) = xy + yz$

Tímto ukážeme platnost tělesových axiomů **A1**, **A2**, **A3**, **A4**, **A6**.
Důkaz

i) Z definice máme: $x + y = LIM_{n\to\infty}(a_n + b_n) = LIM_{n\to\infty}(b_n + a_n) = y + x$. Zcela analogicky pro násobení.

ii) Z definice máme: $(x+y)+z = LIM_{n\to\infty}[(a_n+b_n)+c_n] = LIM_{n\to\infty}[a_n+(b_n+c_n)] = x + (y + z)$. Zcela analogicky pro násobení.

iii) Posloupnosti ekvivalentní nulové posloupnosti budeme značit: $\{0_n\}$.
Proto platí: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \forall n > N : |0_n - 0| = |\ 0_n\ | < \varepsilon$. Nyní ukážeme, že $\{a_n + 0_n\}$ a $\{a_n\}$ jsou ekvivalentní posloupnosti: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \forall n > N$:
$|\ a_n + 0_n - a_n\ | = |\ 0_n\ | < \varepsilon$. Odtud dostáváme požadovanou rovnost: $x + 0 = x$.

Posloupnosti ekvivalentní jednotkové posloupnosti budeme značit $\{1_n\}$. Navíc $\{a_n\}$ je cauchyovská posloupnost racionálních čísel, proto existuje $K > 0$ tak, že pro každé $n \geq 1$ platí $|\ a_n\ | \leq K$. Proto platí: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \forall n > N : |\ 1_n - 1\ | < \frac{\varepsilon}{K}$. Nyní ukážeme, že $\{1_n a_n\}$ a $\{a_n\}$ jsou ekvivalentní posloupnosti: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \forall n > N$:
$|\ 1_n a_n - a_n\ | = |\ (1_n - 1)a_n\ | = |\ 1_n - 1\ ||\ a_n\ | < \varepsilon$.

iv) Víme, že $\{a_n\}$ je cauchyovská posloupnost racionálních čísel, potom také $\{-a_n\}$ je cauchyovská posloupnost racionálních čísel. Potom zvolme $x' = LIM_{n\to\infty}(-a_n)$. Odtud dostaneme $x + x' = LIM_{n\to\infty}(a_n - a_n) = LIM_{n\to\infty} 0_n = 0$.

v) Podle definice máme $xy = LIM_{n\to\infty}(a_n b_n)$ a $xz = LIM_{n\to\infty}(a_n c_n)$.
Odtud $xy + yz = LIM_{n\to\infty}(a_n b_n + a_n c_n) = LIM_{n\to\infty}[a_n(b_n + c_n)] = x(y + z)$.

□

Definice 4.22 (Posloupnost odražená od nuly)**.** Racionální posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *odražená od nuly*, pokud existuje racionální číslo $c > 0$ tak, že pro každé $n \geq 1$ platí $| a_n |\geq c$.

Věta 4.23. *Nechť x je nenulové reálné číslo. Potom $x = LIM_{n\to\infty}a_n$, kde $\{a_n\}$ je cauchyovská posloupnost racionálních čísel odražená od nuly.*

Důkaz
Z předpokladu máme, že $x \in \mathbb{R}$, tedy $x = LIM_{n\to\infty}b_n$, kde $\{b_n\}$ je cauchyovská posloupnost racionálních čísel. Dále víme, že $x \neq 0$, tedy posloupnost $\{b_n\}$ není ekvivalentní s nulovou posloupností, tedy $\exists\varepsilon > 0\ \forall N \geq 1\ \forall n > N : | b_n |\geq \varepsilon$.
Zvolme $\varepsilon > 0 : \{b_n\}$ je cauchyovská posloupnost, tedy $\exists N \geq 1\ \forall m, n > N : | b_m - b_n |< \frac{\varepsilon}{2}$.
Víme, že nesmí platit $\forall n > N\ \ | b_n |< \varepsilon$, tedy $\exists n_0 > N : | b_{n_0} |\geq \varepsilon$.
Protože posloupnost $\{b_n\}$ je cauchyovská, dostaneme pro speciální volbu $m = n_0$:
$| b_{n_0} - b_n |< \frac{\varepsilon}{2}$. Použitím trojúhelníkové nerovnosti dostáváme:
$\frac{\varepsilon}{2} >| b_{n_0} - b_n |>| b_{n_0} | - | b_n |> \varepsilon - | b_n |$.
Odtud $\frac{\varepsilon}{2} <| b_n |$. Nyní definujeme posloupnost $\{a_n\}$:

$$a_n := \begin{cases} \frac{\epsilon}{2} & \text{pro } n < N \\ b_n & \text{pro } n \geq N \end{cases}$$

Posloupnost $\{a_n\}$ je zřejmě ekvivalentní s posloupností $\{b_n\}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je cauchyovská a odražená od nuly (z vlastností posloupnosti $\{b_n\}$). Z ekvivalence posloupností máme: $x = LIM_{n\to\infty}b_n = LIM_{n\to\infty}a_n$.

□

Věta 4.24. *Nechť $\{a_n\}$ je cauchyovská posloupnost racionálních čísel odražená od nuly. Potom posloupnost $\{a_n^{-1}\}$ je také cauchyovská.*

Důkaz
Z předpokladu víme, že $\{a_n\}$ je cauchyovská posloupnost racionálních čísel odražená od nuly. Odtud tedy platí:
$\exists c > 0\ \forall n \geq 1 : | a_n |\geq c$ a $\forall\varepsilon > 0\ \exists N > 1\ \forall m, n > N : | a_n - a_m |< c^2\varepsilon$.
Pak $| a_n^{-1} - a_m^{-1} |=| \frac{a_m - a_n}{a_m a_n} |< \frac{|a_m - a_n|}{c^2} < \varepsilon$. Tedy posloupnost $\{a_n^{-1}\}$ je cauchyovská. □

Definice 4.25 (Inverzní prvek)**.** Nechť x je nenulové reálné číslo, nechť $\{a_n\}$ je chauchyovská posloupnost racionálních čísel odražená od nuly taková, že $x = LIM_{n\to\infty}a_n$ (taková posloupnost existuje podle V4.23). Potom definujeme *inverzní prvek* k prvku x jako $x^{-1} := LIM_{n\to\infty}a_n^{-1}$.

Poznámka Z V4.24 víme, že x^{-1} je reálné číslo a z Věty 4.23 plyne platnost tělesového aximu **A5**.

Nyní ukážeme, že inverzní prvek je korektně definovaný.

Věta 4.26. *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou chauchyovské posloupnosti racionálních čísel odražené od nuly, pro které platí: $LIM_{n\to\infty}a_n = LIM_{n\to\infty}b_n$ (tedy posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou ekvivalentní). Potom platí $LIM_{n\to\infty}a_n^{-1} = LIM_{n\to\infty}b_n^{-1}$.*

Důkaz
Uvažujme následující součin $S := (LIM_{n\to\infty}a_n^{-1}) \cdot (LIM_{n\to\infty}a_n) \cdot (LIM_{n\to\infty}b_n^{-1})$. Z definice násobení $S = LIM_{n\to\infty}a_n^{-1}a_nb_n^{-1} = LIM_{n\to\infty}b_n^{-1}$.
Z předpokladů víme, že $LIM_{n\to\infty}a_n = LIM_{n\to\infty}b_n$. Potom můžeme přepsat součin S jako: $S = (LIM_{n\to\infty}a_n^{-1}) \cdot (LIM_{n\to\infty}b_n) \cdot (LIM_{n\to\infty}b_n^{-1}) = LIM_{n\to\infty}a_n^{-1}$.
Odtud dostáváme: $LIM_{n\to\infty}a_n^{-1} = S = LIM_{n\to\infty}b_n^{-1}$.

□

Tedy ukázali jsme, že množina reálných čísel je těleso s výše definovanými binárními operacemi.

4.3 Uspořádanost $\mathbb{R}$

V následujícím odstavci ukážeme, že těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ je uspořádané.

Definice 4.27. Řekneme, že cauchyovská posloupnost racionálních čísel je *zdola odražená od nuly*, pokud existuje $c > 0$ takové, že pro každé $n \geq 1$ platí $a_n > c$.
Řekneme, že cauchyovská posloupnost racionálních čísel je *shora odražená od nuly*, pokud existuje $d < 0$ takové, že pro každé $n \geq 1$ platí $a_n < d$.

Definice 4.28. Řekneme, že reálné číslo x je *kladné*, pokud lze psát $x = LIM_{n\to\infty}a_n$, kde $\{a_n\}$ je cauchyovská posloupnost racionálních čísel zdola odražená od nuly.
Řekneme, že reálné číslo x je *záporné*, pokud lze psát $x = LIM_{n\to\infty}b_n$, kde $\{b_n\}$ je cauchyovská posloupnost racionálních čísel shora odražená od nuly.

Věta 4.29.

i) Pro každé reálné číslo x nastane právě jedna z následujících možností:

$$(a)\ x = 0 \qquad (b)\ x \text{ je kladné} \qquad (c)\ x \text{ je záporné}$$

ii) Reálné číslo je záporné právě tehdy, když je reálné číslo $-x$ kladné.

iii) Pokud reálná čísla x a y jsou kladná, potom reálná čísla xy a $x+y$ jsou také kladná.

Důkaz

i) Nechť $\{a_n\}$ je cauchyovská posloupnost (racionálních čísel) ekvivalentní nulové posloupnosti, pak $x = LIM_{n\to\infty} a_n = 0$. Zřejmě vidíme, že platí možnost (a) (tj. $x = 0$) a neplatí možnost (b) ani (c)
Nyní ukážeme, že pokud neplatí možnost (a), potom platí buď možnost (b), nebo možnost (c). Pokud $x \neq 0$, potom $\{a_n\}$ je cauchyovská posloupnost racionálních čísel a zároveň platí: $\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \geq 1 \ \exists n > N : \mid a_n - 0 \mid \geq \varepsilon$. Protože $\{a_n\}$ je cauchyovská posloupnost, platí $\forall \varepsilon > 0 \ \exists 0 < \delta < \varepsilon$: $(\exists n_0 \geq 1 \ \forall n > n_0 : \ a_n \geq \delta) \vee (\exists n_0 \geq 1 \ \forall n > n_0 : \ a_n \leq -\delta)$.
Definujme posloupnost $\{b_n\}$ (pokud $\exists n_0 \geq 1 \ \forall n > n_0 : \ a_n \geq \delta$):

$$b_n := \begin{cases} \varepsilon & \text{pro } n < n_0 \\ a_n & \text{pro } n \geq n_0 \end{cases}$$

Definujme posloupnost $\{b'_n\}$ (pokud $\exists n_0 \geq 1 \ \forall n > n_0 : \ a_n \leq -\delta$):

$$b'_n := \begin{cases} -\varepsilon & \text{pro } n < n_0 \\ a_n & \text{pro } n \geq n_0 \end{cases}$$

Potom libovolná cauchyovská posloupnost racionálních čísel $\{a_n\}$, která je odražená od nuly, je ekvivalentní buď s posloupností $\{b_n\}$, nebo $\{b'_n\}$. Protože $\{b_n\}$ je kladná posloupnost a $\{b'_n\}$ je záporná posloupnost, dostáváme tvrzení.

ii) Nechť $x \in \mathbb{R}, \ x < 0$, potom z definice máme, že $x = LIM_{n\to\infty} a_n$ a $a_n < 0 \ \forall n \geq 1$. Potom $-x = LIM_{n\to\infty}(-a_n)$, tedy $-a_n > 0 \ \forall n \geq 1$, tedy $-x > 0$. Zcela analogicky lze ukázat opačnou implikaci.

iii) Nechť $x \in \mathbb{R}; \ x > 0 \ \Rightarrow (x = LIM_{n\to\infty} a_n) \wedge (\forall n \geq 1 : \ a_n > 0)$ a
nechť $y \in \mathbb{R}; \ y > 0 \ \Rightarrow (y = LIM_{n\to\infty} b_n) \wedge (\forall n \geq 1 : \ b_n > 0)$.
Odtud $(\forall n \geq 1 : \ a_n b_n > 0)$, tedy $xy = LIM_{n\to\infty} a_n b_n > 0$.
Obdobně $x + y = LIM_{n\to\infty} a_n + b_n \ \Rightarrow \ (\forall n \geq 1 : \ a_n + b_n > 0)$.

□

Definice 4.30. Nechť x, y jsou reálná čísla. Řekneme, že x je *větší než* y $(x > y)$, jestliže $x - y$ je kladné.

Věta 4.31. *Nechť x, y, z jsou reálná čísla. Potom platí následující:*

i) $x = y$ *nebo* $x < y$ *nebo* $x > y$ *(trichotomie)*

ii) nechť $(x < y) \wedge (y < z)$ *potom* $x < z$ *(tranzitivita)*

iii) nechť $x < y$ *potom* $x + z < y + z$

iv) nechť $(z > 0) \wedge (x < y)$ *potom* $xz < yz$.

Tímto dokážeme platnost axiomů uspořádání **O1**, **O2**, **O3**, **O4**.
Důkaz

i) Z předpokladu máme, že x, y jsou reálná čísla, potom také $x - y$ je reálné číslo. Zákon trichotomie, lze přepsat ve tvaru:

$$(a)\ x - y = 0 \qquad (b)\ x - y > 0 \qquad (c)\ x - y < 0$$

přičemž nastane právě jedna možnost. Toto je ovšem tvrzením Věty 4.29 i).

ii) Z předpokladu máme $(y - x > 0) \wedge (z - y > 0)$.
Podle Věty 4.29 iii) $y - x + z - y < 0 \;\Rightarrow\; z - x > 0 \;\Rightarrow\; z > x$.

iii) Z předpokladu máme $x < y \;\Rightarrow\; y-x > 0 \;\Rightarrow\; y-x+z-z < 0 \;\Rightarrow\; y+z-x-z < 0 \;\Rightarrow$
$\Rightarrow\; (y + z) - (x + z) > 0 \;\Rightarrow\; y + z > x + z$.

iv) Z předpokladu máme: $(y-x > 0) \wedge (z > 0)$. Z předpokladů víme, že x, y jsou reálná čísla, potom $y - x$ je reálné číslo. Proto můžeme použít Větu 4.29 iii). Odtud máme $z(y - x) > 0 \;\Rightarrow\; zy - zx > 0 \;\Rightarrow\; zy > zx$.

□

Ukázali jsme, že těleso reálných čísel je uspořádané.

4.4 Úplnost tělesa $\mathbb{R}$

Nyní ukážeme, že těleso reálných čísel je úplné.

Věta 4.32. *Nechť $\{a_n\}$ je cauchyovská posloupnost nezáporných racionálních čísel. Potom $LIM_{n\to\infty}a_n$ je nezáporné reálné číslo.*

Důkaz
Budeme dokazovat sporem. Nechť $x := LIM_{n\to\infty}a_n$ je záporné reálné číslo. Z definice máme, že $x = LIM_{n\to\infty}b_n$, kde $\{b_n\}$ je shora odražená od nuly (tj. $\exists -c < 0\ \forall n \geq 1 :$ $b_n \leq -c$). Z předpokladu věty máme, že $\forall n \geq 1\ a_n \geq 0$.
Odtud dostáváme, že $\forall n \geq 1 : \mid a_n - b_n \mid \geq \frac{c}{2}$, tedy $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ nejsou ekvivalentní posloupnosti. To je spor, protože mají mít stejnou formální limitu.

□

Poznámka Předchozí větu lze zobecnit. Věta platí i pro racionální chauchyovskou posloupnost splňující: $\exists N \geq 1\ \forall n \geq N :\ a_n > 0$. Důkaz je zcela analogický.

Věta 4.33. *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou cauchyovské posloupnosti racionálních čísel, pro které platí: $\forall n \geq 1\ \{a_n\} \geq \{b_n\}$. Potom $LIM_{n\to\infty}a_n \geq LIM_{n\to\infty}b_n$.*

Důkaz
Aplikujeme Větu 4.32. □

Věta 4.34. *Nechť x je kladné reálné číslo. Potom existuje kladné racionální číslo q tak, že $q \leq x$ a navíc existuje kladné celé číslo N takové, že $x \leq N$.*

Důkaz
Z předpokladu máme, že x je kladné, tedy existuje cauchyovská posloupnost $\{a_n\}$ odražená od nuly. Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, protože je cauchyovská. Tedy existují racionální čísla r, q taková, že pro každé $n \geq 1$: $0 < q \leq \{a_n\} \leq r$. Dále víme, že existuje kladné celé číslo N takové, že $r \leq N$ (zvolme N:=[r]+1). Tedy celkem máme pro každé $n \geq 1:\ q \leq \{a_n\} \leq N$. Podle Věty 4.33 dostáváme $q \leq x \leq N$.

□

Věta 4.35 (Archimédova vlastnost)**.** *Pro každé x reálné existuje přirozené číslo n tak, že platí: $n > x$.*

Důkaz
BÚNO: nechť x je kladné (jinak tvrzení platí pro n=1). Tedy x je kladné reálné číslo, tudíž podle Věty 4.34 platí, že existuje kladné celé číslo N takové, že $x \leq N$. Zvolme $n := N + 1$, potom dostáváme $x < n$.

□

Důsledek Pro každé reálné číslo $a > 0$ existuje přirozené číslo n tak, že platí: $a > \frac{1}{n}$.

Důsledek Pro každá dvě kladná reálná čísla $x,\ \varepsilon$ existuje přirozené číslo M tak, že platí: $M\varepsilon > x$.

Věta 4.36 (O hustotě $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$)**.** *Pro každá dvě reálná čísla $x,\ y$, pro která platí $x < y$, existuje racionální číslo q tak, že $x < q < y$.*

Důkaz
Z předpokladů máme, že $x, y \in \mathbb{R}$ a $x < y$. Chceme ukázat, že existuje $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$: $x < \frac{m}{n} < y$. Podle Věty 4.35 existuje $n \in \mathbb{N}$: $n > \frac{2}{y-x}$. Odtud úpravou dostaneme: $y - x > \frac{2}{n}$. Nyní zvolíme $m := [ny] - 1$:
víme, že platí $q = \frac{m}{n} < \frac{yn}{n} = y$ a také $q := \frac{m}{n} > \frac{ny-2}{n} = y - \frac{2}{n} > y - (y - x) = x$.

□

Problém 4.37. *Nechť $\{a_n\}$ je cauchyovská posloupnost racionálních čísel, nechť $x \in \mathbb{R}$. Ukažte:*

i) *Pokud* $\forall n \geq 1\ a_n \leq x$, *potom* $LIM_{n\to\infty} a_n \leq x$.

ii) *Pokud* $\forall n \geq 1\ a_n \geq x$, *potom* $LIM_{n\to\infty} a_n \geq x$.

Řešení

i) Budeme dokazovat sporem. Nechť $LIM_{n\to\infty}a_n > x$. Pak z hustoty racionálních čísel (Věta 4.36) existuje $q \in \mathbb{Q}: \ LIM_{n\to\infty}a_n > q > x$.
To je spor s předpokladem, protože: máme, že $x < q$, tedy $\forall n \geq 1: \ a_n \leq x < q$, ale podle věty 4.32 platí, že $LIM_{n\to\infty}a_n \leq x < q$.

ii) Zcela analogicky jako i).

$\triangle$

Poznámka Předchozí příklad lze zobecnit i na racionální cauchyovské posloupnosti splňující: $\exists N \geq 1 \ \forall n \geq N: \ a_n > 0$ (resp. $a_n < 0$). Řešení je opět analogické, pouze použijeme poznámku za Větu 4.32.

Problém 4.38. *Nechť $\{q_n\}$ je posloupnost racionálních čísel, pro kterou platí:*
$\forall M \geq 1 \ \forall n, n' \geq M : | \ q_n - q_{n'} \ | \leq \frac{1}{M}$*, kde $M, n, n' \in \mathbb{Z}$. Ukažte, že $\{q_n\}$ je cauchyovská posloupnost.*

Řešení
Máme: $\forall M \geq 1 \ \forall n, n' \geq M : | \ q_n - q_{n'} \ | \leq \frac{1}{M}$
Tedy $\forall \epsilon > 0 \ \exists M = [\frac{1}{\epsilon}] + 1 \ \forall n, n' > M : | \ q_n - q_{n'} \ | \leq \frac{1}{M} < \epsilon$.
(Protože $[\frac{1}{\epsilon}] + 1 > \frac{1}{\epsilon} \ \Rightarrow \ \frac{1}{M} = \frac{1}{[\frac{1}{\epsilon}]+1} < \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$.)

$\triangle$

Problém 4.39. *Nechť E je neprázdná podmnožina $\mathbb{R}$, nechť $n \geq 1, L < K$, kde $n, K, L \in \mathbb{Z}$. Nechť $\frac{K}{n}$ je horní závora množiny E, ale $\frac{L}{n}$ není horní závora množiny E. Dokažte, že existuje celé číslo m tak, že zároveň platí: $L < m \leq K$, $\frac{m}{n}$ je horní závora množiny E a $\frac{m-1}{n}$ není horní závora množiny E.*

Řešení
Nechť $n \geq 1, n \in \mathbb{Z}$. Pokud $m = L$, potom $\frac{m}{n}$ není horní závora množiny E, tedy $m > L$.
Nechť $m_1 = K$, potom $\frac{m_1}{n}$ je horní závora množiny E.
Pokud $\frac{m_1-1}{n}$ není horní závora množiny E, potom $m := m_1$. Jestliže $\frac{m_1-1}{n}$ je horní závora množiny E, definujeme $m_2 := m_1 - 1$.
Pokud $\frac{m_2-1}{n}$ není horní závora množiny E, potom $m := m_2$. Jestliže $\frac{m_2-1}{n}$ je horní závora množiny E, definujeme $m_3 := m_2 - 1$.
Indukcí tedy nalezneme celé číslo m s požadovanými vlastnostmi (protože $\frac{L}{n}$ není horní závora množiny E a mezi čísly L a K leží jen konečně mnoho celých čísel). $\triangle$

Problém 4.40. *Nechť E je neprázdná podmnožina $\mathbb{R}$, nechť $n \geq 1$ a nechť $m, m' \in \mathbb{Z}$, pro které platí: $\frac{m}{n}$ a $\frac{m'}{n}$ jsou horní závory množiny E, ale $\frac{m-1}{n}$ a $\frac{m'-1}{n}$ nejsou horní závory množiny E. Dokažte, že $m = m'$.*

Řešení
Budeme dokazovat sporem. Nechť $m \neq m'$. BÚNO: $m < m'$. Potom zřejmě platí: $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n}$. Odtud plyne $\frac{m-1}{n} < \frac{m}{n} < \frac{m'}{n}$. Protože $m < m'$ z vlastností přirozených čísel máme

$m \leq m' - 1 < m$, tedy odtud plyne $\frac{m}{n} \leq \frac{m'-1}{n} < \frac{m'}{n}$, ale víme, že $\frac{m}{n}$ je horní závora, tedy také $\frac{m'-1}{n}$ je také horní závora. To je ale spor., protože $\frac{m'-1}{n}$ má být také horní závora množiny E.

$\triangle$

Věta 4.41 (Jednoznačnost nejmenší horní závory). *Nechť E je podmnožina $\mathbb{R}$. Potom množina E může mít nejvýše jednu nejmenší horní závoru.*

Důkaz

Nechť M_1 a M_2 jsou dvě nejmenší horní závory. Pokud M_1 je nejmenší horní závora a M_2 je horní závora, potom platí: $M_1 \leq M_2$.
Pokud M_2 je nejmenší horní závora a M_1 je horní závora, potom platí: $M_2 \leq M_1$. Odtud máme, že $M_1 = M_2$. Tedy existuje nejvýše jedna nejmenší horní závora.

$\square$

Věta 4.42 (Existence nejmenší horní závory). *Nechť E je neprázdná podmnožina $\mathbb{R}$. Pokud množina E má nějakou horní závoru, potom existuje právě jedna nejmenší horní závora množiny E.*

Důkaz

Nechť E je neprázdná podmnožina $\mathbb{R}$, která má horní závoru. Potom podle Věty 4.41 dostaneme, že množina E má nejvýše jednu nejmenší horní závoru.
Zvolme prvek $x_0 \in E$ ($E \neq \emptyset$). Nechť $n \geq 1,\ n \in \mathbb{Z}$. Označme M jako horní závoru množiny E (E má horní závoru). Z důsledku Archimédovy vlastnosti existuje $K \in \mathbb{Z}$ tak, že $\frac{K}{n} > M$, odtud $\frac{K}{n}$ je také horní závora množiny E. Z druhého důsledku Archimédovy vlastnosti existuje $L \in \mathbb{Z}$ tak, že $\frac{L}{n} < x_0$. Protože $x_0 \in E$, dostáváme, že $\frac{L}{n}$ není horní závora množiny E. Snadno lze nahlédnout, že $K > L$.
Protože $\frac{K}{n}$ je horní závora množiny E a $\frac{L}{n}$ není horní závora množiny E, existuje celé číslo m_n tak, že $L < m_n \leq K$ a navíc platí, že $\frac{m_n}{n}$ je horní závora množiny E a $\frac{m_n-1}{n}$ není horní závora množiny E (podle Problému 4.39). Číslo m_n je určeno jednoznačně (podle Problému 4.40). Index n píšeme, abychom zdůraznili, že číslo m závisí na volbě n. Pak lze definovat posloupnost celých čísel $\{m_n\}$ tak, že pro každý její člen platí, že $\frac{m_n}{n}$ je horní závora množiny E a $\frac{m_n-1}{n}$ není horní závora množiny E.
Nechť $N \geq 1$ a nechť $n, n' \geq N$, kde $N, n, n' \in \mathbb{Z}$.
Protože $\frac{m_n}{n}$ je horní závora množiny E a $\frac{m_{n'}-1}{n'}$ není horní závora množiny E, platí $\frac{m_n}{n} > \frac{m_{n'}-1}{n'}$. Odtud snadnou úpravou dostaneme: $\frac{m_n}{n} - \frac{m_{n'}}{n'} > -\frac{1}{n'} \geq -\frac{1}{N}$.
Protože $\frac{m_{n'}}{n'}$ je horní závora množiny E a $\frac{m_n-1}{n}$ není horní závora množiny E, platí $\frac{m_{n'}}{n'} > \frac{m_n-1}{n}$. Odtud snadnou úpravou dostaneme: $\frac{m_n}{n} - \frac{m_{n'}}{n'} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$.

Tedy dohromady dostáváme: $\forall n, n' \geq N \geq 1 : \mid \frac{m_n}{n} - \frac{m_{n'}}{n'} \mid \leq \frac{1}{N}$.
Potom z Problému 4.38 plyne, že $\{\frac{m_n}{n}\}$ je cauchyovská posloupnost. Proto můžeme definovat reálné číslo $S := LIM_{n\to\infty} \frac{m_n}{n}$.
Zřejmě $S = LIM_{n\to\infty} \frac{m_n-1}{n}$ (posloupnosti $\{\frac{m_n}{n}\}$ a $\{\frac{m_n}{n} - \frac{1}{n}\}$ jsou ekvivalentní).

Nyní nám stačí ukázat, že S je nejmenší horní závora množiny E. Nejprve ukážeme, že S je horní závora množiny E. Nechť $x \in E$, potom $x \leq \frac{m_n}{n}$ pro každé $n \geq 1$ ($\frac{m_n}{n}$ je horní závora množiny E). Potom podle Problému 4.37 platí $x \leq LIM_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} = S$. Tedy S je horní závora množiny E.

Nyní ukážeme, že S je nejmenší horní závora množiny E. Nechť y je horní závora množiny E. Potom $y \geq \frac{m_n - 1}{n}$ ($\frac{m_n-1}{n}$ není horní závora mn. E). Potom podle Problému 4.37 platí $y \geq LIM_{n\to\infty} \frac{m_n-1}{n} = S$. Tedy horní závora S je menší nebo rovna libovolné horní závoře, tedy S je nejmenší horní závora množiny E.

□

Definice 4.43 (Supremum)**.** Nechť E je neprázdná omezená podmnožina $\mathbb{R}$, potom definujeme *supremum* množiny E (označení: $\sup(E)$) jako nejmenší horní závoru množiny E. (Korektnost této definice je zaručena předchozí větou.)

4.5 Dokončení konstrukce $\mathbb{R}$

V předchozích odstavcích jsme definovali množinu reálných čísel s operacemi sčítání a násobení. Dokázali jsme, že tato množina je úplné uspořádané těleso (tj. dokázali jsme platnost axiomů **A1-A6**, **O1-O4** a axiomu úplnosti). Nyní ukážeme, že formální limitu cauchyovské posloupnosti lze ztotožnit s limitou reálné cauchyovské posloupnosti.

Definice 4.44 (Reálná cauchyovská posloupnost)**.** Řekneme, že posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ je *cauchyovská*, pokud platí: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \forall m, n \geq N : | a_n - a_m | < \varepsilon$, kde ε je reálné číslo.

Věta 4.45. *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost racionálních čísel. Pak posloupnost $\{a_n\}$ je cauchyovská ve smyslu Definice 4.9 právě tehdy, když je posloupnost cauchyovská ve smyslu Definice 4.44.*

Důkaz
„$\Leftarrow$“: Podle Definice 4.44: $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}\ \exists N \geq 1\ \forall m, n \geq N : | a_n - a_m | < \varepsilon$. Odtud $\forall \varepsilon' > 0,\ \varepsilon' \in \mathbb{Q}\ \ \exists N \geq 1\ \forall m, n \geq N : | a_n - a_m | < \varepsilon'$ (protože $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$).

„$\Rightarrow$“: Podle Definice 4.9: $\forall \varepsilon > 0,\ \forall \varepsilon' \in \mathbb{Q}\ \ \exists N \geq 1\ \forall m, n \geq N : | a_n - a_m | < \varepsilon'$. Podle Věty 4.36 pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$ existuje $\epsilon' \in \mathbb{Q}$ takové, že $\varepsilon' < \varepsilon$. Potom máme: $\forall \varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbb{R}\ \ \exists \varepsilon' > 0,\ \varepsilon' \in \mathbb{Q},\ \varepsilon' < \varepsilon\ \ \exists N \geq 1\ \forall m, n \geq N : | a_n - a_m | < \varepsilon' < \varepsilon$. Tedy $\forall \varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbb{R}\ \exists N \geq 1\ \forall m, n \geq N : | a_n - a_m | < \varepsilon$. □

Definice 4.46. Nechť $L, \varepsilon \in \mathbb{R}$ a $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Posloupnost $\{a_n\}$ *konverguje k reálnému číslu* L, pokud platí: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \forall n \geq N : | a_n - L | \leq \varepsilon$.

Definice 4.47. Pokud posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ konverguje k reálnému číslu L, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ *má limitu* L, píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Věta 4.48. *Nechť $\{a_n\}$ je cauchyovská posloupnost racionálních čísel. Potom $\{a_n\}$ konverguje k $LIM_{n\to\infty} a_n$, tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = LIM_{n\to\infty} a_n$.*

Důkaz
Z předpokladu víme, že $\{a_n\}$ je cauchyovská posloupnost racionálních čísel, pak definujeme reálné číslo $L := LIM_{n\to\infty} a_n$. Nyní ukážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ konverguje k L: Budeme dokazovat sporem. Nechť $\varepsilon > 0$, nechť $\forall N \geq 1\ \exists m \geq N : \mid a_m - L \mid\geq \varepsilon$. Odtud plyne, že $\exists N \geq 1\ \exists m \geq N : \mid a_m - L \mid\geq \varepsilon$.
Víme, že $\{a_n\}$ je cauchyovská posloupnost, tedy
$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \forall m, n \geq N : \mid a_m - a_n \mid\leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Odtud $\frac{\varepsilon}{2} \geq\mid (a_m - L) - (a_n - L) \mid\geq\mid a_m - L \mid - \mid a_n - L \mid$.
Tedy celkem $\exists N \geq 1\ \forall n \geq N : \mid a_n - L \mid\geq \frac{\varepsilon}{2}$,
tedy platí $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \forall n \geq N :\ (a_n \geq L + \frac{\varepsilon}{2}) \vee (a_n \leq L - \frac{\varepsilon}{2})$. Podle Problému 4.37 dostaneme: $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \forall n \geq N (LIM_{n\to\infty} a_n \geq L+\frac{\varepsilon}{2}) \vee (LIM_{n\to\infty} a_n \leq L-\frac{\varepsilon}{2})$. Tedy $\mid L - L \mid\geq \frac{\varepsilon}{2}$. To je spor.

□

Definice 4.49 (otevřený interval)**.** Nechť a, b jsou dvě reálná čísla, pro která platí, že $a < b$. Potom množinu $M := \{c \in \mathbb{R} : (a < c) \wedge (c < b)\}$ nazveme otevřeným intervalem. Množinu M budeme značit (a, b).

Věta 4.50 (o $\mathbb{R}$)**.** *Existuje právě jedno uspořádané těleso $\mathbb{R}$ až na izomorfismus, na kterém jsou definovány operace $+$ a $\cdot$, konstanty 0 a 1 a binární relace $<$ splňující axiomy **A1-A6**, **O1-O4** a axiom úplnosti.*

Důkaz
Budeme dokazovat sporem: Nechť máme úplné uspořádané těleso F na kterém jsou definovány operace $+$ a $\cdot$, konstanty 0 a 1 a binární relace $<$ splňující axiomy **A1-A6**, **O1-O4** a axiom úplnosti a navíc platí, že $F \neq \mathbb{R}$.

1) Nechť F je menší těleso než $\mathbb{R}$, tedy existuje $x \in \mathbb{R} \setminus F$.
   Nyní definujeme množiny: $A := \{y \in \mathbb{R},\ y > x\}$; $B := \{z \in \mathbb{R},\ z < x\}$. Zřejmě platí, že $(A \cap F) \subset F$ a $(B \cap F) \subset F$. Protože F je úplné těleso, platí že $s, S \in F$, kde $s := \sup\{B \cap F\}$; $S := \inf\{A \cap F\}$. Potom ovšem $\underbrace{(s, S)}_{\subseteq\mathbb{R}} \cap F = \emptyset$.

   Pak buď $s = S$, potom ale $x = s = S$, to je spor, protože $x \in (\mathbb{R} \setminus F)$, ale $s, S \in F$. Nebo $s \neq S$, potom podle Věty 2.7 platí, že $\frac{s+S}{2} \in [(s, S) \cap F]$, což je spor, protože $(s, S) \cap F = \emptyset$.

2) Nechť F je větší těleso než $\mathbb{R}$, tedy existuje $x \in F \setminus \mathbb{R}$.
   Toto díky symetrii inkluze již plyne z 1).

□

Literatura

[1] Terence Tao: *Analysis I*, Hindustan Book Agency, New Dilhi, 2006, 388pp.

[2] H. S. Gaskill, P. D. Narayanaswami: *Foundations of analysis*, Harper and Row, New York, 1989.