OPONENTSKÝ POSUDEK NA BAKALÁŘSKOU PRÁCI

Autor bakalářské práce: Jaroslav Dufek
Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc.
Oponent: Doc. RNDr. Aleš Nekvinda, CSc.
Rok podání bakalářské práce: 2009

Bakalářská práce pana Jaroslava Dufka se zabývá zavedením reálných čísel. V prvních třech částech se budují základy uspořádaných těles, ve kterých platí axiom suprema (v práci axiom úplnosti). Zkoumají se zde také základní vlastnosti takových těles.

Ve čtvrté kapitole autor nejprve zavádí množinu přirozených čísel (Peanovou axiomatikou), potom celá čísla jako jisté třídy uspořádaných dvojic přirozených čísel a racionální čísla jakožto jisté třídy uspořádaných dvojic celých čísel. Těžiště práce ale spočívá v zavedení množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ jakožto množiny tříd ekvivalentních Cauchyovských posloupností racionálních čísel. Definuje se zde sčítání, násobení a uspořádání takových objektů. Dále se dokazuje, že $\mathbb{R}$ je uspořádané těleso, ve kterém platí axiom úplnosti.

Na závěr se dokazuje, že každé uspořádané těleso s axiomem úplnosti je až na izomorfismus rovno $\mathbb{R}$.

Jedná se o čistě kompilační práci a člověk by proto očekával perfektní formu. Autor se o ní snaží, ale přesto jsou v některých místech formální nedostatky, jejichž výčet následuje.

(1) str. 6, Definice 1.2: Ve všech ostatních definicích je $A \times B$, jen v definice 1.2 je $X \times Y$.
(2) str. 6, Definice 1.5: Asi by se mělo ukázat, žě prvky 0 a 1 jsou určeny jednoznačně.
(3) str. 14, Problém 2.10: Zde se v důkazu užije fakt, že $x.x > 0$ pro $x \neq 0$. Proč to platí?
(4) str. 17, Definice 3.6: $\mathbb{R}$ nebylo dosud definováno a přesto se vyskytuje v této definici.
(5) str. 18, Poznámka i): Argument pro fakt, že $\mathbb{N} \setminus \omega(\mathbb{N})$ má jediný prvek, je trochu nejasný. Chtělo by to přesný důkaz.
(6) str. 18, Poznámka ii): Symbol $n+1$ je v tuto chvíli divný, je definován až později.
(7) str. 18, řádek 8, Poznámka: Posloupnosti $(1+1/n)^n$ a $(1+1/n)^{n+1}$ jsou skutečně ekvivalentní, ale důkaz není úplný. Mělo by se alespoň říci, že $(1 + 1/n)^n$ je omezená.
(8) str. 22, řádek 10, Poznámka: Tato poznámka je vzhledem k následujícímu zbytečná.
(9) str. 22, řádek 18, Poznámka: Tato poznámka v podstatě definuje rovnost reálných čísel $LIM_{n\to\infty}a_n$ a $LIM_{n\to\infty}b_n$. Ale vzhledem k tomu, že reálných číslo je již dříve definováno jakožto určitá množina, je jasné, že rovnost reálných čísel znamená rovnost množin. Daleko lepší by bylo tuto poznámku zformulovat jako lemma: Dány dvě Cauchyovské posloupnosti a_n a b_n. Pak $LIM_{n\to\infty}a_n = LIM_{n\to\infty}b_n$ právě tehdy, pokud $a_n \approx b_n$.

Dále je asi zbytečné říkat symbolu $LIM_{n\to\infty} a_n$ formální limita. Tento symbol znamená reálné číslo a termín formální limita znamená pouze jiný název pro reálné číslo.

(10) str. 22, Věta 4.12: Tato věta říká, že $\approx$ je evivalence na S. Mělo by se to tedy dát dohromady s definicí 4.11.

(11) str. 23: Věta 4.15 je speciální případ věty 4.16, která je dokázána bez znalosti věty 4.15. Proč tam tedy věta 4.15 je?

(12) str. 34, Věta 4.50: Důkaz této věty selže, pokud $F \cap \mathbb{R} = \emptyset$. (viz $s = \inf(A \cap F)$ a máme potíže, pokud $A \cap F = \emptyset$). V důkazu se mlčky předpokládá, že $A \cap F \neq \emptyset, B \cap F \neq \emptyset$. Proč to můžeme předpokládat?

Všechny tyto nedostaky lze snadno odstranit, ale znamenalo by to úpravy textu na mnoha místech. Jedná se o průměrnou práci, která nicméně splňuje požadavky kladené na bakalářskou práci.

Práci doporučuji k obhajobě.

18. 1. 2009

Doc. RNDr. Aleš Nekvinda, CSc.