Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Ivana Šebestová

A posteriorní odhady chyby nespojité Galerkinovy metody pro konvektivně-difusní rovnice

Katedra numerické matematiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Dolejší Vít, Ph.D., DSc.
Studijní program: Matematika, Numerická a výpočtová matematika

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucímu své diplomové práce Doc. RNDr. Vítu Dolejšímu, Ph.D., DSc. za věnovaný čas a vstřícný přístup při vedení diplomové práce. Chtěla bych také poděkovat Doc. Mgr. Petru Knoblochovi, Dr. za odborné konzultace a velice cenné připomínky k mé diplomové práci, RNDr. Miloslavu Vlasákovi za přečtení rukopisu, dále pak také mým rodičům za všestrannou podporu.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 10. července 2009 Ivana Šebestová

....

Obsah

Název práce: A posteriorní odhady chyby nespojité Galerkinovy metody pro konvektivně-difusní rovnice
Autor: Ivana Šebestová
Katedra (ústav): Katedra numerické matematiky
Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Dolejší Vít, Ph.D., DSc.
e-mail vedoucího: dolejsi@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V práci se zabýváme a posteriorními odhady chyby nespojité Galerkinovy metody pro difusní problémy. Práce má dvě hlavní části. První popisuje různé přístupy, které vedou k získání a posteriorního odhadu pro Poissonovu rovnici se smíšenými okrajovými podmínkami. Druhá část je věnovaná rovnici vedení tepla diskretizované zpětnou Eulerovou metodou v čase. Odvozujeme indikátor chyby, který dává horní odhad.

Klíčová slova: nespojitá Galerkinova metoda, a posteriorní odhady chyby, Helmholtzův rozklad, Galerkinovská ortogonalita, princip duality

Title: A posteriori error estimates of the discontinuous Galerkin method for convection-diffusion equations
Author: Ivana Šebestová
Department: Department of Numerical Mathematics
Supervisor: Doc. RNDr. Dolejší Vít, Ph.D., DSc.
Supervisor's e-mail address: dolejsi@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: The thesis deals with a posteriori error estimates of the discontinuous Galerkin aproximations of diffusion problems. It has two main parts. In the first one we describe different approaches leading to a posteriori error estimate for the Poisson equation with mixed boundary conditions. The second one is concerned with a heat equation discretized by the backward Euler scheme in time. We derive a posteriori error estimator which provides the error upper bound.

Keywords: Discontinuous Galerkin method, a posteriori error estimates, Helmholtz decomposition, Galerkin orthogonality principle, duality principle

Úvod

Tato práce se věnuje problematice a posteriorních odhadů chyby nespojité Galerkinovy metody. Oproti původnímu zadání se zabýváme pouze difusním případem. V první kapitole je tento pojem definován a jsou zformulovány požadované vlastnosti odhadů. Základním zdrojem v této problematice je kniha [2], která shrnuje různé techniky používané k získání a posteriorních odhadů pro stacionární úlohy za použití konformní metody konečných prvků.

V druhé kapitole jsou podrobněji rozebrány a na Poissonově rovnici demonstrovány některé přístupy používané ve vztahu k nespojité Galerkinově metodě. Tyto přístupy jsou postupně založené na Galerkinovské ortogonalitě chyby, zavedení adjungovaného problému a ortogonálním rozkladu gradientu chyby. Diskutovány jsou také odlišnosti, které a posteriorní analýza nekonformní metody přináší oproti analýze metody konformní.

Na Katedře numerické matematiky byly v oblasti nespojité Galerkinovy metody dosud studovány pouze a priorní odhady, viz. např. [16, 17, 18, 19]. Jde tedy o první práci v této oblasti na katedře. Také z tohoto důvodu se v první části jedná hlavně o rešeršní práci.

V poslední kapitole je odvozen horní a posteriorní odhad pro rovnici vedení tepla diskretizovanou zpětnou Eulerovou metodou v čase a nespojitou Galerkinovou metodou v prostoru. A posteriorní analýza této rovnice pro konformní metodu konečných prvků diskretizované θ-schématem v čase je provedena v článku [14], pro nekonformní metodu konečných prvků (Crouzeix-Raviart) je rovnice analyzována v článku [9].

Kapitola 1

A posteriorní odhady chyby

A posteriorní odhady jsou důležitým nástrojem zejména v oblasti adaptivních metod. Při numerickém řešení nějaké úlohy požadujeme, aby chyba přibližného řešení splňovala předepsanou toleranci za použití minimálního počtu elementů. A posteriorní odhady nám umožňují zjistit, v jaké části sítě je chyba velká a kde je tedy třeba síť zjemnit.

Obecně se a posteriorním odhadem chyby rozumí odhad, který závisí pouze na spočteném přibližném řešení a datech úlohy. Pokud u je slabým řešením a u_h přibližným řešením dané úlohy, má odhad tvar

$$\|u - u_h\| \leq cf(u_h), \tag{1.1}$$

kde c je konstanta a f funkce přibližného řešení.

Vzhledem k výše zmíněným aplikacím by a posteriorní odhady měly splňovat řadu vlastností. V první řadě by měly garantovat omezení chyby shora (globální horní odhad) s konstantou, kterou umíme určit. Pak řekneme, že je odhad spolehlivý. Naopak odhad chyby zdola

$$f(u_h) \leq c\|u - u_h\|, \tag{1.2}$$

je důležitý, abychom věděli, že odhad shora není nadhodnocený a že jsme nezjemňovali příliš. V tomto případě řekneme, že je odhad efektivní. Poznamenejme, že výpočet daného indikátoru chyby by neměl být příliš časově náročný.

Kapitola 2

Poissonova úloha

V této kapitole se budeme věnovat různým přístupům pro odvození a posteriorních odhadů chyby nespojité Galerkinovy metody. Vše bude demonstrováno na modelové úloze Poissonovy rovnice se smíšenými okrajovými podmínkami.

2.1 Spojitý problém

V práci budeme užívat standardního značení funkčních prostorů viz. [8]. $L^q(\Omega)$ označuje Lebesgueovy prostory, $W^{k,q}(\Omega)$, $H^k(\Omega) \equiv W^{k,2}(\Omega)$ Sobolevovy prostory, kde $1 \leq q \leq \infty$ a $k \geq 1$ celé číslo. $H^{1/2}(\Gamma)$ ($\Gamma \subset \partial\Omega$) je prostor stop na Γ funkcí z $H^1(\Omega)$ a $H^{-1/2}(\Gamma)$ jeho duální prostor. Normy, resp. seminormy na těchto prostorech značíme $\|\cdot\|$, resp. $|\cdot|$. Navíc definujeme

$$\begin{aligned} H^1_g(\Omega) &= \{v \in H^1(\Omega); v = g \quad \text{na} \quad \partial\Omega\}, & (2.1)\\ H^1_{g_D,D}(\Omega) &= \{v \in H^1(\Omega); v = g_D \quad \text{na} \quad \partial\Omega_D\}, & (2.2)\\ H^1_D(\Omega) &= \{v \in H^1(\Omega);\, v = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega_D\}. & (2.3)\end{aligned}$$

Nechť $\Omega \in \mathbb{R}^d$ (d=2 nebo 3) je omezená polyhedrická oblast s hranicí $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$, $\partial\Omega_D \cap \partial\Omega_N = \emptyset$. Uvažujme problém:

$$
\begin{aligned}
-\triangle u &= f \quad \text{v} \quad \Omega, \\
u &= g_D \quad \text{na} \quad \partial\Omega_D, \\
\nabla u \cdot n &= g_N \quad \text{na} \quad \partial\Omega_N,
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

kde n je jednotková vnější normála k $\partial\Omega$, $g_D \in H^{1/2}(\partial\Omega_D)$ a $g_N \in H^{-1/2}(\partial\Omega_N)$. Předpokládejme, že $f \in L^2(\Omega)$.

Definice 2.1 *Funkci u nazveme slabým řešením problému* (2.4)*, pokud splňuje podmínky:*

$$
\begin{aligned}
u - u^* &\in H^1_D(\Omega), \\
\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx &= \int_{\partial\Omega_N} g_N v \, dS + \int_\Omega f v \, dx \quad \textit{pro} \quad \forall v \in H^1_D(\Omega),
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

kde g_D je stopou funkce u^*.

2.2 Triangulace a značení

Nechť $\mathcal{T}_h$ je dělení oblasti Ω sestávající ze simplexů nebo rovnoběžnostěnů. U jednotlivých metod bude dále specifikováno, jaká dělení uvažujeme. Hranici oblasti značíme $\partial\Omega \equiv \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$, kde na $\partial\Omega_D$, resp. $\partial\Omega_N$ je dána Dirichletova, resp. Neumannova okrajová podmínka. ∂K bude označovat hranici elementu K, $|K|$ d-dimenzionální Lebesgueovu míru elementu K a ρ_K poloměr maximální d-dimenzionální koule vepsané do elementu K. Definujeme $h_K = \operatorname{diam}(K)$. Dále $\mathcal{F}_h^I$, resp. $\mathcal{F}_h^D$, resp. $\mathcal{F}_h^N$ definujeme jako množinu vnitřních hran, resp. hran na části hranice $\partial\Omega_D$, resp. hran na části hranice $\partial\Omega_N$. Zkráceně budeme psát $\mathcal{F}_h^{DN} \equiv \mathcal{F}_h^D \cup \mathcal{F}_h^N$. Položíme $\mathcal{F}_h = \mathcal{F}_h^I \cup \mathcal{F}_h^D \cup \mathcal{F}_h^N$. Předpokládáme, že každá hrana Γ na hranici oblasti splňuje buď $\Gamma \in \mathcal{F}_h^D$, nebo $\Gamma \in \mathcal{F}_h^N$. Definujeme $h_\Gamma = \operatorname{diam}(\Gamma)$.

Na triangulaci $\mathcal{T}_h$ definujeme prostory funkcí

$$
H^s(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{v; v|_K \in H^s(K) \, \forall K \in \mathcal{T}_h\} \tag{2.6}
$$

s normou

$$
\|v\|^2_{H^s(\Omega,\mathcal{T}_h)} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v\|^2_{H^s(K)} \tag{2.7}
$$

a seminormou

$$|v|^2_{H^s(\Omega,\mathcal{T}_h)} = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} |v|^2_{H^s(K)}, \tag{2.8}$$

dále pak prostor nespojitých po částech polynomiálních funkcí

$$S_{hp} = \{v; v \in L^2(\Omega), v|_K \in P^p(K)\, \forall\, K \in \mathcal{T}_h\}, \tag{2.9}$$

kde $P^p(K)$ značí prostor polynomů na K stupně nejvýše p.

Pro každou $\Gamma \in \mathcal{F}_h^I$ označíme K_Γ^L a K_Γ^R elementy, které sdílí tuto hranu. Pro $\Gamma \in \mathcal{F}_h^{DN}$ pak značíme $\Gamma = \partial K \cap \partial\Omega \equiv \partial K_\Gamma^L \cap \partial\Omega$. Jednotkovou vnější normálu ke hraně $\Gamma \in \mathcal{F}_h$ značíme n_Γ. Orientace normály ke $\Gamma \in \mathcal{F}_h^{DN}$ je shodná s orientací vnější normály k $\partial\Omega$. Orientaci n_Γ ke $\Gamma \in \mathcal{F}_h^I$ definujeme jako jednotkovou normálu ke Γ směřující vně element K_Γ^L.

Předpokládáme, že triangulace $\mathcal{T}_h$ splňuje podmínky:

$$\exists C_s > 0 : \ \frac{h_K}{\rho_K} \le C_s\, \forall\, K \in \mathcal{T}_h, \tag{2.10}$$

$$\exists C_H > 0 : \ h_K \le C_H h_{K'}\ \forall K,\ K^{'} : \partial K \cap \partial K^{'} \neq \emptyset \text{sousední elementy.} \tag{2.11}$$

Pro funkce $v \in H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$ definujeme:

$$v_\Gamma^L = \text{stopa } v|_{K_\Gamma^L} \text{ na } \Gamma,\ \Gamma \in \mathcal{F}_h^I \tag{2.12}$$

$$v_\Gamma^R = \text{stopa } v|_{K_\Gamma^R} \text{ na } \Gamma,\ \Gamma \in \mathcal{F}_h^I \tag{2.13}$$

$$\langle v\rangle_\Gamma = \frac{1}{2}(v_\Gamma^L + v_\Gamma^R),\ \Gamma \in \mathcal{F}_h^I \tag{2.14}$$

$$[v]_\Gamma = v_\Gamma^L - v_\Gamma^R,\ \Gamma \in \mathcal{F}_h^I \tag{2.15}$$

$$v_\Gamma^L = \text{stopa } v|_{K_\Gamma^L} \text{ na } \Gamma,\ \Gamma \in \mathcal{F}_h^{DN} \tag{2.16}$$

$$\langle v\rangle_\Gamma = [v]_\Gamma = v_\Gamma^L,\ \Gamma \in \mathcal{F}_h^{DN} \tag{2.17}$$

Poznámka 2.2 *Pro zjednodušení zápisu budeme místo n_Γ, $[v]_\Gamma$, ... psát n, $[v]$, ..., pokud bude význam z kontextu zřejmý.*

V práci budeme používat následující značení:

$$
\begin{aligned}
\|\cdot\|_{k,\Omega} &= \|\cdot\|_{H^k(\Omega)}, && (2.18)\\
|\cdot|_{k,\Omega} &= |\cdot|_{H^k(\Omega)}, && (2.19)\\
\|\cdot\|_{\Omega} &= \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}, && (2.20)\\
\|\cdot\|_{\infty,\Omega} &= \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}, && (2.21)\\
\|\cdot\|_{1/2,\partial\Omega} &= \|\cdot\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, && (2.22)\\
\|\cdot\|_{-1/2,\partial\Omega} &= \|\cdot\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}. && (2.23)
\end{aligned}
$$

Úlohu (2.4) diskretizujeme nespojitou Galerkinovou metodou. Uvažujeme její tři možné varianty: symetrickou (SIPG), nesymetrickou (NIPG) a neúplnou (IIPG) a s nimi spojené značení

$$
a_h^k(u,v) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K \nabla u\cdot\nabla v\; dx - \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^{ID}} \int_\Gamma (\langle\nabla u\cdot n\rangle[v] - \theta\langle\nabla v\cdot n\rangle[u])\; dS, \quad (2.24)
$$

$$
F_h^k(v) = \int_\Omega fv\; dx + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^N} \int_\Gamma g_N v\; dS + \theta \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^D} \int_\Gamma (\nabla v\cdot n) g_D\; dS, \qquad (2.25)
$$

kde $k \in \{S, N, I\}$, $\theta = -1$ odpovídá symetrické formě, $\theta = 1$ nesymetrické formě a $\theta = 0$ neúplné formě nespojité Galerkinovy metody.

$$
J_h^\sigma(u,v) = \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^{ID}} \int_\Gamma \sigma[u][v]\; dS, \qquad (2.26)
$$

$$
J_D^\sigma(v) = \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^D} \int_\Gamma \sigma g_D v\; dS, \qquad (2.27)
$$

Parametr σ je definován takto

$$
\sigma|_\Gamma = \frac{C_W}{\max\{h_{K_\Gamma^L}, h_{K_\Gamma^R}\}} \quad \text{pro} \quad \Gamma\in\mathcal{F}_h^I, \qquad (2.28)
$$

resp.

$$
\sigma|_\Gamma = \frac{C_W}{h_{K_\Gamma^L}} \quad \text{pro} \quad \Gamma\in\mathcal{F}_h^D, \qquad (2.29)
$$

kde C_W je vhodná konstanta zajišťující koercivitu $\mathcal{B}_h^{k,\sigma}$.

$$\mathcal{B}_h^{k,\sigma}(u,v) = a_h^k(u,v) + J_h^\sigma(u,v), \quad k \in \{S,N,I\} \tag{2.30}$$

$$l_h^{k,\sigma}(v) = F_h^k(v) + J_D^\sigma(v), \quad k \in \{S,N,I\}. \tag{2.31}$$

Definice 2.3 *Funkci u_h nazveme nespojitou Galerkinovou aproximací řešení úlohy* (2.4)*, jestliže je řešením jednoho z následujících problémů:*
Najdi $u_h \in S_{hp}$ takové, že

$$\mathcal{B}_h^{k,\sigma}(u_h, v_h) = l_h^{k,\sigma}(v_h) \quad \forall\, v_h \in S_{hp}, \tag{2.32}$$

kde $k \in \{S,N,I\}$.

Následující dvě věty jsou zásadní pro analýzu nespojité Galerkinovy metody:

Věta 2.4 ***(Multiplikativní věta o stopách)*** *Existuje konstanta $C_M > 0$ nezávislá na v, h a K taková, že*

$$\|v\|_{\partial K}^2 \le C_M(\|v\|_K |v|_{1,K} + h_K^{-1}\|v\|_K^2), \quad K \in \mathcal{T}_h,\ v \in H^1(K). \tag{2.33}$$

Důkaz: Důkaz lze nalézt např. v [11]. □

Věta 2.5 ***(Inverzní nerovnost)*** *Existuje konstanta $C_I > 0$ nezávislá na v, h a K taková, že*

$$|v|_{1,K} \le C_I h_K^{-1}\|v\|_K, \quad K \in \mathcal{T}_h,\ v \in P^p(K). \tag{2.34}$$

Důkaz: Viz. např. [7]. □

Dříve než přistoupíme k a posteriorním odhadům nespojité Galerkinovy metody, poznamenejme, jaké jsou základní odlišnosti oproti konformním metodám.

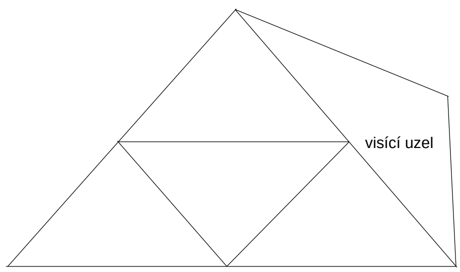
Podstatným rozdílem je skutečnost, že prostor S_{hp}, který je spjat se schématem (2.32), neleží v prostoru $H_D^1(\Omega)$. Nemůžeme tedy do slabé formulace problému (2.4) dosazovat funkce z prostoru S_{hp}. Pro odvození a posteriorního odhadu chyby je proto důležité, jak dobře lze nespojité po částech polynomiální funkce aproximovat spojitými po částech polynomiálními funkcemi. V důkazu příslušné věty se používá následující lemma dokázané v [1]:

Lemma 2.6 *Nechť je dáno N reálných čísel $\{\alpha_1, ..., \alpha_N\}$. Položme $\beta = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_j$. Pak platí*

$$\sum_{j=1}^{N}|\alpha_j - \beta|^2 \le c\sum_{j=1}^{N-1}|\alpha_{j+1} - \alpha_j|^2, \tag{2.35}$$

kde c závisí jen na N.

Poznámka 2.7 *Dělení oblasti $\mathcal{T}_h$, které obsahuje visící uzly (viz. obrázek 2.1) nazýváme nekonformní. Naopak síť bez takovýchto uzlů nazýváme konformní.*



Obrázek 2.1: Triangulace s visícím uzlem.

Věta 2.8 *Nechť $\mathcal{T}_h$ je konformní, nebo nekonformní trojúhelníková, resp. čtyřstěnová síť ve 2D, resp. 3D. Předpokládejme, že síť vyhovuje podmínkám (2.10) a (2.11). Nechť g, resp. g_D je restrikcí na $\partial\Omega$, resp. $\partial\Omega_D$ nějaké funkce z $S_{hp} \cap H^1(\Omega)$. Pro libovolnou $v_h \in S_{hp}$ a $i = 0, 1$ pak*

(i) existuje $\chi_1 \in S_{hp} \cap H^1(\Omega)$ splňující $\chi_1|_{\partial\Omega} = g$ a

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|v_h - \chi_1\|_{i,K}^2 \le C_{O1}^2\left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma^{1-2i}\|[v_h]\|_\Gamma^2 + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^D} h_\Gamma^{1-2i}\|v_h - g\|_\Gamma^2\right) \tag{2.36}$$

(ii) existuje $\chi_2 \in S_{hp} \cap H^1(\Omega)$ *splňující* $\chi_2|_{\partial\Omega_D} = g_D$ *a*

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|v_h - \chi_2\|_{i,K}^2 \le C_{O2}^2 \left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma^{1-2i} \|[v_h]\|_\Gamma^2 + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^D} h_\Gamma^{1-2i} \|v_h - g_D\|_\Gamma^2 \right) \tag{2.37}$$

(iii) existuje $\chi_3 \in S_{hp} \cap H^1(\Omega)$ *splňující*

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|v_h - \chi_3\|_{i,K}^2 \le C_{O3}^2 \left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma^{1-2i} \|[v_h]\|_\Gamma^2 \right), \tag{2.38}$$

kde konstanty C_{O1}, C_{O2}, C_{O3} *nezávisí na* h *ani na* v_h.

Poznámka 2.9 *Věta byla v případě homogenních Dirichletových podmínek na celé hranici dokázána v [1], případ se smíšenými okrajovými podmínkami, ale s konformní sítí byl dokázán v [3].*

Důkaz: Vzhledem k poznámce budeme větu dokazovat pro případ nekonformní sítě. Poznamenejme, že stačí ukázat (2.37). Značení se bude z velké části shodovat se značením ve [3].
Označme a_i, $1 \le i \le d+1$ vrcholy elementu K.

Lagrangeovými stupni volnosti elementu K budeme rozumět funkční hodnoty v bodech

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_1 + \frac{i}{p}(a_2 - a_1) + \frac{j}{p}(a_3 - a_1), \quad 0 \le i+j \le d, \quad \text{pro} \quad d=2; \\ a_{ijk} &= a_1 + \frac{i}{p}(a_2 - a_1) + \frac{j}{p}(a_3 - a_1) + \frac{k}{p}(a_4 - a_1), \\ &\quad 0 \le i+j+k \le d, \quad \text{pro} \quad d=3, \end{aligned}$$

kde p je stupeň polynomiální aproximace. Pro každý element $K \in \mathcal{T}_h$ označme $\mathcal{N}_K = \{x_K^j, j = 1, ..., m\}$ množinu uzlů odpovídajících Lagrangeovým stupňům volnosti K a $\{\phi_K^j, j = 1, ..., m\}$ množinu odpovídajících bázových funkcí splňujících $\phi_K^j(x_K^i) = \delta_{ij}$. Položme $\mathcal{N} = \bigcup_{K\in\mathcal{T}_h} \mathcal{N}_K$ a rozdělme danou množinu na tři:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^I &= \{\nu \in \mathcal{N}; \nu \in \Omega^\circ\}, \\ \mathcal{N}_D^B &= \{\nu \in \mathcal{N}; \nu \in \partial\Omega_D\}, \\ \mathcal{N}_N^B &= \{\nu \in \mathcal{N}; \nu \in \partial\Omega_N\}. \end{aligned}$$

Uzel $\nu \in \mathcal{N}_D^B \cap \mathcal{N}_N^B$ z množiny $\mathcal{N}_N^B$ odebereme, abychom získali disjunktní sjednocení $\mathcal{N}$. Dále pro každý uzel $\nu \in \mathcal{N}$ definujeme $\omega_\nu = \{K \in \mathcal{T}_h; \nu \in K\}$. Pro zjednodušení zápisu zavádíme značení:

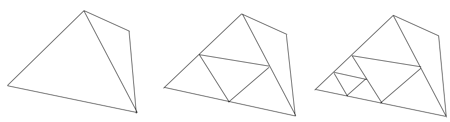
$$S_{hp}^{g_D} \;=\; S_{hp} \cap H^1_{g_D,D}(\Omega).$$

Nechť je $\mathcal{T}_h^0$ konformní síť. Nechť existuje zobrazení $Level : \mathcal{T}_h \to N$ ($N \geq 0$ celé) takové, že

(1) $Level(K) = 0 \, \forall K \in \mathcal{T}_h^0$,

(2) pro $K \in \omega_\nu \backslash \tilde{\omega}_\nu$ a $\tilde{K} \in \tilde{\omega}_\nu$ je $Level(K) > Level(\tilde{K})$,

kde $\tilde{\omega}_\nu$ je vlastní podmnožina ω_ν taková, že:
($\tilde{K} \in \tilde{\omega}_\nu \Rightarrow \nu$ není uzel odpovídající některému z Lagrangeovských stupňů volnosti příslušných elementu $\tilde{K}$).
Pokud ν je takovýto visící uzel, $\tilde{\omega}_\nu$ je neprázdná. Budeme předpokládat, že síť $\mathcal{T}_h$ vznikla z $\mathcal{T}_h^0$ po několika iteracích následujícím způsobem. Uvažujeme-li případ ve 2D (viz. obrázek 2.2), pak v $i-$té iteraci vezmeme některé trojúhelníky levelu $i-1$ a rozdělíme je na čtyři menší spojením středů jejich stran. V případě 3D bychom postupovali analogicky.



Obrázek 2.2: Část triangulace $\mathcal{T}_h^0$ (vlevo), 1. iterace - vznik elementů levelu 1 (uprostřed), 2. iterace - vznik elementů levelu 2 (vpravo).

Označme $\mathcal{N}^{g_D}$ množinu uzlů potřebných k sestrojení $\chi_2 \in S_{hp}^{g_D}$.
Ke každému uzlu $\nu \in \mathcal{N}^{g_D}$ přiřadíme bázovou funkci ϕ^ν následovně:

$$supp\, \phi^\nu = \bigcup_{K \in \omega_\nu} K, \quad \phi^\nu|_K = \phi_K^j, \quad x_K^j = \nu.$$

Uvažujme $v_h \equiv \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{j=1}^m \alpha_K^j\phi_K^j \in S_{hp}$. Aproximace $\chi_2 \in S_{hp}^{g_D}$ je pak dána tzv. Oswaldovou interpolací v_h, která je definována (viz. např. [1]):

$$\chi_2 = \sum_{\nu\in\mathcal{N}^{g_D}} \beta^\nu\phi^\nu, kde\ \beta^\nu = \begin{cases} g_D(\nu), & \nu\in\mathcal{N}_D^B \\ \frac{1}{|\omega_\nu|}\sum_{x_K^j=\nu}\alpha_K^j, & \nu\in\mathcal{N}^{g_D}\backslash\mathcal{N}_D^B. \end{cases} \tag{2.39}$$

Položíme $\beta_K^j = \beta^\nu$ kdykoli $x_K^j = \nu$. Na zbývajících uzlech (tj. visících uzlech tvořících množinu $\mathcal{N}\backslash\mathcal{N}^{g_D}$) je funkce χ_2 již jednoznačně definována. Proto položíme $\beta^\nu = \chi_2(\nu)$ pro $\nu\in\mathcal{N}\backslash\mathcal{N}^{g_D}$. Dále označíme $\alpha_{\tilde K}^\nu = (v_h|_{\tilde K})(\nu)$ pro $\tilde K\in\tilde\omega_\nu$, $\nu\in\mathcal{N}\backslash\mathcal{N}^{g_D}$ a $\mathcal{T}_h^l = \{K\in\mathcal{T}_h; Level(K) = l\}$. Použitím standardního odhadu metody konečných prvků $\|\phi_K^j\|_{i,K}^2 \le ch_K^{d-2i}$, $i = 0,1$, $j = 1,...,m$ (viz. [7]) můžeme psát:

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|v_h-\chi_2\|_{i,K}^2 \le c\left(\sum_{\nu\in\mathcal{N}^{g_D}} h_\nu^{d-2i}\sum_{x_K^j=\nu}|\alpha_K^j-\beta^\nu|^2 + \right.$$
$$\left. + \sum_{\nu\in\mathcal{N}\backslash\mathcal{N}^{g_D}} h_\nu^{d-2i}\sum_{\substack{x_K^j=\nu \\ K\in\omega_\nu\backslash\tilde\omega_\nu}}|\alpha_K^j-\beta^\nu|^2\right), \tag{2.40}$$

kde $h_\nu = \max\limits_{K\in\omega_\nu} h_K$.

První člen lze odhadnout podle [3] takto:

$$\sum_{\nu\in\mathcal{N}^{g_D}} h_\nu^{d-2i}\sum_{x_K^j=\nu}|\alpha_K^j-\beta^\nu|^2 \le c\left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma^{1-2i}\|[v_h]\|_\Gamma^2 + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^D} h_\Gamma^{1-2i}\|v_h-g_D\|_\Gamma^2\right) \tag{2.41}$$

Odhad druhého členu:

Pro každý vrchol $x_K^j = \nu$ a element $K\in\omega_\nu\backslash\tilde\omega_\nu$, uvažujeme $\tilde K\in\tilde\omega_\nu$, takový, že $\Gamma_{K,\tilde K}\equiv\partial K\cap\partial\tilde K\ne\emptyset$. Dle definice je

$$Level(K) > Level(\tilde K). \tag{2.42}$$

Použijeme nerovnost

$$|\alpha_K^j-\beta^\nu|^2 \le 2|\alpha_K^j-\alpha_{\tilde K}^\nu|^2 + 2|\alpha_{\tilde K}^\nu-\beta^\nu|^2$$

a odhadneme členy na pravé straně. Protože $|\alpha^j_K - \alpha^\nu_{\tilde{K}}|$ je skok v_h v bodě ν přes hranu sdílenou K a $\tilde{K}$, platí:

$$|\alpha^j_K - \alpha^\nu_{\tilde{K}}|^2 \le \|[v_h]\|^2_{\infty,\Gamma_{K,\tilde{K}}}$$

Vzhledem ke kvaziuniformitě sítě $\mathcal{T}_h$ a $L^\infty - L^2$ nerovnosti pro funkce z konečně dimenzionálních prostorů dostaneme:

$$h_\nu^{d-2i}|\alpha^j_K - \alpha^\nu_{\tilde{K}}|^2 \le c h^{d-2i}_{\Gamma_{K,\tilde{K}}} \|[v_h]\|^2_{\infty,\Gamma_{K,\tilde{K}}} \le \tilde{c} h^{1-2i}_{\Gamma_{K,\tilde{K}}} \|[v_h]\|^2_{\Gamma_{K,\tilde{K}}}. \tag{2.43}$$

Dále

$$|\alpha^\nu_{\tilde{K}} - \beta^\nu|^2 = |v_h|_{\tilde{K}}(\nu) - \chi_2|_{\tilde{K}}(\nu)|^2 \le \sum_{j=1}^m |\phi^j_{\tilde{K}}|^2 \sum_{j=1}^m |\alpha^j_{\tilde{K}} - \beta^j_{\tilde{K}}|^2. \tag{2.44}$$

Nyní využitím odhadů (2.43) a (2.44) a faktu (2.42) můžeme psát

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu\in\mathcal{N}\setminus\mathcal{N}^{g_D}} h_\nu^{d-2i} \sum_{l=0}^{Lmax} \sum_{K\in\mathcal{T}_h^l} \sum_{\substack{x^j_K=\nu \\ K\in\omega_\nu\setminus\tilde{\omega}_\nu}} |\alpha^j_K - \beta^\nu|^2 \\
&\le c \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma^{1-2i}\|[v_h]\|^2_\Gamma + c\sum_{l=0}^{L}\sum_{K\in\mathcal{T}_h^l} h_K^{d-2i}\sum_{j=1}^m |\alpha^j_K - \beta^j_K|^2 \\
&\le c \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma^{1-2i}\|[v_h]\|^2_\Gamma + c\left(\sum_{\nu\in\mathcal{N}^{g_D}} h_\nu^{d-2i}\sum_{x^j_K=\nu}|\alpha^j_K - \beta^\nu|^2\right. \\
&\left. + \sum_{\nu\in\mathcal{N}\setminus\,\mathcal{N}^{g_D}} \sum_{l=0}^{L}\sum_{K\in\mathcal{T}_h^l} h_\nu^{d-2i} \sum_{\substack{x^j_K=\nu \\ K\in\omega_\nu\setminus\,\tilde{\omega}_\nu}} |\alpha^j_K - \beta^\nu|^2\right),
\end{aligned} \tag{2.45}$$

kde $Lmax = \max\{Level(K) : K \in \mathcal{T}_h\}$ a $0 \le L < Lmax$.

Poslední řádek (2.45) se liší od pravé strany (2.40) pouze tím, že se v součtech přes množinu $\mathcal{N}\setminus\mathcal{N}^{g_D}$ vyskytují elementy úrovně (striktně) menší než $Lmax$. Po opakovaném použití předchozího postupu proto nakonec dojdeme k nerovnosti

$$\sum_{\nu\in\mathcal{N}\setminus\mathcal{N}^{g_D}} h_\nu^{d-2i} \sum_{l=0}^{Lmax} \sum_{K\in\mathcal{T}_h^l} \sum_{\substack{x_K^j=\nu \\ K\in\omega_\nu\setminus\tilde{\omega}_\nu}} |\alpha_K^j - \beta^\nu|^2 \leq c \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma^{1-2i} \|[v_h]\|_\Gamma^2 + c \sum_{\nu\in\mathcal{N}^{g_D}} h_\nu^{d-2i} \sum_{x_K^j=\nu} |\alpha_K^j - \beta^\nu|^2. \tag{2.46}$$

Z odhadů (2.40), (2.41) a (2.46) pak plyne tvrzení věty. □

Definice 2.10 ***(Oswaldův interpolační operátor)*** *Oswaldův interpolační operátor v závislosti na zadaných okrajových podmínkách je definován takto:*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}_{Os}^g : \quad S_{hp} & \to & S_{hp} \cap H_g^1(\Omega) \\ \mathcal{I}_{Os}^g(\cdot) & = & \chi_1, \end{array} \tag{2.47}$$

kde χ_1 *je funkce z věty 2.8 (i),*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}_{Os}^{g_D} : \quad S_{hp} & \to & S_{hp} \cap H_{g_D,D}^1(\Omega) \\ \mathcal{I}_{Os}^{g_D}(\cdot) & = & \chi_2, \end{array} \tag{2.48}$$

kde χ_2 *je funkce z věty 2.8 (ii),*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}_{Os} : \quad S_{hp} & \to & S_{hp} \cap H^1(\Omega) \\ \mathcal{I}_{Os}(\cdot) & = & \chi_3, \end{array} \tag{2.49}$$

kde χ_3 *je funkce z věty 2.8 (iii). Funkce* g *a* g_D *jsou jako ve větě 2.8.*

Poznámka 2.11 *V případě homogenních okrajových podmínek budeme psát* $\mathcal{I}_{Os}^0$ *místo* $\mathcal{I}_{Os}^g$*.*

V následujících oddílech rozebereme různé metody pro odvození a posteriorního odhadu chyby v tzv. DG-normě definované

$$|||v||| \equiv \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K \nabla v \cdot \nabla v \, dx + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^{ID}} \int_\Gamma \sigma[v][v] \, dS \quad \forall v \in H^1(\Omega, \mathcal{T}_h) \tag{2.50}$$

a L^2 normě.

2.3 A posteriorní odhad reziduálního typu založený na Galerkinovské ortogonalitě chyby

Jako první se budeme věnovat přístupu Karakashiana a Pascala [1, 3, 4], který užívá Galerkinovské ortogonality chyby.
Odhad DG-normy:

Protože se ve výrazu

$$\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^{ID}} \int_\Gamma \sigma[u-u_h]^2\,dS = \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^{I}} \int_\Gamma \sigma[u_h]^2\,dS + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^{D}} \int_\Gamma \sigma[g_D-u_h]^2\,dS \quad (2.51)$$

vyskytují jen známé veličiny, stačí odvodit odhad: $|e|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_h)}$.

Následující výsledek je dokázán v článku [4]. Autoři sice uvažují pouze metodu SIPG, důkaz však projde i pro metody NIPG a IIPG. V dalším ukážeme hlavní body důkazu.

Věta 2.12 *Položme $e = u - u_h$. Pak platí:*

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|\nabla e\|_K^2 \le c\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2\|f+\triangle u_h\|_K^2 + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma\|[\partial_n u_h]\|_\Gamma^2 \right.$$
$$\left. + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^N} h_\Gamma\|g_N-\partial_n u_h\|_\Gamma^2 + C_W^2\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma^{-1}\|[u_h]\|_\Gamma^2 + C_W^2\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^D} h_\Gamma^{-1}\|g_D-u_h\|_\Gamma^2\right), \quad (2.52)$$

kde konstanta c nezávisí na h ani C_W.

Pro zjednodušení předpokládejme, že f je po částech polynomiální funkce na síti $\mathcal{T}_h$. Aplikací per partes dostáváme

$$\begin{aligned}
\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K \nabla e\cdot\nabla\eta\,dx &= -\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K \triangle e\,\eta\,dx + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_{\partial K}\nabla e\cdot n\eta\,dS \\
= \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K (f+\triangle u_h)\eta\,dx &+ \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma (\langle\nabla e\cdot n\rangle[\eta]+[\nabla e\cdot n]\langle\eta\rangle)\,dS \\
&+ \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^{DN}}\int_\Gamma \nabla e\cdot n\eta\,dS \quad \text{pro} \quad \forall\eta\in H^1(\Omega,\mathcal{T}_h).
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Nechť v_h je L^2 projekce e na S_{h0}. Dosazením $\eta = e - v_h$ získáme vyjádření pro $|e|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_h)}$ ve tvaru

$$\begin{aligned}
\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|\nabla e\|_K^2 &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K (f+\triangle u_h)(e-v_h)\,dx - \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma \langle\nabla e\cdot n\rangle[u_h+v_h]\,dS \\
&- \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma [\nabla u_h\cdot n]\langle e-v_h\rangle\,dS + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^D}\int_\Gamma \nabla e\cdot n(g_D-u_h-v_h)\,dS \\
&+ \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^N}\int_\Gamma (g_N-\nabla u_h\cdot n)(e-v_h)\,dS.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Galerkinovská ortogonalita chyby nyní umožňuje eliminovat členy s $\nabla e\cdot n$. Odečtením $\mathcal{B}_h^{k,\sigma}(e, u_h+v_h-\mathcal{I}_{Os}^{g_D}(u_h))(=0)$ od obou stran rovnice (2.54) vyjde:

$$\begin{aligned}
\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|\nabla e\|_K^2 &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K (f+\triangle u_h)(e-v_h)\,dx - \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K \nabla e\cdot\nabla(u_h-\mathcal{I}_{Os}^{g_D}(u_h))\,dx \\
&- \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma [\nabla u_h\cdot n]\langle e-v_h\rangle\,dS + \theta\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma \langle\nabla(u_h-\mathcal{I}_{Os}^{g_D}(u_h))\cdot n\rangle[u_h]\,dS \\
&+ \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma \sigma[u_h][u_h+v_h]\,dS - \theta\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^D}\int_\Gamma \nabla(u_h-\mathcal{I}_{Os}^{g_D}(u_h))\cdot n(g_D-u_h)\,dS \\
&- \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^D}\int_\Gamma \sigma(g_D-u_h)(u_h+v_h-g_D)\,dS + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^N}\int_\Gamma (g_N-\nabla u_h\cdot n)(e-v_h)\,dS.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Použijeme-li v (2.55) Youngovu nerovnost, jedinými výrazy obsahující neznámá data budou:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\epsilon_1}{2}\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^{-2}\|e-v_h\|_K^2, \quad \epsilon_2\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|\nabla e\|_K^2, \quad \frac{1}{4\epsilon_2}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|\nabla(u_h-\mathcal{I}_{Os}^{g_D}(u_h))\|_K^2,\\
&\frac{\epsilon_6}{2}\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma^{-1}\|\langle e-v_h\rangle\|_\Gamma^2, \quad \frac{1}{2}\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma\|\langle\nabla(u_h-\mathcal{I}_{Os}^{g_D}(u_h))\cdot n\rangle\|_\Gamma^2,\\
&\frac{\epsilon_3}{2}\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\sigma\|[u_h+v_h]\|_\Gamma^2, \quad \frac{1}{2}\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^D} h_\Gamma\|\nabla(u_h-\mathcal{I}_{Os}^{g_D}(u_h))\cdot n\|_\Gamma^2,\\
&\frac{\epsilon_4}{2}\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^D}\sigma\|u_h+v_h-g_D\|_\Gamma^2, \quad \frac{\epsilon_5}{2}\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^N} h_\Gamma^{-1}\|e-v_h\|_\Gamma^2.
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

Využitím aproximativních vlastností v_h se první člen odhadne pomocí

$$\frac{\epsilon_1}{2}\sum_{K\in\mathcal{T}_h} c\|\nabla e\|_K^2.$$

Pro dostatečně malá ϵ_i, i=1, 2 proto můžeme odhad prvního i druhého členu převést na levou stranu rovnice. Šestý, osmý, devátý a čtvrtý člen se odhadne postupně výrazy $\frac{\epsilon_i}{2}C_W\sum_{K\in\mathcal{T}_h} c\|\nabla e\|_K^2$, i=3, 4, resp. $\frac{\epsilon_i}{2}\sum_{K\in\mathcal{T}_h} c\|\nabla e\|_K^2$, i= 5, 6 za pomoci multiplikativní věty o stopách, lokální kvaziuniformity sítě a aproximativních vlastností v_h. Tedy, abychom mohli odhady těchto členů taktéž převést na levou stranu, je nutné, aby ϵ_i i=3, 4 přibližně odpovídalo $\frac{1}{C_W}$ a ϵ_i, i=5, 6 bylo dostatečně malé. Nakonec členy obsahující $u_h-\mathcal{I}_{Os}^{g_D}(u_h)$ se odhadnou použitím multiplikativní věty o stopách, inverzní nerovnosti a věty 2.8 výrazem

$$\max\{\frac{1}{4}C_HC_M(C_I+1), \frac{1}{4\epsilon_2}\}C_{O2}^2\left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma^{-1}\|[v_h]\|_\Gamma^2+\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^D} h_\Gamma^{-1}\|v_h-g_D\|_\Gamma^2\right).$$

2.4 A posteriorní odhad reziduálního typu založený na principu duality

Způsob odhadu chyby, který popíšeme nyní také využívá Galerkinovské ortogonality chyby. Nicméně hlavním nástrojem, který vede k získání odhadu v L^2 normě, je zavedení adjungovaného problému. V článku [12] je odvozen odhad pro mírně obecnější rovnici diskretizovanou variantou nespojité Galerkinovy metody bez přidání penalizačních členů. Výsledek pro NIPG metodu je v citovaném článku uveden bez důkazu a jeho odvození pro Poissonovu rovnici ukážeme nyní.

Definice 2.13 *Nechť je u slabým řešením úlohy* (2.4)*(viz. 2.5) a u_h^n nespojitou Galerkinovou aproximací (viz.* (2.32)*). Pak klademe*

$$e = u - u_h. \tag{2.57}$$

Nechť je oblast Ω konvexní. Nechť dále máme v problému (2.4) dánu Neumannovu okrajovou podmínku na celé hranici. Předpokládejme, že řešení ϕ adjungovaného problému

$$\begin{aligned} -\triangle\phi &= e \quad \text{v} \quad \Omega, \\ \nabla\phi\cdot n &= 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.58}$$

náleží do prostoru $H^2(\Omega)$ a platí

$$\exists C > 0: \quad \|\phi\|_{2,\Omega} \le C\|e\|_\Omega. \tag{2.59}$$

Na oblasti Ω uvažujeme konformní, regulární a lokálně kvaziuniformní systém dělení $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ sestávající z trojúhelníků nebo rovnoběžníků ve 2D, resp. čtyřstěnů nebo hranolů ve 3D. Pak lze odvodit následující výsledek:

Věta 2.14 *Platí:*

$$\begin{aligned} \|e\|_\Omega \le c \Bigg(& \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|f + \triangle u_h\|_K^2 h_K^4 + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} \|[\nabla u_h\cdot n]\|_\Gamma^2 h_\Gamma^3 \\ & + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^N} \|g_N - \nabla u_h\cdot n\|_\Gamma^2 h_\Gamma^3 + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} \sigma^2 h_\Gamma^3 \|[u_h]\|_\Gamma^2 \\ & + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma \|[u_h]\|_\Gamma^2 + 2\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma^{-1}\|[u_h]\|_\Gamma^2 \Bigg)^{1/2}, \end{aligned} \tag{2.60}$$

kde konstanta c nezávisí na h.

Důkaz: Vzhledem k definici adjungovaného problému (2.58) můžeme psát

$$\|e\|_\Omega^2 = \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K -\triangle\phi e\, dx. \tag{2.61}$$

Integrací per partes dostaneme

$$\|e\|_\Omega^2 = \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K \nabla\phi\cdot\nabla e\; dx - \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma \langle\nabla\phi\cdot n\rangle[e]\; dS. \tag{2.62}$$

Nechť $\phi_h \in S_{hp}$ je aproximace ϕ splňující (viz. článek [12]):

$$\|\phi-\phi_h\|_{q,K} \le Ch_K^{\mu-q}\|\phi\|_{2,K} \quad \forall K\in\mathcal{T}_h, \tag{2.63}$$

$$\|\phi-\phi_h\|_{\delta,\Gamma} \le Ch_K^{\mu-1/2-\delta}\|\phi\|_{2,K} \quad \forall K\in\mathcal{T}_h, \quad \Gamma\subset\partial K, \tag{2.64}$$

kde $\mu = \min(p+1,2)$, $0\le q\le 2$, $\delta\in\{0,1\}$ a C je konstanta nezávislá na h.

Odečtením $\mathcal{B}_h^{N,\sigma}(e,\phi_h)(=0)$, od obou stran rovnice (2.62) vyjde:

$$\begin{aligned}\|e\|_\Omega^2 = &\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K \nabla\phi\cdot\nabla e\; dx - \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma \langle\nabla\phi\cdot n\rangle[e]\; dS - \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K \nabla e\cdot\nabla\phi_h\; dx\\ &+\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma (\langle\nabla e\cdot n\rangle[\phi_h]\; dS - \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma \langle\nabla\phi_h\cdot n\rangle[e]\, dS - \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma \sigma[e][\phi_h]\, dS.\end{aligned} \tag{2.65}$$

Integrací per partes dále platí:

$$\begin{aligned}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K (\nabla\phi-\nabla\phi_h)\cdot\nabla e\; dx = &\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K (f+\triangle u_h)(\phi-\phi_h)\; dx\\ &+\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma (\langle\nabla e\cdot n\rangle[\phi-\phi_h] + [\nabla e\cdot n]\langle\phi-\phi_h\rangle)\; dS\\ &+\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^N}\int_\Gamma (g_N-\nabla u_h\cdot n)(\phi-\phi_h)\; dS.\end{aligned} \tag{2.66}$$

Dosazením (2.66) do (2.65) máme:

$$
\begin{aligned}
\|e\|_\Omega^2 = &\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K (f+\triangle u_h)(\phi-\phi_h)\,dx + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma \langle\nabla e\cdot n\rangle[\phi-\phi_h]\,dS\\
&+\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma [\nabla e\cdot n]\langle\phi-\phi_h\rangle\,dS + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^N}\int_\Gamma (g_N-\nabla u_h\cdot n)(\phi-\phi_h)\,dS\\
&-\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma \langle\nabla\phi\cdot n\rangle[e]\,dS + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma \langle\nabla e\cdot n\rangle[\phi_h]\,dS\\
&-\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma \langle\nabla\phi_h\cdot n\rangle[e]\,dS - \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma \sigma[e][\phi_h]\,dS,
\end{aligned}
\tag{2.67}
$$

$$
\begin{aligned}
\|e\|_\Omega^2 = &\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K (f+\triangle u_h)(\phi-\phi_h)\,dx - \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma [\nabla u_h\cdot n]\langle\phi-\phi_h\rangle\,dS\\
&+\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^N}\int_\Gamma (g_N-\nabla u_h\cdot n)(\phi-\phi_h)\,dS - \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma \sigma[e][\phi_h]\,dS\\
&+\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma \langle(\nabla\phi-\nabla\phi_h)\cdot n\rangle[e]\,dS - 2\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma \langle\nabla\phi\cdot n\rangle[e]\,dS.
\end{aligned}
\tag{2.68}
$$

Použitím Hölderovy a Cauchyovy nerovnosti pak dostaneme

$$
\begin{aligned}
\|e\|_\Omega^2 \le & \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|f+\triangle u_h\|_K \|\phi-\phi_h\|_K + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} \|[\nabla u_h\cdot n]\|_\Gamma \|\langle\phi-\phi_h\rangle\|_\Gamma \\
& + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^N} \|g_N-\nabla u_h\cdot n\|_\Gamma \|\phi-\phi_h\|_\Gamma + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} \sigma\|[u_h]\|_\Gamma \|[\phi-\phi_h]\|_\Gamma \\
& + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} \|\langle(\nabla\phi-\nabla\phi_h)\cdot n\rangle\|_\Gamma \|[u_h]\|_\Gamma + 2\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} \|\langle\nabla\phi\cdot n\rangle\|_\Gamma \|[u_h]\|_\Gamma \\
\le & \Bigg(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|f+\triangle u_h\|_K^2 h_K^4 + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} \|[\nabla u_h\cdot n]\|_\Gamma^2 h_\Gamma^3 \\
& + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^N} \|g_N-\nabla u_h\cdot n\|_\Gamma^2 h_\Gamma^3 + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} \sigma^2 h_\Gamma^3 \|[u_h]\|_\Gamma^2 \\
& + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma \|[u_h]\|_\Gamma^2 + 2\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma^{-1} \|[u_h]\|_\Gamma^2 \Bigg)^{1/2} \Bigg(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^{-4} \|\phi-\phi_h\|_K^2 \\
& + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma^{-3} \|\langle\phi-\phi_h\rangle\|_\Gamma^2 + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^N} h_\Gamma^{-3} \|\phi-\phi_h\|_\Gamma^2 + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma^{-3} \|[\phi-\phi_h]\|_\Gamma^2 \\
& + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma^{-1} \|\langle(\nabla\phi-\nabla\phi_h)\cdot n\rangle\|_\Gamma^2 + 2\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma \|\langle\nabla\phi\cdot n\rangle\|_\Gamma^2 \Bigg)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.69}
$$

Dále vzhledem k lokální kvaziuniformitě sítě a multiplikativní věty o stopách platí

$$
\begin{aligned}
& \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma^{-3} \|[\phi-\phi_h]\|_\Gamma^2 \le c \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^{-3} \|\phi-\phi_h\|_{\partial K}^2 \\
& \le c \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^{-3} C_M (\|\phi-\phi_h\|_K |\phi-\phi_h|_{1,K} + h_K^{-1} \|\phi-\phi_h\|_K^2).
\end{aligned} \tag{2.70}
$$

Nyní už z (2.70) a aproximativních vlastností ϕ_h (viz. (2.63) a (2.64)) přejde (2.69) na

$$\|e\|_\Omega^2 \le \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|f + \triangle u_h\|_K^2 h_K^4 + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} \|[\nabla u_h \cdot n]\|_\Gamma^2 h_\Gamma^3 \right.$$
$$+ \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^N} \|g_N - \nabla u_h \cdot n\|_\Gamma^2 h_\Gamma^3 + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} \sigma^2 h_\Gamma^3 \|[u_h]\|_\Gamma^2 \tag{2.71}$$
$$\left. + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma \|[u_h]\|_\Gamma^2 + 2 \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma^{-1} \|[u_h]\|_\Gamma^2 \right)^{1/2} c\|\phi\|_{2,\Omega}.$$

Aplikací předpokladu (2.59) nakonec vychází odhad:

$$\|e\|_\Omega \le c \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|f + \triangle u_h\|_K^2 h_K^4 + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} \|[\nabla u_h \cdot n]\|_\Gamma^2 h_\Gamma^3 \right.$$
$$+ \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^N} \|g_N - \nabla u_h \cdot n\|_\Gamma^2 h_\Gamma^3 + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} \sigma^2 h_\Gamma^3 \|[u_h]\|_\Gamma^2 \tag{2.72}$$
$$\left. + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma \|[u_h]\|_\Gamma^2 + 2 \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I} h_\Gamma^{-1} \|[u_h]\|_\Gamma^2 \right)^{1/2}.$$

□

2.5 A posteriorní odhad reziduálního typu založený na Helmholtzově rozkladu

V této části, která vychází z článku [5], popíšeme způsob odhadu chyby založeného na rozkladu gradientu chyby. O triangulaci $\mathcal{T}_h$ předpokládáme, že je regulární a lokálně kvaziuniformní ve smyslu (2.10) a (2.11). Připouštíme ale i nekonvexní elementy.
Odhad DG-normy (definice viz. (2.50)):

Nejprve zavedeme prostor funkcí:

$$H(\mathrm{curl}, \Omega) = \{v \in (L^2(\Omega))^k ; \mathrm{curl}\ v \in (L^2(\Omega))^d\}, \tag{2.73}$$

kde $k = 1$ pro $d = 2$ a $k = 3$ pro $d = 3$
s normou

$$\|v\|_{H(\mathrm{curl},\Omega)} = \{\|v\|_\Omega^2 + \|\mathrm{curl}\ v\|_\Omega^2\}^{1/2}. \tag{2.74}$$

Rotace je definována

$$\mathrm{curl}\ v \equiv (\frac{\partial v}{\partial x_2}, -\frac{\partial v}{\partial x_1}), \text{ pro } \quad d = 2 \tag{2.75}$$

$$\mathrm{curl}\ v \equiv (\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}), \text{ pro } \quad d = 3. \tag{2.76}$$

V dalším budeme potřebovat dát význam $n \cdot \mathrm{curl}\, v$ pro funkce $v \in H(\mathrm{curl}, \Omega)$, o čemž hovoří následující lemma.

Lemma 2.15 *Nechť $\Omega \in \mathbb{R}^d$ (d=2 nebo 3) je omezená oblast s Lipschitzovsky spojitou hranicí. Potom existuje právě jedno spojité lineární zobrazení*

$$T_n : H(curl, \Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega), \tag{2.77}$$

takové, že

$$\forall v \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^k \quad T_n v = n \cdot curl\, v|_{\partial\Omega}, \tag{2.78}$$

kde $k = 1$ pro $d = 2$ a $k = 3$ pro $d = 3$.

Důkaz: Důkaz je zcela analogický důkazu v knize [6, Theorem 2.5]. Pro $v \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^k$, $w \in C^\infty(\overline{\Omega})$ platí Greenova věta

$$\int_\Omega \mathrm{curl}\, v \cdot \nabla w\ dx + \underbrace{\int_\Omega \mathrm{div}(\mathrm{curl}\, v) w\ dx}_{=0} = \int_{\partial\Omega} wn \cdot \mathrm{curl}\, v\ dS. \tag{2.79}$$

Dále vztah (2.79) platí i pro $w \in H^1(\Omega)$, protože $C^\infty(\overline{\Omega})$ je hustý v $H^1(\Omega)$. Tedy

$$\left| \int_{\partial\Omega} wn \cdot \mathrm{curl}\, v\ dS \right| \leq \|\mathrm{curl}\, v\|_\Omega \|w\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^k, \quad \forall w \in H^1(\Omega). \tag{2.80}$$

Vezměme $\mu \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ libovolně a k němu $\varphi \in H^1(\Omega)$ takové, že $\varphi = \mu$ na $\partial\Omega$. Z (2.80) plyne

$$\left| \int_{\partial\Omega} \mu n \cdot \operatorname{curl} v \, dS \right| \leq \|\operatorname{curl} v\|_\Omega \|\varphi\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^k. \tag{2.81}$$

Přechodem k infimu přes všechny funkce z $H^1(\Omega)$ mající stopu μ a využitím (2.74) dostaneme

$$\left| \int_{\partial\Omega} \mu n \cdot \operatorname{curl} v \, dS \right| \leq \|\operatorname{curl} v\|_\Omega \|\mu\|_{1/2,\partial\Omega} \leq \|v\|_{H(\operatorname{curl},\Omega)} \|\mu\|_{1/2,\partial\Omega} \qquad \forall v \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^k, \tag{2.82}$$

neboť $\inf\limits_{\substack{\varphi \in H^1(\Omega) \\ \varphi = \mu \text{ na } \partial\Omega}} \|\varphi\|_{1,\Omega}$ je ekvivalentní norma na prostoru $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Protože $\mu \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ bylo zvoleno libovolně, platí

$$\|n \cdot \operatorname{curl} v\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \leq \|\operatorname{curl} v\|_\Omega \quad \forall v \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^k, \tag{2.83}$$

$$\|n \cdot \operatorname{curl} v\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \leq \|v\|_{H(\operatorname{curl},\Omega)} \quad \forall v \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^k. \tag{2.84}$$

Vzhledem k hustotě prostoru $C^\infty(\overline{\Omega})$ v $H(\operatorname{curl}, \Omega)$ (důkaz lze najít např. v [6]) můžeme zobrazení $v \to n \cdot \operatorname{curl} v$ definované na $(C^\infty(\overline{\Omega}))^k$ jednoznačně spojitě rozšířit na zobrazení $T_n \in \mathcal{L}(H(\operatorname{curl}, \Omega), H^{-1/2}(\partial\Omega))$.

□

Úmluva 2.16 *Místo $T_n v$ budeme psát $n \cdot curl v$ ve smyslu lemmatu 2.15.*

Pro odvození odhadu jsou klíčové dva nástroje. Prvním z nich je rozklad gradientu chyby. Definujme funkci $\nabla_h e$ z $L^2(\Omega)$ následovně:

$$(\nabla_h e)|_K = \nabla(e|_K) \quad \text{pro} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \tag{2.85}$$

Věta 2.17 ***(O Helmholtzově rozkladu)*** *Existuje rozklad*

$$\nabla_h e = \nabla\phi + curl\, \chi, \tag{2.86}$$

kde $\phi \in H^1_D(\Omega)$ je řešení problému

$$\int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega \nabla_h e \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in H^1_D(\Omega), \tag{2.87}$$

$\chi \in H(curl, \Omega)$ a $n \cdot curl\, \chi = 0$ na $\partial\Omega_N$.

Důkaz: Důkaz je proveden v článku [13]. $\square$

Věta 2.18 ***(Vlastnosti Helmholtzova rozkladu)*** *Helmholtzův rozklad* (2.86) *je ortogonální ve smyslu*

$$\|\nabla_h e\|_\Omega^2 = \|\nabla\phi\|_\Omega^2 + \|curl\,\chi\|_\Omega^2. \tag{2.88}$$

Navíc platí odhad

$$\|\nabla\phi\|_\Omega + \|curl\,\chi\|_\Omega \leq 2|e|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_h)}. \tag{2.89}$$

Důkaz: Rozložením $\nabla_h e$ dle (2.86) můžeme psát:

$$\|\nabla_h e\|_\Omega^2 = \|\nabla\phi\|_\Omega^2 + 2\int_\Omega \nabla\phi\cdot\operatorname{curl}\chi\,dx + \|\operatorname{curl}\chi\|_\Omega^2. \tag{2.90}$$

Na druhou stranu vzhledem k definici problému (2.87) je:

$$\int_\Omega \nabla\phi\cdot\operatorname{curl}\chi\,dx = \int_\Omega \nabla\phi\cdot(\nabla_h e - \nabla\phi)\,dx = 0. \tag{2.91}$$

Zbývá ukázat odhad (2.89). Volbou $v = \phi$ v (2.87) a použitím Cauchyovy nerovnosti získáme

$$\|\nabla\phi\|_\Omega \leq |e|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_h)}. \tag{2.92}$$

Dále platí

$$\|curl\,\chi\|_\Omega^2 = \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K curl\,\chi\,(\nabla e - \nabla\phi)\,dx = \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K curl\,\chi\nabla e\,dx. \tag{2.93}$$

Aplikací Cauchyovy nerovnosti pak máme

$$\|curl\,\chi\|_\Omega \leq |e|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_h)}. \tag{2.94}$$

Odhady (2.92) a (2.94) dohromady dávají (2.89). $\square$

Proto k získání a posteriorního odhadu chyby stačí odvodit odhad pro obě části rozkladu zvlášť. Poznamenejme, že funkce $\phi \in H_D^1(\Omega)$ se v literatuře někdy nazývá konformní chybou.

Druhým stěžejním nástrojem k odvození a posteriorního odhadu je existence tzv. diskrétního normálového toku

$$\Sigma_n(u_h) \equiv \begin{cases} \langle \partial_n(u_h) \rangle - \sigma[u_h], & \text{na} \quad \partial K \cap \mathcal{F}_h^I \\ \partial_n(u_h) - \sigma(u_h - g_D), & \text{na} \quad \partial K \cap \mathcal{F}_h^D \\ g_N, & \text{na} \quad \partial K \cap \mathcal{F}_h^N, \end{cases} \tag{2.95}$$

kde

$$\sigma|_\Gamma = \frac{C_W}{\max\{h_{K_\Gamma^L}, h_{K_\Gamma^R}\}} \quad \text{pro} \quad \Gamma \in \mathcal{F}_h^I, \tag{2.96}$$

resp.

$$\sigma|_\Gamma = \frac{C_W}{h_{K_\Gamma^L}} \quad \text{pro} \quad \Gamma \in \mathcal{F}_h^D, \tag{2.97}$$

s následujícími vlastnostmi:

$$\int_K f\,dx + \int_{\partial K} \Sigma_n(u_h) = 0 \quad \text{pro} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \tag{2.98}$$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K \setminus \partial\Omega_D} n \cdot \nabla u \phi\, dS = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K \setminus \partial\Omega_D} \Sigma_n(u_h) \phi\, dS. \tag{2.99}$$

Ty nám umožňují přejít přes problematický výraz s $n \cdot \nabla e$, který byl v předchozích metodách eliminován prostřednictvím Galerkinovské ortogonality chyby. V dalším popíšeme hlavní body důkazu.

Věta 2.19 *Položme $e = u - u_h$. Pak platí:*

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla e\|_K^2 \le c \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big(h_K^2 \|f + \triangle u_h\|_K^2 + h_K \|\Sigma_n(u_h) - \partial_n u_h\|^2_{\partial K \cap \mathcal{F}_h^{IN}} + h_K^{-1} \|[u_h]\|^2_{\partial K \cap \mathcal{F}_h^{ID}} \Big), \tag{2.100}$$

kde c nezávisí na h.

Nejprve si vyjádříme $|e|^2_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}$ pomocí rozkladu ∇e na základě věty 2.17

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla e\|_K^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla e \cdot \nabla \phi\, dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla e\, curl\, \chi\, dx. \tag{2.101}$$

Označme $\Pi_0\phi$ po částech konstantní projekci ϕ takovou, že $\Pi_0\phi = 0$ na $\partial\Omega_D$. Použitím integrace per partes v obou členech (2.101) dostaneme

$$\begin{aligned}
&\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K \nabla e\cdot\nabla\phi\,dx + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K \nabla e\,curl\,\chi\,dx \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K (f+\triangle u_h)(\phi-\Pi_0\phi)\,dx + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_{\partial K\cap\mathcal{F}_h^{IN}} n\cdot\nabla(u-u_h)(\phi-\Pi_0\phi)\,dS \\
&\quad + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_{\partial K\cap\mathcal{F}_h^{ID}} (u-u_h)(n\cdot curl\,\chi)\,dS. \quad (=:\zeta)
\end{aligned} \tag{2.102}$$

Nyní využijeme vlastností (2.98) a (2.99):

$$\begin{aligned}
&\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_{\partial K\cap\mathcal{F}_h^{IN}} (n\cdot\nabla(u-u_h)(\phi-\Pi_0\phi)\,dS \\
&\qquad = \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_{\partial K\cap\mathcal{F}_h^{IN}} (\Sigma_n(u_h)-n\cdot\nabla u_h)(\phi-\Pi_0\phi)\,dS.
\end{aligned} \tag{2.103}$$

Protože je $u = g_D$ na $\partial\Omega_D$ a $[n\cdot curl\,\chi]_\Gamma = 0$ pro $\Gamma\in\mathcal{F}_h^I$, můžeme v ζ nahradit u funkcí $v\in H^1_{g_D,D}(\Omega)$. Tím získáme vyjádření $|e|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_h)}$ ve tvaru

$$\begin{aligned}
\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|\nabla e\|_K^2 &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K (f+\triangle u_h)(\phi-\Pi_0\phi)\,dx \\
&\quad + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_{\partial K\cap\mathcal{F}_h^{IN}} (\Sigma_n(u_h)-n\cdot\nabla u_h)(\phi-\Pi_0\phi)\,dS \\
&\quad + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_{\partial K\cap\mathcal{F}_h^{ID}} (v-u_h)(n\cdot curl\,\chi)\,dS \quad \forall\, v\in H^1_{g_D,D}(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.104}$$

Nyní už se využitím aproximativních vlastností $\Pi_0\phi$, lemmatu 2.15 a multiplikativní věty o stopách dospěje k odhadu

$$
\begin{aligned}
|e|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_h)} \le c\Bigg(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2 \|f+\triangle u_h\|_K^2 + h_K\|\Sigma_n(u_h)-\partial_n u_h\|^2_{\partial K\cap \mathcal{F}_h^{IN}} \\
+ \|v-u_h\|^2_{H^{1/2}(\partial K\cap\mathcal{F}_h^{ID})}\Bigg)^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{2.105}
$$

Odhad členu $\|v-u_h\|^2_{H^{1/2}(\partial K\cap\mathcal{F}_h^{ID})}$ nám dává následující lemma:

Lemma 2.20 *Platí*

$$
\inf_{v\in H^1_{g_D,D}(\Omega)} \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|v-u_h\|^2_{H^{1/2}(\partial K\cap\mathcal{F}_h^{ID})} \le c\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^{-1}\|[u_h]\|^2_{\partial K\cap\mathcal{F}_h^{ID}}\right), \tag{2.106}
$$

kde c nezávisí na h.

Důkaz: Důkaz je proveden v článku [5]. □

Všechny výše popsané metody vedou k odhadům s víceméně neznámou konstantou, tedy jde spíše o teoretické výsledky. Zatímco v prvních dvou případech se pracuje s konvexními elementy, třetí připouští i elementy nekonvexní. Odhad (2.52) narozdíl od toho v (2.100) ukazuje i závislost na konstantě koercivity C_W.

Dalších metod v oblasti a posteriorních odhadů je více, ráda bych však ještě zmínila hlavní myšlenky přístupů M. Vohralíka [20] a M. Ohlbergera [21, 22]. První z nich dává a posteriorní odhady v seminormě $|\cdot|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_h)}$. Hlavní myšlenka spočívá v zavedení $H(\mathrm{div},\Omega)-$ konformní rekonstrukce ∇u_h, kde u_h je nespojitou Galerkinovskou aproximací (viz. definice 2.3). Tato rekonstrukce, označme ji t_h, je volena z Raviartových-Thomasových prostorů. Výraz $h_\Gamma^{1/2}\|[n\cdot\nabla u_h]\|_\Gamma$, který se v odhadech vyskytuje (viz. např. první popisovaná metoda), je nahrazen výrazem $\|\nabla u_h + t_h\|_K$. Dále místo $h_K\|f+\triangle u_h\|_K$ v odhadu vystupuje výraz $h_K\|f-\Pi_k f\|_K$, kde Π_k je L^2 projekce na prostor po částech polynomiálních funkcí stupně nejvýše k.

A posteriorní analýza M. Ohlbergera zahrnuje jak nelinearní konvektivně-difuzní problémy, tak nelineární hyperbolické úlohy diskretizované metodou konečných objemů. Jeho technika je založena na práci se slabým řešením daných problémů splňujícím tzv. entropickou podmínku. Odvození jisté entropické podmínky také pro přibližné řešení pak umožňuje získat a posteriorní odhady v L^1 normě.

Kapitola 3

Nestacionární problém

Zatímco a posteriorní analýze nestacionárních rovnic diskretizovaných konformní metodou konečných prvků se věnuje celá řada prací, pro nekonformní metody je situace zcela opačná. V této kapitole odvodíme horní a posteriorní odhad pro rovnici vedení tepla, přičemž úlohu diskretizujeme zpětnou Eulerovou metodou v čase a po částech lineární nespojitou Galerkinovou metodou v prostoru. Celá kapitola je inspirována článkem [9], který se zabývá a posteriorní analýzou rovnice vedení tepla za použití Crouzeixových-Raviartových nekonformních konečných prvků v prostoru a zpětné Eulerovy metody v čase. Používají zde vlastnosti těchto prostorů:

$$\int_\Gamma [v_h]\, dS = 0 \quad \text{pro libovolnou hranu} \quad \Gamma, \tag{3.1}$$

kterou nemáme k dispozici.

Nechť $\Omega \in \mathbb{R}^d$ (d=2 nebo 3) je omezená polyhedrická oblast a $T > 0$. Označme $Q_T = \Omega \times (0, T)$. Uvažujme problém:

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u & = & f & \text{v} \quad Q_T, \\ u & = & 0 & \text{na} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) & = & u^0(x) & \text{v} \quad \Omega. \end{array} \tag{3.2}$$

Předpokládejme, že data splňují následující podmínky:

$$\begin{array}{l} f \in C(0,T; H^{-1}(\Omega)), \\ u^0 \in L^2(\Omega). \end{array} \tag{3.3}$$

Definice 3.1 *Funkci* $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *nazveme slabým řešením problému* (3.2), *pokud splňuje podmínky:*

$$\begin{array}{rcl} \int_\Omega \frac{\partial u(t)}{\partial t} v\,dx + \int_\Omega \nabla u(t)\cdot\nabla v\,dx & = & \int_\Omega f(t) v\,dx \\ \textit{pro} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \textit{s.v.} \quad t \in (0,T), & & \\ u(x,0) & = & u^0(x) \quad \textit{v} \quad \Omega. \end{array} \tag{3.4}$$

3.1 Časová a prostorová diskretizace

Nechť

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_{\bar{N}} = T \tag{3.5}$$

je dělení časového intervalu $[0,T]$. Označme $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ a $\tau = \max_{1\le n\le \bar{N}} \tau_n$. Časovou diskretizací pomocí zpětné Eulerovy metody přejde problém (3.4) na úlohu:

Najdi posloupnost $\{u^n\}_{1\le n\le \bar{N}}$, $u^n \in H_0^1(\Omega)$ takovou, že platí

$$\int_\Omega \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n} v\,dx + \int_\Omega \nabla u^n \cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega f^n v\,dx \quad \text{pro} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{3.6}$$

kde $f^n \equiv f(\cdot, t_n)$.

V prostoru budeme úlohu (3.6) diskretizovat nespojitou Galerkinovou metodou. Na $n-$ té časové vrstvě uvažujeme systém $\{\mathcal{T}_{hn}\}_{h>0}$ dělení oblasti Ω sestávající z trojúhelníků ve 2D a čtyřstěnů ve 3D. Dále $\mathcal{F}_{hn}^I$, resp. $\mathcal{F}_{hn}^D$ definujeme (analogicky jako ve stacionárním případě) jako množinu vnitřních hran, resp. hran na hranici ($\partial\Omega_D = \partial\Omega$). Položíme $\mathcal{F}_{hn}^{ID} = \mathcal{F}_{hn}^I \cup \mathcal{F}_{hn}^D$. Stejně jako ve stacionárním případě předpokládáme, že triangulace $\mathcal{T}_{hn}$ splňují (2.10) a (2.11). Pro každé n pevné ještě definujeme $h_n = \max_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K$. Řešení úlohy (3.6) budeme pro jednoduchost aproximovat po částech lineárními funkcemi

$$S_{h1}^n \equiv \{v; v \in L^2(\Omega), v|_K \in P^1(K)\, \forall\, K \in \mathcal{T}_{hn}\}. \tag{3.7}$$

Úplná diskretizace (3.4) vede na problém:

Pro danou aproximaci $u_h^0 \in S_{h1}^0$ počáteční podmínky u^0 najdi posloupnost $\{u_h^n\}_{1\le n\le \bar N}$, $u_h^n \in S_{h1}^n$ takovou, že platí

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} v_h\,dx + \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K \nabla u_h^n \cdot \nabla v_h\,dx - \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^{ID}} \int_\Gamma \langle \nabla u_h^n \cdot n\rangle [v_h]\,dS \\ +\theta \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^{ID}} \int_\Gamma \langle \nabla v_h \cdot n\rangle [u_h^n]\,dS + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^{ID}} \int_\Gamma \sigma[u_h^n][v_h]\,dS = \int_\Omega f^n v_h\,dx \\ \text{pro} \quad \forall\, v_h \in S_{h1}^n,\end{aligned} \tag{3.8}$$

kde $\theta = -1$ odpovídá symetrické formě, $\theta = 1$ nesymetrické formě a $\theta = 0$ neúplné formě nespojité Galerkinovy metody.

Z formulací (3.6) i (3.8) vidíme, že potřebujeme pracovat s funkcemi definovanými na odlišných sítích $\mathcal{T}_{hn-1}$, $\mathcal{T}_{hn}$ současně. Proto budeme požadovat splnění dalších předpokladů:

$$\begin{gathered}\exists \text{ síť } \widetilde{\mathcal{T}}_{hn} \text{ splňující (2.10) a (2.11),} \\ \text{která je zjemněním } \mathcal{T}_{hn-1} \text{ i } \mathcal{T}_{hn}, \quad 1 \le n \le \bar N,\end{gathered}$$

$$\exists C_{HT} > 0 : \sup_{1\le n\le \bar N} \sup_{K\in\widetilde{\mathcal{T}}_{hn}} \sup_{K'\in\mathcal{T}_{hn}, K\subset K'} : \frac{h_{K'}}{h_K} < C_{HT}. \tag{3.9}$$

Úmluva 3.2 *V dalším bude $\mathcal{T}_{hn}$ označovat ono zjemnění $\widetilde{\mathcal{T}}_{hn}$ sítí $\mathcal{T}_{hn-1}$, $\mathcal{T}_{hn}$. Analogicky místo $\widetilde{\mathcal{F}}_{hn}$ a $\widetilde{\mathcal{F}}_{hn}^k$ budeme psát $\mathcal{F}_{hn}$ a $\mathcal{F}_{hn}^k$, $k \in \{I, D\}$.*

Definice 3.3 *Nechť je u^n řešení* (3.6) *a u_h^n řešení* (3.8). *Pak klademe*

$$e^n = u^n - u_h^n. \tag{3.10}$$

Pro odvození a posteriorních odhadů chyby potřebujeme interpolační operátor, který bude zobrazovat $H^1(\Omega, \mathcal{T}_{hn})$ do $S_{h1}^n \cap H_0^1(\Omega)$.

Lemma 3.4 *Nechť síť $\mathcal{T}_{hn}$ splňuje* (2.10) *a* (2.11). *Pak existuje operátor $\Pi_{K,p}^n : H^1(K) \to P^p(K)$ a $C_A > 0$ tak, že platí*

$$|\Pi_{K,p}^n(v) - v|_{q,K} \le C_A h_K^{\mu-q} |v|_{\mu,K} \quad \forall\, v \in H^s(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_{hn}, \tag{3.11}$$

kde $\mu = \min(p+1, s)$, $0 \le q \le s$, $p, s \ge 1$ celá čísla.

Důkaz: Důkaz lze nalézt např. v [7]. $\square$

Lemma 3.5 *Nechť síť $\mathcal{T}_{hn}$ splňuje (2.10) a (2.11). Definujme operátor $\Pi^n_{hp} : H^1(\Omega, \mathcal{T}_{hn}) \to S^n_{hp}$ takto*

$$\Pi^n_{hp}|_K = \Pi^n_{K,p} \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_{hn}, \tag{3.12}$$

pak platí

$$|\Pi^n_{hp}(v) - v|_{H^q(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} \le C_A h_n^{\mu-q} |v|_{H^\mu(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} \quad \forall\, v \in H^s(\Omega, \mathcal{T}_{hn}), \tag{3.13}$$

kde $\mu = min(p+1, s)$, $0 \le q \le s$, $p, s \ge 1$ celá čísla.

Důkaz: Přímý důsledek lemmatu 3.4. $\square$

Definice 3.6 *Definujeme operátor $I^0_{hn} : H^1(\Omega, \mathcal{T}_{hn}) \to S^n_{h1} \cap H^1_0(\Omega)$*

$$I^0_{hn}(v) = \mathcal{I}^0_{Os}(\Pi^n_{h1}(v)) \quad \forall\, v \in H^1(\Omega, \mathcal{T}_{hn}), \tag{3.14}$$

kde $\mathcal{I}^0_{Os}$ je Oswaldův operátor definovaný v (2.47).

Poznámka 3.7 *V případě konformní metody konečných prvků a Crouzeixo-vých-Raviartových nekonformních konečných prvků užívají autoři článků [14] a [9] Clémentova interpolačního operátoru. Jeho vlastnosti jsou v původním článku [15] odvozeny pro funkce z $H^1(\Omega)$.*

Následující lemmata budeme v dalším často využívat. Jejich důkazová technika je klasická.

Lemma 3.8 *Nechť $v \in H^1(\Omega, \mathcal{T}_{hn})$. Pak platí*

$$\sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}} h_\Gamma \|[v]\|^2_\Gamma \le 2C_H \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} h_K \|v\|^2_{\partial K}, \tag{3.15}$$

kde C_H je konstanta z (2.11).

Důkaz:

$$\sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}} h_\Gamma \|[v]\|^2_\Gamma \le \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}^I_{hn}} h_\Gamma \int_\Gamma |v^L_\Gamma - v^R_\Gamma|^2\, dS + \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}^{ND}_{hn}} h_\Gamma \int_\Gamma |v^L_\Gamma|^2\, dS$$

$$
\begin{aligned}
&\le 2 \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^{I}} h_\Gamma \int_\Gamma |v_\Gamma^L|^2 + |v_\Gamma^R|^2 \, dS + \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^{ND}} h_\Gamma \int_\Gamma |v_\Gamma^L|^2 \, dS \\
&\le 2 \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} C_H h_K \int_{\partial K} |v|^2 \, dS \le 2 \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} C_H h_K \|v\|_{\partial K}^2
\end{aligned}
$$

□

Lemma 3.9 *Nechť $v \in H^1(\Omega, \mathcal{T}_{hn})$ a Π_{hp}^n operátor definovaný v lemmatu 3.5. Pak platí*

$$
\sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \|v - \Pi_{hp}^n(v)\|_{\partial K}^2 \le 2 C_M C_A^2 h_n^{2\mu - 1} \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} |v|_{\mu,K}^2, \tag{3.16}
$$

kde μ je jako v lemmatu 3.5.

Důkaz: Použitím Multiplikativní věty o stopách (věta 2.4) a aproximativních vlastností Π_{hp}^n (viz. 3.5) máme

$$
\begin{aligned}
\sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \|v - \Pi_{hp}^n(v)\|_{\partial K}^2 &\le \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} C_M (\|v - \Pi_{hp}^n(v)\|_K |v - \Pi_{hp}^n(v)|_{1,K} \\
&+ h_K^{-1} \|v - \Pi_{hp}^n(v)\|_K^2) \le \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} C_M (C_A h_K^\mu |v|_{\mu,K} C_A h_K^{\mu-1} |v|_{\mu,K} \\
&+ h_K^{-1} C_A^2 h_K^{2\mu} |v|_{\mu,K}^2) = 2 C_M C_A^2 h_n^{2\mu-1} \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} |v|_{\mu,K}^2 .
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

□

Lemma 3.10 *Nechť $v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_{hn})$. Pak platí*

$$
\sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}} h_\Gamma \|\langle \nabla v \cdot n \rangle\|_\Gamma^2 \le \frac{1}{2} C_H h_n \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \|\nabla v\|_{\partial K}^2 . \tag{3.18}
$$

Důkaz: S využitím kvaziuniformity sítě můžeme psát

$$
\begin{aligned}
\sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}} h_\Gamma \|\langle \nabla v \cdot n \rangle\|_\Gamma^2 &\le \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^I} \frac{1}{2} h_\Gamma \int_\Gamma (((\nabla v)_\Gamma^L)^2 + ((\nabla v)_\Gamma^R)^2) \, dS \\
&+ \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^{ND}} \frac{1}{2} h_\Gamma \int_\Gamma ((\nabla v)_\Gamma^L)^2 \, dS \le \frac{1}{2} C_H h_n \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \|\nabla v\|_{\partial K}^2 .
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

□

Lemma 3.11 *Nechť $v \in S^n_{hp}$. Pak platí*

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K \|v\|^2_{\partial K} \le \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} C_M(C_I+1)\|v\|^2_K. \tag{3.20}$$

Důkaz: K důkazu se použije Multiplikativní věta o stopách (věta 2.4) a Inverzní nerovnost (věta 2.5):

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K \|v\|^2_{\partial K} \le \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K C_M(\|v\|_K |v|_{1,K} + h_K^{-1}\|v\|^2_K)$$
$$\le \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K C_M(\|v\|_K C_I h_K^{-1}\|v\|_K + h_K^{-1}\|v\|^2_K) = \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} C_M(C_I+1)\|v\|^2_K. \tag{3.21}$$

□

3.2 Horní odhad chyby vzhledem k prostorovým proměnným

Nejprve budeme směřovat k získání a posteriorního odhadu chyby vzhledem k prostorovým proměnným. Přitom stěžejní úlohu zde bude mít Helmholtzův rozklad gradientu chyby e^n (zavedení viz. věta 2.17) a vztahy, které chyba e^n splňuje.

Lemma 3.12 *Pro chybu e^n platí vztah*

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K \nabla e^n \cdot \nabla v_h \, dx = \int_\Omega \frac{e^{n-1}-e^n}{\tau_n} v_h \, dx + \theta \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}^I_{hn}} \int_\Gamma \langle \nabla v_h \cdot n\rangle [u^n_h] \, dS$$
$$\forall\, v_h \in S^n_{h1} \cap H^1_0(\Omega). \tag{3.22}$$

Důkaz: Dosazením $v = v_h \in S^n_{h1} \cap H^1_0(\Omega)$ v (3.6) a odečtením rovnice (3.8) od (3.6) vyjde

$$\int_\Omega \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n} v_h\, dx - \int_\Omega \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} v_h\, dx + \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K (\nabla u^n - \nabla u_h^n)\nabla v_h\, dx$$
$$+ \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^{ID}} \int_\Gamma \langle \nabla u_h^n \cdot n\rangle [v_h]\, dS - \theta \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^{ID}} \int_\Gamma \langle \nabla v_h \cdot n\rangle [u_h^n]\, dS - \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^{ID}} \int_\Gamma \sigma [u_h^n][v_h]\, dS = 0. \tag{3.23}$$

K dokončení důkazu stačí převést všechny členy vyjma $\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K (\nabla u^n - \nabla u_h^n)\nabla v_h\, dx$ na pravou stranu rovnice a využít definice e^n a prostoru $H_0^1(\Omega)$. □

Lemma 3.13 *Pro chybu e^n platí vztah*

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K \nabla e^n \cdot \nabla\phi\, dx = \int_\Omega (f^n - \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n})\phi\, dx - \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_{\partial K} \nabla u_h^n \cdot n\phi\, dS \quad \forall\, \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.24}$$

Důkaz:

$$\begin{aligned}\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K \nabla e^n \cdot \nabla\phi\, dx &= \int_\Omega \nabla u^n \cdot \nabla\phi\, dx - \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K \nabla u_h^n \cdot \nabla\phi\, dx \\ &= \int_\Omega \nabla u^n \cdot \nabla\phi\, dx - \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_{\partial K} \nabla u_h^n \cdot n\phi\, dS \\ &= \int_\Omega (f^n - \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n})\phi\, dx - \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_{\partial K} \nabla u_h^n \cdot n\phi\, dS,\end{aligned}$$

kde druhá rovnost vyjde integrací per partes a třetí rovnost z definice semidiskrétního řešení (3.6). □

Lemma 3.14 *Pro chybu e^n platí vztah*

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K \nabla e^n curl\, \chi\, dx = -\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_{\partial K} u_h^n curl\, \chi \cdot n\, dS \quad \forall\, \chi \in (H^1(\Omega))^k, \tag{3.25}$$

kde $k = 1$ pro $d = 2$ a $k = 3$ pro $d = 3$.

Důkaz: Aplikací per partes

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \int_K \nabla e^n curl\, \chi \, dx \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \int_K \nabla u^n curl\, \chi \, dx - \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \int_K \nabla u_h^n curl\, \chi \, dx \\
&= \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^I} \int_\Gamma (u^n)_\Gamma^L (curl\, \chi)_\Gamma^L \cdot n - (u^n)_\Gamma^R (curl\, \chi)_\Gamma^R \cdot n \, dS \\
&\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \int_{\partial K} u_h^n curl\, \chi \cdot n \, dS = - \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \int_{\partial K} u_h^n curl\, \chi \cdot n \, dS.
\end{aligned}
$$

□

Definice 3.15 *Nechť $n \geq 1$. Lokální indikátor chyby vzhledem k prostorovým proměnným definujeme následovně*

$$
\begin{aligned}
\eta_K^n = {} & h_K \left\| f^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right\|_K + h_K^{1/2} \| \nabla u_h^n \cdot n \|_{\partial K} + \| u_h^n \|_{H^{1/2}(\partial K)} \\
& + \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^{ID} \cap \mathcal{F}_K} \left(h_\Gamma^{-1/2} \| [u_h^n] \|_\Gamma + h_\Gamma^{1/2} \| [u_h^n] \|_\Gamma \right),
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

kde $\mathcal{F}_K$ značí množinu hran, resp. stěn trojúhelníku, resp. čtyřstěnu K. Globální indikátor chyby vzhledem k prostorovým proměnným pak definujeme

$$
\eta^n = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} (\eta_K^n)^2 \right)^{1/2}. \tag{3.27}
$$

Věta 3.16 ***(Horní odhad chyby vzhledem k prostoru)*** *Nechť systém $\{\mathcal{T}_{hn}\}_{h>0, 1 \leq n \leq \bar{N}}$ splňuje (2.10), (2.11) a podmínky (3.9). Nechť je posloupnost $\{u^n\}_{1 \leq n \leq \bar{N}}$ řešením (3.6) a $\{u_h^n\}_{1 \leq n \leq \bar{N}}$ řešením (3.8). Nechť $1 \leq \bar{T} \leq \bar{N}$.*

Pak chyba e^n definovaná v 3.3 splňuje

$$\begin{aligned}
&\sum_{K\in\mathcal{T}_{h\bar{T}}} \|e^{\bar{T}}\|_K^2 + \sum_{n=1}^{\bar{T}} \tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|\nabla e^n\|_K^2 \\
&\le \sum_{K\in\mathcal{T}_{h1}} \|e^0\|_K^2 + \sum_{n=1}^{\bar{T}} (4C_6^2 C_{Tr}^2 + 6C_{O1}^2)(\eta^n)^2 \\
&+ \sum_{n=1}^{\bar{T}} (\eta^n)^2 \max\{h_n^2, \tau_n\}(2C_2^2 C_{Tr}^2 + \frac{5}{2}C_{Tr}^2 + 2|\theta| C_4 C_{O1} \\
&+ 2|\theta| C_5 C_{Tr} + 12|\theta|^2 C_5^2 + 12C_7^2 + 12C_8^2),
\end{aligned} \tag{3.28}$$

kde konstanty C_{Tr}, C_6, C_2, C_4, C_5, C_7, $C_8 > 0$ jsou definovány v důkazu věty a konstanta C_{O1} je z věty 2.8 (i).

Důkaz:
Uvažujme rozklad $\nabla e^n = \nabla \phi^n + curl\, \chi^n$ z věty 2.17.

$$\begin{aligned}
&\tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|\nabla e^n\|_K^2 \\
&= \tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K \nabla e^n \cdot \nabla \phi^n \, dx \quad (=: \psi_1) \\
&+ \tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K \nabla e^n curl\, \chi^n \, dx \quad (=: \psi_2)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Vynásobením (3.24) τ_n a dosazením $\phi = \phi^n$ spolu s dosazením $\chi = \chi^n$ v (3.25) máme

$$\psi_1 = \tau_n \int_\Omega (f^n - \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n})\phi^n \, dx - \tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_{\partial K} \nabla u_h^n \cdot n \phi^n \, dS, \tag{3.30}$$

$$\psi_2 = -\tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_{\partial K} u_h^n curl\, \chi^n \cdot n \, dS. \tag{3.31}$$

Nejprve upravíme výraz ψ_1. Přičtením τ_n násobku identity (3.22) s volbou $v_h = I_{hn}^0 \phi^n$ k ψ_1 a vyjádřením členu $-\tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K \nabla e^n \cdot \nabla I_{hn}^0 \phi^n \, dx$ pomocí lemmatu 3.13 dostaneme

$$
\begin{aligned}
\psi_1 = \tau_n \int_\Omega (f^n - \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n})\phi^n \, dx - \tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_{\partial K} \nabla u_h^n \cdot n\phi^n \, dS \\
- \tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K \nabla e^n \cdot \nabla I_{hn}^0 \phi^n \, dx + \tau_n \int_\Omega \frac{e^{n-1} - e^n}{\tau_n} I_{hn}^0 \phi^n \, dx \\
+ \tau_n \theta \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^I} \int_\Gamma \langle \nabla I_{hn}^0 \phi^n \cdot n \rangle [u_h^n] \, dS = \tau_n \int_\Omega (f^n - \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n})\phi^n \, dx \\
- \tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_{\partial K} \nabla u_h^n \cdot n\phi^n \, dS - \tau_n \int_\Omega (f^n - \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n}) I_{hn}^0 \phi^n \, dx \\
+ \tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_{\partial K} \nabla u_h^n \cdot n I_{hn}^0 \phi^n \, dS + \tau_n \int_\Omega \frac{e^{n-1} - e^n}{\tau_n} I_{hn}^0 \phi^n \, dx \\
+ \tau_n \theta \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^I} \int_\Gamma \langle \nabla I_{hn}^0 \phi^n \cdot n \rangle [u_h^n] \, dS.
\end{aligned}
$$

Konečně přičtením a odečtením $\tau_n \int_\Omega (f^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n})\phi^n \, dx$ vyjde

$$
\begin{aligned}
\psi_1 = -\tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K \left(f^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right) I_{hn}^0 \phi^n \, dx + \tau_n \int_\Omega \left(f^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right) \phi^n \, dx \\
- \int_\Omega (e^n - e^{n-1}) \phi^n \, dx - \tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_{\partial K} \nabla u_h^n \cdot n(\phi^n - I_{hn}^0 \phi^n) \, dS \\
+ \tau_n \theta \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^I} \int_\Gamma \langle \nabla I_{hn}^0 \phi^n \cdot n \rangle [u_h^n] \, dS.
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Dohromady z (3.29), (3.31) a (3.32) máme

$$
\begin{aligned}
\tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|\nabla e^n\|_K^2 &= \tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K (f^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n})(\phi^n - I_{hn}^0\phi^n)\,dx \\
&- \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K (e^n - e^{n-1})\phi^n\,dx - \tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_{\partial K} \nabla u_h^n \cdot n(\phi^n - I_{hn}^0\phi^n)\,dS \\
&+ \tau_n\theta \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^I} \int_\Gamma \langle \nabla I_{hn}^0\phi^n \cdot n\rangle [u_h^n]\,dS - \tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_{\partial K} u_h^n curl\,\chi^n \cdot n\,dS.
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

Nakonec ještě k (3.33) přičteme a odečteme $\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K (e^n - e^{n-1})(e^n - I_{hn}^0(e^n - \phi^n))\,dx$

$$
\begin{aligned}
&\tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|\nabla e^n\|_K^2 \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K (e^n - e^{n-1})((e^n - \phi^n) - I_{hn}^0(e^n - \phi^n))\,dx \quad (=: \xi_1) \\
&+ \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K (e^n - e^{n-1}) I_{hn}^0(e^n - \phi^n)\,dx \quad (=: \xi_2) \\
&+ \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K e^n e^{n-1}\,dx - \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|e^n\|_K^2\,dx \\
&+ \tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K (f^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n})(\phi^n - I_{hn}^0\phi^n)\,dx \quad (=: \xi_3) \\
&- \tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_{\partial K} \nabla u_h^n \cdot n(\phi^n - I_{hn}^0\phi^n)\,dS \quad (=: \xi_4) \\
&+ \tau_n\theta \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^I} \int_\Gamma \langle \nabla I_{hn}^0\phi^n \cdot n\rangle [u_h^n]\,dS \quad (=: \xi_5) \\
&- \tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_{\partial K} u_h^n curl\,\chi^n \cdot n\,dS \quad (=: \xi_6).
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Nyní odhadneme jednotlivé členy v (3.34).

Odhad ξ_1:

$$|\xi_1| \le \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K (e^n - e^{n-1})^2 \, dx \right)^{1/2} \times \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K ((e^n-\phi^n) - I^0_{hn}(e^n-\phi^n))^2 \, dx \right)^{1/2} \quad (=: \eta_1) \tag{3.35}$$

Přičtením a odečtením $\Pi^n_{h1}(e^n-\phi^n)$ a použitím trojúhelníkové nerovnosti v η_1 spolu s aplikací lemmatu 3.5 a věty 2.8 (i) dostaneme

$$\begin{aligned}\eta_1 &\le \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K ((e^n-\phi^n) - \Pi^n_{h1}(e^n-\phi^n))^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K (\Pi^n_{h1}(e^n-\phi^n) - \mathcal{I}^0_{Os}\Pi^n_{h1}(e^n-\phi^n))^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &\le C_A h_n |e^n-\phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} \\ &\quad + C_{O1} \left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}^{ID}_{hn}} h_\Gamma \|[\Pi^n_{h1}(e^n-\phi^n)]\|^2_\Gamma \right)^{1/2} \quad (=: C_{O1}\eta_2).\end{aligned} \tag{3.36}$$

Dále z lemmatu 3.8 vychází

$$\begin{aligned}\eta_2 &\le \left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}^{ID}_{hn}} h_\Gamma \|[\Pi^n_{h1}(e^n-\phi^n) - (e^n-\phi^n)]\|^2_\Gamma \right)^{1/2} + \left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}^{ID}_{hn}} h_\Gamma \|[e^n-\phi^n]\|^2_\Gamma \right)^{1/2} \\ &\le \left(2C_H \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K \|\Pi^n_{h1}(e^n-\phi^n) - (e^n-\phi^n)\|^2_{\partial K} \right)^{1/2} + \left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}^{ID}_{hn}} h_\Gamma \|[u^n_h]\|^2_\Gamma \right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{3.37}$$

Aplikace lemmatu 3.9 s $\mu = 1$ dává

$$\eta_2 \leq C_1 h_n |e^n - \phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} + \left(\sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^{ID}} h_\Gamma \| [u_h^n] \|_\Gamma^2 \right)^{1/2}, \tag{3.38}$$

kde $C_1 := 2\sqrt{C_H C_M} C_A$.

Použitím (3.35), (3.36), (3.37) a (3.38) vidíme, že

$$\begin{aligned}
|\xi_1| &\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \int_K (e^n - e^{n-1})^2 \, dx \right)^{1/2} \Bigg(C_A h_n |e^n - \phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} \\
&\quad + C_{O1} C_1 h_n |e^n - \phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} + C_{O1} \left(\sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^{ID}} h_\Gamma \| [u_h^n] \|_\Gamma^2 \right)^{1/2} \Bigg) \\
&\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \int_K (e^n - e^{n-1})^2 \, dx \right)^{1/2} \Bigg(C_2 h_n |e^n - \phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} \\
&\quad + C_{O1} \left(\sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^{ID}} h_\Gamma \| [u_h^n] \|_\Gamma^2 \right)^{1/2} \Bigg),
\end{aligned} \tag{3.39}$$

kde $C_2 := C_A + C_{O1} C_1$.

<u>Odhad ξ_2:</u>

Nejprve ξ_2 vyjádříme pomocí lemmatu 3.12

$$\xi_2 = \tau_n \theta \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^{I}} \int_\Gamma \langle \nabla I_{hn}^0 (e^n - \phi^n) \cdot n \rangle [u_h^n] \, dS \quad (=: \eta_3) \tag{3.40}$$

$$-\tau_n \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \int_K \nabla e^n \nabla I_{hn}^0 (e^n - \phi^n) \, dx \quad (=: \eta_4) \tag{3.41}$$

Aplikací Hölderovy nerovnosti,

$$|\eta_3| \leq \tau_n |\theta| \left(\sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^I} h_\Gamma \| \langle \nabla I_{hn}^0 (e^n - \phi^n) \cdot n \rangle \|_\Gamma^2 \right)^{1/2} \times \left(\sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^I} h_\Gamma^{-1} \| [u_h^n] \|_\Gamma^2 \right)^{1/2}, \tag{3.42}$$

lemmatu 3.10 a 3.11 dostaneme

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^I} h_\Gamma \| \langle \nabla I_{hn}^0 (e^n - \phi^n) \cdot n \rangle \|_\Gamma^2 \right)^{1/2} &\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \frac{1}{2} C_H h_K \| \nabla I_{hn}^0 (e^n - \phi^n) \|_{\partial K}^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \frac{1}{2} C_H h_K \| \nabla (I_{Os}^0 (\Pi_{h1}^n (e^n - \phi^n)) - \Pi_{h1}^n (e^n - \phi^n)) \|_{\partial K}^2 \right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \frac{1}{2} C_H h_K \| \nabla \Pi_{h1}^n (e^n - \phi^n) \|_{\partial K}^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \frac{1}{2} C_H C_M (C_I + 1) \| \nabla (I_{Os}^0 (\Pi_{h1}^n (e^n - \phi^n)) - \Pi_{h1}^n (e^n - \phi^n)) \|_K^2 \right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \frac{1}{2} C_H C_M (C_I + 1) \| \nabla \Pi_{h1}^n (e^n - \phi^n) \|_K^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Označme

$$\eta_5 \quad := \quad \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \| \nabla (I_{Os}^0 (\Pi_{h1}^n (e^n - \phi^n)) - \Pi_{h1}^n (e^n - \phi^n)) \|_K^2 \right)^{1/2},$$

pak z lemmatu 2.8 (i) máme

$$
\begin{aligned}
\eta_5 &\le C_{O1}\left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^{ID}} h_\Gamma^{-1}\|[\Pi_{h1}^n(e^n-\phi^n)]\|_\Gamma^2\right)^{1/2} \\
&= C_{O1}\left(\left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^{ID}} h_\Gamma^{-1}\|[e^n-\phi^n]\|_\Gamma^2\right)^{1/2}\right. \\
&\quad\left.+\left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^{ID}} h_\Gamma^{-1}\|[\Pi_{h1}^n(e^n-\phi^n)-(e^n-\phi^n)]\|_\Gamma^2\right)^{1/2}\right) \quad (=:\eta_6)
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

Analogickým postupem jako v lemmatu 3.8 a 3.9 pro η_6 dostaneme

$$
\begin{aligned}
\eta_6 &\le \left(2C_Q\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K^{-1}\|\Pi_{h1}^n(e^n-\phi^n)-(e^n-\phi^n)\|_{\partial K}^2\right)^{1/2} \\
&\le C_3|e^n-\phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})},
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

kde $\frac{h_K}{h_\Gamma}\le C_Q$ pro $\Gamma\subset\partial K$ a $C_3 := 2\sqrt{C_QC_M}C_A$.

Dále z aproximativních vlastností Π_{h1}^n (viz. lemma 3.5) máme

$$
\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}}\|\nabla\Pi_{h1}^n(e^n-\phi^n)\|_K^2\right)^{1/2} \le (C_A+1)|e^n-\phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}. \tag{3.46}
$$

Dohromady z (3.42), (3.43), (3.44), (3.45) a (3.46) dostáváme

$$
\begin{aligned}
|\eta_3| \le \tau_n|\theta| & \left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}^I_{hn}} h_\Gamma^{-1}\|[u_h^n]\|_\Gamma^2 \right)^{1/2} \left(C_4C_{O1}\left(\left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}^{ID}_{hn}} h_\Gamma^{-1}\|[u_h^n]\|_\Gamma^2 \right)^{1/2} \right.\right. \\
& \left. + C_3|e^n-\phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}\right) \\
& \left. + C_4(C_A+1)|e^n-\phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}\right) \\
= \tau_n|\theta| & \left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}^I_{hn}} h_\Gamma^{-1}\|[u_h^n]\|_\Gamma^2 \right)^{1/2} \left(C_4C_{O1}\left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}^{ID}_{hn}} h_\Gamma^{-1}\|[u_h^n]\|_\Gamma^2 \right)^{1/2} \right. \\
& \left. + (C_4C_{O1}C_3 + C_4(C_A+1))|e^n-\phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}\right),
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

kde $C_4 := \sqrt{\frac{1}{2}C_HC_M(C_I+1)}$.
K odhadu η_4 stačí Hölderova nerovnost a odhady (3.44), (3.45) a (3.46)

$$
\begin{aligned}
|\eta_4| & \le \tau_n|e^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|\nabla I^0_{hn}(e^n-\phi^n)\|_K^2 \right)^{1/2} \\
& \le \tau_n|e^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} \left(C_{O1}\left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}^{ID}_{hn}} h_\Gamma^{-1}\|[u_h^n]\|_\Gamma^2 \right)^{1/2} \right. \\
& \qquad \left. + (C_{O1}C_3 + C_A + 1)|e^n-\phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}\right).
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

Tedy pro ξ_2 získáváme z (3.47) a (3.48) odhad

$$
\begin{aligned}
|\xi_2| \le \tau_n|\theta| \left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}^I_{hn}} h_\Gamma^{-1} \|[u_h^n]\|_\Gamma^2 \right)^{1/2} & \left(C_4 C_{O1} \left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}^{ID}_{hn}} h_\Gamma^{-1} \|[u_h^n]\|_\Gamma^2 \right)^{1/2} \right. \\
& \left. + C_5 |e^n - \phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} \right) \\
& + \tau_n |e^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} \left(C_{O1} \left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}^{ID}_{hn}} h_\Gamma^{-1} \|[u_h^n]\|_\Gamma^2 \right)^{1/2} \right. \\
& \left. + C_6 |e^n - \phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} \right)
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

kde $C_5 := C_4 C_{O1} C_3 + C_4(C_A + 1)$ a $C_6 := C_{O1} C_3 + C_A + 1$.

Odhad ξ_3:

Aplikací Hölderovy nerovnosti, přičtením a odečtením $\Pi_{h1}^n \phi^n$ ve výrazu $\|\phi^n - I_{hn}^0 \phi^n\|_\Omega$ je

$$
\begin{aligned}
|\xi_3| &\le \tau_n \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K^2 \left\| f^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right\|_K^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K^{-2} \|\phi^n - I_{hn}^0\phi^n\|_K^2 \right)^{1/2} \\
&\le \tau_n \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K^2 \left\| f^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right\|_K^2 \right)^{1/2} \left(\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K^{-2} \|\phi^n - \Pi_{h1}^n\phi^n\|_K^2 \right)^{1/2} \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K^{-2} \|\Pi_{h1}^n\phi^n - I_{hn}^0\phi^n\|_K^2 \right)^{1/2} \right)
\end{aligned}
$$

a následné využití aproximativních vlastností Π_{h1}^n (viz. (3.13)) a I_{Os}^0 (viz. (2.36)) dává

$$
\begin{aligned}
|\xi_3| &\le \tau_n \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K^2 \left\| f^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right\|_K^2 \right)^{1/2} \left(C_A |\phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} \right. \\
&\quad \left. + C_{O1} \left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^{ID}} h_\Gamma^{-1} \|[\Pi_{h1}^n\phi^n]\|_\Gamma^2 \right)^{1/2} \right) \\
&\le \tau_n \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K^2 \left\| f^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right\|_K^2 \right)^{1/2} C_7 |\phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})},
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

kde $C_7 := C_A + C_{O1}C_3$.

<u>Odhad ξ_4:</u>

$$
\begin{aligned}
|\xi_4| &\le \tau_n \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K \|\nabla u_h^n \cdot n\|_{\partial K}^2 \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K^{-1} \|\phi^n - I_{hn}^0\phi^n\|_{\partial K}^2 \right)^{1/2} \qquad (=: \eta_7)
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

Odečtením a přičtením $\Pi_{h1}^n\phi^n$ ve výrazu η_7 je

$$|\eta_7| \le \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} h_K^{-1} \|\phi^n - \Pi_{h1}^n \phi^n\|_{\partial K}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} h_K^{-1} \|\Pi_{h1}^n \phi^n - I_{hn}^0 \phi^n\|_{\partial K}^2 \right)^{1/2},$$

aplikací lemmatu 3.9 s $\mu = 1$ a 3.11 pak

$$\begin{aligned}
|\eta_7| &\le \sqrt{2C_M} C_A |\phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} + \sqrt{C_M(C_I+1)} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} h_K^{-2} \|\Pi_{h1}^n \phi^n - I_{hn}^0 \phi^n\|_K^2 \right)^{1/2} \\
&\le \sqrt{2C_M} C_A |\phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} + \sqrt{C_M(C_I+1)} C_{O1} \left(\sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^{ID}} h_\Gamma^{-1} \|[\Pi_{h1}^n \phi^n]\|_\Gamma^2 \right)^{1/2} \\
&\le (\sqrt{2C_M} C_A + \sqrt{C_M(C_I+1)} C_{O1} C_3) |\phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Tedy

$$|\xi_4| \le \tau_n \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} h_K \|\nabla u_h^n \cdot n\|_{\partial K}^2 \right)^{1/2} C_8 |\phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}, \tag{3.53}$$

kde $C_8 := \sqrt{2C_M} C_A + \sqrt{C_M(C_I+1)} C_{O1} C_3$.

Odhad ξ_5:

Postupujeme zcela analogicky jako při odhadu η_3, tudíž dojdeme k

$$\begin{aligned}
|\xi_5| &\le \tau_n |\theta| \left(\sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^I} h_\Gamma \|\langle \nabla I_{hn}^0 \phi^n \cdot n \rangle\|_\Gamma^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^I} h_\Gamma^{-1} \|[u_h^n]\|_\Gamma^2 \right)^{1/2} \\
&\le \tau_n |\theta| C_5 |\phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} \left(\sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^I} h_\Gamma^{-1} \|[u_h^n]\|_\Gamma^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Odhad ξ_6:

Z lemmatu 2.15 máme

$$
\begin{aligned}
|\xi_6| &\leq \tau_n \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \|u_h^n\|_{1/2,\partial K} \|curl\, \chi^n \cdot n\|_{-1/2,\partial K} \\
&\leq \tau_n C_{Tr} \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \|u_h^n\|_{1/2,\partial K} \|curl\, \chi^n\|_K \\
&\leq \tau_n C_{Tr} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \|u_h^n\|^2_{1/2,\partial K} \right)^{1/2} \|curl\, \chi^n\|_\Omega,
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

kde konstanta C_{Tr} je taková, že $\|curl\, \chi^n \cdot n\|_{-1/2,\partial K} \leq C_{Tr} \|curl\, \chi^n\|_K$.

Nyní se můžeme vrátit k (3.34). Použijeme-li odhady (3.39), (3.49), (3.50), (3.53), (3.54) a (3.55) výše, dostáváme

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|e^n\|_K^2 + \tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|\nabla e^n\|_K^2 \\
&\le \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|e^n - e^{n-1}\|_K^2\right)^{1/2} \Bigg(C_2 h_n |e^n-\phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} \\
&+ C_{O1}\left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^{ID}} h_\Gamma \|[u_h^n]\|_\Gamma^2\right)^{1/2}\Bigg) \\
&+ \tau_n|\theta| \left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^{I}} h_\Gamma^{-1} \|[u_h^n]\|_\Gamma^2\right)^{1/2} \Bigg(C_4 C_{O1}\left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^{ID}} h_\Gamma^{-1} \|[u_h^n]\|_\Gamma^2\right)^{1/2} \\
&+ C_5|e^n-\phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}\Bigg) \\
&+ \tau_n |e^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}\left(C_{O1}\left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^{ID}} h_\Gamma^{-1} \|[u_h^n]\|_\Gamma^2\right)^{1/2} + C_6|e^n-\phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}\right) \\
&+ \tau_n \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K^2 \left\| f^n - \frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{\tau_n}\right\|_K^2\right)^{1/2} C_7|\phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} \\
&+ \tau_n \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K \|\nabla u_h^n\cdot n\|_{\partial K}^2\right)^{1/2} C_8|\phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} \\
&+ \tau_n|\theta| C_5 |\phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} \left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^{I}} h_\Gamma^{-1} \|[u_h^n]\|_\Gamma^2\right)^{1/2} \\
&+ \tau_n C_{Tr} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|u_h^n\|_{H^{1/2}(\partial K)}^2\right)^{1/2} \|curl\,\chi^n\|_\Omega \\
&+ \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K e^n e^{n-1}\,dx.
\end{aligned} \tag{3.56}
$$

Aplikace Youngovy nerovnosti $ab \leq \frac{a^2}{\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{4}$ s $\epsilon = 1$, $\epsilon = \frac{1}{2}$ a $\epsilon = \frac{1}{6}$ dává

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \|e^n\|_K^2 + \tau_n \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \|\nabla e^n\|_K^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \|e^n - e^{n-1}\|_K^2 + C_2^2 h_n^2 |e^n - \phi^n|^2_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_{hn})} + C_{O1}^2 \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^{ID}} h_\Gamma \|[u_h^n]\|_\Gamma^2 \\
&+ \tau_n |\theta| \left(\sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^{I}} h_\Gamma^{-1} \|[u_h^n]\|_\Gamma^2 \right)^{1/2} \left(C_4 C_{O1} \left(\sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^{ID}} h_\Gamma^{-1} \|[u_h^n]\|_\Gamma^2 \right)^{1/2} \right. \\
&\left. + C_5 |e^n - \phi^n|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_{hn})} \right) \\
&+ \frac{1}{4} \tau_n |e^n|^2_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_{hn})} + 2C_{O1}^2 \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^{ID}} h_\Gamma^{-1} \|[u_h^n]\|_\Gamma^2 + 2C_6^2 |e^n - \phi^n|^2_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_{hn})} \\
&+ \frac{1}{24} \tau_n |\phi^n|^2_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_{hn})} + 6\tau_n C_7^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} h_K^2 \left\| f^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right\|_K^2 \\
&+ \frac{1}{24} \tau_n |\phi^n|^2_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_{hn})} + 6\tau_n C_8^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} h_K \|\nabla u_h^n \cdot n\|_{\partial K}^2 \\
&+ \frac{1}{24} \tau_n |\phi^n|^2_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_{hn})} + 6\tau_n |\theta|^2 C_5^2 \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^{I}} h_\Gamma^{-1} \|[u_h^n]\|_\Gamma^2 \\
&+ \tau_n C_{Tr} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \|u_h^n\|^2_{H^{1/2}(\partial K)} \right)^{1/2} \|curl\, \chi^n\|_\Omega \\
&+ \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \int_K e^n e^{n-1}\, dx.
\end{aligned}
\tag{3.57}
$$

Nyní se využije vztahů

$$
\frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \|e^n - e^{n-1}\|_K^2 = \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \|e^n\|_K^2 - \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \int_K e^n e^{n-1}\, dx + \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \|e^{n-1}\|_K^2
\tag{3.58}
$$

a

$$\tau_n \frac{|\phi^n|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}}{8} = \tau_n \frac{|\phi^n - e^n + e^n|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}}{8} \leq \tau_n \frac{|\phi^n - e^n|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}}{4} + \tau_n \frac{|e^n|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}}{4}. \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|e^n\|^2_K + \tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|\nabla e^n\|^2_K \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|e^n\|^2_K + \frac{1}{2} \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|e^{n-1}\|^2_K + C_2^2 h_n^2 |e^n - \phi^n|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} \\
&+ C_{O1}^2 \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}^{ID}_{hn}} h_\Gamma \|[u_h^n]\|^2_\Gamma + \tau_n |\theta| \left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}^{I}_{hn}} h_\Gamma^{-1} \|[u_h^n]\|^2_\Gamma \right)^{1/2} \\
&\times \left(C_4 C_{O1} \left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}^{ID}_{hn}} h_\Gamma^{-1} \|[u_h^n]\|^2_\Gamma \right)^{1/2} + C_5 |e^n - \phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} \right) \\
&+ \frac{1}{2}\tau_n |e^n|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} + 2C_{O1}^2 \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}^{ID}_{hn}} h_\Gamma^{-1} \|[u_h^n]\|^2_\Gamma + 2C_6^2 |e^n - \phi^n|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} \\
&+ \tau_n \frac{1}{4} |\phi^n - e^n|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} + 6\tau_n C_7^2 \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K^2 \left\| f^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right\|^2_K \\
&+ 6\tau_n C_8^2 \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K \|\nabla u_h^n \cdot n\|^2_{\partial K} + 6\tau_n |\theta|^2 C_5^2 \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}^{I}_{hn}} h_\Gamma^{-1} \|[u_h^n]\|^2_\Gamma \\
&+ \tau_n C_{Tr} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|u_h^n\|^2_{H^{1/2}(\partial K)} \right)^{1/2} \|curl\, \chi^n\|_\Omega
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Navíc z lemmatu 3.14 a 2.15 víme

$$
\begin{aligned}
|e^n - \phi^n|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} &= \|curl\,\chi^n\|^2_\Omega = \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_K curl\,\chi^n \nabla e^n\,dx \\
&= -\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \int_{\partial K} u_h^n curl\,\chi^n\cdot n\,dS \le C_{Tr} \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|u_h^n\|_{H^{1/2}(\partial K)} \|curl\,\chi^n\|_K \\
&\le C_{Tr} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|u_h^n\|^2_{H^{1/2}(\partial K)} \right)^{1/2} \|curl\,\chi^n\|_\Omega.
\end{aligned} \tag{3.61}
$$

Tedy

$$
|e^n - \phi^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} = \|curl\,\chi^n\|_\Omega \le C_{Tr} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|u_h^n\|^2_{H^{1/2}(\partial K)} \right)^{1/2}. \tag{3.62}
$$

Nyní nerovnost (3.60) vynásobíme dvěma, převedeme členy $\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|e^n\|^2_K$ a $\tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|\nabla e^n\|^2_K$ na levou stranu a použijeme vztah (3.62)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|e^n\|_K^2 + \tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|\nabla e^n\|_K^2 \\
&\leq \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|e^{n-1}\|_K^2 + 2C_2^2 h_n^2 C_{Tr}^2 \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|u_h^n\|^2_{H^{1/2}(\partial K)} + 2C_{O1}^2 \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^{ID}} h_\Gamma \|[u_h^n]\|_\Gamma^2 \\
&+ 2\tau_n|\theta| \left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^{I}} h_\Gamma^{-1}\|[u_h^n]\|_\Gamma^2\right)^{1/2} \left(C_4 C_{O1}\left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^{ID}} h_\Gamma^{-1}\|[u_h^n]\|_\Gamma^2\right)^{1/2}\right. \\
&\left.+ C_5 C_{Tr}\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|u_h^n\|^2_{H^{1/2}(\partial K)}\right)^{1/2}\right) \\
&+ 4C_{O1}^2 \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^{ID}} h_\Gamma^{-1}\|[u_h^n]\|_\Gamma^2 + 4C_6^2 C_{Tr}^2 \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|u_h^n\|^2_{H^{1/2}(\partial K)} \\
&+ \tau_n \frac{1}{2} C_{Tr}^2 \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|u_h^n\|^2_{H^{1/2}(\partial K)} + 12\tau_n C_7^2 \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K^2 \left\| f^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\right\|_K^2 \\
&+ 12\tau_n C_8^2 \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K \|\nabla u_h^n \cdot n\|^2_{\partial K} + 12\tau_n|\theta|^2 C_5^2 \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^{I}} h_\Gamma^{-1}\|[u_h^n]\|_\Gamma^2 \\
&+ 2\tau_n C_{Tr}^2 \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|u_h^n\|^2_{H^{1/2}(\partial K)}.
\end{aligned}
\tag{3.63}
$$

Přepis (3.63) ve smyslu definice 3.15 dává

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|e^n\|_K^2 + \tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|\nabla e^n\|_K^2 \\
&\leq \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|e^{n-1}\|_K^2 + (2C_2^2 h_n^2 C_{Tr}^2 + 6C_{O1}^2 + 2\tau_n|\theta|C_4C_{O1} \\
&\quad + 2\tau_n|\theta|C_5C_{Tr} + 4C_6^2C_{Tr}^2 + \tau_n\frac{5}{2}C_{Tr}^2 + 12\tau_nC_7^2 \\
&\quad + 12\tau_nC_8^2 + 12\tau_n|\theta|^2C_5^2)(\eta^n)^2 \\
&\leq \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|e^{n-1}\|_K^2 + (4C_6^2C_{Tr}^2 + 6C_{O1}^2)(\eta^n)^2 \\
&\quad + (\eta^n)^2 \max\{h_n^2, \tau_n\}(2C_2^2C_{Tr}^2 + \frac{5}{2}C_{Tr}^2 + 2|\theta|C_4C_{O1} \\
&\quad + 2|\theta|C_5C_{Tr} + 12|\theta|^2C_5^2 + 12C_7^2 + 12C_8^2).
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$

Sečtením nerovnosti (3.64) pro $n = 1, ..., \bar{T}$ nakonec dostáváme tvrzení věty

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in\mathcal{T}_{h\bar{T}}} \|e^{\bar{T}}\|_K^2 + \sum_{n=1}^{\bar{T}} \tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|\nabla e^n\|_K^2 \\
&\leq \sum_{K\in\mathcal{T}_{h1}} \|e^0\|_K^2 + \sum_{n=1}^{\bar{T}} (4C_6^2C_{Tr}^2 + 6C_{O1}^2)(\eta^n)^2 \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\bar{T}} (\eta^n)^2 \max\{h_n^2, \tau_n\}(2C_2^2C_{Tr}^2 + \frac{5}{2}C_{Tr}^2 + 2|\theta|C_4C_{O1} \\
&\quad + 2|\theta|C_5C_{Tr} + 12|\theta|^2C_5^2 + 12C_7^2 + 12C_8^2).
\end{aligned}
\tag{3.65}
$$

□

3.3 Horní odhad chyby vzhledem k časové proměnné

Nyní přistoupíme k odvození a posteriorního odhadu chyby vzhledem k časové proměnné. Příslušný indikátor definujeme stejně jako v článku [9].

Definice 3.17 *Nechť $1 \leq n \leq \bar{N}$. Indikátor chyby vzhledem k časové proměnné definujeme*

$$\eta_t^n = \tau_n^{1/2} |u_h^n - u_h^{n-1}|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_{hn})}. \tag{3.66}$$

Nejprve zavedeme jako v článku [9] následující značení: f_τ bude označovat funkci konstantní a rovnu $f(t_n)$ na každém intervalu $(t_{n-1}, t_n]$, $1 \leq n \leq \bar{N}$. Pro posloupnost funkcí $\{v^n\}_{0 \leq n \leq \bar{N}}$ uvažujeme funkci v_τ po částech afinní na $[t_{n-1}, t_n]$, $1 \leq n \leq \bar{N}$, a rovnu v^n v čase t_n, $0 \leq n \leq \bar{N}$:

$$v_\tau(t) = \frac{t_n - t}{\tau_n} v^{n-1} + \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} v^n \quad \text{pro} \quad \forall t \in [t_{n-1}, t_n], 1 \leq n \leq \bar{N}. \tag{3.67}$$

Definice 3.18 *Nechť je u slabé řešení (3.2), $\{u^n\}_{1 \leq n \leq \bar{N}}$ řešení (3.6) a u_τ funkce příslušící $\{u^n\}_{1 \leq n \leq \bar{N}}$ dle (3.67). Pak klademe*

$$e_\tau = u - u_\tau. \tag{3.68}$$

Věta 3.19 ***(Horní odhad chyby vzhledem k času)***
Nechť systém $\{\mathcal{T}_{hn}\}_{h>0, 1 \leq n \leq \bar{N}}$ splňuje (2.10), (2.11) a podmínky (3.9). Nechť je posloupnost $\{u^n\}_{1 \leq n \leq \bar{N}}$ řešením (3.6) a $\{u_h^n\}_{1 \leq n \leq \bar{N}}$ řešením (3.8). Nechť $1 \leq \bar{T} \leq \bar{N}$. Pak chyba e_τ definovaná v 3.18 splňuje

$$\begin{aligned} \|e_\tau(t_{\bar{T}})\|_\Omega^2 + \int_0^{t_{\bar{T}}} \|\nabla e_\tau(s)\|_\Omega^2 \, ds \leq 2\|f - f_\tau\|^2_{L^2(0, t_{\bar{T}}; H^{-1}(\Omega))} + 2 \sum_{n=1}^{\bar{T}} (\eta_t^n)^2 \\ + 16 \sum_{n=1}^{\bar{T}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |(u_\tau - u_{h\tau})(s)|^2_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_{hn})} \, ds. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Důkaz: Odečtením rovnice (3.6) od (3.4) vyjde

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{\partial e_\tau(t)}{\partial t} v\,dx + \int_\Omega \nabla e_\tau(t)\cdot\nabla v\,dx \\
&= \int_\Omega (f(t)-f^n)v\,dx + \int_\Omega \nabla(u^n-u_\tau(t))\cdot\nabla v\,dx \quad \text{pro} \quad \forall v\in H_0^1(\Omega),\\
&\text{s.v.} \quad t\in(t_{n-1},t_n).
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

Dále rovnici (3.70) vynásobíme dvěma a zvolíme $v = e_\tau(t)$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|e_\tau(t)\|_\Omega^2 + 2\|\nabla e_\tau(t)\|_\Omega^2 = 2\int_\Omega (f(t)-f^n)e_\tau(t)\,dx\\
&+2\int_\Omega \nabla(u^n-u_\tau(t))\cdot\nabla e_\tau(t)\,dx \quad \text{pro} \quad \text{s.v.} \quad t\in(t_{n-1},t_n).
\end{aligned}
\tag{3.71}
$$

Použitím Hölderovy nerovnosti, nerovností $ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ a $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ na pravé straně rovnosti (3.71) máme

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|e_\tau(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla e_\tau(t)\|_\Omega^2 \le 2\|f(t)-f^n\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + 2\|\nabla(u^n-u_\tau(t))\|_\Omega^2&\\
\text{pro} \quad \text{s.v.} \quad t\in(t_{n-1},t_n).&
\end{aligned}
\tag{3.72}
$$

Po integraci (3.72) od t_{n-1} do t_n a sečtení výsledné nerovnosti pro $n = 1...\bar{T}$ dostaneme

$$
\begin{aligned}
&\|e_\tau(t_{\bar{T}})\|_\Omega^2 + \int_0^{t_{\bar{T}}} \|\nabla e_\tau(t)\|_\Omega^2\,dt \le 2\|f-f_\tau\|_{L^2(0,t_{\bar{T}};H^{-1}(\Omega))}^2\\
&\quad +2\sum_{n=1}^{\bar{T}}\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nabla(u^n-u_\tau(t))\|_\Omega^2\,dt.
\end{aligned}
\tag{3.73}
$$

Dále můžeme psát

$$
\begin{aligned}
\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nabla(u^n - u_\tau(t))\|_\Omega^2 \, dt &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \nabla \left(\frac{t_n - t}{\tau_n} (u^n - u^{n-1}) \right) \right\|_\Omega^2 dt \\
&= \|\nabla(u^n - u^{n-1})\|_\Omega^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\frac{t_n - t}{\tau_n} \right)^2 dt \\
&= \frac{\tau_n}{3} \|\nabla(u^n - u^{n-1})\|_\Omega^2 .
\end{aligned}
\tag{3.74}
$$

Trojúhelníková nerovnost, Cauchyova nerovnost a definice 3.17 dávají

$$
\frac{\tau_n}{3} \|\nabla(u^n - u^{n-1})\|_\Omega^2 \leq \tau_n |u^n - u_h^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}^2 + (\eta_t^n)^2 + \tau_n |u_h^{n-1} - u^{n-1}|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}^2 .
\tag{3.75}
$$

<u>Odhad $\tau_n |u^n - u_h^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}^2$, $\tau_n |u_h^{n-1} - u^{n-1}|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}^2$:</u>

Následující postup byl použit v článku [10]. Spočítáme nejprve jistý integrál. Protože je $|(u_\tau - u_{h\tau})(s)|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}^2$ kvadratickou funkcí s, můžeme její integrál od t_{n-1} do t_n vypočítat pomocí např. Simpsonova pravidla

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_{n-1}}^{t_n} |(u_\tau - u_{h\tau})(s)|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}^2 \, ds \\
&= \frac{1}{3} \frac{t_n - t_{n-1}}{2} \left(|(u_\tau - u_{h\tau})(t_{n-1})|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}^2 + 4 \left| (u_\tau - u_{h\tau}) \left(\frac{t_{n-1} + t_n}{2} \right) \right|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}^2 \right. \\
&\quad \left. + |(u_\tau - u_{h\tau})(t_n)|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}^2 \right) = \frac{\tau_n}{6} \left(|u^{n-1} - u_h^{n-1}|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}^2 \right. \\
&\quad \left. + 4 \left| \frac{u^{n-1} - u_h^{n-1}}{2} + \frac{u^n - u_h^n}{2} \right|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}^2 + |u^n - u_h^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}^2 \right) \\
&= \frac{\tau_n}{3} \left(|u^{n-1} - u_h^{n-1}|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \int_K \nabla(u^{n-1} - u_h^{n-1}) \cdot \nabla(u^n - u_h^n) \, dx \right. \\
&\quad \left. + |u^n - u_h^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}^2 \right).
\end{aligned}
\tag{3.76}
$$

Z nerovnosti $a \cdot b \geq -\frac{1}{4}\|a\|^2 - \|b\|^2$ a (3.76) pak plyne

$$\frac{1}{4}\tau_n|u^n - u_h^n|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} \leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} |(u_\tau - u_{h\tau})(s)|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}\, ds. \tag{3.77}$$

Chceme-li odhadnout $\tau_n|u^{n-1} - u_h^{n-1}|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}$, stačí v nerovnosti $a \cdot b \geq -\frac{1}{4}\|a\|^2 - \|b\|^2$ zaměnit a a b. Odhad vyjde stejně jako v (3.77).
Dosazení získaných odhadů do (3.75) vede
na

$$\frac{\tau_n}{3}\|\nabla(u^n - u^{n-1})\|^2_\Omega \leq (\eta_t^n)^2 + 8\int_{t_{n-1}}^{t_n} |(u_\tau - u_{h\tau})(s)|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}\, ds, \tag{3.78}$$

tudíž v nerovnosti (3.73) nakonec dostaneme

$$\begin{aligned} \|e_\tau(t_{\bar{T}})\|^2_\Omega + \int_0^{t_{\bar{T}}} \|\nabla e_\tau(t)\|^2_\Omega\, dt &\leq 2\|f - f_\tau\|^2_{L^2(0,t_{\bar{T}};H^{-1}(\Omega))} \\ +2\sum_{n=1}^{\bar{T}}(\eta_t^n)^2 + 16\sum_{n=1}^{\bar{T}}\int_{t_{n-1}}^{t_n} &|(u_\tau - u_{h\tau})(s)|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}\, ds. \end{aligned} \tag{3.79}$$

$\square$

Lemma 3.20 *Nechť jsou splněny předpoklady věty 3.19. Pak platí*

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial e_\tau}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,t_{\bar{T}};H^{-1}(\Omega))} &\leq 9\sum_{n=1}^{\bar{T}}(\eta_t^n)^2 + 72\int_0^{t_{\bar{T}}} |(u_\tau - u_{h\tau})(s)|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}\, ds \\ &\quad + 9\|f - f_\tau\|^2_{L^2(0,t_{\bar{T}};H^{-1}(\Omega))}. \end{aligned} \tag{3.80}$$

Důkaz: Z (3.70) plyne

$$\left\|\frac{\partial e_\tau(t)}{\partial t}\right\|^2_{H^{-1}(\Omega))} \leq 3(\|(f - f_\tau)(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \|\nabla(u^n - u_\tau(t))\|^2_\Omega + \|\nabla e_\tau(t)\|^2_\Omega). \tag{3.81}$$

Integrací nerovnosti (3.81) od t_{n-1} do t_n a sečtením přes $n = 1, ..., \bar{T}$ je

$$\left\| \frac{\partial e_\tau}{\partial t} \right\|^2_{L^2(0,t_{\bar{T}};H^{-1}(\Omega))} \leq 3(\|f - f_\tau\|^2_{L^2(0,t_{\bar{T}};H^{-1}(\Omega))} + \int_0^{t_{\bar{T}}} \|\nabla e_\tau(s)\|^2_\Omega \, ds) + 3 \sum_{n=1}^{\bar{T}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nabla(u^n - u_\tau(s))\|^2_\Omega \, ds. \tag{3.82}$$

K odhadnutí druhého a třetího členu pravé strany nerovnosti (3.82) použijeme výsledků (3.69) (3.74) a (3.78)

$$\left\| \frac{\partial e_\tau}{\partial t} \right\|^2_{L^2(0,t_{\bar{T}};H^{-1}(\Omega))} \leq 3\|f - f_\tau\|^2_{L^2(0,t_{\bar{T}};H^{-1}(\Omega))} + 6 \sum_{n=1}^{\bar{T}} (\eta_t^n)^2 + 48 \int_0^{t_{\bar{T}}} |(u_\tau - u_{h\tau})(s)|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} \, ds + 6\|f - f_\tau\|^2_{L^2(0,t_{\bar{T}};H^{-1}(\Omega))} + 3 \sum_{n=1}^{\bar{T}} (\eta_t^n)^2 + 24 \sum_{n=1}^{\bar{T}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |(u_\tau - u_{h\tau})(s)|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} \, ds, \tag{3.83}$$

což dává tvrzení lemmatu.

$\square$

3.4 Horní odhad chyby - úplná diskretizace

Nyní se již dostáváme k a posteriorní analýze úplné diskretizace úlohy 3.2. Indikátor celkové chyby definujeme stejně jako v článku [9].

Definice 3.21 *Nechť $1 \le n \le \bar{N}$. Indikátor celkové chyby v čase t_n definujeme*

$$
\begin{aligned}
E(t_n)^2 = {} & \|u(t_n) - u^n\|_\Omega^2 + \|u^n - u_h^n\|_\Omega^2 + \left\| \frac{\partial e_\tau}{\partial t} \right\|^2_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))} \\
& + \left\| \frac{\partial (u_\tau - u_{h\tau})}{\partial t} \right\|^2_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))} + \int_0^{t_n} \|\nabla(u - u_\tau)(s)\|_\Omega^2 \, ds \\
& + \int_0^{t_n} |(u_\tau - u_{h\tau})(s)|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})} \, ds.
\end{aligned}
\tag{3.84}
$$

Věta 3.22 ***(Horní odhad chyby - úplná diskretizace)*** *Nechť jsou splněny předpoklady vět 3.16 a 3.19. Nechť $1 \le \bar{T} \le \bar{N}$. Pak platí*

$$
\begin{aligned}
E(t_{\bar{T}})^2 \le {} & 11 \sum_{n=1}^{\bar{T}} (\eta_t^n)^2 + 178\tau_1 \sum_{K \in \mathcal{T}_{h1}} \left\|\nabla e^0\right\|_K^2 + C_{11} \sum_{K \in \mathcal{T}_{h1}} \|e^0\|_K^2 \\
& + 11\|f - f_\tau\|^2_{L^2(0,t_{\bar{T}};H^{-1}(\Omega))} + C_{12} \sum_{n=1}^{\bar{T}} (\eta^n)^2 \\
& + (C_{11}C_{10} + C_9) \sum_{n=1}^{\bar{T}} (\eta^n)^2 \max\{h_n^2, \tau_n\},
\end{aligned}
\tag{3.85}
$$

kde konstanty C_9, C_{10}, C_{11} a $C_{12} > 0$ jsou definovány v důkazu věty.

Důkaz: Vzhledem k větě 3.19 a lemmatu 3.20 můžeme psát

$$
\begin{aligned}
E(t_{\bar{T}})^2 \leq\ & 2\sum_{n=1}^{\bar{T}}(\eta_t^n)^2 + 16\int_0^{t_{\bar{T}}} |(u_\tau - u_{h\tau})(s)|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}\,ds \\
& + 2\|f - f_\tau\|^2_{L^2(0,t_{\bar{T}};H^{-1}(\Omega))} + \|u^{\bar{T}} - u_h^{\bar{T}}\|^2_\Omega \\
& + 9\sum_{n=1}^{\bar{T}}(\eta_t^n)^2 + 72\int_0^{t_{\bar{T}}} |(u_\tau - u_{h\tau})(s)|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}\,ds \\
& + 9\|f - f_\tau\|^2_{L^2(0,t_{\bar{T}};H^{-1}(\Omega))} + \left\|\frac{\partial(u_\tau - u_{h\tau})}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,t_{\bar{T}};H^{-1}(\Omega))} \\
& + \int_0^{t_{\bar{T}}} |(u_\tau - u_{h\tau})(s)|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}\,ds.
\end{aligned}
\tag{3.86}
$$

$$
\begin{aligned}
E(t_{\bar{T}})^2 \leq\ & 11\sum_{n=1}^{\bar{T}}(\eta_t^n)^2 + 89\int_0^{t_{\bar{T}}} |(u_\tau - u_{h\tau})(s)|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}\,ds \\
& + 11\|f - f_\tau\|^2_{L^2(0,t_{\bar{T}};H^{-1}(\Omega))} + \|u^{\bar{T}} - u_h^{\bar{T}}\|^2_\Omega \\
& + \left\|\frac{\partial(u_\tau - u_{h\tau})}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,t_{\bar{T}};H^{-1}(\Omega))}. \quad (=: Y)
\end{aligned}
\tag{3.87}
$$

Nyní zbývá odhadnout druhý, čtvrtý a pátý člen nerovnosti v (3.87):

Pro každé $s \in [t_{n-1}, t_n]$ platí

$$
|\nabla(u_\tau - u_{h\tau})(s)| = \left|\frac{t_n - s}{\tau_n}\nabla e^{n-1} + \frac{s - t_{n-1}}{\tau_n}\nabla e^n\right| \leq \left|\nabla e^{n-1}\right| + |\nabla e^n|,
\tag{3.88}
$$

tudíž

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\bar{T}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |(u_\tau - u_{h\tau})(s)|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}\, ds \leq \sum_{n=1}^{\bar{T}} \tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \left\| \left|\nabla e^{n-1}\right| + |\nabla e^n| \right\|_K^2 \\
&\leq 2\tau_1 \sum_{K\in\mathcal{T}_{h1}} \left\|\nabla e^0\right\|_K^2 + 2\tau_{\bar{T}} \sum_{K\in\mathcal{T}_{h\bar{T}}} \left\|\nabla e^{\bar{T}}\right\|_K^2 + 4\sum_{n=1}^{\bar{T}-1} \tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|\nabla e^n\|_K^2 \\
&\leq 2\tau_1 \sum_{K\in\mathcal{T}_{h1}} \left\|\nabla e^0\right\|_K^2 + 4\sum_{n=1}^{\bar{T}} \tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|\nabla e^n\|_K^2 .
\end{aligned}
\tag{3.89}
$$

Vzhledem k větě 3.16 můžeme dále psát

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\bar{T}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |(u_\tau - u_{h\tau})(s)|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}\, ds \leq 2\tau_1 \sum_{K\in\mathcal{T}_{h1}} \left\|\nabla e^0\right\|_K^2 + 4\Bigg(\sum_{K\in\mathcal{T}_{h1}} \|e^0\|_K^2 \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\bar{T}} (4C_6^2 C_{Tr}^2 + 6C_{O1}^2)(\eta^n)^2 + \sum_{n=1}^{\bar{T}} (\eta^n)^2 \max\{h_n^2, \tau_n\} (2C_2^2 C_{Tr}^2 + \frac{5}{2} C_{Tr}^2 \\
&\quad + 2|\theta| C_4 C_{O1} + 2|\theta| C_5 C_{Tr} + 12|\theta|^2 C_5^2 + 12 C_7^2 + 12 C_8^2) \Bigg),
\end{aligned}
\tag{3.90}
$$

kde η^n je definováno v 3.15 a konstanty C_* jsou jako ve větě 3.16.

Odhad Y (viz. (3.87)):

Z definice semidiskrétního řešení (3.6) pro každé $t \in (t_{n-1}, t_n)$ a $v \in H_0^1(\Omega)$ je

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{\partial(u_\tau - u_{h\tau})(t)}{\partial t} v\,dx = \int_\Omega \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n} v\,dx - \int_\Omega \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} v\,dx \\
&= \int_\Omega f^n v\,dx - \int_\Omega \nabla u^n \cdot \nabla v\,dx - \int_\Omega \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} v\,dx \\
&= \int_\Omega f^n v\,dx - \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \int_K \nabla e^n \cdot \nabla v\,dx - \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \int_K \nabla u_h^n \cdot \nabla v\,dx \\
&\quad - \int_\Omega \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} v\,dx.
\end{aligned} \tag{3.91}
$$

Pro každé $v_h \in S_{h1}^n \cap H_0^1(\Omega)$ přejde definice (3.8)
na

$$
\begin{aligned}
\theta \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^I} \int_\Gamma \langle \nabla v_h \cdot n \rangle [u_h^n]\,dS - \int_\Omega f^n v_h\,dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \int_K \nabla u_h^n \cdot \nabla v_h\,dx \\
+ \int_\Omega \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} v_h\,dx = 0.
\end{aligned} \tag{3.92}
$$

Vezměme v (3.91) libovolné $v \in H_0^1(\Omega)$ pevně. Přičtení nuly z (3.92) s volbou $v_h = I_{hn}^0(v)$ k (3.91) dává pro $t \in (t_{n-1}, t_n)$

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial(u_\tau - u_{h\tau})(t)}{\partial t} v\,dx = &\int_\Omega (f^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n})(v - I_{hn}^0(v))\,dx \\
&- \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \int_K \nabla u_h^n \cdot \nabla (v - I_{hn}^0(v))\,dx \\
&+ \theta \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{hn}^I} \int_\Gamma \langle \nabla I_{hn}^0(v) \cdot n \rangle [u_h^n]\,dS \\
&- \sum_{K \in \mathcal{T}_{hn}} \int_K \nabla e^n \cdot \nabla v\,dx.
\end{aligned} \tag{3.93}
$$

První tři výrazy odpovídají postupně ξ_3/τ_n, ξ_4/τ_n a ξ_5/τ_n z (3.34) ve větě 3.16 s tím rozdílem, že místo ϕ^n zde máme v. Můžeme proto k jejich odhadnutí použít výsledků (3.50), (3.53) a (3.54):

$$
\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \frac{\partial(u_\tau - u_{h\tau})(t)}{\partial t} v\,dx\right| \leq{}& \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K^2 \left\| f^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\right\|_K^2\right)^{1/2} C_7|v|_{H^1(\Omega)} \\
&+ \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} h_K \|\nabla u_h^n \cdot n\|_{\partial K}^2\right)^{1/2} C_8|v|_{H^1(\Omega)} \\
&+ |\theta|C_5|v|_{H^1(\Omega)} \left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_{hn}^I} h_\Gamma^{-1}\|[u_h^n]\|_\Gamma^2\right)^{1/2} \\
&+ |e^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}|v|_{1,\Omega} \\
\leq{}& (|\theta|C_5 + C_7 + C_8)\eta^n|v|_{1,\Omega} + |e^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}|v|_{1,\Omega}.
\end{aligned} \tag{3.94}
$$

Z toho plyne

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial(u_\tau - u_{h\tau})(t)}{\partial t}\right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 &\leq C_9((\eta^n)^2 + |e^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}^2) \\
&\qquad \text{pro} \quad \forall t \in (t_{n-1}, t_n),
\end{aligned} \tag{3.95}
$$

kde $C_9 := 2\text{max}^2\{|\theta|C_5 + C_7 + C_8, 1\}$.

Integrací (3.95) od t_{n-1} do t_n a sečtením přes $n = 1, ..., \bar{T}$ nakonec dostaneme

$$
Y \leq C_9(\sum_{n=1}^{\bar{T}} \tau_n(\eta^n)^2 + \sum_{n=1}^{\bar{T}} \tau_n|e^n|_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_{hn})}^2). \tag{3.96}
$$

Z věty 3.16 získáme odhad pro Y ve tvaru:

$$
\begin{aligned}
Y \leq C_9 \sum_{K\in\mathcal{T}_{hn}} \|e^0\|_K^2 + \sum_{n=1}^{\bar{T}} C_9(4C_6^2C_{Tr}^2 + 6C_{O1}^2)(\eta^n)^2 \\
+ (C_9 + C_9C_{10}) \sum_{n=1}^{\bar{T}} (\eta^n)^2 \max\{h_n^2, \tau_n\},
\end{aligned} \tag{3.97}
$$

kde $C_{10} := 2C_2^2 C_{Tr}^2 + \frac{5}{2} C_{Tr}^2 + 2|\theta| C_4 C_{O1} + 2|\theta| C_5 C_{Tr} + 12|\theta|^2 C_5^2 + 12 C_7^2 + 12 C_8^2$.

Protože výraz $\|u^{\bar{T}} - u_h^{\bar{T}}\|_\Omega^2 = \|e^{\bar{T}}\|_\Omega^2$ odhadneme opět pomocí věty 3.16, můžeme pokračovat v (3.87) a získat tak odhad z tvrzení věty

$$
\begin{aligned}
E(t_{\bar{T}})^2 \leq 11 \sum_{n=1}^{\bar{T}} (\eta_t^n)^2 + 178\tau_1 \sum_{K \in \mathcal{T}_{h1}} \left\| \nabla e^0 \right\|_K^2 + C_{11} \sum_{K \in \mathcal{T}_{h1}} \|e^0\|_K^2 \\
+ 11 \|f - f_\tau\|_{L^2(0, t_{\bar{T}}; H^{-1}(\Omega))}^2 + C_{12} \sum_{n=1}^{\bar{T}} (\eta^n)^2 \\
+ (C_{11} C_{10} + C_9) \sum_{n=1}^{\bar{T}} (\eta^n)^2 \max\{h_n^2, \tau_n\},
\end{aligned}
\tag{3.98}
$$

kde $C_{11} := 357 + C_9$ a $C_{12} := C_{11}(4C_6^2 C_{Tr}^2 + 6C_{O1}^2)$.

□

Závěr

Na začátku práce jsme nejprve zavedli pojem a posteriorního odhadu chyby. V druhé kapitole jsme popsali několik metod vedoucích k odhadům chyby v DG-normě (definice viz. (2.50)) a L^2 normě pro Poissonovu rovnici se smíšenými okrajovými podmínkami. První z nich byla založena na Galerkinovské ortogonalitě chyby a vlastnostech Oswaldova interpolačního operátoru, který nám umožnil nespojité po částech polynomiální funkce aproximovat spojitými po částech polynomiální funkcemi.

Podobně jako je tomu u a priorních odhadů, i zde se k odvození odhadu v L^2 normě použil princip duality. V pořadí třetí metodě hrál důležitou úlohu ortogonální rozklad gradientu chyby, který umožnil odvozovat odhad pro konformní a nekonformní část chyby samostatně. Z hlediska aproximativních vlastností se použila po částech konstantní L^2 projekce splňující homogenní Dirichletovu okrajovou podmínku. V porovnání s konformní metodou konečných prvků se v indikátorech chyby nespojité Galerkinovy metody navíc vyskytují skoky přibližného řešení na hranách triangulace.

Ve třetí kapitole jsme odvodili horní a posteriorní odhad pro rovnici vedení tepla diskretizovanou zpětnou Eulerovou metodou v čase a po částech lineární nespojitou Galerkinovou metodou v prostoru. K rozdělení chyby na konformní a nekonformní část se opět použil Helmholtzův rozklad. Když srovnáme náš indikátor chyby vzhledem k prostorovým proměnným s tím, který vzešel z konformní metody konečných prvků, vidíme, že se v našem navíc vyskytují opět skoky přibližného řešení na hranách.

Podnětů pro budoucí práci je celá řada. Nabízí se studování úloh, kde vystupuje i konvekce. Dalším krokem je potom a posteriorní analýza nelineárních rovnic.

Literatura

[1] Karakashian O. A., Pascal F.: *A posteriori error estimates for a discontinuous Galerkin approximation of second-order elliptic problems*, SIAM J. Numer. Anal. **41** (2003), 2374-2399.

[2] Verfürth R.: *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*, Wiley-Teubner, New York, 1996.

[3] Karakashian O. A., Pascal F.: *Adaptive discontinuous Galerkin approximations of second-order elliptic problems.* In: Neittaanmäki P., Rossi T., Korotov S., Oñate E., Périaux J., and Knörzer D. (eds.) European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2004, University of Jyväskyläs, (2004).

[4] Karakashian O. A., Pascal F.: *Convergence of adaptive discontinuous Galerkin approximations of second-order elliptic problems*, SIAM J. Numer. Anal. **45** (2007), 641-665.

[5] Becker R., Hansbo P., Larson M.: *Energy norm a posteriori error estimation for discontinuous Galerkin methods*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **192** (2003), 723-733.

[6] Girault V., Raviart P.-A.: *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer-Verlag, Germany, 1986.

[7] Ciarlet P.-G.: *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1979.

[8] Fučík S., John O., Kufner A.: *Function Spaces*, Academia, Praha, 1977.

[9] Nicaise S., Soualem N.: *A posteriori error estimates for a nonconforming finite element discretization of the heat equation*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **39** (2005), 319-348.

[10] Bernardi C., Verfürth R.: *A posteriori error analysis of the fully discretized time-dependent Stokes equations*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **38** (2004), 437-455.

[11] Dolejší V., Feistauer M., Schwab C.: *A finite volume discontinuous Galerkin scheme for nonlinear convection–diffusion problems*, Calcolo **39** (2002), 1-40.

[12] Rivière B., Wheeler M. F.: *A posteriori error estimates for a discontinuous Galerkin method applied to elliptic problems*, Comput. Math. Appl., **46** (2003), 141-163.

[13] Dari E., Duran R., Padra C., Vampa V.: *A posteriori error estimators for nonconforming finite element methods*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **30** (1996), 385-400.

[14] Verfürth R.: *A posteriori error estimates for finite element discretizations of the heat equation*, Calcolo **40** (2003), 195-212.

[15] Clément P.: *Approximation by finite element functions using local regularization*, RAIRO Anal. Numér. **9** (1975), 77-84.

[16] Dolejší V., Feistauer M., Sobotíková V.: *Analysis of the discontinuous Galerkin method for nonlinear convection-diffusion problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **194** (2005), 2709-2733.

[17] Dolejší V., Feistauer M.: *Error estimates of the discontinuous Galerkin method for nonlinear nonstationary convection-diffusion problems*, Numer. Funct. Anal. Optim. **26** (2005), 349-383.

[18] Dolejší V., Feistauer M., Kučera V., Sobotíková V.: *An optimal $L^\infty(L^2)$-error estimate of the discontinuous Galerkin method for a nonlinear nonstationary convection-diffusion problem*, IMA J. Numer. Anal. **28** (2008), 496-521.

[19] Dolejší V., Vlasák M.: *Analysis of a BDF-DGFE scheme for nonlinear convection-diffusion problems*, Numer. Math. **110** (2008), 405-447.

[20] Ern A., Stephansen A. F., Vohralík M.: *Improved energy norm a posteriori error estimation based on flux reconstruction for discontinuous Galerkin methods*, Preprint R07050, Laboratoire Jacques-Louis Lions, submitted for publication, 2007.

[21] Ohlberger M.: *A posteriori error estimates for finite volume approximations to singularly perturbed nonlinear convection-diffusion equations*, Numer. Math. **87** (2001), 737-761.

[22] Ohlberger M.: *A review of a posteriori error control and adaptivity for approximations of nonlinear conservation laws*, Int. J. Numer. Meth. Fluids **59** (2009), 333-354.