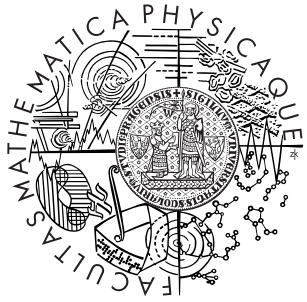
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Kristýna Sionová

Párové testy s chybějícími pozorováními

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Karel Zvára, CSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Teorie pravděpodobnosti, matematická statistika a ekonometrie
Studijní plán: Matematická statistika

2009

Děkuji doc. RNDr. Karovi Zvárovi, CSc. za trpělivost a cenné připomínky a rady poskytnuté při vypracování této diplomové práce.

Dále děkuji Ing. Vilému Sklenákovi, CSc. za konzultace týkající se používaného softwaru.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 7. 8. 2009 Kristýna Sionová

Obsah

1 Úvod **5**
- 1.1 Problém 5
- 1.2 Značení 6

2 Dvouvýběrový a párový t test **7**
- 2.1 Dvouvýběrový t test 7
- 2.2 Párový t test 7

3 Testy založené na maximálně věrohodném odhadu μ_1 a μ_2 **9**
- 3.1 Chybějící pozorování u jedné z náhodných veličin 9
- 3.2 Chybějící pozorování u obou náhodných veličin 12
  - 3.2.1 Maximálně věrohodný odhad $\Delta = \mu_1 - \mu_2$ při známém $\mathbf{\Sigma}$ 14
  - 3.2.2 Odhad Δ při neznámém $\mathbf{\Sigma}$ 14

4 Test podle Bhoje **18**
- 4.1 Stejné rozptyly $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 18
  - 4.1.1 Volba vhodného λ 20
- 4.2 Nestejné rozptyly $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 23
  - 4.2.1 Volba vhodného λ 24

5 Test podle Mehty a Gurlanda **28**

6 Porovnání síly testů **29**
- 6.1 Pozorování chybějící u jedné z náhodných veličin 29
- 6.2 Pozorování chybějící u obou náhodných veličin 33

7 Závěr **55**

Název práce: Párové testy s chybějícími pozorováními
Autor: Kristýna Sionová
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Karel Zvára, CSc.
e-mail vedoucího: karel.zvara@mff.cuni.cz

Abstrakt: Cílem této práce je nalézt postupy pro testování rovnosti středních hodnot u výběru z dvourozměrného normálního rozdělení v případě chybějících pozorování pro jednu nebo obě náhodné veličiny. Jedním z možných řešení je vyškrtnutí neúplných párů pozorování a použití párového t testu. V této práci popisujeme testy, které umožňují využít všechna pozorování. Pro případ pozorování chybějících pro jednu z náhodných veličin uvádíme řešení Banerjeeho, Welchovo a Mehty a Gurlanda, pro případ pozorování chybějících pro obě náhodné veličiny uvádíme řešení Banerjeeho, Welchovo, Bhojovo a řešení založené na maximálně věrohodném odhadu. Nalezená řešení porovnáme vzájemně a s párovým t testem na simulovaných datech pomocí softwaru R 2.5.1.

Klíčová slova: chybějící pozorování, párový t test, dvourozměrné normální rozdělení, rovnost středních hodnot

Title: Paired tests with missing observations
Author: Kristýna Sionová
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: doc. RNDr. Karel Zvára, CSc.
Supervisor's e-mail address: karel.zvara@mff.cuni.cz

Abstract: The aim of this work is to find procedures for testing the equality of means of a bivariate normal distribution when observations are missing on one or both variables. One of the possible solutions is to discard the incomplete data and to use the paired t test. In this thesis we describe tests that enable using all available data. For the case of missing observations on one variable, the solutions of Banerjee, Welch and Mehta and Gurland are presented. For the case of missing observations on both variables, the solutions of Banerjee, Welch, Bhoj and the solution based on the maximal likelihood estimate are presented. We compare the solutions found to each other and to the paired t test on simulated data. The software R 2.5.1 is used for this purpose.

Keywords: missing observations, paired t test, bivariate normal distribution, equality of means

Kapitola 1

Úvod

1.1 Problém

Nechť $(X_1, Y_1)', \ldots, (X_n, Y_n)'$ je náhodný výběr z dvourozměrného normálního rozdělení $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, kde

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Chceme testovat hypotézu

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

proti alternativě

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

na hladině α. K testu H_0 použijeme v takovém případě párový t test. V praxi se ale někdy můžeme setkat se situací, kdy kromě úplných párů pozorování $(X_1, Y_1)', \ldots, (X_n, Y_n)'$ máme pro jednu (nebo obě) z náhodných veličin i pozorování neúplná, bez odpovídajících hodnot pro druhou náhodnou veličinu. Situace je následující:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ ? \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_{n+n_1} \\ ? \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

$(X_i, Y_i)'$ a X_j, $i = 1, \ldots, n$, $j = n+1, \ldots, n+n_1$ vzájemně nezávislé, nebo

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ ? \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_{n+n_1} \\ ? \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ? \\ Y_{n+1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} ? \\ Y_{n+n_2} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

$(X_i, Y_i)'$, X_j a Y_k, $i = 1, \ldots, n$, $j = n+1, \ldots, n+n_1$, $k = n+1, \ldots, n+n_2$ vzájemně nezávislé.

V obou případech předpokládáme, že chybění jednotlivých pozorování je *náhodné* (způsobené například špatnou organizací experimentu), nikoli systematické (příkladem takové situace jsou například dvojice pozorování „body získané v příjmacím řízení“ a „průměr známek z prvního ročníku

VŠ“ - známky z VŠ chybí nikoli pro náhodné studenty, ale pouze pro ty, kteří v příjmacím řízení dosáhli menšího než dostačujícího počtu bodů).

Chceme i v takové situaci testovat hypotézu H_0. Pokud $\rho \neq 0$, nejsou $X_1, \ldots, X_n$ a $Y_1, \ldots, Y_n$ nezávislé, nelze proto užít dvouvýběrového t testu. Při užití párového t testu ovšem zase nemůžeme nijak využít informaci obsaženou v pozorováních $X_{n+1}, \ldots, X_{n+n_1}$ (případně $Y_{n+1}, \ldots, Y_{n+n_2}$).

Cílem této práce je nalézt takové testy H_0 proti H_1, které by nám umožnily využít i neúplné páry pozorování a porovnat je s párovým t testem.

Ve druhé kapitole ve stručnosti připomeneme párový a dvouvýběrový t test. V kapitolách následujících představíme alternativní testy, které by nám umožnily zahrnout i neúplné páry pozorování - v úvodu třetí kapitoly a v páté kapitole se budeme zabývat situací pozorování chybějících pouze pro jednu z náhodných veličin (případ 1.1), ve zbytku třetí kapitoly a v kapitole čtvrté budeme hledat řešení pro situaci pozorování chybějících pro obě náhodné veličiny (případ 1.2). V šesté kapitole porovnáme pomocí simulací hladinu a sílu nalezených testů a párového t testu.

Upozorněme ještě, že hledáme test pro střední hodnoty výběru z dvourozměrného *normálního* rozdělení. Zda jsou data skutečně normální, můžeme testovat například v programu R [13] a jeho funkcí `mvnorm.skew.test` a `mvnorm.kur.test` z knihovny ICS [11].

1.2 Značení

V dalším textu budeme používat toto značení:

$$\begin{array}{rclrcl} \overline{X}^{(n)} & = & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, & \overline{Y}^{(n)} & = & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \\ \overline{X}^{(n_1)} & = & \frac{1}{n_1}\sum_{i=n+1}^{n+n_1} X_i, & \overline{Y}^{(n_2)} & = & \frac{1}{n_2}\sum_{i=n+1}^{n+n_2} Y_i, \\ \overline{X}^{(n+n_1)} & = & \frac{1}{n+n_1}\sum_{i=1}^{n+n_1} X_i, & \overline{Y}^{(n+n_2)} & = & \frac{1}{n+n_2}\sum_{i=1}^{n+n_2} Y_i, \end{array}$$

$t_k(\alpha)$ ... α-kvantil Studentova rozdělení o k stupních volnosti
u_α ... α-kvantil normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$

Kapitola 2

Dvouvýběrový a párový t test

2.1 Dvouvýběrový t test

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_1, \sigma^2)$, nechť $Y_1, \ldots, Y_m$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_2, \sigma^2)$. Nechť náhodné veličiny $X_1 \ldots, X_n$ a $Y_1, \ldots, Y_m$ jsou vzájemně nezávislé. Nechť $n \geq 2$, $m \geq 2$. Chceme testovat hypotézu

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

proti oboustranné alternativě

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2.$$

Označme

$$\begin{array}{rclrcl} \overline{X} & = & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, & \overline{Y} & = & \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i, \\ S_X^2 & = & \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, & S_Y^2 & = & \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y})^2, \end{array}$$

a dále

$$T_D = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}} \sqrt{\frac{mn(n+m-2)}{n+m}}.$$

Rozhodovací pravidlo je, že hypotézu H_0 zamítneme na hladině α, bude-li $|T_D| \geq t_{n+m-2}(1 - \frac{\alpha}{2})$ (viz například Anděl [2], odstavec 4.5.4).

2.2 Párový t test

Nechť $(X_1, Y_1)', \ldots, (X_n, Y_n)'$ je náhodný výběr z dvourozměrného normálního rozdělení $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, kde

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Chceme testovat hypotézu

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

proti alternativě

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2.$$

Položme $Z_i = X_i - Y_i$, $i = 1, \ldots, n$ a označme

$$\overline{Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i, \quad S_Z^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Z_i - \overline{Z}\right)^2,$$

a dále

$$T_P = \frac{\overline{Z}\sqrt{n}}{S_Z}.$$

Hypotézu H_0 zamítneme na hladině α, bude-li $|T_P| \geq t_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ (viz například Anděl [2], odstavec 4.5.3).

Kapitola 3

Testy založené na maximálně věrohodném odhadu μ_1 a μ_2

3.1 Chybějící pozorování u jedné z náhodných veličin

Zabývejme se nejprve speciálním případem struktury dat s chybějícími pozorováními, kdy data chybí pouze pro jednu ze zkoumaných veličin. Taková situace nastává například tehdy, když zjišťování veličin X a Y neprobíhá naráz a při druhém měření se nám nepovede shromáždit všechny objekty, na nichž jsme prováděli měření první. Nechť

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ ? \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_{n+n_1} \\ ? \end{pmatrix}$$

je náhodný výběr z dvourozměrného normálního rozdělení $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, kde

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Nechť $(X_i, Y_i)'$ a X_j, $i = 1, \dots, n$, $j = n+1, \dots, n+n_1$ jsou vzájemně nezávislé. Hledáme maximálně věrohodný odhad parametru $\boldsymbol{\mu}$ založený na všech pozorovaných hodnotách. Návod k odvození takovéhoto odhadu popisuje ve svém článku Anderson [1]. Aplikací jím popsného výpočtu dostáváme

maximálně věrohodné odhady μ_1, μ_2, σ_1^2, σ_2^2, a ρ:

$$\begin{aligned}
\hat{\mu_1} &= \overline{X}^{(n+n_1)}, \\
\hat{\sigma_1^2} &= \frac{1}{n+n_1}\sum_{i=1}^{n+n_1}\left(X_i - \overline{X}^{(n+n_1)}\right)^2, \\
\hat{\mu_2} &= \overline{Y}^{(n)} + \hat{\beta_{21}}\left(\overline{X}^{(n+n_1)} - \overline{X}^{(n)}\right), \\
\hat{\sigma_2^2} &= \hat{\beta_{21}}^2\hat{\sigma_1^2} + \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j - \overline{Y}^{(n)}\right)^2 - \hat{\beta_{21}}^2\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - \overline{X}^{(n)}\right)^2\right], \\
\hat{\rho} &= \hat{\beta_{21}}\frac{\hat{\sigma_1}}{\hat{\sigma_2}},
\end{aligned}$$

kde

$$\hat{\beta_{21}} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - \overline{X}^{(n)}\right)\left(Y_j - \overline{Y}^{(n)}\right)}{\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - \overline{X}^{(n)}\right)^2}$$

je maximálně věrohodný odhad parametru $\beta_{21} = \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$.

Pomocí $\hat{\mu_1}$ a $\hat{\mu_2}$ sestrojíme maximálně věrohodný odhad rozdílu středních hodnot $\Delta = \mu_1 - \mu_2$:

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta} &= \hat{\mu_1} - \hat{\mu_2} \\
&= \overline{X}^{(n+n_1)} - \overline{Y}^{(n)} + \hat{\beta_{21}}\overline{X}^{(n)} - \hat{\beta_{21}}\overline{X}^{(n+n_1)},
\end{aligned}$$

po úpravě

$$\hat{\Delta} = \overline{X}^{(n)}A\left(\hat{\beta_{21}}\right) + \overline{X}^{(n_1)}\left[1 - A\left(\hat{\beta_{21}}\right)\right] - \overline{Y}^{(n)} \overset{ozn.}{=} Z\left(\hat{\beta_{21}}\right),$$

kde

$$A\left(\hat{\beta_{21}}\right) = \frac{n}{n+n_1} + \hat{\beta_{21}}\frac{n_1}{n+n_1}.$$

Podobným způsobem můžeme zkonstruovat celou třídu nestranných odhadů rozdílu středních hodnot (viz Lin [5])

$$\mathcal{C} = \left\{Z(t) = \overline{X}^{(n)}A(t) + \overline{X}^{(n_1)}\left[1 - A(t)\right] - \overline{Y}^{(n)} \,\middle|\, t \text{ je funkcí } (X_i, Y_i)', i = 1, \ldots, n\right\}.$$

Lin [6] podrobněji zkoumá několik odhadů této třídy. Pro nás jsou zajímavé zejména dva jím popisované testy používající odhad $Z(0) = \overline{X}^{(n+n_1)} - \overline{Y}^{(n)}$, neboť tyto umožňují testovat hypotézu H_0 při neznámém $\mathbf{\Sigma}$ a při použití všech (i neúplných) dvojic pozorování.

Test podle Banerjeeho. Banerjee [3] ve svém článku podává návod k sestrojení intervalového odhadu o spolehlivosti (přinejmenším) $1-\alpha$ pro lineární kombinaci středních hodnot k normálních rozdělení. Nechť $U_{i1}, \ldots, U_{il_i}, i = 1, \ldots, k$ je náhodný výběr z rozdělení $N(m_i, \tau_i^2)$ s výběrovým průměrem $\overline{U_i}$ a výběrovým rozptylem s_i^2. Pak pro reálné konstanty $c_i,\ i = 1, \ldots, k$ platí

$$\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{k} c_i \overline{U_i} - \sqrt{\sum_{i=1}^{k} t_{l_i-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{c_i^2 s_i^2}{l_i}} \le \sum_{i=1}^{k} c_i m_i \right. \tag{3.1}$$
$$\left. \le \sum_{i=1}^{k} c_i \overline{U_i} + \sqrt{\sum_{i=1}^{k} t_{l_i-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{c_i^2 s_i^2}{l_i}}\right) \ge \alpha.$$

Nechť $n \ge 2$, $n_1 \ge 2$. Platí:

$$Z(0) = \overline{X}^{(n+n_1)} - \overline{Y}^{(n)} = \frac{n}{n+n_1}\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(n)} + \frac{n_1}{n+n_1}\overline{X}^{(n_1)}$$

a dále

$$\begin{aligned}
\frac{n}{n+n_1}X_i - Y_i &\sim N\left(\frac{n}{n+n_1}\mu_1 - \mu_2, \frac{n^2}{(n+n_1)^2}\sigma_1^2 - 2\frac{n}{n+n_1}\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right), \\
&\quad i = 1, \ldots, n, \\
\frac{n_1}{n+n_1}X_i &\sim N\left(\frac{n_1}{n+n_1}\mu_1, \frac{n_1^2}{(n+n_1)^2}\sigma_1^2\right),\ i = n+1, \ldots, n+n_1.
\end{aligned}$$

Položme $k = 2$, $l_1 = n$, $l_2 = n_1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $m_1 = \frac{n}{n+n_1}\mu_1 - \mu_2$, $m_2 = \frac{n_1}{n+n_1}\mu_1$, $U_{1i} = \frac{n}{n+n_1}X_i - Y_i$ a $U_{2i} = \frac{n_1}{n+n_1}X_i$. Dosazením do nerovnosti (3.1) dostáváme

$$\mathsf{P}\left(\left|\overline{X}^{(n+n_1)} - \overline{Y}^{(n)} - (\mu_1 - \mu_2)\right| \ge \sqrt{t_{n-1}^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)k_1 + t_{n_1-1}^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)k_2}\right) \le \alpha,$$

kde

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{1}{n(n-1)}\left[\left(\frac{n}{n+n_1}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}^{(n)}\right)^2\right. \\
&\quad \left. -2\frac{n}{n+n_1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}^{(n)}\right)\left(Y_i - \overline{Y}^{(n)}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}^{(n)}\right)^2\right], \\
k_2 &= \frac{\left(\frac{n_1}{n+n_1}\right)^2 \sum_{i=n+1}^{n+n_1}\left(X_i - \overline{X}^{(n_1)}\right)^2}{n_1(n_1-1)}.
\end{aligned}$$

Hypotézu H_0 tedy zamítáme na hladině (nejvýše) α, je-li

$$\left|\overline{X}^{(n+n_1)} - \overline{Y}^{(n)}\right| \ge \sqrt{t_{n-1}^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)k_1 + t_{n_1-1}^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)k_2}.$$

Test podle Welche. Druhý navrhovaný test je založen na Welchově [17] poznatku, totiž že náhodná veličina

$$\frac{\overline{X}^{(n+n_1)} - \overline{Y}^{(n)} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{k_1 + k_2}}$$

má přibližně rozdělení $\mathtt{t}_f$, $f = \frac{(k_1+k_2)^2}{\frac{k_1^2}{n-1}+\frac{k_2^2}{n_1-1}}$. Zamítáme proto H_0 na hladině (přibližně) α, je-li

$$\left| \frac{\overline{X}^{(n+n_1)} - \overline{Y}^{(n)}}{\sqrt{k_1 + k_2}} \right| \geq t_f \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

3.2 Chybějící pozorování u obou náhodných veličin

Následující testy popisují ve svém článku Lin a Stivers [7]. Nechť

$$\binom{X_1}{Y_1}, \ldots \binom{X_n}{Y_n}, \binom{X_{n+1}}{?}, \ldots, \binom{X_{n+n_1}}{?}, \binom{?}{Y_{n+1}}, \ldots, \binom{?}{Y_{n+n_2}}$$

je náhodný výběr z dvourozměrného normálního rozdělení $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, kde

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Nechť $(X_i, Y_i)'$, X_j a Y_k, $i = 1, \ldots, n$, $j = n+1, \ldots, n+n_1$, $k = n+1, \ldots, n+n_2$ jsou vzájemně nezávislé. Hledáme maximálně věrohodný odhad parametru $\boldsymbol{\mu}$ založený na všech pozorovaných hodnotách. Zřejmě vektor

$$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+n_1}, Y_{n+1}, \ldots, Y_{n+n_2})'$$

má $(2n + n_1 + n_2)$-rozměrné normální rozdělení $N(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{S})$, kde

$$\boldsymbol{m} = (\mu_1, \ldots, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_2, \mu_1, \ldots, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_2)'$$

a

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2\boldsymbol{I}_n & \rho\sigma_1\sigma_2\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \rho\sigma_1\sigma_2\boldsymbol{I}_n & \sigma_2^2\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \sigma_1^2\boldsymbol{I}_{n_1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \sigma_2^2\boldsymbol{I}_{n_2} \end{pmatrix},$$

(symbol $\boldsymbol{I}_n$ značí jednotkovu matici typu $n \times n$). Pro hustotu f rozdělení $N(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{S})$ platí

$$f(\boldsymbol{x}, \mu_1, \mu_2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{2n+n_1+n_2}{2}} |\boldsymbol{S}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{ -\frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})' \boldsymbol{S}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})}{2} \right\}.$$

Hustotu zlogaritmujeme a parciální derivace logaritmu podle μ_1 a μ_2 položíme rovny nule. Dostáváme soustavu věrohodnostních rovnic

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln f\left(\boldsymbol{X},\mu_1,\mu_2\right)}{\partial \mu_1} &= 0,\\ \frac{\partial \ln f\left(\boldsymbol{X},\mu_1,\mu_2\right)}{\partial \mu_2} &= 0,\end{aligned}$$

po úpravě

$$\begin{aligned}&\mu_1\left(\frac{2n}{\sigma_1^2\left(1-\rho^2\right)}+\frac{2n_1}{\sigma_1^2}\right)+\mu_2\left(\frac{-2n\rho}{\sigma_1\sigma_2\left(1-\rho^2\right)}\right)\\ &\qquad=\frac{2}{\sigma_1^2\left(1-\rho^2\right)}\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{2}{\sigma_1^2}\sum_{i=n+1}^{n+n_1}X_i-\frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2\left(1-\rho^2\right)}\sum_{i=1}^{n}Y_i,\\ &\mu_1\left(\frac{-2n\rho}{\sigma_1\sigma_2\left(1-\rho^2\right)}\right)+\mu_2\left(\frac{2n}{\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)}+\frac{2n_2}{\sigma_2^2}\right)\\ &\qquad=\frac{2}{\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)}\sum_{i=1}^{n}Y_i+\frac{2}{\sigma_2^2}\sum_{i=n+1}^{n+n_2}Y_i-\frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2\left(1-\rho^2\right)}\sum_{i=1}^{n}X_i.\end{aligned}$$

Řešením této soustavy je vektor $\hat{\boldsymbol{\mu}}=\left(\hat{\mu_1},\hat{\mu_2}\right)'$, pro který platí

$$\begin{aligned}\hat{\mu_1} &= \frac{n\left(n+n_2\right)\overline{X}^{(n)}+n_1\left[n+n_2\left(1-\rho^2\right)\right]\overline{X}^{(n_1)}-nn_2\beta_{12}\left(\overline{Y}^{(n)}-\overline{Y}^{(n_2)}\right)}{n^2+nn_1+nn_2+n_1n_2\left(1-\rho^2\right)},\\ \hat{\mu_2} &= \frac{n\left(n+n_1\right)\overline{Y}^{(n)}+n_2\left[n+n_1\left(1-\rho^2\right)\right]\overline{Y}^{(n_2)}-nn_1\beta_{21}\left(\overline{X}^{(n)}-\overline{X}^{(n_1)}\right)}{n^2+nn_1+nn_2+n_1n_2\left(1-\rho^2\right)},\end{aligned}$$

Kde $\beta_{12}=\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ a $\beta_{21}=\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$. Protože platí $\hat{\boldsymbol{\mu}}=\boldsymbol{BX}$, kde

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\left(n+n_2\right)\mathbf{1}_n' & -n_2\beta_{12}\mathbf{1}_n' & \left(n+n_2\left(1-\rho^2\right)\right)\mathbf{1}_{n_1}' & n\beta_{12}\mathbf{1}_{n_2}'\\ -n_1\beta_{21}\mathbf{1}_n' & \left(n+n_1\right)\mathbf{1}_n' & n\beta_{21}\mathbf{1}_{n_1}' & \left(n+n_1\left(1-\rho^2\right)\right)\mathbf{1}_{n_2}'\end{pmatrix}$$

(symbol $\mathbf{1}_n$ značí vektor délky n ze samých jedniček) a $\boldsymbol{X}\sim N\left(\boldsymbol{m},\boldsymbol{S}\right)$, tak rozdělení vektoru $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ je $N\left(\boldsymbol{Bm},\boldsymbol{BSB'}\right)$ (viz například Anděl [2], věta 4.4). Po vynásobení a úpravě dostáváme

$$\mathsf{E}\,\hat{\boldsymbol{\mu}}=\boldsymbol{Bm}=\left(\mu_1,\mu_2\right)'$$

a

$$\begin{aligned}&\mathsf{var}\,\hat{\boldsymbol{\mu}}=\boldsymbol{BSB'}\\ &=\frac{1}{n^2+nn_1+nn_2+n_1n_2\left(1-\rho^2\right)}\begin{pmatrix}\sigma_1^2\left(n+n_2\left(1-\rho^2\right)\right) & \rho\sigma_1\sigma_2n\\ \rho\sigma_1\sigma_2n & \sigma_2^2\left(n+n_1\left(1-\rho^2\right)\right)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3.2.1 Maximálně věrohodný odhad $\Delta = \mu_1 - \mu_2$ při známém $\boldsymbol{\Sigma}$

Rozdíl středních hodnot $\Delta = \mu_1 - \mu_2$ je funkcí vektorového parametru $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)'$: $\Delta = (1, -1)\,\boldsymbol{\mu}$. Maximálně věrohodným odhadem této funkce je

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta} &= (1, -1)\,\hat{\boldsymbol{\mu}} \\
&= \frac{1}{n^2 + nn_1 + nn_2 + n_1 n_2 \left(1 - \rho^2\right)} \Big\{ \left(n + n_2 + n_1 \beta_{21}\right) n \overline{X}^{(n)} \\
&\quad + \left[n + n_2 \left(1 - \rho^2\right) - n\beta_{21}\right] n_1 \overline{X}^{(n_1)} \\
&\quad - \left(n + n_1 + n_2 \beta_{12}\right) n \overline{Y}^{(n)} \\
&\quad - \left[n + n_1 \left(1 - \rho^2\right) - n\beta_{12}\right] n_2 \overline{Y}^{(n_2)} \Big\} \\
&= a\overline{X}^{(n)} + (1 - a)\,\overline{X}^{(n_1)} - b\overline{Y}^{(n)} - (1 - b)\,\overline{Y}^{(n_2)},
\end{aligned} \tag{3.2}$$

kde

$$\begin{aligned}
a &= \frac{n\left(n + n_2 + n_1 \beta_{21}\right)}{\left(n + n_1\right)\left(n + n_2\right) - n_1 n_2 \rho^2}, \\
b &= \frac{n\left(n + n_1 + n_2 \beta_{12}\right)}{\left(n + n_1\right)\left(n + n_2\right) - n_1 n_2 \rho^2}.
\end{aligned}$$

Rozdělení $\hat{\Delta}$ odvodíme snadno, neboť známe rozdělení $\hat{\boldsymbol{\mu}}$:

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta} &\sim N\left(\Delta, \sigma_\Delta^2\right), \\
\sigma_\Delta^2 &= \frac{\sigma_1^2 \left[n + n_2 \left(1 - \rho^2\right)\right] - 2\rho\sigma_1\sigma_2 n + \sigma_2^2 \left[n + n_1 \left(1 - \rho^2\right)\right]}{n^2 + nn_1 + nn_2 + n_1 n_2 \left(1 - \rho^2\right)} \\
&= \left[\frac{a^2}{n} + \frac{(1 - a)^2}{n_1}\right] \sigma_1^2 + \left[\frac{b^2}{n} + \frac{(1 - b)^2}{n_2}\right] \sigma_2^2 - \frac{2ab}{n} \rho\sigma_1\sigma_2.
\end{aligned}$$

Známe-li rozdělení $\hat{\Delta}$, můžeme zkonstruovat test hypotézy $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ proti alternativě $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$. Za hypotézy platí

$$\mathsf{P}\left(\left|\hat{\Delta}/\sigma_\Delta\right| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}} \;\middle|\; \mu_1 = \mu_2\right) = \alpha.$$

Hypotézu H_0 zamítáme na hladině α, pokud $\left|\frac{\hat{\Delta}}{\sigma_\Delta}\right| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

3.2.2 Odhad Δ při neznámém $\boldsymbol{\Sigma}$

Nahradíme-li v rovnosti 3.2 β_{12}, β_{21} a ρ jejich maximálně věrohodnými odhady, získáme maximálně věrohodný odhad rozdílu středních hodnot. Protože ovšem neexistují implicitní vyjádření maximálně věrohodných odhadů $\hat{\beta_{12}}$, $\hat{\beta_{21}}$ a $\hat{\rho}$ založená na všech pozorováních X_i, $i = 1, \ldots, n + n_1$ a Y_j,

$j = 1, \ldots, n + n_2$, využívají Lin a Stivers při konstrukci testové statistiky jiných maximálně věrohodných odhadů, a sice takových, které jsou založeny pouze na úplných párech pozorování $(X_i, Y_i)'$, $i = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}^{(n)}\right)\left(Y_i - \overline{Y}^{(n)}\right)}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}^{(n)}\right)^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y}^{(n)}\right)^2\right]}}, \\
\hat{\beta}_{21} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}^{(n)}\right)\left(Y_i - \overline{Y}^{(n)}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}^{(n)}\right)^2}, \\
\hat{\beta}_{12} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}^{(n)}\right)\left(Y_i - \overline{Y}^{(n)}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y}^{(n)}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Dosazením těchto odhadů do vzorce 3.2 získáváme odhad rozdílu středních hodnot Δ^*:

$$\Delta^* = \hat{a}\overline{X}^{(n)} + (1 - \hat{a})\,\overline{X}^{(n_1)} - \hat{b}\overline{Y}^{(n)} - \left(1 - \hat{b}\right)\overline{Y}^{(n_2)},$$

kde

$$\begin{aligned}
\hat{a} &= \frac{n\left(n + n_2 + n_1\hat{\beta_{21}}\right)}{(n + n_1)(n + n_2) - n_1 n_2 \hat{\rho}^2}, \\
\hat{b} &= \frac{n\left(n + n_1 + n_2\hat{\beta_{12}}\right)}{(n + n_1)(n + n_2) - n_1 n_2 \hat{\rho}^2}.
\end{aligned}$$

Takto získaný odhad sice není v situaci, kdy pozorování chybí u obou náhodných veličin, maximálně věrohodným odhadem, má však jiné žádoucí vlastnosti, které umožňují jeho využití při testování hypotézy H_0: odhad Δ^* je nevychýlený, konsistentní a pro $n \to \infty$, $\frac{n_1}{n} \to \lambda_1$, $\frac{n_2}{n} \to \lambda_2$, $0 < \lambda_i < \infty, i = 1, 2$ platí

$$\Delta^* \sim N\left(\Delta, \sigma^2_{\Delta^*}\right),$$

kde

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{\Delta^*} &= \left[\frac{a^{*2}}{n} + \frac{(1 - a^*)^2}{n\lambda_1}\right]\sigma_1^2 + \left[\frac{b^{*2}}{n} + \frac{(1 - b^*)^2}{n\lambda_2}\right]\sigma_2^2 - \frac{2ab}{n}\rho\sigma_1\sigma_2, \\
a^* &= \frac{1 + \lambda_2 + \lambda_1\beta_{21}}{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) - \lambda_1\lambda_2\rho^2}, \\
b^* &= \frac{1 + \lambda_1 + \lambda_2\beta_{12}}{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) - \lambda_1\lambda_2\rho^2}
\end{aligned}$$

(důkazy těchto vlastností viz Lin, Stivers [7]). Chceme nyní testovat hypotézu $H_0 : \Delta = 0$. Položme $Z = \frac{\Delta^*}{\widehat{\sigma_{\Delta^*}}}$, kde

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma_{\Delta^*}}^2 = &\left[\frac{\hat{a}^2}{n} + \frac{(1-\hat{a})^2}{n_1}\right] \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}^{(n)}\right)^2 \\ &+ \left[\frac{\hat{b}^2}{n} + \frac{\left(1-\hat{b}\right)^2}{n_2}\right] \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y}^{(n)}\right)^2 \\ &- \frac{2\hat{a}\hat{b}}{n} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}^{(n)}\right)\left(Y_i - \overline{Y}^{(n)}\right).\end{aligned}$$

Za platnosti hypotézy je asymptotické rozdělení náhodné veličiny Z pro $n \to \infty$, $\frac{n_1}{n} \to \lambda_1$, $\frac{n_2}{n} \to \lambda_2$, $0 < \lambda_i < \infty, i = 1, 2$ normované normální $N(0, 1)$. Toto rozdělení doporučují Lin a Stivers aproximovat t rozdělením o n stupních volnosti: zamítáme $H_0 : \Delta = 0$ na hladině přibližně α, je-li $|Z| \geq t_n\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Podobně jako v části 3.1 můžeme i v případě chybějících pozorování u obou náhodných veličin zkonstruovat testy založené na prostém rozdílu průměrů všech pozorování $\overline{X}^{(n+n_1)} - \overline{Y}^{(n+n_2)}$.

Test podle Banerjeeho. Stejně jako v odstavci 3.1 využijeme Banerjeeho [3] nerovnosti (3.1). Nechť $n \geq 2$, $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 2$. Platí

$$\overline{X}^{(n+n_1)} - \overline{Y}^{(n+n_2)} = \frac{n}{n+n_1}\overline{X}^{(n)} - \frac{n}{n+n_2}\overline{Y}^{(n)} + \frac{n_1}{n+n_1}\overline{X}^{(n_1)} - \frac{n_2}{n+n_2}\overline{Y}^{(n_2)}$$

a dále

$$\begin{aligned}&\frac{n}{n+n_1}X_i - \frac{n}{n+n_2}Y_i \sim N\left(\frac{n}{n+n_1}\mu_1 - \frac{n}{n+n_2}\mu_2,\right. \\ &\left.\left(\frac{n}{n+n_1}\right)^2\sigma_1^2 + \left(\frac{n}{n+n_2}\right)^2\sigma_2^2 - 2\frac{n^2}{(n+n_1)(n+n_2)}\rho\sigma_1\sigma_2\right), \\ &i = 1, \ldots, n, \\ &\frac{n_1}{n+n_1}X_i \sim N\left(\frac{n_1}{n+n_1}\mu_1, \left(\frac{n_1}{n+n_1}\right)^2\sigma_1^2\right),\ i = n+1, \ldots, n+n_1, \\ &\frac{n_2}{n+n_2}Y_i \sim N\left(\frac{n_2}{n+n_2}\mu_2, \left(\frac{n_2}{n+n_2}\right)^2\sigma_2^2\right),\ i = n+1, \ldots, n+n_2.\end{aligned}$$

Položme $k = 3$, $l_1 = n$, $l_2 = n_1$, $l_3 = n_2$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1$, $m_1 = \frac{n}{n+n_1}\mu_1 - \frac{n}{n+n_2}\mu_2$, $m_2 = \frac{n_1}{n+n_1}\mu_1$, $m_3 = \frac{n_2}{n+n_2}\mu_2$, $U_{1i} = \frac{n}{n+n_1}X_i - \frac{n}{n+n_2}Y_i$,

$U_{2i} = \frac{n_1}{n+n_1} X_i$ a $U_{3i} = \frac{n_2}{n+n_2} Y_i$. Dosadíme-li tyto hodnoty do nerovnosti (3.1), dostáváme

$$\mathsf{P}\left(\left|\overline{X}^{(n+n_1)} - \overline{Y}^{(n+n_2)} - (\mu_1 - \mu_2)\right| \geq \sqrt{t_{n-1}^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)k_1 + t_{n_1-1}^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)k_2 + t_{n_2-1}^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)k_3}\right) \leq \alpha,$$

kde

$$k_1 = \frac{1}{n\,(n-1)}\left[\left(\frac{n}{n+n_1}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}^{(n)}\right)^2 + \left(\frac{n}{n+n_2}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}^{(n)}\right)^2 - 2\,\frac{n^2}{(n+n_1)\,(n+n_2)} \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}^{(n)}\right)\left(Y_i - \overline{Y}^{(n)}\right)\right],$$

$$k_2 = \frac{\left(\frac{n_1}{n+n_1}\right)^2 \sum_{i=n+1}^{n+n_1}\left(X_i - \overline{X}^{(n_1)}\right)^2}{n_1\,(n_1-1)},$$

$$k_3 = \frac{\left(\frac{n_2}{n+n_2}\right)^2 \sum_{i=n+1}^{n+n_2}\left(Y_i - \overline{Y}^{(n_2)}\right)^2}{n_2\,(n_2-1)}.$$

Hypotézu H_0 zamítáme na hladině (nejvýše) α, je-li

$$\left|\overline{X}^{(n+n_1)} - \overline{Y}^{(n+n_2)} - \right| \geq \sqrt{t_{n-1}^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)k_1 + t_{n_1-1}^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)k_2 + t_{n_2-1}^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)k_3}.$$

Test podle Welche. Druhý test H_0 s využitím rozdílu $\overline{X}^{(n+n_1)} - \overline{Y}^{(n+n_2)}$ je opět založen na již jednou zmiňované Welchově [17] aproximaci rozdělení náhodné veličiny

$$\frac{\overline{X}^{(n+n_1)} - \overline{Y}^{(n+n_2)} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{k_1 + k_2 + k_3}}$$

rozdělením t_f, $f = \frac{(k_1+k_2+k_3)^2}{\frac{k_1^2}{n-1} + \frac{k_2^2}{n_1-1} + \frac{k_3^2}{n_2-1}}$. Hypotézu H_0 zamítáme na hladině (přibližně) α, je-li

$$\left|\frac{\overline{X}^{(n+n_1)} - \overline{Y}^{(n+n_2)}}{\sqrt{k_1 + k_2 + k_3}}\right| \geq t_f\left(1-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Kapitola 4

Test podle Bhoje

4.1 Stejné rozptyly $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Nechť

$$\binom{X_1}{Y_1}, \dots \binom{X_n}{Y_n}, \binom{X_{n+1}}{?}, \dots, \binom{X_{n+n_1}}{?}, \binom{?}{Y_{n+1}}, \dots, \binom{?}{Y_{n+n_2}}$$

je náhodný výběr z dvourozměrného normálního rozdělení $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, kde

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix}.$$

Nechť $n_1 + n_2 > 6$, nechť $n > 5$. V této situaci navrhuje Bhoj [4] k testu $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ použít testovou statistiku

$$T = \lambda \frac{\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(n)}}{S} \sqrt{n} + (1-\lambda) \frac{\overline{X}^{(n_1)} - \overline{Y}^{(n_2)}}{\sqrt{(n_1-1)\,S_X^2 + (n_2-1)\,S_Y^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2\,(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}},$$

kde

$$S_X^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=n+1}^{n+n_1} (X_i - \overline{X}^{(n_1)})^2, \quad S_Y^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=n+1}^{n+n_2} (Y_i - \overline{Y}^{(n_2)})^2,$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left((X_i - Y_i) - \left(\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(n)} \right) \right)^2,$$

$\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ konstanta.

Testová statistika je lineární kombinací nezávislých statistik pro dvouvýběrový a párový test, přepišme si ji ve tvaru

$$T = \lambda T_P + (1-\lambda)\, T_D. \tag{4.1}$$

Statistiky T_D a T_P jsou vlastně speciálními případy T: $T = T_D$ pro $\lambda = 0$, $T = T_P$ pro $\lambda = 1$.

Pro další úvahy bude užitečné znát rozdělení náhodné veličiny T za platnosti hypotézy, nebo alespoň jeho aproximaci. Připomeňme, že víme $T_P \sim \mathtt{t}_{n-1}$ a $T_D \sim \mathtt{t}_{n_1+n_2-2}$. Hledáme rozdělení lineární kombinace dvou $\mathtt{t}$ rozdělení, obecně s různým počtem stupňů volnosti. Patil [12] popisuje aproximaci rozdělení náhodné veličiny $D = T_2 \cos\theta - T_1 \sin\theta$, kde $T_1 \sim \mathtt{t}_{f_1}$, $T_2 \sim \mathtt{t}_{f_2}$, T_1 a T_2 jsou nezávislé náhodné veličiny, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Náhodnou veličinu hD aproximuje Studentovým rozdělením o f stupních volnosti $\mathtt{t}_f$, kde pro h a f platí:

$$f = 4 + \frac{\dfrac{f_2 \cos^2\theta}{f_2 - 2} + \dfrac{f_1 \sin^2\theta}{f_1 - 2}}{\dfrac{f_2^2 \cos^4\theta}{(f_2-2)^2 (f_2-4)} + \dfrac{f_1^2 \sin^4\theta}{(f_1-2)^2 (f_1-4)}}, \tag{4.2}$$

$$h = \sqrt{\frac{\dfrac{f}{f-2}}{\dfrac{f_2 \cos^2\theta}{f_2 - 2} + \dfrac{f_1 \sin^2\theta}{f_1 - 2}}}. \tag{4.3}$$

Při aplikaci tohoto výsledku v našem případě převedeme (4.1) na

$$T = \lambda T_P - (1-\lambda)(-T_D). \tag{4.4}$$

Podívejme se nejprve na váhy v lineární kombinaci. Zřejmě

$$\lambda + (1-\lambda) = 1 \quad \forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle,$$

ale

$$\begin{aligned} \cos\theta + \sin\theta &= 1 \text{ pro } \theta \in \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}, \\ &\neq 1 \text{ pro } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Nemůžeme proto položit $\lambda = \cos\theta$, zvolíme raději

$$\lambda = \frac{\cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta}.$$

Z této rovnosti snadno získáme

$$\theta = \begin{cases} \arctan\frac{1-\lambda}{\lambda} & \text{pro} \quad \lambda \in (0, 1\rangle, \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro} \quad \lambda = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Rovnost (4.4) přepíšeme jako

$$(\cos\theta + \sin\theta)\, T = \cos\theta \cdot T_P - \sin\theta \cdot (-T_D).$$

Zabývejme se nyní rozdělením náhodné veličiny $-T_D$. Pro její distribuční funkci platí

$$\begin{aligned} F_{-T_D}(x) &= \mathsf{P}(-T_D \le x) = \mathsf{P}(T_D \ge -x) = 1 - \mathsf{P}(T_D < -x) \\ &= 1 - F_{T_D}(-x) \overset{\text{ze symetrie}}{=} F_{T_D}(x). \end{aligned}$$

Vidíme, že náhodná veličina $-T_D$ má stejné rozdělení jako náhodná veličina T_D a sice rozdělení $\mathsf{t}_{n_1+n_2-2}$. Užitím Patilova postupu dostáváme

$$h\,(\cos\theta + \sin\theta)\,T \overset{\text{přibl.}}{\sim} \mathsf{t}_f\,. \tag{4.6}$$

Konstanty h, θ a f spočteme ze vzorců (4.2), (4.3) a (4.5), přičemž za f_1 a f_2 v těchto vzorcích dosazujeme $n_1 + n_2 - 2$, respektive $n - 1$.

S využitím vztahu (4.6) dostáváme rozhodovací pravidlo: hypotézu $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ zamítáme na hladině (přibližně) α, jestliže $|h\,(\cos\theta + \sin\theta)\,T| \ge t_f\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

4.1.1 Volba vhodného λ

Výše uvedený postup popisuje, jak aproximovat rozdělení testové statistiky T pro dané λ. V této části se pokusíme zjistit, jak optimálně zvolit λ. Při hledání vhodného λ se zaměříme na porovnání středních hodnot čtverců délek intervalových odhadů pro $\mu_1 - \mu_2$ odvozených jednak z párového testu, jednak z testu navrženého Bhojem.

Hledejme nejprve intervalový odhad pro rozdíl středních hodnot $\mu_1 - \mu_2$ pomocí testové statistiky T_P z párového testu. Z odstavce 2.2 víme, že náhodná veličina $\frac{\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(n)} - (\mu_1 - \mu_2)}{S}\sqrt{n}$ má rozdělení t_{n-1}, tedy

$$\mathsf{P}\left(-t_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) < \frac{\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(n)} - (\mu_1 - \mu_2)}{S}\sqrt{n} < t_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1 - \alpha$$

pro nějaké dané α, po úpravě

$$\mathsf{P}\left(\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(n)} - t_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu_1 - \mu_2 < \overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(n)} + t_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Označme délku tohoto intervalového odhadu L_P. Zřejmě L_P je náhodná veličina, pro niž platí $L_P = 2\,t_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{n}}$.

Podobně můžeme intervalový odhad odvodit z Bhojova testu. Ze vztahu (4.6) dostáváme, že pro náhodnou veličinu

$$h\,(\cos\theta + \sin\theta)\left[\lambda\frac{\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(n)} - \mu_1 + \mu_2}{S}\sqrt{n} + (1-\lambda)\,\frac{\overline{X}^{(n_1)} - \overline{Y}^{(n_2)} - \mu_1 + \mu_2}{\sqrt{(n_1-1)\,S_X^2 + (n_2-1)\,S_Y^2}}\sqrt{\frac{n_1 n_2\,(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}\right],$$

označme ji T_B, platí $T_B \sim \mathsf{t}_f$. Tedy

$$\mathsf{P}\left(-t_f\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) < T_B < t_f\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1-\alpha,$$

po úpravě

$$\mathsf{P}\left(\frac{a}{b} - \frac{t_f\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{bh\left(\cos\theta+\sin\theta\right)} < \mu_1-\mu_2 < \frac{a}{b} + \frac{t_f\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{bh\left(\cos\theta+\sin\theta\right)}\right) = 1-\alpha,$$

kde

$$a = \lambda\frac{\overline{X}^{(n)}-\overline{Y}^{(n)}}{S}\sqrt{n} + (1-\lambda)\,\frac{\overline{X}^{(n_1)}-\overline{Y}^{(n_2)}}{\sqrt{(n_1-1)\,S_X^2+(n_2-1)\,S_Y^2}}\sqrt{\frac{n_1n_2\,(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}$$

a

$$b = \frac{\lambda\sqrt{n}}{S} + \frac{(1-\lambda)}{\sqrt{(n_1-1)\,S_X^2+(n_2-1)\,S_Y^2}}\sqrt{\frac{n_1n_2\,(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}.$$

Délka tohoto intervalového odhadu označme L_B. Pro náhodnou veličinu L_B platí $L_B = b^{-1}\frac{2\,t_f\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{h(\cos\theta+\sin\theta)}$.

Pro dané hodnoty parametrů n, n_1, n_2, σ^2, ρ, α a λ můžeme spočítat střední hodnoty čtverců délek obou intervalových odhadů $\mathsf{E}\,L_P^2$ a $\mathsf{E}\,L_B^2$. Protože oba intervalové odhady jsou konstruovány se stejnou spolehlivostí, zajímají nás zejména odpovědi na otázky, zda při daných hodnotách ostatních parametrů existuje λ takové, že $\mathsf{E}\,L_B^2 < \mathsf{E}\,L_P^2$ (čili zda využití neúplných párů způsobem, jaký navrhuje Bhoj, přinese zlepšení proti klasickému párovému t testu), a pokud ano, pro které λ je poměr $\frac{\mathsf{E}\,L_B^2}{\mathsf{E}\,L_P^2}$ nejmenší?

Pro následující výpočty položme $\alpha = 0{,}05$ a $\sigma^2 = 1$.

V tabulkách 4.1 a 4.2 jsou uvedeny hodnoty poměru $\frac{\mathsf{E}\,L_B^2}{\mathsf{E}\,L_P^2}$ pro některé kombinace hodnot n, n_1, n_2, ρ a λ. Pro každou kombinaci n, n_1 a n_2 volíme tři různé hodnoty λ:
$\lambda = 0,5$,
$\lambda = \frac{n}{n_1+n_2+n}$ (dáváme úplným párům pozorování takovou váhu, která odpovídá jejich podílu na celkovém počtu párů pozorování)
a λ takové, aby průměrná hodnota $\frac{\mathsf{E}\,L_B^2}{\mathsf{E}\,L_P^2}$ pro daná n, n_1 a n_2 počítaná přes všechny uvedené kladné, respektive záporné hodnoty ρ v příslušném řádku byla mezi všemi $\lambda \in (0,1)$ minimální. V tabulce jsou trojice hodnot λ seřazeny v právě uvedeném pořadí. Hodnoty uvedené v tabulkách byly odhadnuty simulací v programu R, verze 2.5.1.[13] (Bhoj k výpočtu hodnot poměru $\frac{\mathsf{E}\,L_B^2}{\mathsf{E}\,L_P^2}$ používá numerické integrace).

n	n_1	n_2	λ	ρ				
				$0,1$	$0,3$	$0,5$	$0,7$	$0,9$
20	5	5	0,5	0,95	1,03	1,14	1,29	1,60
			0,67	0,81	0,84	0,90	0,97	1,09
			0,77	0,82	0,84	0,88	0,93	0,99
20	7	3	0,5	1,01	1,10	1,21	1,34	1,63
			0,67	0,84	0,88	0,92	0,99	1,10
			0,76	0,84	0,86	0,90	0,94	1,01
20	10	10	0,5	0,69	0,76	0,85	1,01	1,30
			0,68	0,68	0,73	0,78	0,85	0,98
20	14	6	0,5	0,73	0,81	0,90	1,05	1,34
			0,68	0,71	0,75	0,80	0,87	1,00
20	15	15	0,5	0,57	0,63	0,73	0,87	1,17
			0,4	0,61	0,70	0,82	1,04	1,54
			0,64	0,59	0,64	0,70	0,79	0,96
20	20	10	0,5	0,60	0,67	0,75	0,90	1,20
			0,4	0,65	0,74	0,87	1,10	1,60
			0,64	0,61	0,66	0,72	0,81	0,98
20	20	20	0,5	0,49	0,55	0,64	0,78	1,09
			0,33	0,55	0,65	0,80	1,04	1,75
			0,6	0,52	0,56	0,64	0,74	0,94
20	30	10	0,5	0,56	0,63	0,73	0,86	1,17
			0,33	0,66	0,77	0,94	1,22	1,93
			0,64	0,58	0,63	0,70	0,79	0,95
20	25	25	0,5	0,44	0,50	0,58	0,72	1,02
			0,29	0,49	0,58	0,74	1,01	1,83
			0,57	0,46	0,51	0,58	0,69	0,93
20	30	20	0,5	0,45	0,51	0,59	0,72	1,04
			0,29	0,50	0,61	0,76	1,04	1,87
			0,58	0,47	0,52	0,59	0,71	0,93
20	40	10	0,5	0,55	0,61	0,70	0,84	1,14
			0,29	0,68	0,79	0,98	1,31	2,20
			0,61	0,56	0,61	0,68	0,78	0,97

Tabulka 4.1: Odhady poměru $\frac{\mathsf{E}\, L_B^2}{\mathsf{E}\, L_P^2}$ pro vybrané kombinace n, n_1, n_2, ρ a λ.

Ukazuje se, že volba $\lambda = \frac{n}{n+n_1+n_2}$ není z hlediska dosažení minimálních hodnot poměru $\frac{\mathsf{E}\, L_B^2}{\mathsf{E}\, L_P^2}$ nejlepší. Pro zjednodušení vyjadřování označme λ takové, aby průměr hodnot poměru $\frac{\mathsf{E}\, L_B^2}{\mathsf{E}\, L_P^2}$ počítaný přes všechna uvažovaná ρ byl minimální, symbolem λ_{min} (přesněji bychom měli psát $\lambda_{min}(n_1, n_2, n)$, neboť hodnota takového λ závisí na rozsahu výběru a počtu neúplných párů pozorování, z kontextu bude však vždy zřejmé, o kterém λ_{min} hovoříme). Při porovnání $\lambda = 0{,}5$ s $\lambda = \lambda_{min}$ zjišťujeme, že volbou $\lambda = \lambda_{min}$ docílíme výrazné zmenšení poměru $\frac{\mathsf{E}\, L_B^2}{\mathsf{E}\, L_P^2}$ oproti volbě $\lambda = 0,5$ pro malá n_1 a n_2 (malá v porovnání s n). Zlepšení je větší pro kladná ρ než pro záporná ρ. Pro relativně velká n_1 a n_2 není rozdíl mezi $\lambda = 0,5$ a $\lambda = \lambda_{min}$ příliš velký, a to ani pro kladné, ani pro záporné hodnoty ρ. Pro záporná ρ je $\mathsf{E}\, L_B^2 < \mathsf{E}\, L_P^2$ při všech zkoumaných kombinacích n_1, n_2, n, λ a ρ, rozdíl mezi různými volbami λ není příliš veliký.

Pro shrnutí můžeme uvést, že volba $\lambda = 0,5$ je vyhovující ve většině případů, pro relativně malé rozsahy n_1 a n_2 a velké hodnoty ρ můžeme vhodnou volbou λ docílit výrazného snížení poměru $\frac{\mathsf{E}\, L_B^2}{\mathsf{E}\, L_P^2}$.

n	n_1	n_2	λ	ρ				
				$-0,1$	$-0,3$	$-0,5$	$-0,7$	$-0,9$
20	5	5	0,5	0,89	0,84	0,80	0,76	0,72
			0,67	0,77	0,75	0,72	0,71	0,69
			0,63	0,78	0,75	0,72	0,70	0,67
20	7	3	0,5	0,95	0,90	0,86	0,81	0,77
			0,67	0,81	0,78	0,75	0,73	0,71
			0,67	0,81	0,78	0,75	0,73	0,71
20	10	10	0,5	0,63	0,59	0,55	0,52	0,49
			0,54	0,62	0,58	0,54	0,51	0,49
20	14	6	0,5	0,68	0,63	0,60	0,56	0,54
			0,56	0,66	0,62	0,59	0,56	0,53
20	15	15	0,5	0,52	0,48	0,45	0,41	0,39
			0,4	0,55	0,49	0,45	0,42	0,39
			0,47	0,51	0,47	0,44	0,41	0,38
20	20	10	0,5	0,55	0,50	0,47	0,44	0,42
			0,4	0,57	0,53	0,49	0,45	0,42
			0,51	0,55	0,50	0,47	0,44	0,41
20	20	20	0,5	0,45	0,41	0,38	0,35	0,33
			0,33	0,48	0,43	0,38	0,36	0,33
			0,46	0,44	0,40	0,37	0,35	0,32
20	30	10	0,5	0,51	0,47	0,44	0,41	0,39
			0,33	0,59	0,53	0,47	0,44	0,40
			0,47	0,52	0,47	0,44	0,41	0,38
20	25	25	0,5	0,39	0,36	0,33	0,31	0,29
			0,29	0,43	0,37	0,33	0,30	0,28
			0,4	0,39	0,35	0,32	0,29	0,27
20	30	20	0,5	0,41	0,37	0,35	0,32	0,30
			0,29	0,44	0,39	0,35	0,32	0,29
			0,4	0,40	0,36	0,33	0,30	0,27
20	40	10	0,5	0,49	0,45	0,42	0,40	0,37
			0,29	0,58	0,51	0,47	0,43	0,39
			0,46	0,50	0,45	0,42	0,39	0,37

Tabulka 4.2: Odhady poměru $\frac{\mathsf{E}\, L_B^2}{\mathsf{E}\, L_P^2}$ pro vybrané kombinace n, n_1, n_2, ρ a λ.

4.2 Nestejné rozptyly $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Nechť

$$\binom{X_1}{Y_1}, \dots \binom{X_n}{Y_n}, \binom{X_{n+1}}{?}, \dots, \binom{X_{n+n_1}}{?}, \binom{?}{Y_{n+1}}, \dots, \binom{?}{Y_{n+n_2}}$$

je náhodný výběr z dvourozměrného normálního rozdělení $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, kde

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Nechť dále $n_1 \leq n_2$, $n_1 > 5$ a $n > 5$. Pro tuto situaci navrhuje Bhoj [4] k testu H_0 použít testovou statistiku

$$T' = \lambda \frac{\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(n)}}{S} \sqrt{n} + (1 - \lambda) \frac{\overline{X}^{(n_1)} - \overline{Y}^{(n_2)}}{S'} \sqrt{n_1},$$

kde

$$\begin{aligned} S'^2 &= \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (w_i - \overline{w})^2 , \\ w_i &= X_{n+i} - \sqrt{(n_1/n_2)} Y_{n+i}, \quad i = i, \ldots, n_1, \\ \overline{w} &= \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} w_i . \end{aligned}$$

Náhodná veličina $\frac{\overline{X}^{(n_1)} - \overline{Y}^{(n_2)}}{S'} \sqrt{n_1}$ má za H_0 rozdělení $\mathsf{t}_{n_1 - 1}$ (viz Scheffé [14]). Rozdělení testové statistiky T' odhadneme stejným postupem jako v předchozím odstavci a dostáváme

$$h \left(\cos\theta + \sin\theta \right) T' \overset{\text{přibl.}}{\sim} \mathsf{t}_f \, . \tag{4.7}$$

Konstanty h, θ a f spočteme ze vzorců (4.2), (4.3) a (4.5), přičemž za f_1 a f_2 v těchto vzorcích dosazujeme $n_1 - 1$, respektive $n - 1$. S využitím vztahu (4.7) dostáváme rozhodovací pravidlo pro testování hypotézy H_0. Hypotézu zamítáme na hladině (přibližně) α, jestliže $|h \left(\cos\theta + \sin\theta \right) T'| \geq t_f \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)$.

4.2.1 Volba vhodného λ

Podobně jako v odstavci 4.1.1 hledáme pro testovou statistiku T' optimální λ. Při hledání λ použijeme stejnou strategii, a sice porovnání středních hodnot čtverců délek intervalových odhadů pro rozdíl středních hodnot $\mu_1 - \mu_2$ založených na statistikách T' a T_P.

Z předchozího víme, že délka inervalového odhadu založeného na statistice T_P je náhodná veličina $L_P = 2\, t_{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{S}{\sqrt{n}}$.

Pro intervalový odhad založený na statistice T' platí

$$\mathsf{P} \left(\frac{c}{d} - \frac{t_f \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)}{dh \left(\cos\theta + \sin\theta \right)} < \mu_1 - \mu_2 < \frac{c}{d} + \frac{t_f \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)}{dh \left(\cos\theta + \sin\theta \right)} \right) = 1 - \alpha,$$

kde

$$c = \frac{\lambda \sqrt{n}}{S} \left(\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(n)} \right) \frac{(1 - \lambda) \sqrt{n_1}}{S'} \left(\overline{X}^{(n_1)} - \overline{Y}^{(n_2)} \right)$$

a

$$d = \frac{\lambda \sqrt{n}}{S} + \frac{(1 - \lambda) \sqrt{n_1}}{S'} .$$

Délku tohoto intervalového odhadu označíme $L_{B'}$. Pro náhodnou veličinu $L_{B'}$ platí $L_{B'} = d^{-1} \frac{2\, t_f \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)}{h (\cos\theta + \sin\theta)}$.

Pro dané hodnoty parametrů n, n_1, n_2, σ_1^2, σ_2^2 ρ, α a λ můžeme spočítat střední hodnoty čtverců délek obou intervalových odhadů $\mathsf{E}\, L_{B'}^2$ a $\mathsf{E}\, L_P^2$ a stejně jako v odstavci 4.1.1 nás zajímá, zda při daných hodnotách ostatních parametrů existuje λ takové, že $\mathsf{E}\, L_{B'}^2 < \mathsf{E}\, L_P^2$ a pokud ano, pro které λ je poměr $\frac{\mathsf{E}\, L_{B'}^2}{\mathsf{E}\, L_P^2}$ nejmenší?

Pro následující výpočty položme $\alpha = 0{,}05$ a $\sigma_1^2 = 1$.

V tabulkách 4.3 a 4.4 jsou uvedeny hodnoty poměru $\frac{\mathsf{E}\, L_{B'}^2}{\mathsf{E}\, L_P^2}$ pro některé kombinace hodnot n, n_1, n_2, ρ, σ_2^2 a λ. Pro každou kombinaci n, n_1, n_2 a σ_2^2 volíme tři různé hodnoty λ:
$\lambda = 0,5$,
$\lambda = \frac{n}{n_1+n_2+n}$ (dáváme úplným párům pozorování takovou váhu, která odpovídá jejich podílu na celkovém počtu párů pozorování)
a λ takové, aby průměrná hodnota $\frac{\mathsf{E}\, L_{B'}^2}{\mathsf{E}\, L_P^2}$ pro daná n, n_1, n_2 a σ_2^2 počítaná přes všechny uvedené kladné, respektive záporné hodnoty ρ v příslušném řádku byla mezi všemi $\lambda \in (0, 1)$ minimální (označme toto λ symbolem λ_{min}). V tabulce jsou trojice hodnot λ seřazeny v právě uvedeném pořadí. Hodnoty uvedené v tabulkách byly odhadnuty simulací v programu R, verze 2.5.1.[13] (Bhoj k výpočtu hodnot poměru $\frac{\mathsf{E}\, L_{B'}^2}{\mathsf{E}\, L_P^2}$ používá numerické integrace).

Podobně jako v případě $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ se ukazuje, že volba $\lambda = \frac{n}{n+n_1+n_2}$ není z hlediska dosažení minimálních hodnot poměru $\frac{\mathsf{E}\, L_{B'}^2}{\mathsf{E}\, L_P^2}$ optimální.

Pro pevné hodnoty n, n_1, n_2 se hodnota λ_{min} pro všechny uvažované hodnoty σ_2^2 liší jen nepatrně. Pro záporná ρ je $\frac{\mathsf{E}\, L_{B'}^2}{\mathsf{E}\, L_P^2} < 1$ pro všechny uvažované kombinace n, n_1, n_2, σ_1^2, σ_2^2 a ρ a rozdíl mezi různými volbami λ není příliš velký. Pro ρ kladné docílíme výrazného zmenšení poměru $\frac{\mathsf{E}\, L_{B'}^2}{\mathsf{E}\, L_P^2}$ při volbě $\lambda = \lambda_{min}$ oproti volbě $\lambda = 0{,}5$ zejména při vysokých hodnotách ρ.

n	n_1	n_2	σ_1^2	σ_2^2	λ	ρ				
						0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
20	6	6	1	0,5	0,50	1,00	1,09	1,20	1,34	1,62
					0,62	0,85	0,90	0,96	1,05	1,19
					0,79	0,81	0,84	0,87	0,91	0,97
				1	0,50	1,00	1,10	1,21	1,41	1,76
					0,62	0,85	0,90	0,96	1,07	1,26
					0,78	0,81	0,84	0,87	0,92	1,00
				2	0,50	1,00	1,09	1,20	1,38	1,62
					0,62	0,84	0,89	0,96	1,03	1,19
					0,79	0,81	0,84	0,87	0,91	0,97
20	10	10	1	0,5	0,50	0,73	0,79	0,89	1,02	1,27
					0,70	0,70	0,74	0,78	0,84	0,94
				1	0,50	0,73	0,80	0,91	1,06	1,39
					0,70	0,70	0,74	0,79	0,86	0,98
				2	0,50	0,72	0,80	0,90	1,02	1,27
					0,69	0,69	0,72	0,78	0,85	0,95
20	6	14	1	0,5	0,50	0,94	1,02	1,12	1,27	1,56
					0,75	0,77	0,81	0,84	0,90	0,97
				1	0,50	0,89	0,98	1,09	1,29	1,65
					0,76	0,76	0,80	0,84	0,89	0,99
				2	0,50	0,84	0,92	1,03	1,19	1,46
					0,76	0,74	0,77	0,81	0,86	0,95
20	20	20	1	0,5	0,50	0,50	0,57	0,64	0,77	1,00
					0,33	0,57	0,66	0,79	1,02	1,53
					0,60	0,51	0,57	0,63	0,72	0,88
				1	0,50	0,50	0,56	0,66	0,80	1,12
					0,33	0,58	0,67	0,82	1,10	1,83
					0,61	0,52	0,58	0,64	0,75	0,95
				2	0,50	0,50	0,55	0,64	0,76	1,00
					0,33	0,57	0,66	0,81	1,03	1,52
					0,59	0,52	0,56	0,63	0,73	0,88
20	10	30	1	0,5	0,50	0,66	0,72	0,82	0,95	1,20
					0,33	0,84	0,97	1,15	1,43	2,05
					0,66	0,64	0,67	0,73	0,81	0,93
				1	0,50	0,61	0,69	0,78	0,94	1,27
					0,33	0,77	0,88	1,08	1,42	2,26
					0,68	0,62	0,66	0,72	0,80	0,96
				2	0,50	0,56	0,61	0,71	0,85	1,10
					0,33	0,70	0,77	0,95	1,22	1,79
					0,66	0,57	0,62	0,68	0,75	0,89

Tabulka 4.3: Odhady poměru $\frac{\mathsf{E}\, L^2_{B'}}{\mathsf{E}\, L^2_P}$ pro vybrané kombinace n, n_1, n_2, σ_1^2, σ_2^2 ρ a λ.

n	n_1	n_2	σ_1^2	σ_2^2	λ	ρ				
						$-0,1$	$-0,3$	$-0,5$	$-0,7$	$-0,9$
20	6	6	1	0,5	0,50	0,93	0,88	0,84	0,80	0,75
					0,62	0,81	0,78	0,73	0,71	0,69
					0,70	0,77	0,75	0,72	0,70	0,68
				1	0,50	0,93	0,88	0,84	0,79	0,75
					0,62	0,81	0,76	0,73	0,71	0,69
					0,70	0,77	0,74	0,72	0,70	0,68
				2	0,50	0,94	0,89	0,83	0,80	0,76
					0,62	0,79	0,77	0,74	0,71	0,69
					0,70	0,77	0,75	0,73	0,71	0,69
20	10	10	1	0,5	0,50	0,67	0,62	0,59	0,56	0,53
					0,59	0,64	0,60	0,57	0,55	0,53
				1	0,50	0,68	0,62	0,57	0,55	0,52
					0,57	0,65	0,60	0,58	0,54	0,51
				2	0,50	0,68	0,63	0,60	0,55	0,53
					0,55	0,64	0,60	0,57	0,54	0,51
20	6	14	1	0,5	0,50	0,87	0,81	0,78	0,74	0,69
					0,67	0,74	0,71	0,68	0,67	0,64
				1	0,50	0,82	0,75	0,72	0,68	0,65
					0,65	0,72	0,68	0,65	0,63	0,61
				2	0,50	0,77	0,73	0,67	0,63	0,61
					0,62	0,69	0,66	0,62	0,60	0,58
20	20	20	1	0,5	0,50	0,45	0,42	0,39	0,37	0,34
					0,33	0,51	0,45	0,41	0,38	0,35
					0,46	0,45	0,42	0,39	0,36	0,34
				1	0,50	0,46	0,42	0,39	0,36	0,34
					0,33	0,52	0,45	0,41	0,37	0,34
					0,45	0,46	0,41	0,38	0,35	0,33
				2	0,50	0,46	0,42	0,39	0,36	0,34
					0,33	0,51	0,46	0,41	0,38	0,35
					0,45	0,46	0,42	0,39	0,36	0,34
20	10	30	1	0,5	0,50	0,60	0,56	0,51	0,49	0,46
					0,33	0,76	0,68	0,63	0,58	0,54
					0,54	0,59	0,55	0,51	0,48	0,47
				1	0,50	0,55	0,52	0,48	0,44	0,43
					0,33	0,67	0,61	0,56	0,53	0,47
					0,54	0,55	0,51	0,48	0,44	0,43
				2	0,50	0,51	0,47	0,44	0,41	0,38
					0,33	0,61	0,55	0,50	0,45	0,43
					0,51	0,50	0,48	0,43	0,41	0,38

Tabulka 4.4: Odhady poměru $\frac{\mathsf{E}\, L_{B'}^2}{\mathsf{E}\, L_P^2}$ pro vybrané kombinace n, n_1, n_2, σ_1^2, σ_2^2 ρ a λ.

Kapitola 5

Test podle Mehty a Gurlanda

V této části zmíníme ve stručnosti test, který ve svých článcích navrhují Mehta a Gurland ([9] a [10]). Nechť

$$\binom{X_1}{Y_1}, \dots \binom{X_n}{Y_n}, \binom{X_{n+1}}{?}, \dots, \binom{X_{n+n_1}}{?}$$

je náhodný výběr z dvourozměrného normálního rozdělení $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, kde

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad \rho > 0.$$

Nechť $(X_i, Y_i)'$ a X_j, $i = 1, \dots, n$, $j = n+1, \dots, n+n_1$ jsou vzájemně nezávislé. Chceme testovat hypotézu $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ proti alternativě $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

Mehta a Gurland pro tuto situaci navrhují následující rozhodovací pravidlo: H_0 zamítneme na hladině $\alpha = 0{,}05$, jestliže $T_{MG} > C$, kde

$$T_{MG} = \frac{\left[\overline{Y}^{(n)} - B\overline{X}^{(n)} - (1-B)\overline{X}^{(n_1)}\right]^2}{A_1 \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}^{(n)}\right)^2 + A_2 \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}^{(n)}\right)^2 + A_3 \sum_{i=n+1}^{n+n_1}\left(X_i - \overline{X}^{(n_1)}\right)^2 + A_4 \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}^{(n)}\right)\left(Y_i - \overline{Y}^{(n)}\right)}.$$

Volba konstant A_1, A_2, A_3, A_4, B a C je pro různé rozsahy výběru n a n_1 popsána v článku [10].

Kapitola 6

Porovnání síly testů

V této kapitole budeme porovnávat silofunkce párového t testu a testů popsaných v kapitolách 3 až 5. Silofunkcí testu rozumíme funkci β danou předpisem

$$\beta(\Delta) = \mathsf{P}\left(\text{zamítneme } H_0 \mid \mu_1 - \mu_2 = \Delta\right).$$

Hodnoty silofunkce odhadneme pomocí simulací v programu R, verze 2.5.1 [13]. Pro vybrané hodnoty n, n_1, n_2, σ_1^2, σ_2^2, ρ a Δ simulujme náhodný výběr příslušného rozsahu z rozdělení

$$N\left(\begin{pmatrix}\Delta\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right).$$

Na výběru provedeme všechny uvažované testy a zaznamenáme, který z nich hypotézu H_0 zamítl. Toto opakujeme tisíckrát. Hodnotu funkce $\beta(\Delta)$ následně odhadneme podílem těch tesů, které hypotézu zamítly, na celkovém provedeném počtu testů. Postup provádíme pro $\Delta \in \{0,\ 0{,}01, \ldots, 0{,}99,\ 1\}$ a hladinu testu $\alpha = 0{,}05$. Průběh silofunkcí zakreslíme do grafů. V tištěné verzi této práce jsou grafy uspořádány po devíti na jednom listu a umožňují tak získat hrubý přehled o chování odhadnutých silofunkcí. Na přiloženém CD jsou grafy uloženy ve větším rozlišení. CD rovněž obsahuje soubor, v němž jsou uloženy odhady silofunkcí všech zkoumaných testů pro všechna $\Delta \in \{0,\ 0{,}01, \ldots, 0{,}99,\ 1\}$.

6.1 Pozorování chybějící u jedné z náhodných veličin

Nechť

$$\begin{pmatrix}X_1\\Y_1\end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix}X_n\\Y_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X_{n+1}\\?\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}X_{n+n_1}\\?\end{pmatrix}$$

je náhodný výběr z dvourozměrného normálního rozdělení

$$N\left(\begin{pmatrix}\Delta\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right).$$

Chceme testovat hypotézu $H_0 : \Delta = 0$. Z předchozích kapitol víme, že v takové situaci máme na výběr ze čtyř testů: párový t test, který využívá pouze úplné páry pozorování $(X_i, Y_i)'$, $i = 1, \ldots, n$, test podle Banerjeeho (viz odstavec 3.1), test podle Welche (viz odstavec 3.1) a test podle Mehty a Gurlanda (viz kapitola 5). Protože použití posledního z těchto testů je podmíněno hned několika omezeními (jednak podmínkou $\sigma_1 = \sigma_2$ a jednak tím, že konstanty potřebné k provedení testu jsou dostupné pouze pro omezené kombinace rozsahů výběru), budeme porovnávat pouze první tři testy.

Na obrázcích 6.1 až 6.12 jsou grafy, které znázorňují průběh silofunkcí (červeně - párový t test, modře - test podle Banerjeeho, zeleně - test podle Welche) pro různé kombinace parametrů n, n_1, σ_1^2, σ_2^2 a ρ. Jejich zvolené hodnoty jsou: $n \in \{10,\ 20,\ 50,\ 100\}$, $n_1 : \frac{n_1}{n} \in \{0{,}2,\ 0{,}5,\ 1\}$, $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 \in \{1,\ 2,\ 0{,}5\}$, $\rho \in \{0{,}1,\ 0{,}5,\ 0{,}9\}$. Pro každou možnou kombinaci těchto hodnot existuje jeden graf.

Hladina testů. Pro zkoumané kombinace parametrů n, n_1, σ_1^2, σ_2^2 a ρ se odhadnutá hladina testů (tj. hodnota $\beta(0)$) pohybuje mezi 0,008 a 0,072. Přesněji: u párového t testu mezi 0,036 a 0,063, u testu podle Banerjeeho mezi 0,008 a 0,071 a u testu podle Welche mezi 0,033 a 0,072. Pro test podle Welche není zřejmá žádná souvislost mezi hladinou testu a hodnotami parametrů n, n_1, σ_1^2, σ_2^2 a ρ. U testu podle Banerjeeho pozorujeme se zvyšujícím se počtem úplných párů pozorování n rostoucí odhad hladiny testu - pro $n = 10$ je průměr hladin prováděných testů 0,030, pro $n = 20$ je to 0,040, pro $n = 50$ je průměr 0,046 a konečně pro $n = 100$ dostáváme průměr 0,050 (počítáno vždy pro pevné n a pro všechny uvažované kombinace ostatních parametrů).

Zajímá nás, zda odhadnutá hladina jednotlivých testů odpovídá hypotéze $H_{0,05} : \alpha = 0{,}05$. Zaveďme pro každou možnou kombinaci parametrů n, n_1, σ_1^2, σ_2^2 a ρ náhodné veličiny Z_i, $i = 1, \ldots, 1000$,

$$Z_i = \begin{cases} 1 & H_0 \text{ platí, v } i\text{-tém opakování zamítáme} \\ 0 & H_0 \text{ platí, v } i\text{-tém opakování nezamítáme} \end{cases}$$

Zřejmě $Z_1, \ldots, Z_{1000}$ je náhodný výběr z alternativního rozdělení s parametrem α. Platí $\sum_{i=1}^{1000} Z_i \sim \mathsf{Bi}(1000, \alpha)$. Použijeme-li aproximaci CLV, dostáváme:

$$\frac{\sum_{i=1}^{1000} Z_i - 1000\alpha}{\sqrt{1000\alpha\,(1-\alpha)}} \xrightarrow{d} N(0,1),$$

za platnosti $H_{0,05} : \alpha = 0{,}05$ máme

$$\mathsf{P}\left(36 < \sum_{i=1}^{1000} Z_i < 64\right) \doteq 0{,}95.$$

To znamená, že je-li odhadutá hladina testu větší nebo rovna 0,064, nebo menší nebo rovna 0,036, zamítáme hypotézu $H_{0,05} : \alpha = 0{,}05$ ve prospěch

alternativy $H'_{0,05}: \alpha \neq 0{,}05$ na hladině 0,05. Takové hodnoty jsou v tabulce 6.1, která obsahuje všechny odhadnuté hladiny testů, zdůrazněny tučně.

n	n_1	σ_2^2	ρ	t test	Banerjee	Welch
10	2	0,5	0,1	0,055	**0,015**	0,050
			0,5	0,053	**0,012**	0,047
			0,9	0,050	**0,010**	0,061
		1	0,1	0,054	**0,010**	0,048
			0,5	0,049	**0,008**	**0,034**
			0,9	0,058	**0,012**	0,055
		2	0,1	0,048	**0,012**	0,042
			0,5	0,048	**0,009**	0,043
			0,9	0,048	**0,008**	**0,035**
10	5	0,5	0,1	0,043	0,056	**0,070**
			0,5	0,062	0,043	0,063
			0,9	0,051	**0,027**	0,042
		1	0,1	0,046	**0,034**	0,050
			0,5	0,047	0,037	0,047
			0,9	0,055	0,037	0,053
		2	0,1	0,062	0,049	0,057
			0,5	0,050	0,045	0,056
			0,9	0,063	0,040	0,051
10	10	0,5	0,1	0,050	0,042	0,057
			0,5	0,058	0,039	0,049
			0,9	0,052	0,037	0,045
		1	0,1	0,057	0,044	0,052
			0,5	0,046	**0,034**	0,042
			0,9	0,054	**0,033**	0,044
		2	0,1	0,046	0,035	0,041
			0,5	0,060	0,049	0,057
			0,9	0,060	0,046	0,057
20	4	0,5	0,1	0,056	0,036	0,050
			0,5	0,041	**0,034**	0,051
			0,9	0,048	**0,029**	0,053
		1	0,1	0,041	**0,034**	0,048
			0,5	0,054	0,038	0,044
			0,9	0,040	**0,027**	0,044
		2	0,1	0,046	0,045	0,050
			0,5	0,039	**0,026**	**0,033**
			0,9	0,058	**0,031**	0,045
20	10	0,5	0,1	0,059	0,047	0,054
			0,5	0,049	**0,033**	0,038
			0,9	0,048	0,042	0,047
		1	0,1	0,045	0,041	0,045
			0,5	0,055	0,037	0,046
			0,9	0,054	0,049	0,060
		2	0,1	0,059	0,054	0,057
			0,5	0,052	0,044	0,049
			0,9	0,045	0,040	0,048
20	20	0,5	0,1	0,047	0,043	0,049
			0,5	0,055	0,047	0,056
			0,9	0,044	0,053	0,060
		1	0,1	0,049	0,038	0,044
			0,5	0,047	0,048	0,055
			0,9	0,044	0,039	0,041
		2	0,1	0,049	**0,034**	**0,034**
			0,5	0,049	0,037	0,045
			0,9	0,047	0,049	0,055
50	10	0,5	0,1	0,058	0,049	0,053
			0,5	0,059	0,054	0,059
			0,9	0,045	**0,032**	0,045
		1	0,1	0,037	0,043	0,046
			0,5	0,050	0,044	0,048
			0,9	0,038	0,037	0,049
		2	0,1	0,055	0,055	0,057
			0,5	0,043	0,039	0,042

(Pokračování na další straně)

n	n_1	σ_2^2	ρ	t test	Banerjee	Welch
50	10	2	0,9	0,041	0,046	0,051
50	25	0,5	0,1	0,061	**0,071**	**0,072**
			0,5	0,055	0,045	0,050
			0,9	0,060	0,050	0,053
		1	0,1	0,046	0,043	0,044
			0,5	0,043	0,042	0,046
			0,9	0,050	0,040	0,049
		2	0,1	0,049	0,050	0,050
			0,5	0,039	0,043	0,045
			0,9	0,048	0,042	0,051
50	50	0,5	0,1	0,046	0,046	0,047
			0,5	0,056	0,045	0,051
			0,9	0,054	0,044	0,046
		1	0,1	0,050	0,051	0,053
			0,5	0,055	0,040	0,042
			0,9	0,047	0,044	0,048
		2	0,1	0,043	0,042	0,042
			0,5	0,048	0,053	0,055
			0,9	0,048	0,042	0,042
100	20	0,5	0,1	0,051	0,055	0,059
			0,5	**0,036**	0,043	0,043
			0,9	0,045	0,045	0,049
		1	0,1	0,054	0,052	0,052
			0,5	0,045	0,043	0,044
			0,9	0,051	0,048	0,050
		2	0,1	0,061	0,057	0,058
			0,5	0,052	0,058	0,060
			0,9	0,051	0,052	0,054
100	50	0,5	0,1	0,055	0,058	0,060
			0,5	0,052	0,047	0,049
			0,9	0,054	0,050	0,050
		1	0,1	0,060	0,059	0,061
			0,5	0,061	0,054	0,055
			0,9	0,060	0,049	0,050
		2	0,1	0,056	0,052	0,052
			0,5	0,055	0,052	0,053
			0,9	0,045	0,047	0,048
100	100	0,5	0,1	0,039	0,046	0,048
			0,5	0,044	0,040	0,041
			0,9	0,053	0,054	0,055
		1	0,1	0,046	0,041	0,043
			0,5	0,053	0,053	0,054
			0,9	0,044	0,042	0,043
		2	0,1	0,047	0,050	0,050
			0,5	0,059	0,058	0,059
			0,9	0,054	0,044	0,045

Tabulka 6.1: Odhadnutá hladina testů v případě pozorování chybějících u jedné z náhodných veličin

Síla testů. Podívejme se nejprve na to, který test je v jaké situaci nejsilnější (za nejsilnější budeme považovat takový test τ, pro který platí $\tau = \arg\max_{\tau\in\Theta}\left(\sum_{k=0}^{100} I_{\tau k}\right)$, kde $I_{\tau k} = I\left\{\beta_\tau\left(\frac{k}{100}\right) = \max_{j\in\Theta}\beta_j\left(\frac{k}{100}\right)\right\}$, Θ je množina všech uvažovaných testů). Pro $\rho = 0,1$ (bez ohledu na hodnoty ostatních parametrů) dostáváme nejlepší výsledky pro test podle Welche, pro $\rho = 0,9$ je vždy nejlepší párový t test. Pro kombinaci $\rho = 0,5$, $\sigma_2^2 = 2$ (bez ohledu na rozsahy výběrů) je nejlepší párový t test, pro $\rho = 0,5$, $\sigma_2^2 \in \{0{,}5,\ 1\}$ je kromě situace, kdy $n = 10$ a $n_1 = 2$ (kdy dostáváme nejlepší výsledky pro párový t test), vždy nejlepší test podle Welche. Test

podle Banerjeeho nebyl v žádné ze zkoumaných situací nejlepší, naopak, test podle Welche nikdy nebyl nejhorší. Rozdíly mezi jednotlivými silofunkcemi ovšem nejsou nijak veliké, nejvíce se jednotlivé silofunkce od sebe liší pro nejmenší zkoumaný počet úplných i neúplných párů pozorování ($n = 10$, $n_1 = 2$, viz obrázek 6.1). S rostoucími hodnotami n i n_1 se rozdíly mezi jednotlivými funkcemi zmenšují. Pro pevné n a n_1 se funkce nejméně liší pro $\sigma_2^2 = 1$ a $\rho = 0,5$, nejvíce pak pro $\sigma_2^2 = 2$ a $\rho = 0,9$.

Doporučení. Test podle Banerjeeho nedosáhl při simulacích příliš uspokojivých výsledků, ukazuje se, že je lépe volit vždy mezi párovým t testem a testem podle Welche. Pro vyšší hodnoty korelace ρ mezi náhodnými veličinami X a Y dosáhneme lepších výsledků při použití párového t testu, při menších hodnotách ρ je lépe užít test podle Welche. V této souvislosti připomínáme, že odhad korelačního koeficientu ρ s využitím všech (i neúplných) párů pozorování je v této práci popsán v části 3.1.

6.2 Pozorování chybějící u obou náhodných veličin

Nechť

$$\binom{X_1}{Y_1}, \dots \binom{X_n}{Y_n}, \binom{X_{n+1}}{?}, \dots, \binom{X_{n+n_1}}{?}, \binom{?}{Y_{n+1}}, \dots, \binom{?}{Y_{n+n_2}}$$

je náhodný výběr z dvourozměrného normálního rozdělení

$$N\left(\binom{\Delta}{0}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right).$$

Předpokládáme, že hodnoty σ_1^2, σ_2^2 a ρ neznáme. Chceme testovat hypotézu $H_0 : \Delta = 0$. Z předchozích kapitol víme, že v takové situaci máme na výběr ze šesti (respektive osmi) testů: párový t test, který využívá pouze úplné páry pozorování $(X_i, Y_i)'$, $i = 1, \dots, n$, test podle Banerjeeho (viz odstavec 3.2.2), test podle Welche (viz odstavec 3.2.2), test založený na maximálně věrohodném odhadu s testovou statistikou Z (viz odstavec 3.2.2), test podle Bhoje pro různé rozptyly s parametry $\lambda = 0{,}5$ nebo $\lambda = \lambda_{min}$ (viz odstavec 4.2), a pokud $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, můžeme dále použít test podle Bhoje pro stejné rozptyly s parametry $\lambda = 0{,}5$ nebo $\lambda = \lambda_{min}$ (viz odstavec 4.1).

Na obrázcích 6.13 až 6.18 jsou grafy, které znázorňují průběh odhadnutých silofunkcí (červená - párový t test, modrá - test podle Banerjeeho, zelená - test podle Welche, tyrkysová - test založený na maximálně věrohodném odhadu, žlutá - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ s $\lambda = 0{,}5$, hnědá - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ s $\lambda = \lambda_{min}$, růžová - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ s $\lambda = 0{,}5$, černá - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ s $\lambda = \lambda_{min}$) pro různé kombinace parametrů n, n_1, n_2, σ_1^2, σ_2^2 a ρ. Jejich zvolené hodnoty jsou: $n = 20$,

$(n_1, n_2) \in \{(5,5), (3,7), (10,10), (6,14), (20,20), (10,30)\}$ (tj. počet neúplných párů pozorování je vzhledem k počtu úplných párů poloviční, stejný, nebo dvojnásobný), $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 \in \{1,\ 2,\ 0{,}5\}$, $\rho \in \{0{,}1,\ 0{,}5,\ 0{,}9\}$. Pro každou možnou kombinaci těchto hodnot existuje jeden graf. Testy podle Bhoje pro různé rozptyly jsou prováděny pouze pro $n_1 > 5$, test podle Bhoje pro stejné rozptyly pouze pro $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Hladina testů. Pro zkoumané kombinace parametrů n, n_1, n_2, σ_1^2, σ_2^2 a ρ se odhadnutá hladina testů (tj. hodnota $\beta(0)$) pohybuje mezi 0,016 a 0,082. Přesněji: u párového t testu mezi $0,037$ a $0,073$, u testu podle Banerjeeho mezi $0,016$ a $0,052$ a u testu podle Welche mezi $0,028$ a $0,066$, u testu založeném na maximálně věrohodném odhadu mezi $0,042$ a $0,082$, u testu podle Bhoje pro různé rozptyly s $\lambda = 0{,}5$ mezi $0,042$ a $0,070$, u testu podle Bhoje pro různé rozptyly s $\lambda = \lambda_{min}$ mezi $0,042$ a $0,069$, u testu podle Bhoje pro stejné rozptyly s $\lambda = 0{,}5$ mezi $0,041$ a $0,070$, u testu podle Bhoje pro stejné rozptyly s $\lambda = \lambda_{min}$ mezi $0,043$ a $0,068$.

Stejně jako v části 6.1, můžeme i zde testovat hypotézu $H_{0,05} : \alpha = 0{,}05$. Protože i zde jsme prováděli pro $\Delta = 0$ tisíc opakování testů na hladině α, použijeme stejné rozhodovací pravidlo: hypotézu $H_{0,05}$ zamítáme pro ty odhadnuté hladiny testů, které jsou větší nebo rovny 0,064, nebo menší nebo rovny 0,036. Takové hodnoty jsou v tabulce 6.2, která obsahuje všechny odhadnuté hladiny testů, zdůrazněny tučně.

n	n_1	n_2	σ_2^2	ρ	t-test	Banerjee	Welch	m.v.	Bhoj 1	Bhoj 2	Bhoj 3	Bhoj 4
20	5	5	1	0,1	0,047	**0,030**	0,047	0,048	-	-	0,054	0,047
				0,5	0,054	0,037	0,064	0,067	-	-	0,055	**0,064**
				0,9	0,046	**0,026**	0,052	0,053	-	-	0,050	0,055
			2	0,1	0,040	**0,027**	0,043	0,047	-	-	-	-
				0,5	0,045	**0,028**	0,044	0,046	-	-	-	-
				0,9	0,051	**0,022**	0,042	0,048	-	-	-	-
			0,5	0,1	0,058	0,037	0,059	0,059	-	-	-	-
				0,5	0,050	**0,022**	0,038	0,047	-	-	-	-
				0,9	0,063	**0,027**	0,054	0,064	-	-	-	-
20	3	7	1	0,1	0,060	**0,033**	0,058	0,054	-	-	0,059	0,056
				0,5	0,042	**0,020**	0,035	0,042	-	-	0,046	0,043
				0,9	0,046	**0,022**	0,041	0,054	-	-	0,042	0,047
			2	0,1	0,051	**0,033**	0,045	0,048	-	-	-	-
				0,5	0,043	**0,023**	0,051	0,053	-	-	-	-
				0,9	0,050	**0,020**	0,058	0,046	-	-	-	-
			0,5	0,1	0,057	**0,024**	0,053	0,060	-	-	-	-
				0,5	0,039	**0,016**	0,028	0,043	-	-	-	-
				0,9	0,056	**0,016**	0,046	0,055	-	-	-	-
20	10	10	1	0,1	0,052	0,049	0,056	0,060	0,059	0,061	0,060	**0,064**
				0,5	0,053	**0,020**	0,037	0,052	0,044	0,044	0,041	0,049
				0,9	0,059	**0,028**	0,037	0,063	0,048	0,045	0,044	0,050
			2	0,1	0,046	**0,035**	0,051	0,046	0,049	0,042	-	-
				0,5	0,045	0,039	0,047	0,048	0,046	0,050	-	-
				0,9	0,047	**0,036**	0,054	0,052	0,056	0,049	-	-
			0,5	0,1	0,047	0,037	0,046	0,047	0,043	0,045	-	-
				0,5	0,054	**0,031**	0,042	0,051	0,042	0,045	-	-
				0,9	0,039	**0,033**	0,050	0,042	0,042	0,045	-	-
20	6	14	1	0,1	0,042	0,039	0,055	0,050	0,054	0,049	**0,064**	0,051
				0,5	0,053	**0,035**	0,049	0,057	0,049	0,063	0,060	**0,065**
				0,9	**0,066**	**0,032**	0,046	**0,075**	0,062	**0,066**	0,060	**0,068**

(Pokračování na další straně)

n	n_1	n_2	σ_2^2	ρ	t-test	Banerjee	Welch	m.v.	Bhoj 1	Bhoj 2	Bhoj 3	Bhoj 4
20	6	14	2	0,1	0,051	0,046	0,063	0,059	0,053	0,055	-	-
				0,5	0,057	0,037	0,050	**0,064**	0,042	0,051	-	-
				0,9	0,045	0,046	0,061	**0,066**	0,056	0,054	-	-
			0,5	0,1	0,046	**0,034**	0,049	0,050	0,047	0,048	-	-
				0,5	0,044	**0,036**	0,050	0,054	0,048	0,052	-	-
				0,9	0,055	0,039	0,062	0,055	0,061	0,058	-	-
20	20	20	1	0,1	0,051	0,048	0,060	0,052	0,063	0,050	0,056	0,051
				0,5	0,043	0,051	0,060	**0,065**	**0,070**	0,056	0,063	0,050
				0,9	**0,073**	0,046	0,053	**0,079**	**0,069**	**0,066**	**0,070**	0,064
			2	0,1	0,053	0,052	0,066	0,064	0,063	0,062	-	-
				0,5	0,053	0,040	0,048	0,056	0,062	0,054	-	-
				0,9	0,046	0,040	0,052	0,057	0,049	0,049	-	-
			0,5	0,1	0,051	0,041	0,048	0,052	0,055	0,048	-	-
				0,5	0,054	**0,035**	0,051	0,058	0,047	0,055	-	-
				0,9	0,046	0,050	0,057	0,053	0,059	0,058	-	-
20	10	30	1	0,1	0,048	**0,032**	0,038	0,042	0,043	0,043	0,049	0,049
				0,5	0,045	0,041	0,049	0,046	0,042	0,045	0,053	0,047
				0,9	0,069	0,046	0,059	**0,082**	0,057	**0,069**	0,060	0,062
			2	0,1	0,037	0,038	0,045	0,043	0,047	0,049	-	-
				0,5	0,042	0,052	0,063	0,063	0,062	0,056	-	-
				0,9	0,055	0,042	0,049	0,063	0,058	0,053	-	-
			0,5	0,1	0,048	0,040	0,055	0,052	0,056	0,049	-	-
				0,5	0,039	0,036	0,047	0,059	0,052	0,043	-	-
				0,9	0,043	0,046	0,053	0,046	0,055	0,060	-	-

Tabulka 6.2: Odhadnutá hladina testů v případě pozorování chybějících u obou náhodných veličin. m.v. - test založený na maximálně věrohodném odhadu, Bhoj 1 - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ s $\lambda = 0{,}5$, Bhoj 2 - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ s $\lambda = \lambda_{min}$, Bhoj 3 - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ s $\lambda = 0{,}5$, Bhoj 4 - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ s $\lambda = \lambda_{min}$.

Síla testů. Zjistěme opět nejdříve, který test je v jaké situaci nejsilnější. Pro $\rho = 0{,}1$ je kromě situace, kdy $n = 20$, $n_1 = 3$, $n_2 = 7$, $\rho = 0{,}1$, $\sigma_2^2 = 0{,}5$ (kdy dostáváme nejlepší výsledky pro test založený na maximálně věrohodném odhadu), vždy nejlepší test podle Welche. Pro $\rho \in \{0{,}5, 0{,}9\}$ je vždy nejsilnější test založený na maximálně věrohodném odhadu, kromě situace, kdy $n = 20$, $n_1 = 20$, $n_2 = 20$, $\rho = 0{,}5$, $\sigma_2^2 = 1$, kdy je nejlepší test podle Bhoje pro stejné rozptyly s $\lambda = \lambda_{min}$.

Na pozici nejhorších testů se objevují testy tři: test podle Banerjeeho (vždy nejhorší pro $\rho = 0{,}9$, nejhorší pro $\rho = 0{,}5$ a $n_1 + n_2 = 10$ a pro situaci $n = 20$, $n_1 = 5$, $n_2 = 5$, $\rho = 0{,}1$, $\sigma_2^2 = 2$), test podle Bhoje pro různé rozptyly s $\lambda = 0{,}5$ (nejhorší pro $n = 20$, $n_1 = 6$, $n_2 = 14$, $\rho = 0{,}5$) a párový t test (nejhorší ve všech zbývajících prípadech).

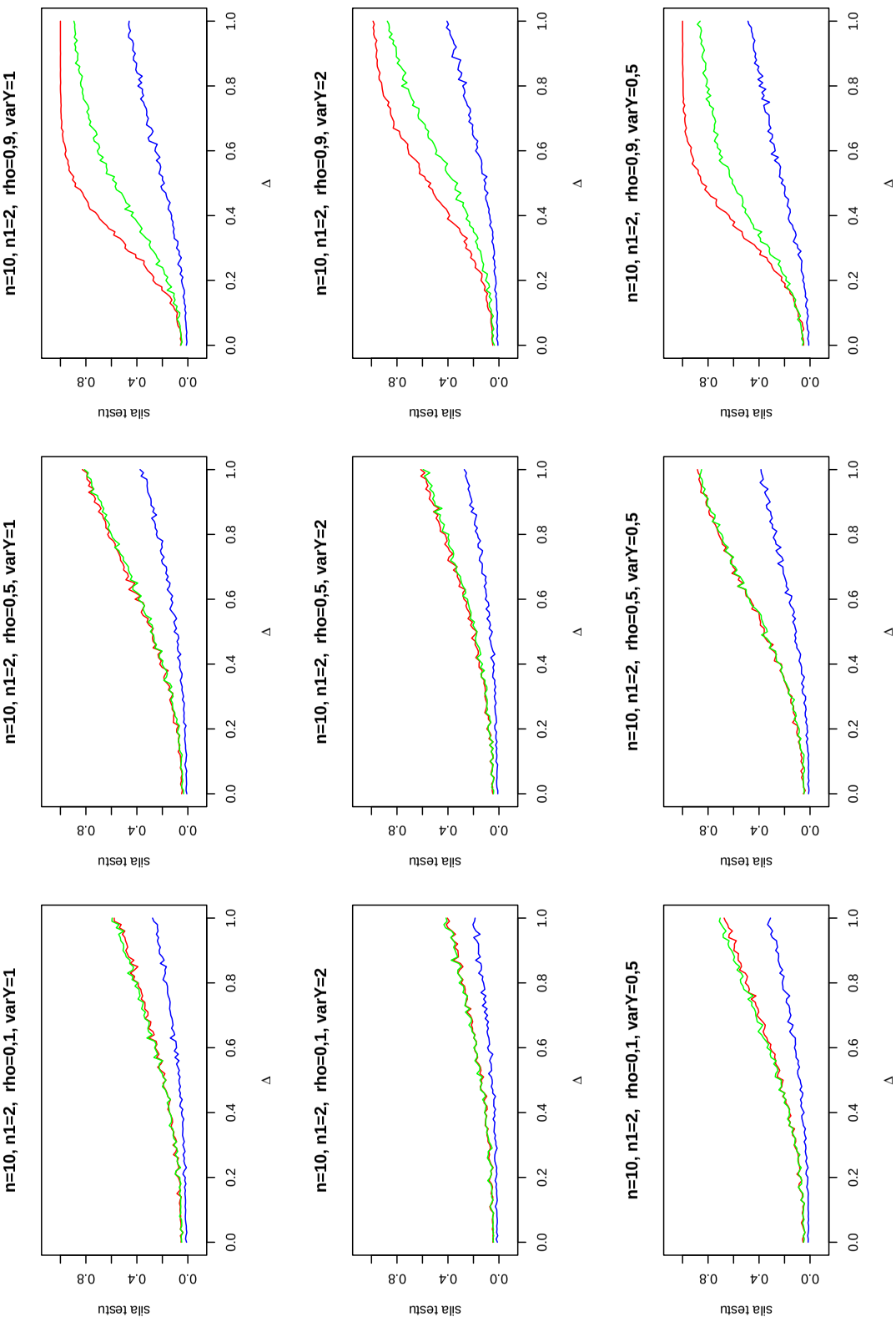
Porovnáváme-li testy podle Bhoje pro stejné a různé rozptyly tam, kde jsme oba použili, dostáváme pro stejný parametr λ vždy lepší výsledky pro test navržený pro stejné rozptyly, což není překvapující, neboť všechny tyto čtyři testy jsme naráz aplikovali pouze v situaci $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, což znamená porušení předpokladu testu podle Bhoje pro různé rozptyly. Porovnáme-li test podle Bhoje pro stejné (respektive různé) rozptyly s parametrem $\lambda = 0{,}5$ a $\lambda = \lambda_{min}$, dostáváme lepší výsledky pro testy s λ_{min}. Použití tohoto testu je ovšem omezeno znalostí příslušného parametru, který je získáván simulací pro příslušný rozsah výběru a příslušné počty chybějících pozorování, takový

test není proto příliš praktický.

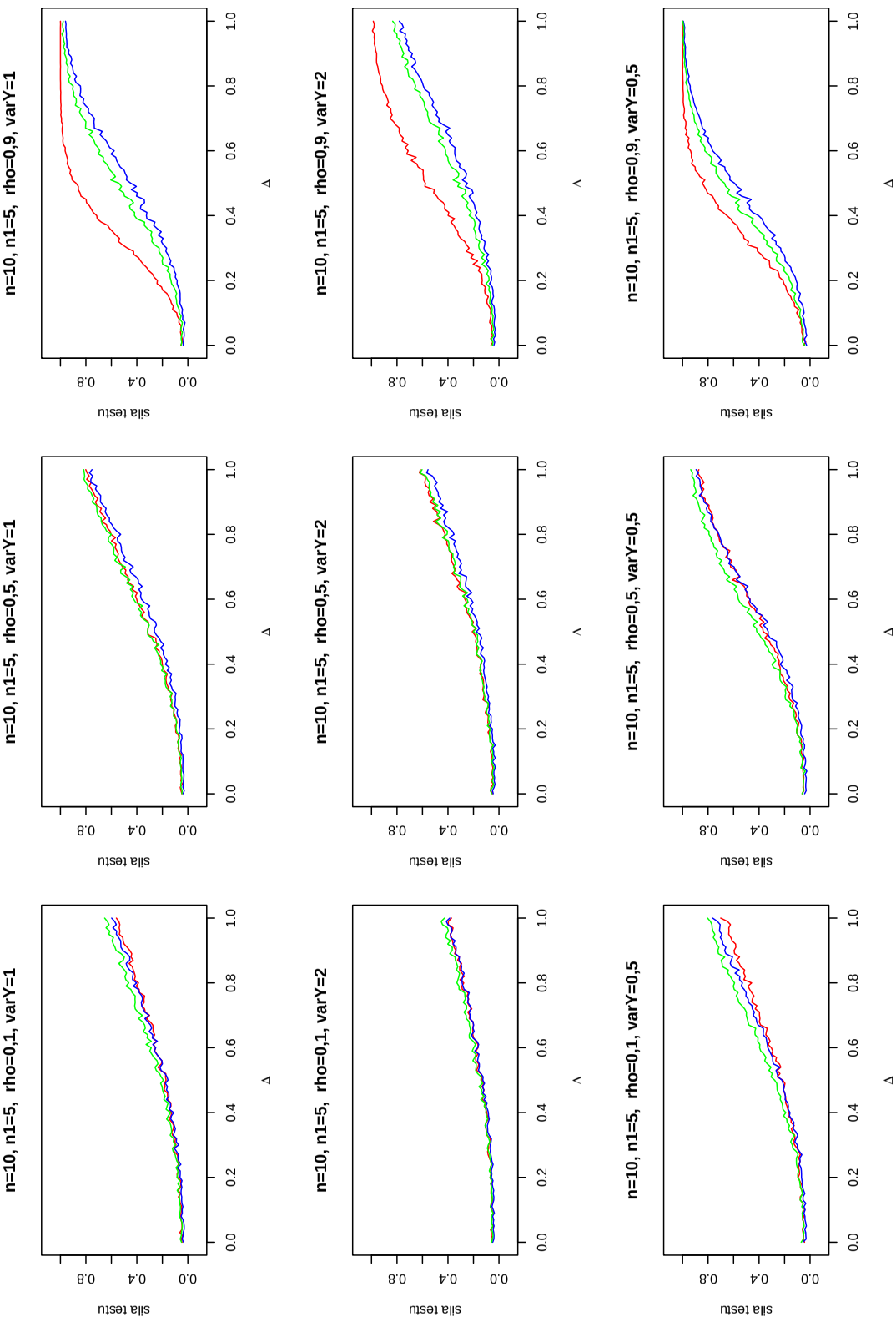
Doporučení. Test založený na maximálně věrohodném odhadu je ve všech zkoumaných situacích silnější než párový t test a tam, kde nejlepší mezi všemi testy je test podle Welche, se od něj liší jen nepatrně.

Naopak, test podle Welche, který je nejsilnějším ze zkoumaných testů pro $\rho = 0{,}1$, je pro $\rho = 0{,}9$ při všech zkoumaných hodnotách ostatních parametrů druhým nejhorším testem.

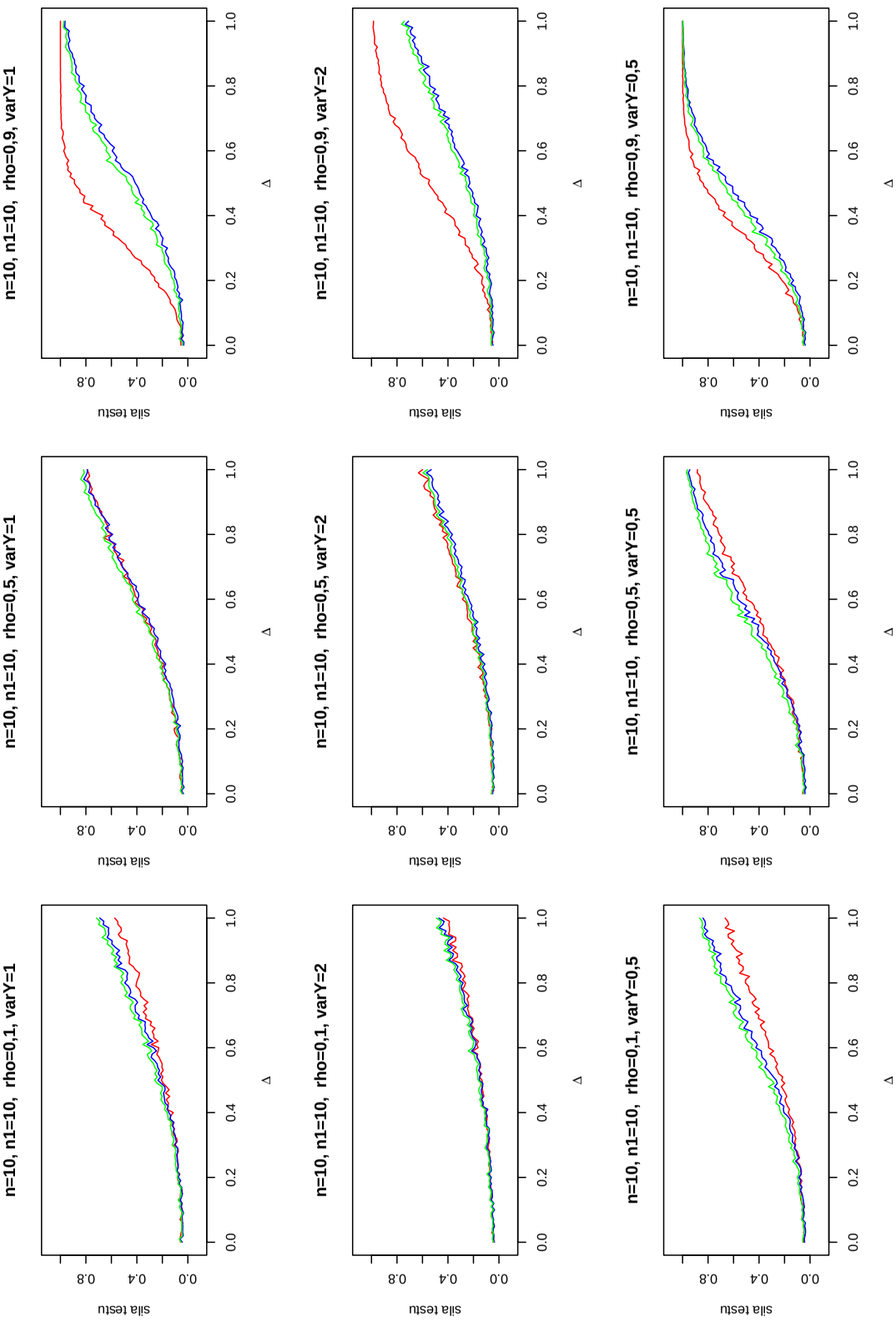
Protože v situaci, kdy pozorování chybí pro obě náhodné veličiny, nemáme k dispozici ohdad korelačního koeficientu, který by využíval všechna pozorování a umožňoval by nám tak rozhodnout se o vhodnosti použití Welchova testu, můžeme říci, že optimálním testem je v situaci 1.2 test založený na maximálně věrohodném odhadu.



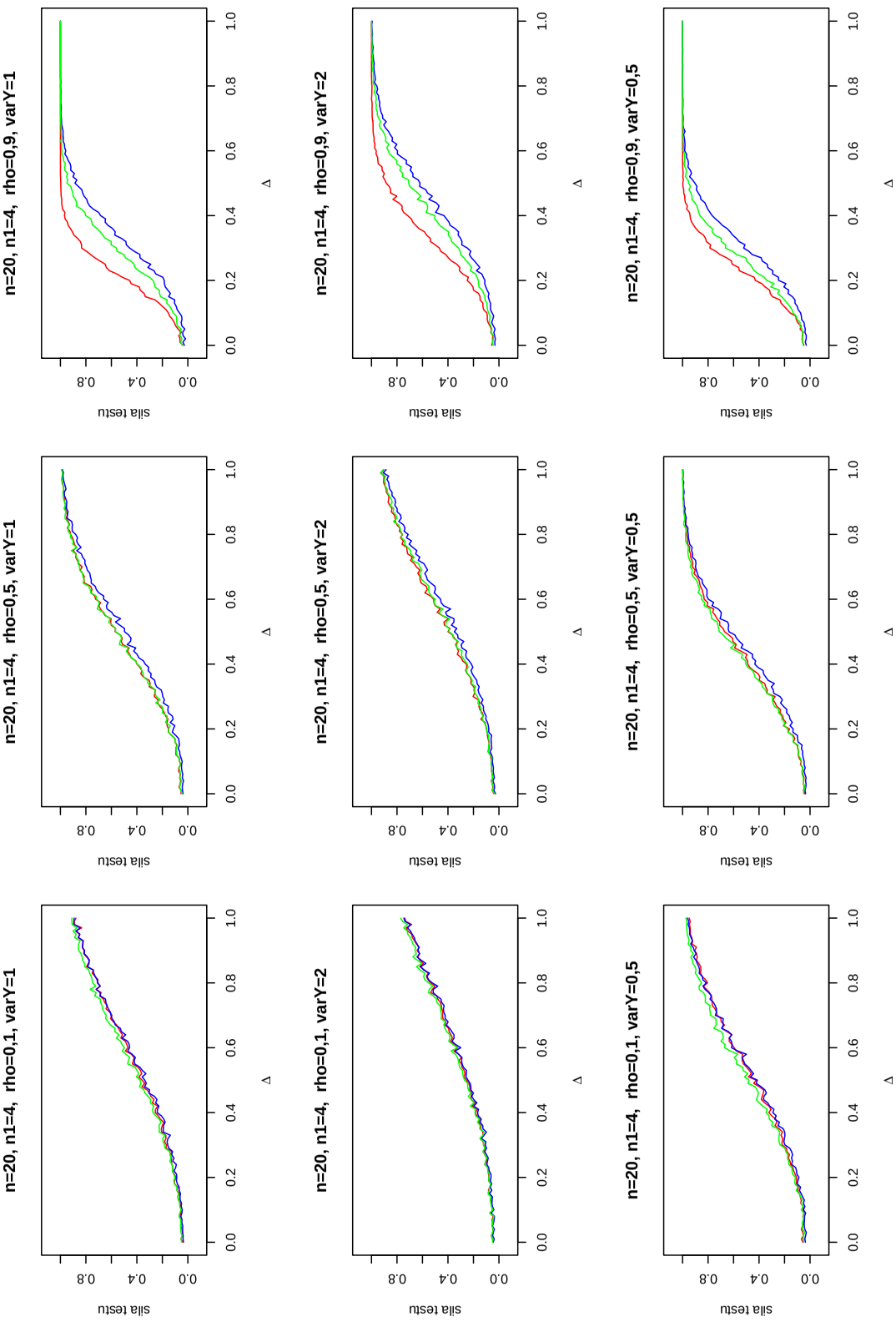
Obrázek 6.1: Síly testů. Červeně - párový t test, modře - test podle Banerjeeho, zeleně - test podle Welche. Rozsahy výběrů: $n = 10$, $n_1 = 2$.



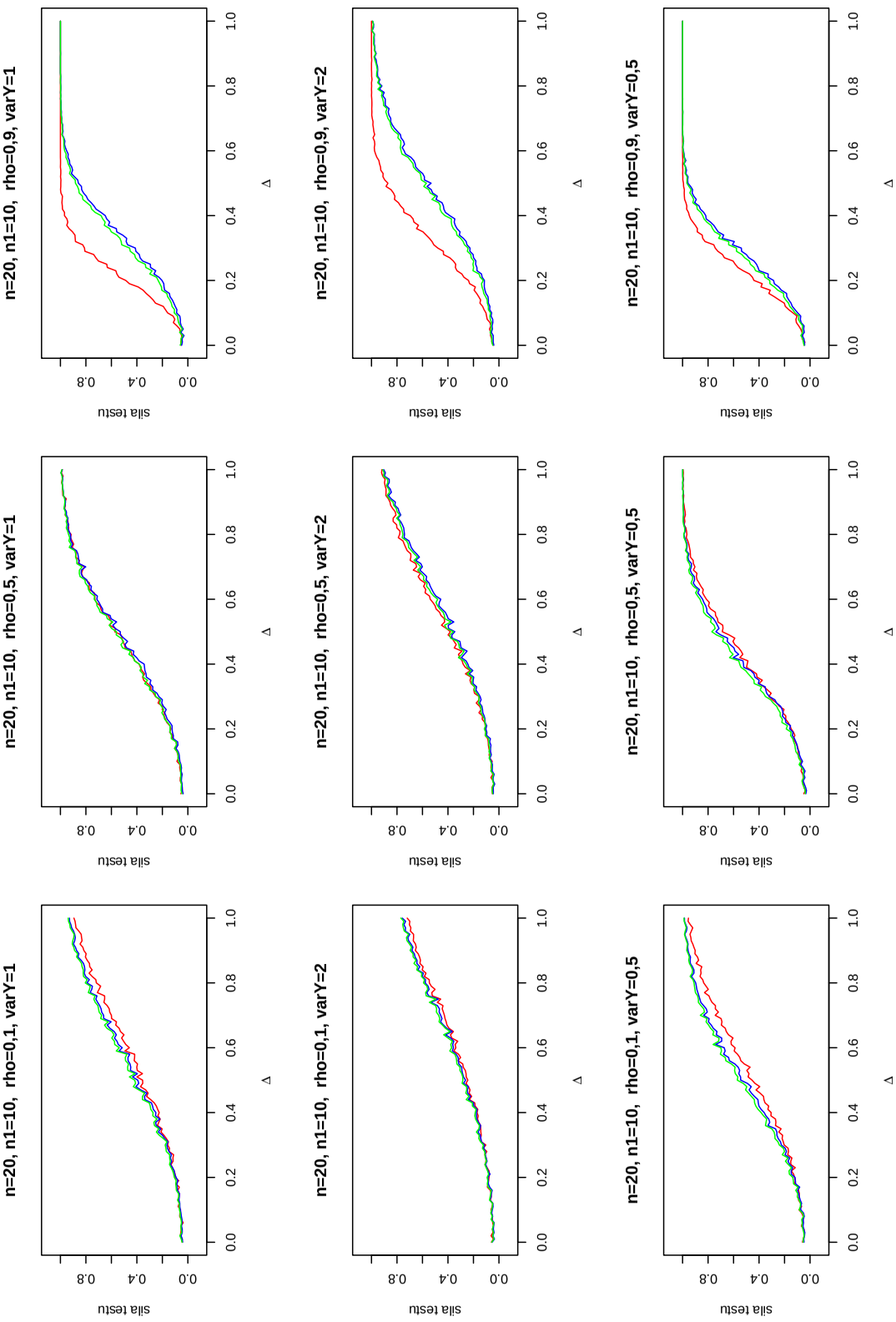
Obrázek 6.2: Síly testů. Červeně - párový t test, modře - test podle Banerjeeho, zeleně - test podle Welche. Rozsahy výběrů: $n = 10$, $n_1 = 5$.



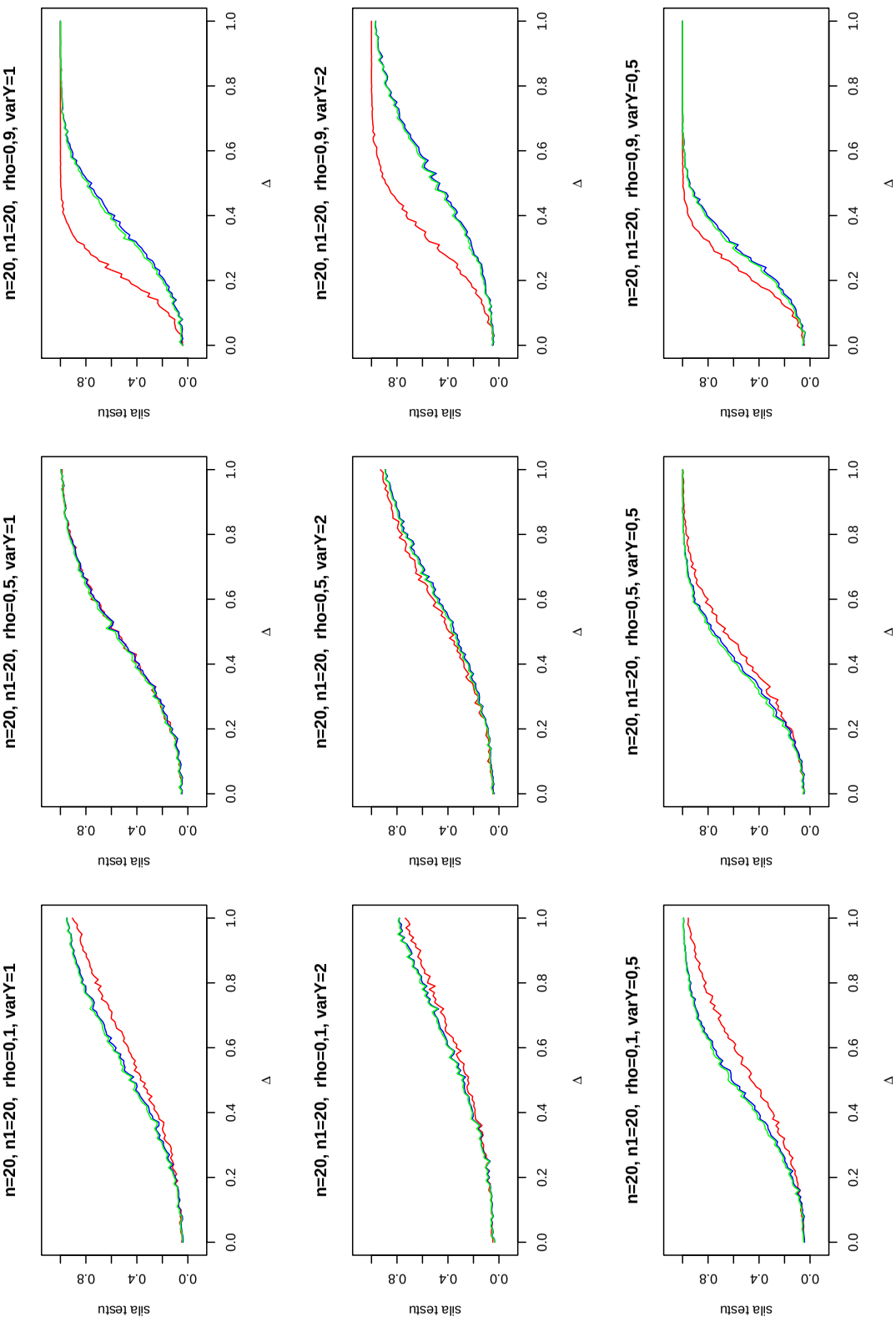
Obrázek 6.3: Síly testů. Červeně - párový t test, modře - test podle Banerjeeho, zeleně - test podle Welche. Rozsahy výběrů: $n = 10$, $n_1 = 10$.



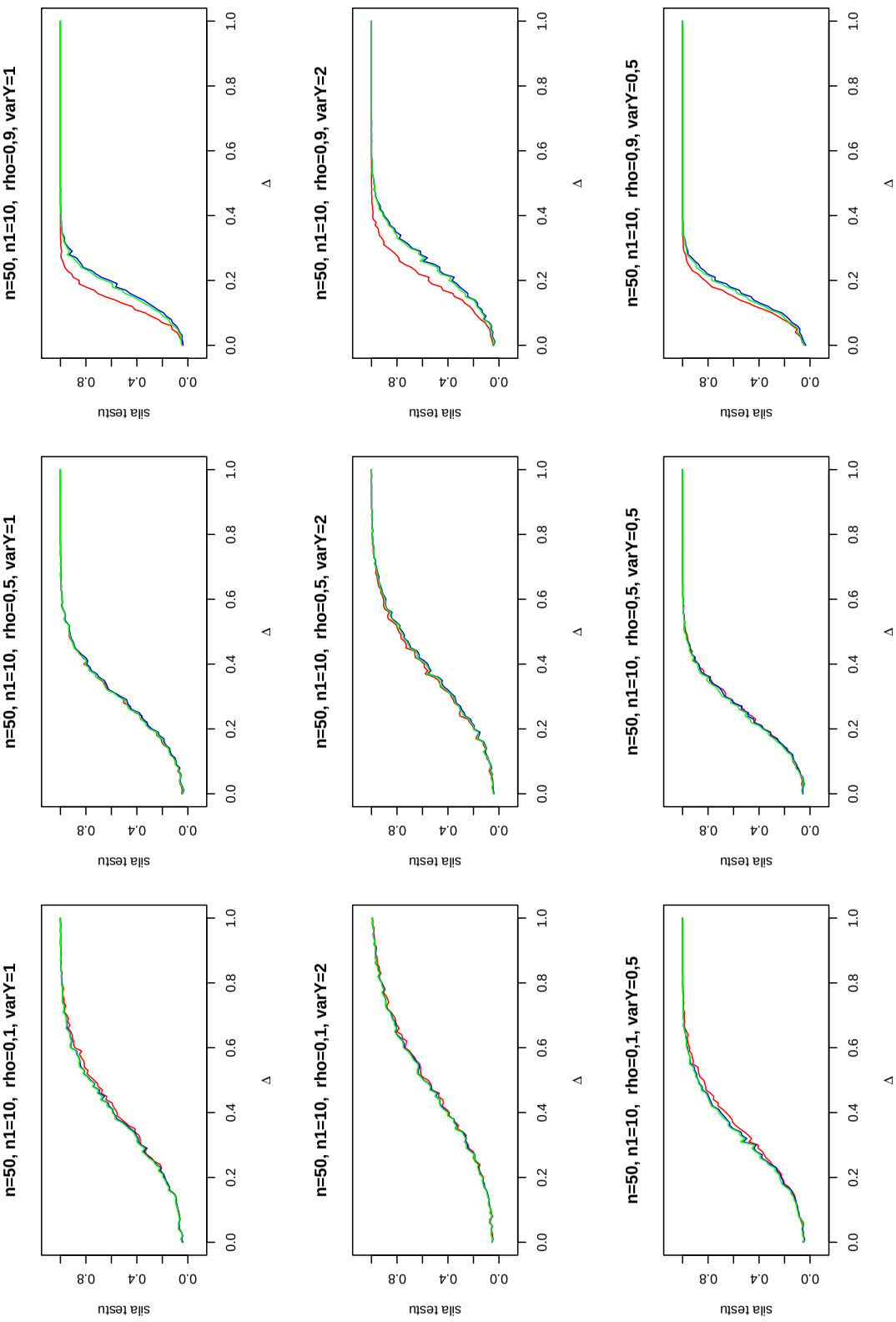
Obrázek 6.4: Síly testů. Červeně - párový t test, modře - test podle Banerjeeho, zeleně - test podle Welche. Rozsahy výběrů: $n = 20$, $n_1 = 4$.



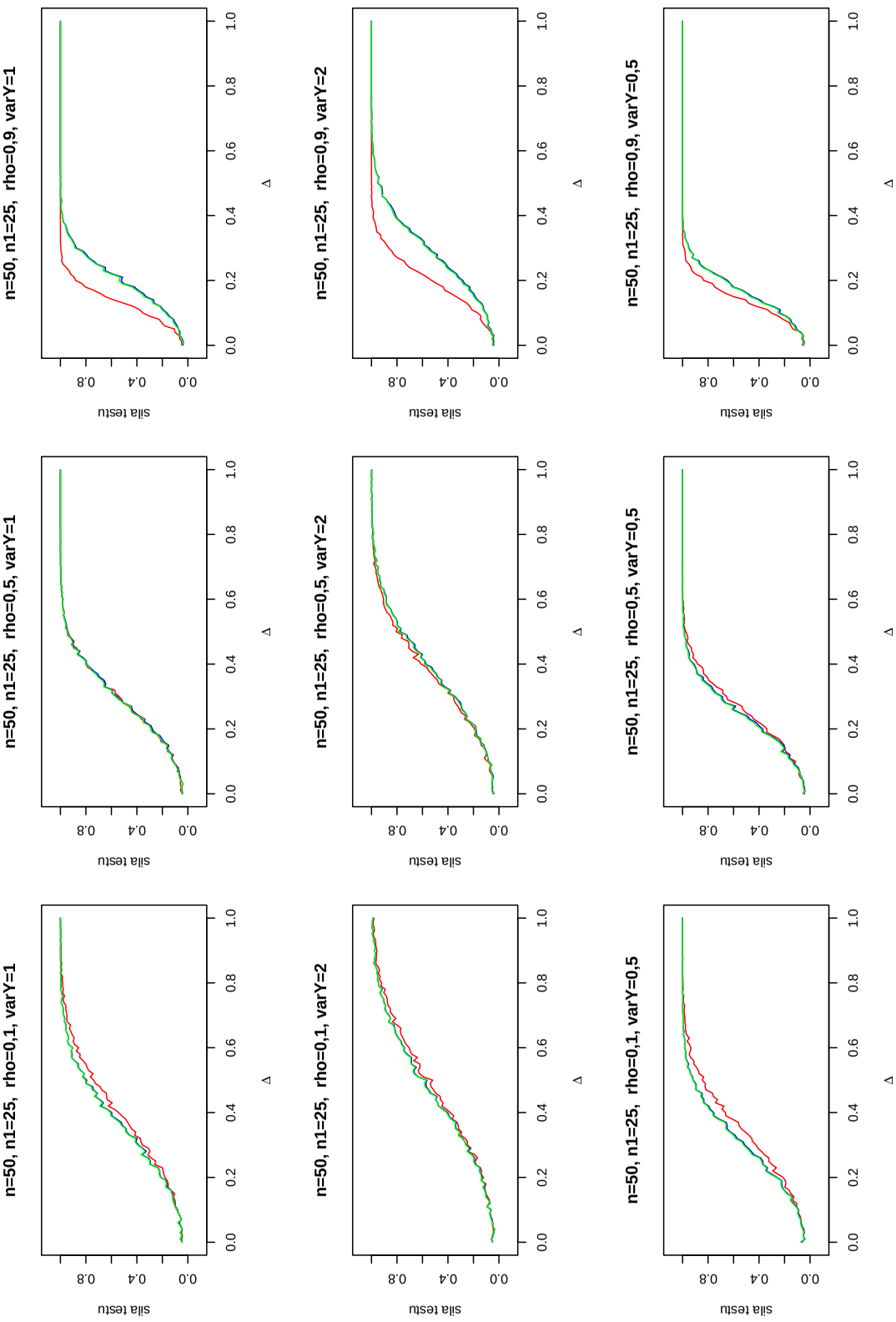
Obrázek 6.5: Síly testů. Červeně - párový t test, modře - test podle Banerjeeho, zeleně - test podle Welche. Rozsahy výběrů: $n = 20$, $n_1 = 10$.



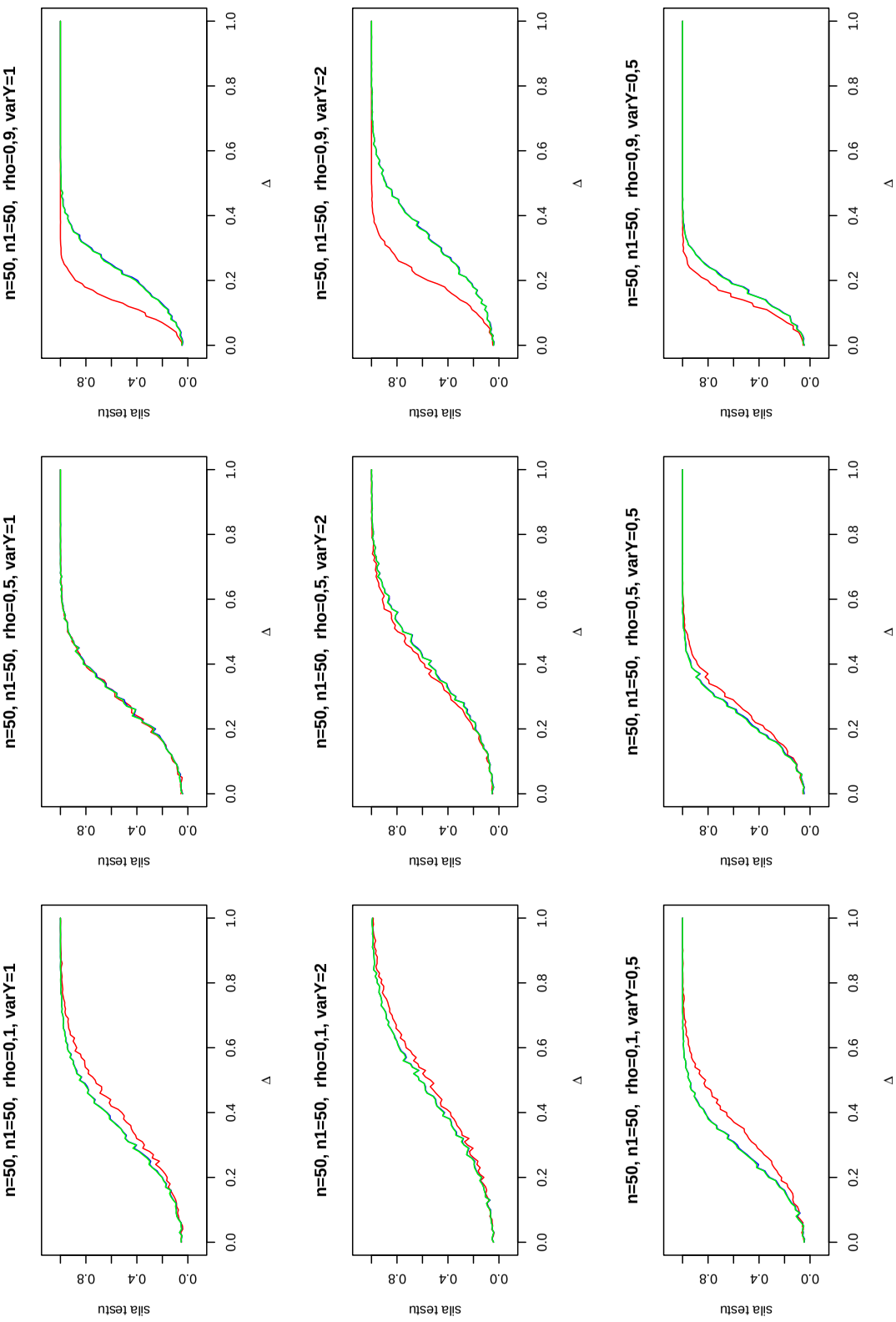
Obrázek 6.6: Síly testů. Červeně - párový t test, modře - test podle Banerjeeho, zeleně - test podle Welche. Rozsahy výběrů: $n = 20$, $n_1 = 20$.



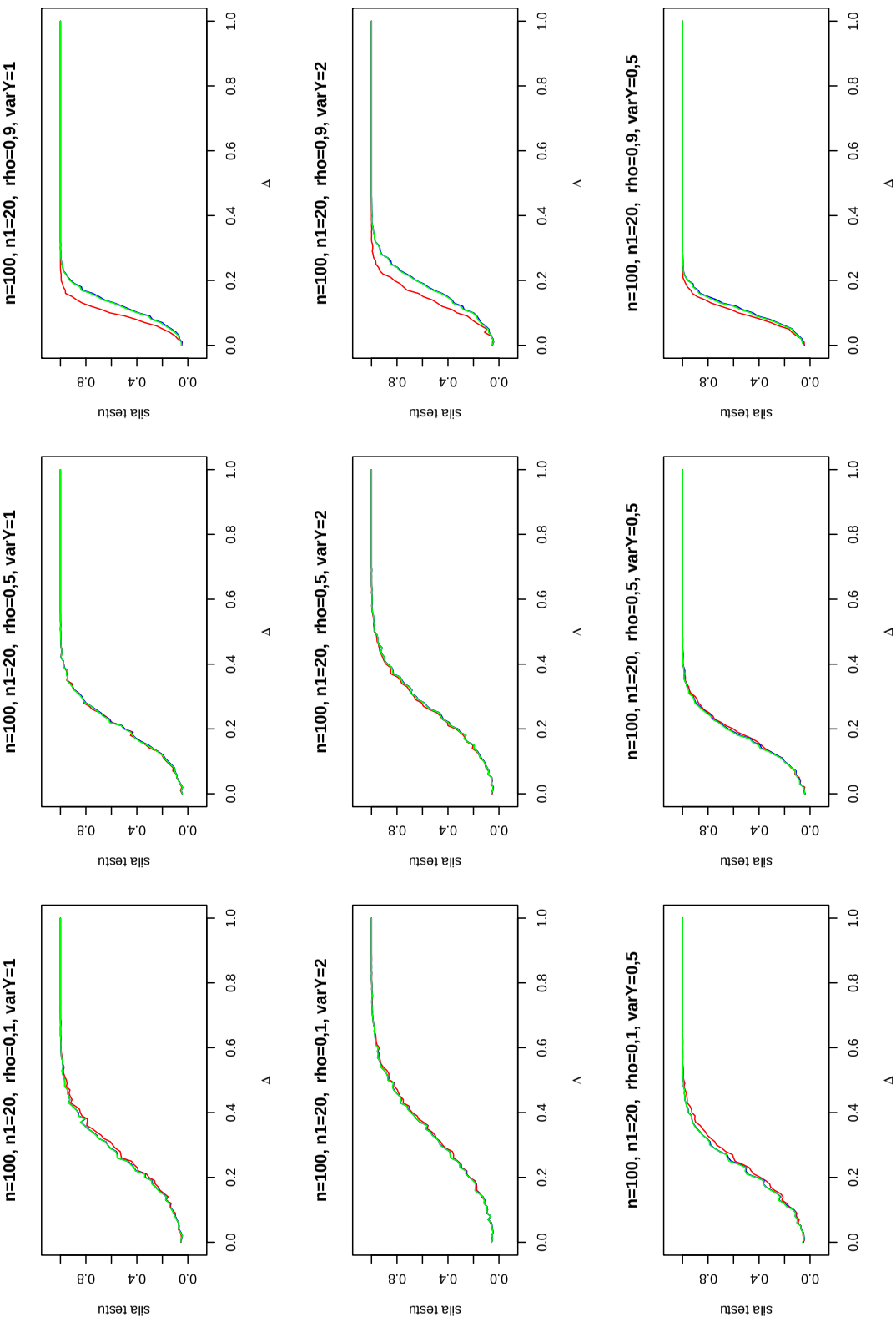
Obrázek 6.7: Síly testů. Červeně - párový t test, modře - test podle Banerjeeho, zeleně - test podle Welche. Rozsahy výběrů: $n = 50$, $n_1 = 10$.



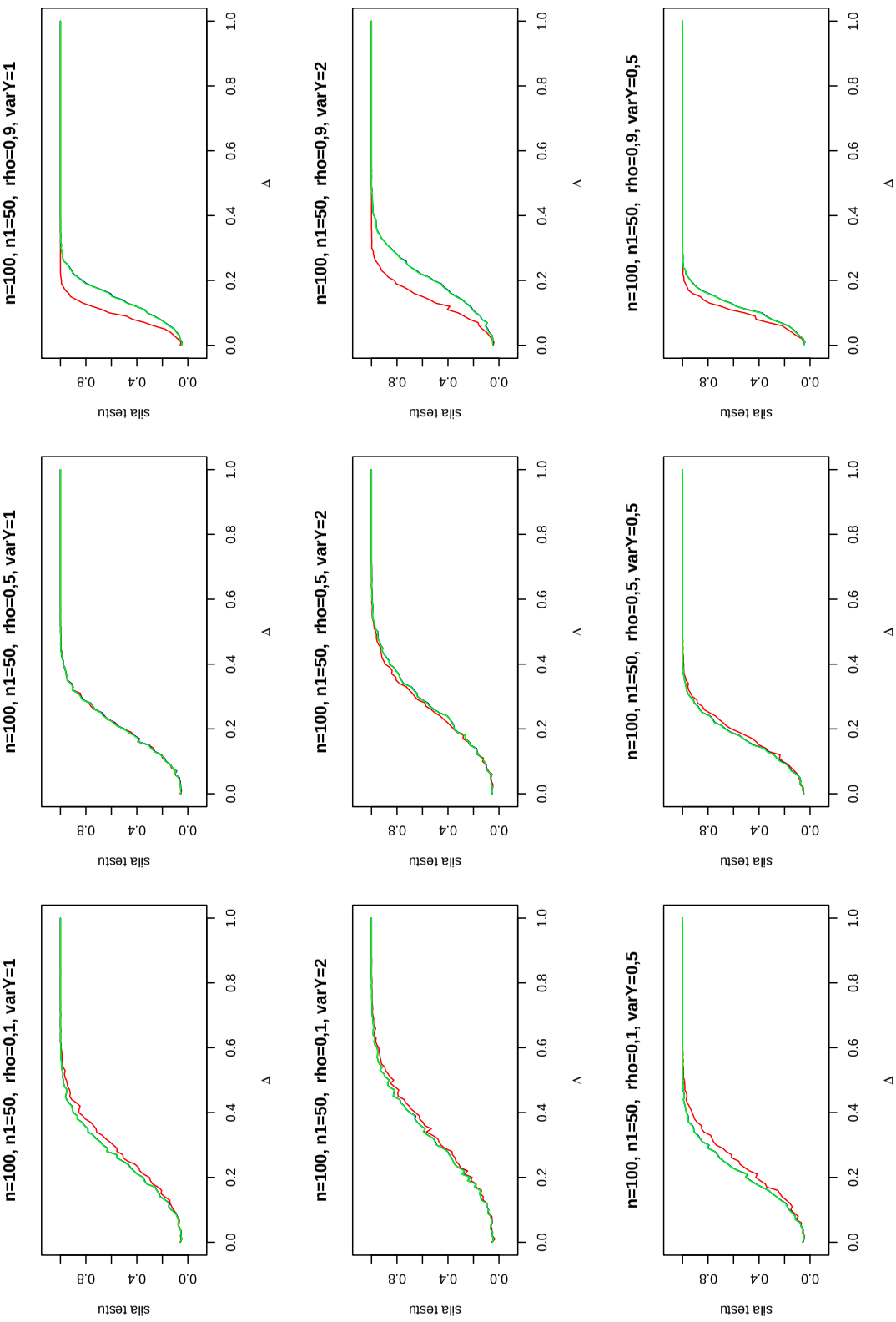
Obrázek 6.8: Síly testů. Červeně - párový t test, modře - test podle Banerjeeho, zeleně - test podle Welche. Rozsahy výběrů: $n = 50$, $n_1 = 25$.



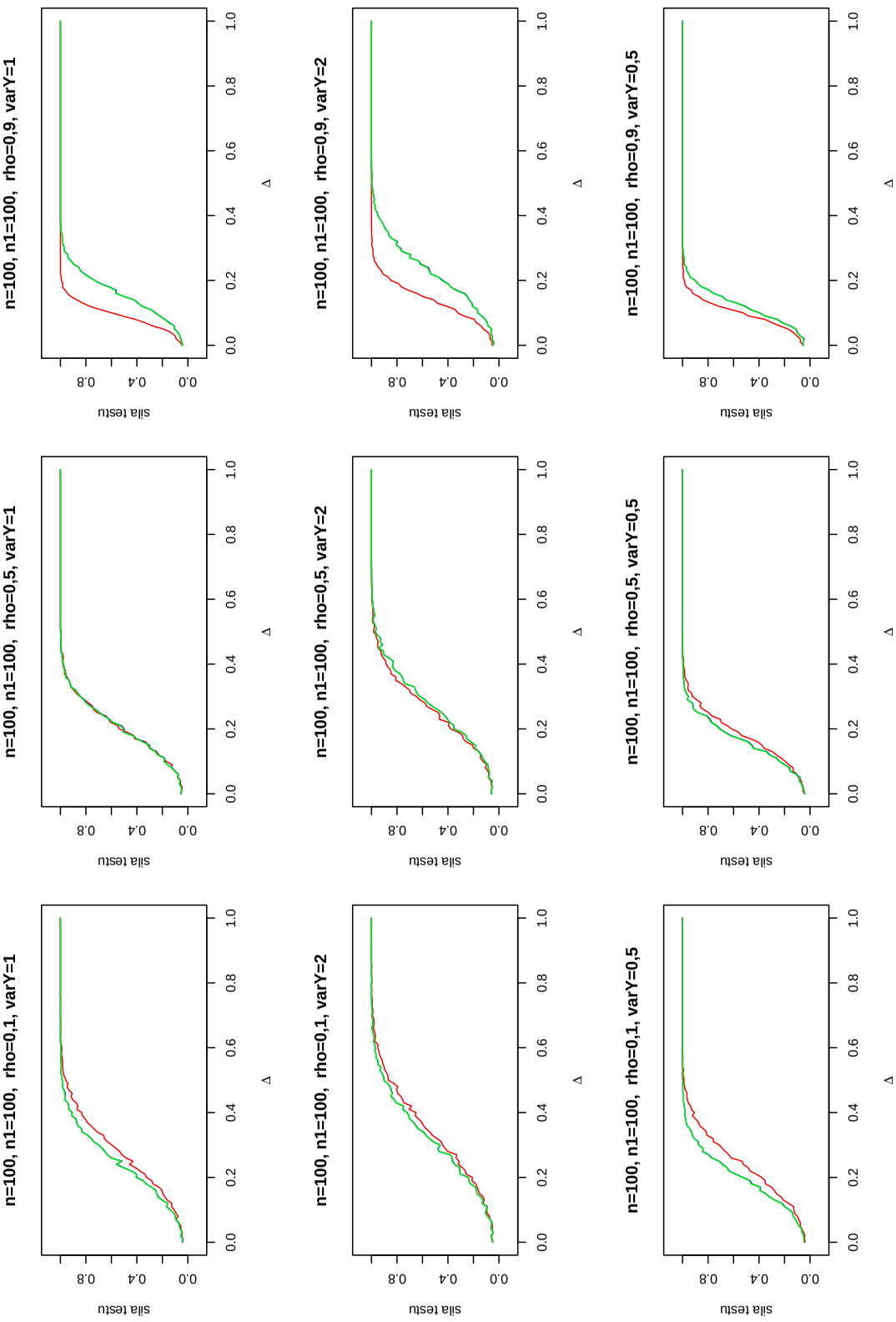
Obrázek 6.9: Síly testů. Červeně - párový t test, modře - test podle Banerjeeho, zeleně - test podle Welche. Rozsahy výběrů: $n = 50$, $n_1 = 50$.



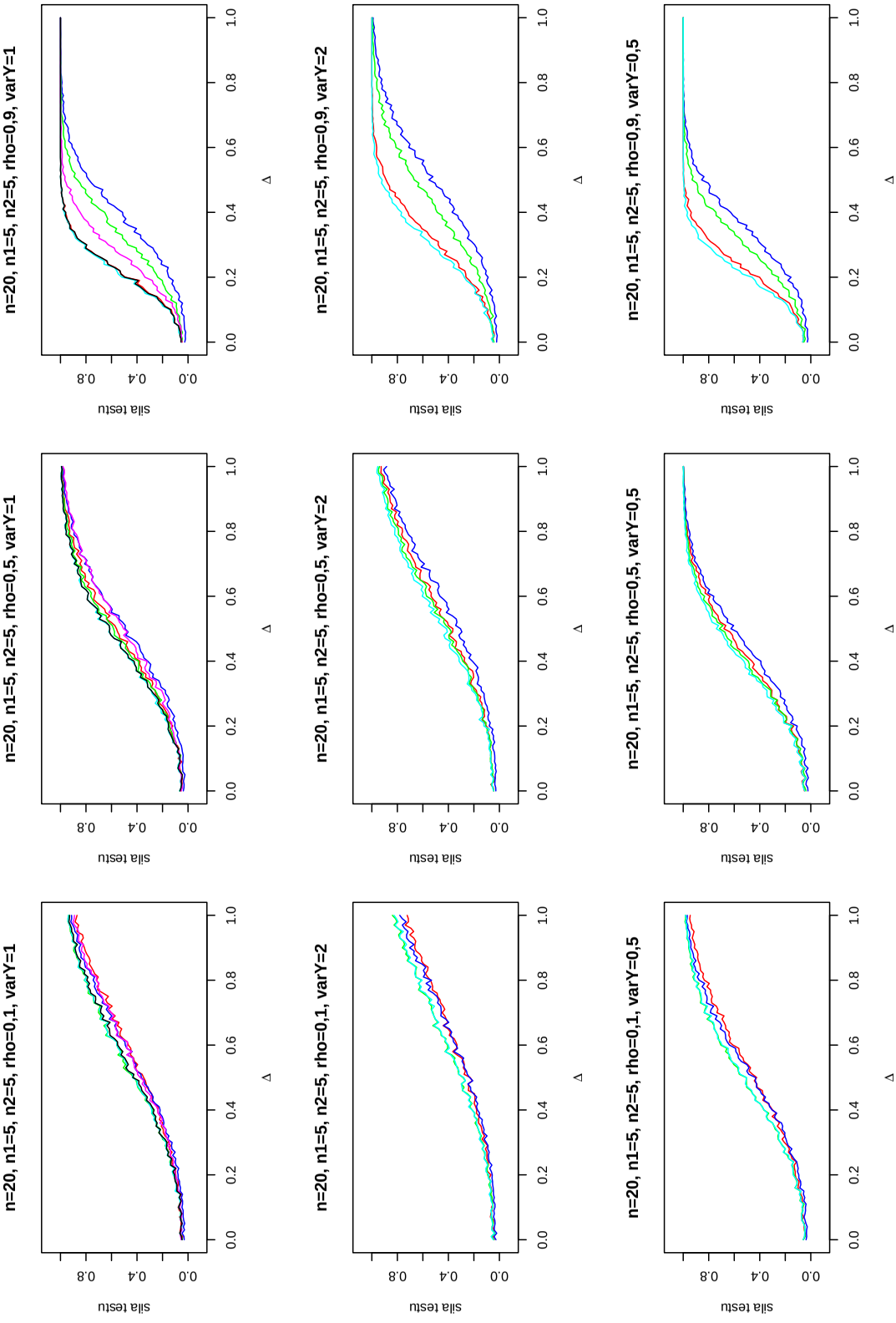
Obrázek 6.10: Síly testů. Červeně - párový t test, modře - test podle Banerjeeho, zeleně - test podle Welche. Rozsahy výběrů: $n = 100$, $n_1 = 20$.



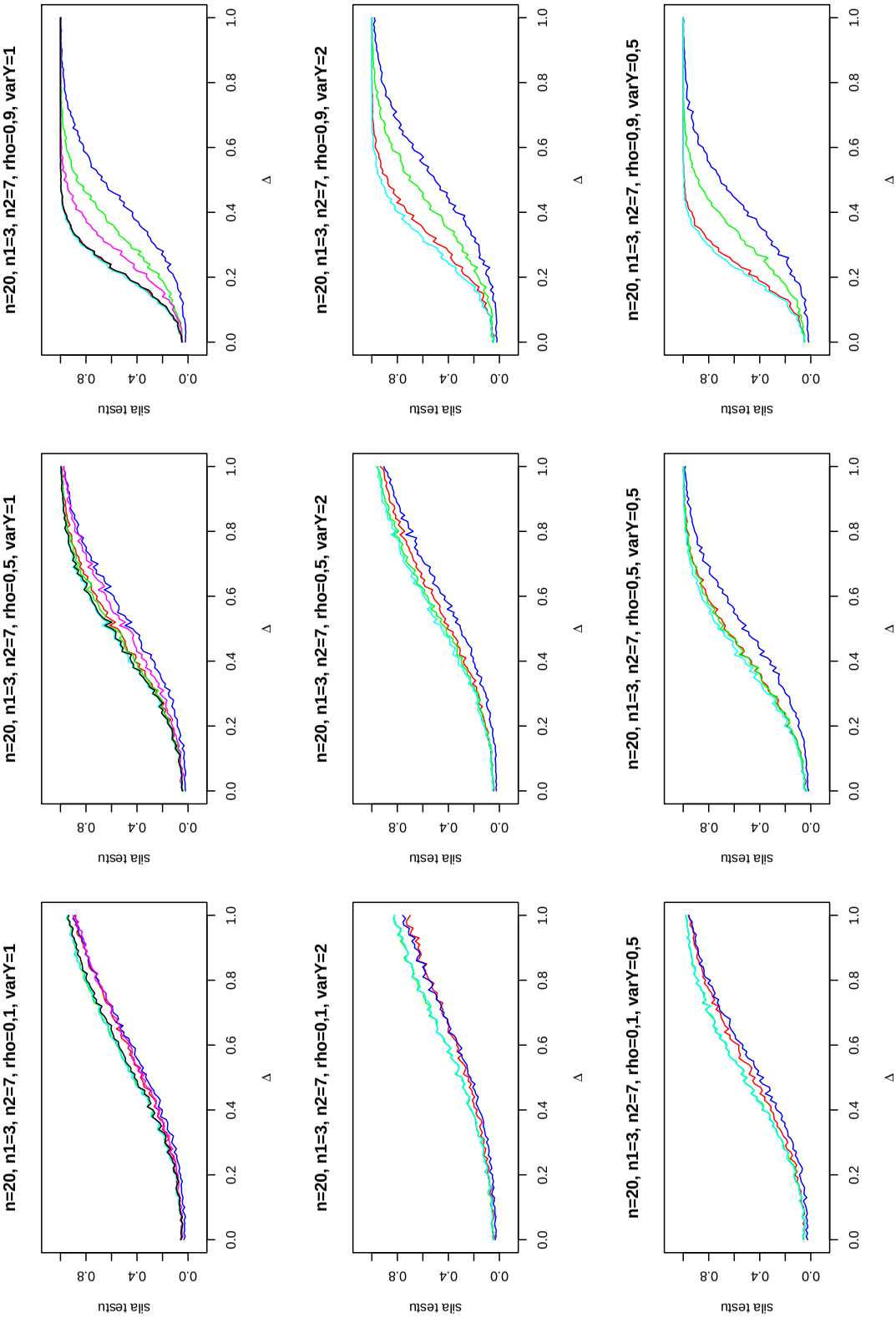
Obrázek 6.11: Síly testů. Červeně - párový t test, modře - test podle Banerjeeho, zeleně - test podle Welche. Rozsahy výběrů: $n = 100$, $n_1 = 50$.



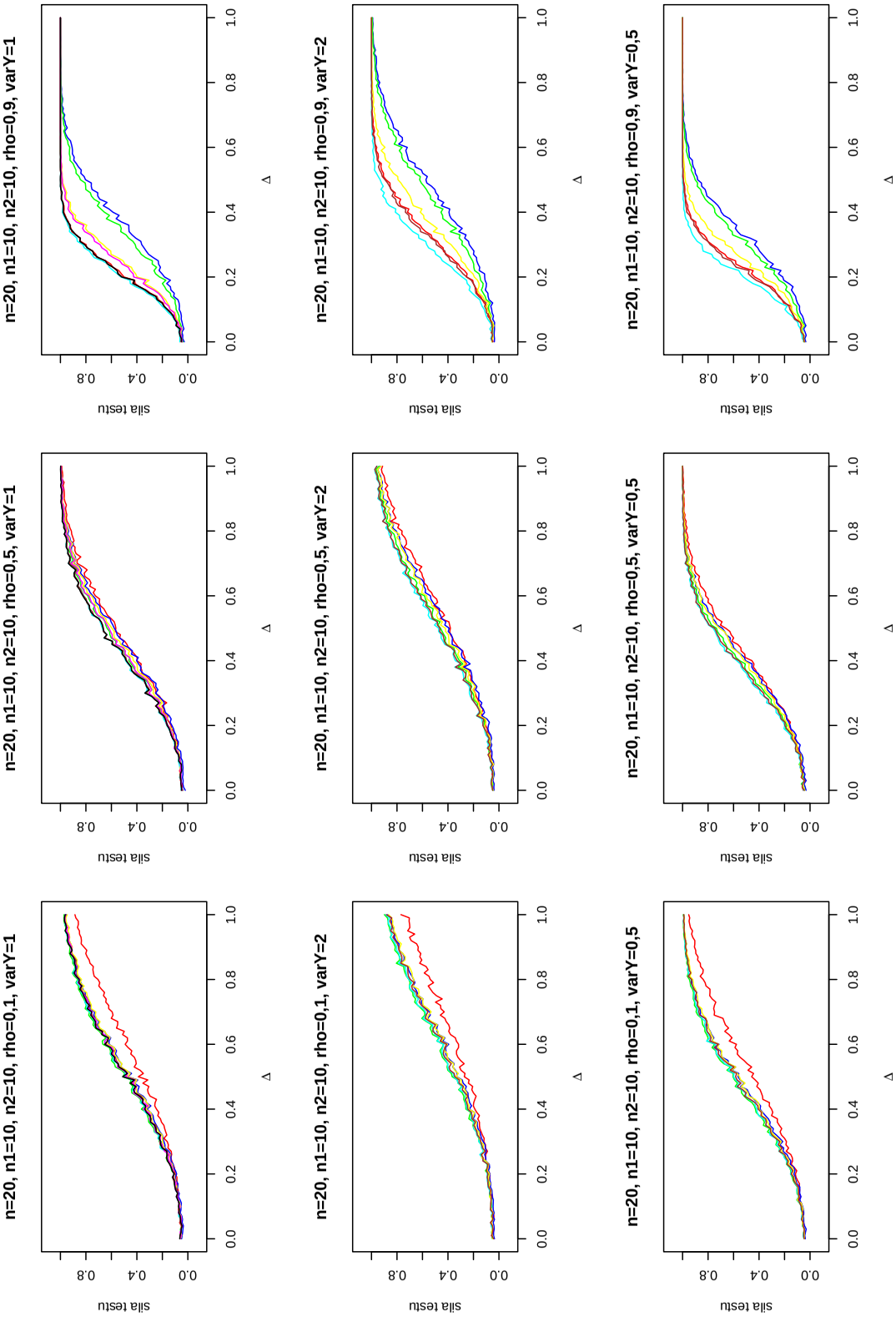
Obrázek 6.12: Síly testů. Červeně - párový t test, modře - test podle Banerjeeho, zeleně - test podle Welche. Rozsahy výběrů: $n = 100$, $n_1 = 100$.



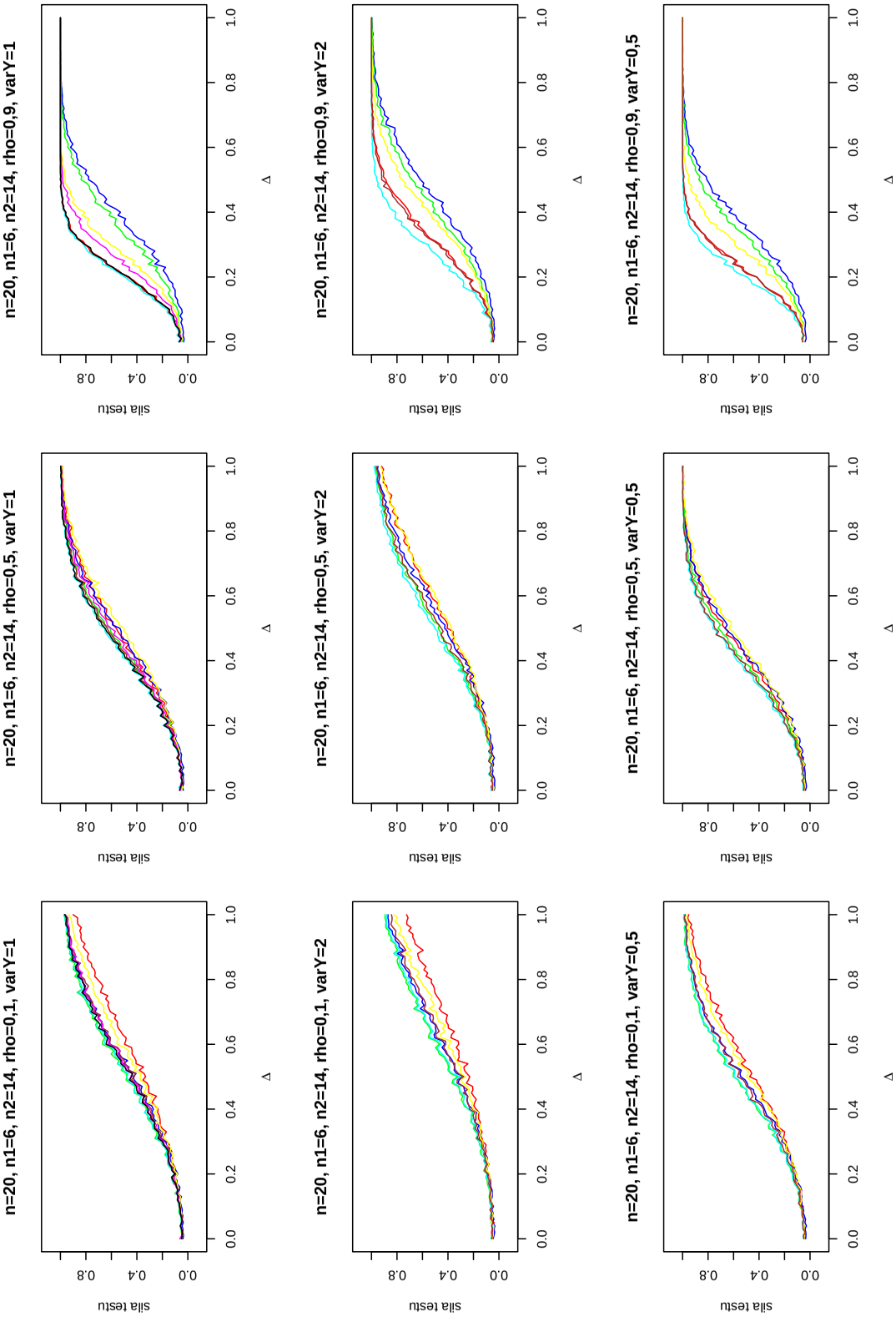
Obrázek 6.13: Síly testů. Červená - párový t test, modrá - test podle Banerjeeho, zelená - test podle Welche, tyrkysová - test založený na maximálně věrohodném odhadu, růžová - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ s $\lambda = 0{,}5$, černá - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ s $\lambda = \lambda_{min}$. Rozsahy výběrů: $n = 20$, $n_1 = 5$, $n_2 = 5$.



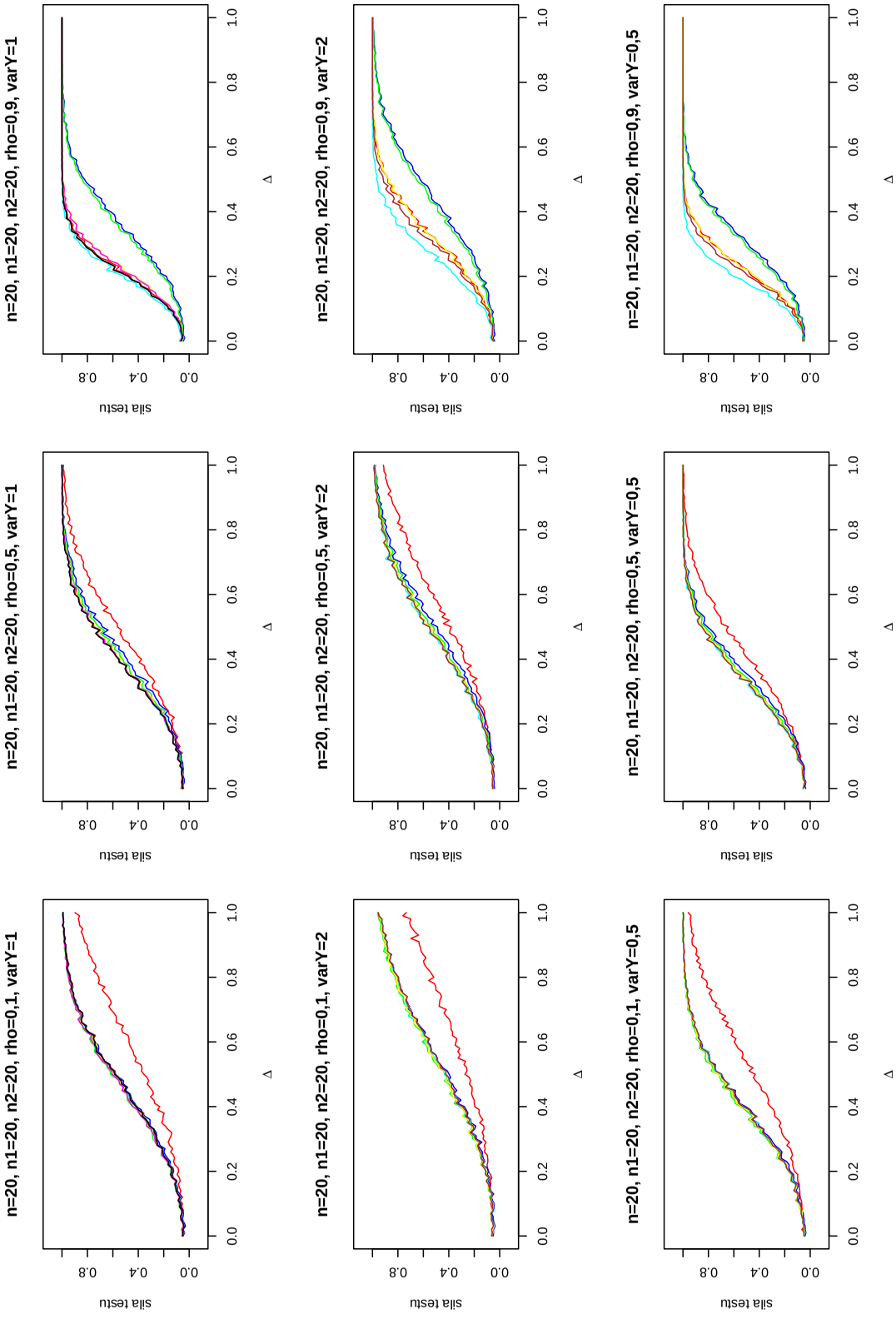
Obrázek 6.14: Síly testů. Červená - párový t test, modrá - test podle Banerjeeho, zelená - test podle Welche, tyrkysová - test založený na maximálně věrohodném odhadu, růžová - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ s $\lambda = 0{,}5$, černá - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ s $\lambda = \lambda_{min}$. Rozsahy výběrů: $n = 20$, $n_1 = 3$, $n_2 = 7$.



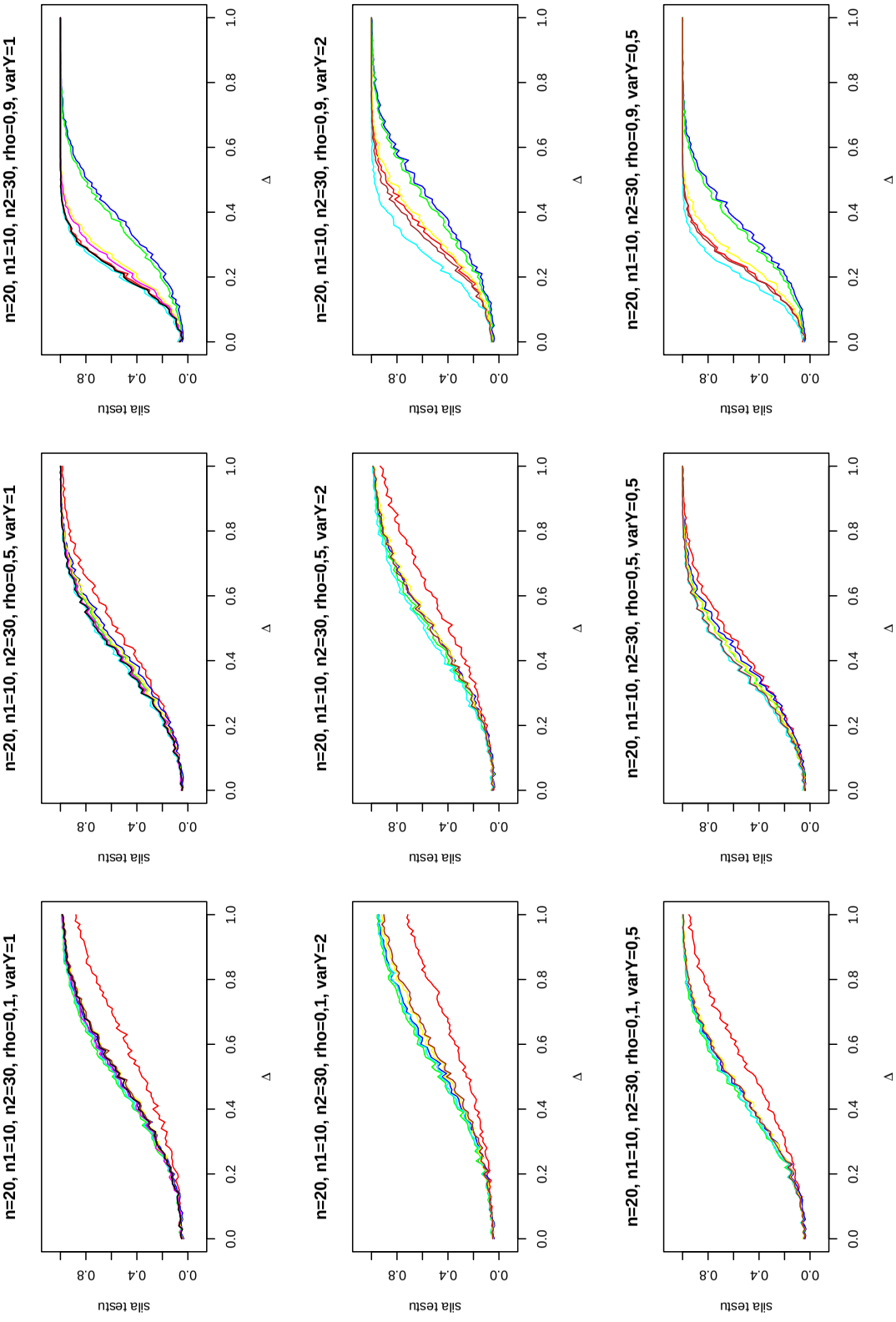
Obrázek 6.15: Síly testů. Červená - párový t test, modrá - test podle Banerjeeho, zelená - test podle Welche, tyrkysová - test založený na maximálně věrohodném odhadu, žlutá - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ s $\lambda = 0{,}5$, hnědá - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ s $\lambda = \lambda_{min}$, růžová - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ s $\lambda = 0{,}5$, černá - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ s $\lambda = \lambda_{min}$. Rozsahy výběrů: $n = 20$, $n_1 = 10$, $n_2 = 10$.



Obrázek 6.16: Síly testů. Červená - párový t test, modrá - test podle Banerjeeho, zelená - test podle Welche, tyrkysová - test založený na maximálně věrohodném odhadu, žlutá - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ s $\lambda = 0{,}5$, hnědá - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ s $\lambda = \lambda_{min}$, růžová - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ s $\lambda = 0{,}5$, černá - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ s $\lambda = \lambda_{min}$. Rozsahy výběrů: $n = 20$, $n_1 = 6$, $n_2 = 14$.



Obrázek 6.17: Síly testů. Červená - párový t test, modrá - test podle Banerjeeho, zelená - test podle Welche, tyrkysová - test založený na maximálně věrohodném odhadu, žlutá - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ s $\lambda = 0{,}5$, hnědá - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ s $\lambda = \lambda_{min}$, růžová - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ s $\lambda = 0{,}5$, černá - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ s $\lambda = \lambda_{min}$. Rozsahy výběrů: $n = 20$, $n_1 = 20$, $n_2 = 20$.



Obrázek 6.18: Síly testů. Červená - párový t test, modrá - test podle Banerjeeho, zelená - test podle Welche, tyrkysová - test založený na maximálně věrohodném odhadu, žlutá - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ s $\lambda = 0{,}5$, hnědá - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ s $\lambda = \lambda_{min}$, růžová - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ s $\lambda = 0{,}5$, černá - test podle Bhoje pro $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ s $\lambda = \lambda_{min}$. Rozsahy výběrů: $n = 20$, $n_1 = 10$, $n_2 = 30$.

Kapitola 7

Závěr

Cílem této práce bylo popsat a porovnat testy, které by umožňovaly testovat hypotézu $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ u výběru z dvourozměrného normálního rozdělení v případě, že některé páry pozorování jsou neúplné.

Nalezli jsme tři možná řešení pro situaci, kdy pozorování chybí u jedné z náhodných veličin, a sedm řešení pro situaci, kdy pozorování chybí pro obě náhodné veličiny.

Kromě řešení navrženého Mehtou a Gurlandem, které není pro praktické užití vinou některých omezení příliš vhodné, jsme nalezená řešení porovnali na simulovaných datech.

Zjistili jsme, že v situaci, kdy pozorování chybí u jedné z náhodných veličin, je v závislosti na hodnotě korelačního koeficentu vhodné užít buď párový t test, nebo test podle Welche.

V situaci, kdy pozorování chybí pro obě náhodné veličiny, je optimálním řešením problému ve všech zkoumaných situacích test založený na maximálně věrohodném odhadu.

Literatura

[1] T. W. Anderson. Maximum likelihood estimates for a multivariate normal distribution when some observations are missing. *Journal of the American Statistical Association*, 52(278):200–203, 1957.

[2] Jiří Anděl. *Základy matematické statistiky.* MATFYZPRESS, Praha, 2005.

[3] Saibal Kumar Banerjee. Approximate Confidence Interval for Linear Functions of Means of K Populations When the Population Variances Are Not Equal. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics*, 22(3/4):357–358, 1960.

[4] Dinesh S. Bhoj. Testing equality of means of correlated variates with missing observations on both responses. *Biometrika*, 65(1):225–228, 1978.

[5] Pi-Erh Lin. Estimation Procedures for Difference of Means with Missing Data. *Journal of the American Statistical Association*, 66(335):634–636, 1971.

[6] Pi-Erh Lin. Procedures for Testing the Difference of Means with Incomplete Data. *Journal of the American Statistical Association*, 68(343):699–703, 1973.

[7] Pi-Erh Lin and Lawrence E. Stivers. On Difference of Means with Incomplete Data. *Biometrika*, 61(2):325–334, 1974.

[8] J. S. Mehta and John Gurland. Some Properties and an Application of a Statistic Arising in Testing Correlation. *The Annals of Mathematical Statictics*, 40(5):1736–1745, 1969.

[9] J. S. Mehta and John Gurland. Testing Equality of Means in the Presence of Correlation. *Biometrika*, 56(1):119–126, 1969.

[10] J. S. Mehta and John Gurland. A Test for Equality of Means in the Presence of Correlation and Missing Values. *Biometrika*, 60(1):211–213, 1973.

[11] Klaus Nordhausen, Hannu Oja, and David E. Tyler. Tools for exploring multivariate data: The package ICS. *Journal of Statistical Software*, 28(6):1–31, 2008.

[12] V. H. Patil. Approximation to the Behrens-Fisher distributions. *Biometrika*, 52(1/2):267–271, 1965.

[13] R Development Core Team. *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2005. ISBN 3-900051-07-0.

[14] Henry Scheffé. On Solutions of the Behrens-Fisher Problem, Based on the t-Distribution. *The Annals of Mathematical Statistics*, 14(1):35–44, 1943.

[15] L. J. Wei. Estimation of Location Difference for Fragmentary Samples. *Biometrika*, 68(2):471–476, 1981.

[16] L. J. Wei. Interval Estimation of Location Difference with Incomplete Data. *Biometrika*, 69(1):249–251, 1982.

[17] B. L. Welch. The Generalization of Student´s Problem when Several Different Population Variances are Involved. *Biometrika*, 34(1/2):28–35, 1947.