Oponentský posudek na diplomovou práci I. Šebestové:

„ *Aposteriorní odhady chyby nespojité Galerkinovy metody pro konvektivně difusní rovnice*" .

Problematika aposteriorních odhadů je důležitou součástí metody konečných prvků, pomocí níž můžeme během výpočtu lokálně měnit dělení oblasti Ω s cílem zajistit garantovanou chybu numerického řešení daného problému. Většina prací z této oblasti se věnuje konformnímu případu, kdy konečně-dimensionální prostory, na nichž se hledají přibližná řešení, jsou podmnožinami prostoru, použitého ve formulaci slabého řešení úlohy. Cílem této práce bylo odvodit aposteriorní odhady pro nespojitou Galerkinovu metodu. Ta je charakteristická tím, že používané konečně-dimensionální prostory jsou tvořeny po částech polynomiálními funkcemi, které jsou však nespojité na meziprvkových hranicích. Navíc umožňuje pracovat i s nekonformními sítěmi, které obsahují tzv.visící uzly (hanging nodes). Je zřejmé, že problematika této práce je velmi důležitá pro výpočetní praxi.

Práce samotná se sestává ze dvou částí. První, jež je obsahem Kapitoly 2, je věnována výše uvedené problematice pro Poissonovu rovnici se smíšenou Dirichletovou a Neumannovou okrajovou podmínkou a má spíše rešeršní charakter. Autorka nejprve uvádí 3 varianty nespojité Galerkinovy formulace této úlohy a sice symetrickou, nesymetrickou a neúplnou. Důležitým výsledkem této části je Věta 2.8 o řádu aproximace nespojitých, po částech polynomiálních funkcí pomocí funkcí patřících do téhož prostoru po částech polynomiálních funkcí, avšak spojitých v celé Ω. Uvedený důkaz rozšiřuje známé výsledky na případ smíšených okrajových podmínek a nekonformní triangulace. Autorka dále představuje přístupy, které umožňují odvodit aposteriorní odhady nespojité Galerkinovy metody a sice odhady reziduálního typu, založené na ortogonalitě chyby, na principu duality a na Helmholtzově rozkladu.

Těžiště diplomové práce spočívá v její druhé části (Kapitola 3), která je plně věnována odvození horního aposteriorního odhadu pro nestacionární úlohu vedení tepla. Autorka nejprve uvádí definici slabého řešení příslušné rovnice, posléze použije zpětnou Eulerovu metodu k její časové diskretizaci. Prostorová diskretizace úloh na jednotlivých časových vrstvách je provedena opět užitím nespojité Galerkinovy metody. Stěžejními výsledky této části jsou důkazy horního odhadu vzhledem k prostorovým proměnným za použití techniky Helmholtzova rozkladu (Věta 3.16), vzhledem k časové proměnné (Věta 3.19) a horní odhad chyby pro úlohu plně diskretizovanou. (Věta 3.22). Všechny tyto důkazy, zejména pak Věty 3.16 jsou technicky velmi náročné.

Téma diplomové práce vyžaduje znalost řady velmi jemných výsledků z aproximativní teorie metody konečných prvků, které zdaleka nejsou náplní základní přednášky. Způsob presentace výsledků dokazuje, že si sl. Šebestová tyto poznatky dobře osvojila a umí s nimi pracovat. Samotná práce obsahuje několik původních výsledků (zobecnění). Je napsána velmi pěkně, srozumitelně a na dobré technické úrovni. Možná bylo vhodné zařadit poznámku o praktickém využití získaných výsledků pro vlastní adaptaci sítě během výpočtu. K práci mám několik drobných otázek a poznámek a sice:

1) Místo a posteriorní (odpovídající spíše angličtině) by se všude mělo psát aposteriorní.

2) Bylo by vhodné, kdyby u (2.11) bylo napsáno, že se jedná o lokální kvasiuniformitu dělení. Pokud tato vlastnost je nutná pro platnost Vět 4 a 5, měla by být explicite vzpomenuta v jejich znění.
3) Není mi jasná Definice 2.13, specielně její umístění až v odst. 2.4.
4) Úloha (2.58) má řešení určené až na konstantu. Které z těchto řešení bereme, aby platilo (2.59)?
5) V Definici 3.1 slabého řešení se zřejmě předpokládá, že časová derivace přesného řešení je prvkem $L^2(\Omega)$ pro s.v. t? Pokud ano, měla by tato skutečnost být zohledněna ve volbě prostoru, v němž se řešení hledá. Podobně z (3.3) plyne, že pravá strana f náleží do duálu k $H^1(\Omega)$, avšak v definici slabého řešení se s ní nakládá jako s kvadraticky integrovatelnou funkcí (pokud ovšem integrál neznamená současně dualitu).
6) Formulace tak, jak je uvedena pod (3.1) se vztahuje k hraně Γ, což ale pisatelka určitě neměla na mysli.
7) Formulace „ Aplikací per partes" na str. 39 nahoře a název Věty 3.16 („odhad horní chyby vzhledem k prostoru" (?)) nezní příliš hezky.

Závěr: práce splňuje všechny předpoklady kladené na práci diplomovou a proto ji doporučuji k obhajobě.

V Praze 11.8. 2009

J.Haslinger

Návrh klasifikace: *výborně*