

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## DIPLOMOVÁ PRÁCE



Martina Kalužíková

**Martingaly**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Studijní plán: Ekonometrie

2010

Na tomto místě bych chtěla poděkovat Mgr. Petru Dostálovi, Ph.D. za odborné vedení, konzultace a řadu podnětných rad a připomínek při zpracovávání mé diplomové práce.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 16. 4. 2010

Martina Kalužíková

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>5</b>
<b>1 Markovské časy</b>	<b>12</b>
1.1 Markovský čas . . . . .	12
1.2 Progresivní (postupná) měřitelnost . . . . .	17
<b>2 Martingaly</b>	<b>25</b>
2.1 Základní definice a vlastnosti martingalů . . . . .	25
2.2 Martingaly a markovské časy . . . . .	32
2.2.1 Princip zrcadlení . . . . .	35
2.3 Waldovy rovnosti . . . . .	37
2.4 Lokální martingaly . . . . .	40
2.5 Martingalové diference . . . . .	42
2.6 Prediktabilní filtrace, spojitost filtrací . . . . .	44
2.7 Wienerův a Poissonův proces . . . . .	45
2.8 Kompenzátoře . . . . .	52
2.9 Submartingaly a supermartingaly . . . . .	55
<b>3 Martingalové míry a reprezentační vlastnost</b>	<b>61</b>
3.1 Martingalové míry . . . . .	61
3.2 Reprezentační vlastnost . . . . .	63
3.3 Finanční interpretace . . . . .	73
3.3.1 Markovské procesy . . . . .	74
3.3.2 Lineární řízení Markovových řetězců . . . . .	75
3.3.3 Homogenní Markovovy řetězce s oceněním přechodu . . . . .	76
3.3.4 Optimální řízení v Markovových řetězcích . . . . .	79
<b>Literatura</b>	<b>81</b>

Název práce: Martingaly

Autor: Martina Kalužíková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.

e-mail vedoucího: dostal@karlin.mff.cuni.cz

**Abstrakt:** V předložené práci se zabýváme martingaly a tématy, které se této problematiky úzce dotýkají. Snažíme se shrnout teorii související s markovskými časy, kompenzátoři, samotnými martingaly a věci odvozenými, jako jsou např. martingalové míry a prediktabilní reprezentační vlastnost. V této práci jsou uvedeny také příklady pro dokreslení představy a lepší pochopení problematiky martingalů. Poslední kapitola je věnována zmíněným martingalovým mísám a prediktabilní reprezentační vlastnosti a je zde také uvedena finanční interpretace, která popisuje, jak lze chápat a užít martingaly a martingalové míry ve financích a v řízení, či při určování obchodní strategie.

**Klíčová slova:** Markovský čas, martingal, filtrace, kompenzátor, martingalové míry, prediktabilní reprezentační vlastnost.

Title: Martingales

Author: Martina Kalužíková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.

Supervisor's e-mail address: dostal@karlin.mff.cuni.cz

**Abstract:** This thesis deals with martingales and other subjects that are closely connected with this area. It provides an overview of the theory regarding Markov times, compensators, martingales themselves and other related topics, for instance martingale measures and predictable representation property. The thesis also contains many examples in order to illustrate and provide a clearer explanation of the subject of martingales. The last chapter of this thesis focuses on the above-mentioned martingale measures and predictable representation property. Furthermore, it includes a financial interpretation describing how martingales and martingale measures can be understood and used in finances and conducting as well as in determining the business strategy.

**Keywords:** Markov time, martingale, filtration, compensator, martingale measures, predictable representation property

# Úvod

## Interpretace základních pojmu v pravděpodobnosti

Máme pokus, jehož výsledek není předem daný.

Dejme tomu, že si dokážeme představit, že výsledek pokusu může být jakýkoli prvek  $\omega \in \Omega$ . Po provedení pokusu však dojde ke změně naší představy. Ne všechny  $\omega \in \Omega$  nyní považujeme za možné ale pouze některé  $\omega \in \tilde{\Omega} \subseteq \Omega$ . Potud tedy žádnou pravděpodobnost nepotřebujeme, nepotřebujeme tedy vůbec nic, jsme čistě jen pozorovateli a vnímáme, co možné se děje a představujeme si, co možné je a co nikoli.

Pokud  $\Omega$  je jednoprvková množina, opět žádnou teorii nepotřebujeme. Uvažujme tedy případ, kdy  $\Omega$  obsahuje právě dva prvky tj.  $\Omega = \{0, 1\}$ . V praktickém životě jde například o narození chlapce 1, či dívky 0. V modelovém případě půjde o hod mincí s výsledky orel 1 a pana 0. Aby mělo smysl se zajímat o míru očekávání jednotlivých výsledků, je třeba, aby výsledek pokusu měl zásadní vliv na náš budoucí život, což v případě narození dítěte mít vliv může a v případě hodu mincí pouze v případě, že jde o los, na jehož základě bude učiněno rozhodnutí s pro nás závažnými důsledky. Závažnost důsledků nás nutí k preventivním opatřením, které mají formu **pojištění** se proti nepříznivému výsledku. V tuto chvíli se objevuje otázka míry opatření související s mírou obav, čímž se objevuje potřeba poznání - ve formě představy o míře očekávání budoucího vývoje. Protože si každý člověk o budoucím vývoji vytváří svou vlastní představu o míře toho, co je možné očekávat, tyto představy o míře očekávání se různí a různí se tedy i představy o přiměřených opatřeních. Různost těchto představ vede v případě veřejného zájmu k potřebě tyto představy sjednotit do jediné, která uspěje v konkurenci všech ostatních. V případě dvou nesmiřitelných představ o míře očekávání budoucího

vývoje se spor od dob starověkého Řecka řeší **sázkou**. K množině výsledků nějakého pokusu  $\Omega$  tedy potřebujeme systém jevů, o kterých bude možné po skončení pokusu jednoznačně rozhodnout, zda nastaly, či nikoli a na které bude možné si vsadit (tj. že se najde protistrana, nebo se najde sázkař, který je ochoten na tuto událost vypsat kurz). Tuto množinu jevů budeme značit  $\mathcal{A}$  a budeme předpokládat uzavřenosť na průniky, rozdíly, atd. a v rámci možnosti provádět také limitní přechody i uzavřenosť na spočetné sjednocení tj.  $\mathcal{A}$  je  **$\sigma$ -algebra**, těmto množinám je sázkař ochotný přiřadit kurz, který se odvíjí od jeho míry očekávání, že nastane jev  $A \in \mathcal{A}$ , který budeme značit  $P(A)$ , přičemž  $P(A) = 0$  znamená, že sázkař plně spoléhá na to, že jev  $A$  nenastane a naopak pokud  $P(A) = 1$  sázkař plně spoléhá, že jev  $A$  nastane.

Pokud  $P(A) \in (0, 1)$ , sázkař zvažuje obě možnosti, přičemž v případě, že  $P(A)$  je racionální číslo  $p/q$ , pak šance k uskutečnění jevu  $A$  dává sázkař v poměru  $p : q$ . Tedy pokud  $P(A) = \frac{1}{2}$ , šance jsou vyrovnané tj.  $1 : 1$  (hod symetrickou mincí) a pokud je  $P(A) = \frac{2}{3}$ , pak sázkař jevu  $A$  dává 2-krát větší šance, že nastane, než jevu  $\Omega \setminus A$ . Takové trojici  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  budeme říkat **pravděpodobnostní prostor**, pokud ovšem míra  $P$  splňuje axiomy pravděpodobnosti.

Je-li  $X : \Omega \rightarrow E$  zobrazení, pak jevům  $B \in \mathcal{B}$  dokážeme přiřadit pravděpodobnost  $P$ , pokud  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}B \in \mathcal{A}$ . Pokud  $\mathcal{E}$  je  $\sigma$ -algebra na  $E$  a je předchozí podmínka splněna pro každé  $B \in \mathcal{E}$ , říkáme, že  $X$  je **náhodná veličina** definovaná na  $(\Omega, \mathcal{A})$  (či  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ) s hodnotami v  $(E, \mathcal{E})$ . Značíme ji  $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ .

Pokud se tedy sázky týkají pouze jevů  $[X \in B], B \in \mathcal{E}$ , pak sázkař vystačí s mírou očekávání  $P_X(B) = P(X \in B)$  a my se se svou pozorností můžeme přesunout na jiný pravděpodobnostní prostor  $(E, \mathcal{E}, P_X)$ . Míru  $P_X$  nazveme **rozdělením** náhodné veličiny  $X$ . Abychom byli schopni vytvořit pravděpodobnostní prostor  $(E, \mathcal{E}, P_X)$  potřebujeme znát míru  $P$  minimálně na  $\sigma$ -algebře  $\sigma(X) = \{[X \in B] ; B \in \mathcal{E}\}$ , kterou budeme nazývat  $\sigma$ -algebrou generovanou náhodnou veličinou  $X$ .

Nyní ukážeme, že v podstatě každá  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$  je generovaná

nějakou náhodnou veličinou, například veličinou  $\mathbf{1}_{\mathcal{F}}$ , kde

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{\mathcal{F}} : (\Omega, \mathcal{A}) &\rightarrow \otimes_{F \in \mathcal{F}} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ \omega \in \Omega &\mapsto (1_F(\omega), F \in \mathcal{F}).\end{aligned}$$

Zde jsme použili speciální typ náhodné veličiny  $X = (X_t, t \in T)$ , která má hodnoty v součinovém měřitelném prostoru  $\otimes_{t \in T} (E_t, \mathcal{E}_t)$  a kterou budeme nazývat **náhodný proces indexovaný  $T$**  a také jsme použili tzv. indikátorovou funkci  $1_F$  množiny  $F$ , která se rovná jedné na množině  $F$  a je rovna nule na jejím doplňku. Pokud  $(E_t, \mathcal{E}_t) = (E, \mathcal{E})$  pro každé  $t \in T$ , budeme říkat, že  $X$  je **náhodný proces indexovaný  $T$  s hodnotami ve stavovém prostoru  $(E, \mathcal{E})$** . O veličině  $\mathbf{1}_{\mathcal{F}}$  tedy můžeme mluvit jako o náhodném procesu indexovaném  $\mathcal{F}$  s hodnotami v  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  či stále jako o reálném náhodném procesu.

Pokud  $\mathcal{F} = \sigma(X)$ , kde  $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$  je náhodná veličina, můžeme  $\sigma$ -algebru  $\mathcal{F}$  interpretovat jako informaci, kterou lze získat pozorováním náhodné veličiny  $X$  (ze zorného úhlu daného  $\sigma$ -algebrou  $\mathcal{E}$ ). Abychom podpořili tuto interpretaci, připomeneme lemma 7.18 z [5]: Nechť  $Y \in \mathbb{L}(\Omega, \sigma(X))$ , pak existuje  $h : (E, \mathcal{E}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  takové, že  $Y = h(X)$ . Veličinu  $Y$  můžeme získat z informace o veličině  $X$  pomocí měřitelné funkce  $h$ . Pokud tedy  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$  interpretujeme to tak, že informace obsažená v  $\sigma$ -algebře  $\mathcal{F}$  je také obsažena v  $\sigma$ -algebře  $\mathcal{A}$ .

V reálném světě se stane, že pozorujeme náhodný proces  $X = (X_t, t \in T)$  indexovaný  $T \subseteq \mathbb{R}$ , kde parametr  $t \in T$  interpretujeme jako časový okamžik. Schopnost uchovávat nashromážděné informace s rostoucím časem nás vede k tomu, že v čase  $t \in T$  jakoby pozorujeme veličiny  $(X_s, s \in T, s \leq t)$  a příslušnou informaci vyjádříme matematicky pomocí pojmu  $\sigma$ -algebry  $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \in T, s \leq t)$ .

V této souvislosti neklesající systém  $\sigma$ -algeber  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ , kde  $T \subseteq \mathbb{R}$  nazveme **filtrací** a v případě náhodného procesu  $(X_t, t \in T)$  budeme filtraci  $\mathcal{F}_t^X$  označovat jako **kanonickou** (přirozenou) filtraci procesu  $X$ .

Pokud dojde mimo jiné k nějakému dílčímu pokusu, jehož výsledkem bude informace, že nastal jev  $B$  (ne úplně neočekávaný tj.  $P(B) > 0$ ). Pak se změní míra očekávání sázkaře z  $P$  na míru  $P|_B$ , která jevu  $A \in \mathcal{A}$  přiřadí hodnotu

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Speciálně tedy se nezmění množina všech jevů, na které je možno sázet. Pouze se změní kurzy, které se nyní již odvíjejí od jiné míry očekávání sázkaře  $P|_B$ . (Předpokládáme, že je možné sázet i na jevy s nulovou pravděpodobností i na ty s jednotkovou pravděpodobností, ovšem bez reálné možnosti na nějaký zisk).

Pro některé systémy jevů se však míra očekávání nezmění. Takové jevy  $A \in \mathcal{A}$  budeme považovat za stochasticky nezávislé na události  $B \in \mathcal{A}$  s  $P(B) > 0$ . Formálně tuto podmínku můžeme zapsat ve tvaru  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$  a zobecnit ji i na jevy  $B$  s  $P(B) = 0$ , které považujeme za automaticky stochasticky nezávislé s jakýmkoli jinými jevy, neboť jejich očekávaní se nemůže změnit příchodem neúplně neočekávané události. Nyní jsme už plynule přešli od nezávislosti jednoho jevu na druhém k symetrické formuli a to, že jevy  $A, B$  jsou nezávislé.

Nyní se zaměříme na situaci, že sázíme na události, které se odvíjí od náhodné veličiny  $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (E, \mathcal{E}, P_X)$  a mimořadně sázkař zpozoruje jev  $[Y \in B]$ , kde  $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (H, \mathcal{H})$ . Pokud jev  $[X \in B]$  je nezávislý s jevy  $[X \in C]$  pro  $C \in \mathcal{E}$ , pak zpozorování jevu  $[Y \in B]$  kurzovní lístek sázkaře neovlivní. Pokud sázkařovo očekávání týkající se jevů  $\sigma(X) = \{[X \in C], C \in \mathcal{E}\}$  neovlivní ne úplně neočekávaný jev z  $\sigma(Y) = \{[Y \in B], B \in \mathcal{H}\}$ , říkáme, že veličiny  $X, Y$  jsou nezávislé, formálně

$$\forall B \in \mathcal{H}, C \in \mathcal{E} : P(X \in C, Y \in B) = P(X \in C)P(Y \in B)$$

tj. jevy  $[X \in C], [Y \in B]$  jsou nezávislé, kdykoli  $C \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{H}$ . V této souvislosti také říkáme, že  $\sigma$ -algebry  $\sigma(X), \sigma(Y)$  jsou nezávislé. Tento pojem nezávislosti veličin se dá rozšířit na systém veličin  $(X_t, t \in T)$  požadavkem, že pro každou konečnou podmnožinu  $T_0 \subseteq T$  platí

$$P\left(\prod_{t \in T_0} [X_t \in B_t]\right) = \prod_{t \in T_0} P(X_t \in B_t)$$

kdykoli  $B_t \in \mathcal{E}_t$ , kde  $X_t : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (E_t, \mathcal{E}_t)$ .

Zásadní výhodou hodu mincí oproti porození dítěte je možnost pokus nezávisle se stejným očekáváním opakovat a to teoreticky až do nekonečna. V takovém případě se můžeme zajímat (díky  $\sigma$ -uzavřenosti na sjednocení

$\sigma$ -algebry) i o očekávání jevů týkající se celé nekonečné posloupnosti. To dává novou interpretaci (či roli) míře  $p = P(A)$  a zpětnou vazbu. Podle silného zákona velkých čísel (SZVČ) pro Bernoulliho posloupnost nezávisle se opakujících alternativních pokusů  $1_{A_n}$  se stejnou pravděpodobností zdaru  $p = P(A_n) \in [0, 1]$  platí

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{A_k} \rightarrow p\right) = 1.$$

Podobně, je-li výsledkem neustále se opakujícího nezávislého pokusu reálná náhodná veličina  $X_n$  vždy se stejným rozdělením  $P_{X_n} = \mu$  s konečnou střední hodnotou  $\mathbb{E} = \int x\mu(dx) \in \mathbb{R}$ , pak podle SZVČ platí

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \rightarrow \mathbb{E}\right) = 1.$$

Tento zákon nás motivuje pracovat se střední hodnotou reálné náhodné veličiny s tím, že pro veličinu  $X$  nabývají pouze hodnoty  $\{0, 1\}$  je  $\mathbb{E}X = P(X = 1)$ . Tuto hodnotu interpretujeme jako očekávanou (či průměrně očekávanou, či průměrnou) hodnotu veličiny  $X$  ve smyslu SZVČ a ve skutečnosti jde o těžiště míry  $P_X$ , nemajícího příliš souvislosti s očekáváním jevu  $[X = \mathbb{E}X]$ .

Pokud sázkař obdrží informaci, že nastal jev  $B \in \mathcal{A}$  s  $P(B) > 0$  přepočítá své očekávání a také průměrně očekávanou hodnotu veličiny  $X$  z  $\mathbb{E}X$  na

$$\mathbb{E}[X|B] = \int X dP_B = \frac{1}{P(B)} \mathbb{E}[X 1_B] = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP.$$

Nyní se budeme zajímat o situaci, kdy sázkař nepozoruje pouze jev  $B \in \mathcal{A}$ , ale celý systém jevů  $\sigma(Y) = \{[Y \in C], C \in \mathcal{H}\}$ , kde  $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (H, \mathcal{H})$  je náhodná veličina. Pak se změní jeho očekávání i průměrně očekávaná hodnota veličiny  $X$  náhodným způsobem v závislosti na informaci o hodnotě veličiny  $Y$  a to takovým, že

$P(A|B) = \mathbb{E}[P(A|Y)|B]$ , kdykoli  $B \in \sigma(Y)$  a  $P(B) > 0$ . Abychom si tuto podmínu více přiblížili, představme si na chvíli, že  $B$  je tvaru  $B = [Y \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)]$ . Pak výše uvedená podmínka je tvaru

$$P(A| |Y - y| < \varepsilon) = \mathbb{E}[P(A|Y) | |Y - y| < \varepsilon],$$

což je v průměru očekávaná pravděpodobnost jevu  $A$  za podmínky, že nastane jev  $|Y - y| < \varepsilon$ . My chceme, aby tato průměrně očekávaná hodnota (na pravé straně) byla rovna mře očekávaní při informaci, že nastal jev  $|Y - y| < \varepsilon$ . Existenci a jednoznačnost skoro jistě dostaneme z Radon-Nikodymovy věty a podobně dostaneme existenci a jednoznačnost skoro jistě veličiny  $Z = \mathbb{E}[X|Y] \in \mathbb{L}_1(\Omega, \sigma(Y), P)$  takové, že (pro  $X \in \mathbb{L}_1(P)$ )

$$\mathbb{E}[X|Y \in C] = \mathbb{E}[Z|Y \in C],$$

kdykoli  $C \in \mathcal{H}$  s  $P(Y \in C) > 0$ . Podobně jako u nezávislosti jevů uvedeme definici, která připouští možnost  $P(Y \in C) = 0$ . Veličinu  $Z = \mathbb{E}[X|Y] \in \mathbb{L}_1(\Omega, \sigma(Y), P)$  nazveme **podmíněnou střední hodnotou** reálné náhodné veličiny  $X \in \mathbb{L}_1(P)$  za podmínky  $Y$  (či  $\sigma(Y)$ ), pokud

$$\forall C \in \mathcal{H} \quad \int_{[Y \in C]} X dP = \int_{[Y \in C]} Z dP.$$

Poznamenejme, že náhodná veličina  $Z$  je určená s.j. jednoznačně a na  $Y$  závisí pouze prostřednictvím  $\sigma(Y) = \{[Y \in C], C \in \mathcal{H}\}$  a že připouštíme i možnost, že  $Y$  je identické zobrazení na  $\Omega$  (tj.  $Y$  může být kanonickou náhodnou veličinou). Podobně jako máme pro míru  $P(A)$  očekávání sázkaře, že nastane jev  $A \in \mathcal{A}$ , interpretaci v podobě Silného zákona velkých čísel máme i pro podmíněnou střední hodnotu náhodné veličiny  $X \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ , kde  $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_n)$  je limitní  $\sigma$ -algebra filtrace  $\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}$ , interpretaci v podobě limitní věty

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] \rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty] = X \text{ s.j.}$$

Abychom tuto limitní větu byli schopni uvažovat jako interpretaci, je třeba, abychom byli schopni interpretovat  $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$ . K tomu nám poslouží věta 7.9 z [5]. Pokud  $\sigma(Y)$  je generovaná atomy s kladnou pravděpodobností  $B_n, n \in N \subseteq \mathbb{N}$ , pak

$$\mathbb{E}[X|Y](\omega) = \mathbb{E}[X|B_n]$$

pro  $\omega \in B_n$ . Tedy  $\mathbb{E}[X|Y]$  se shoduje s průměrně očekávanou hodnotou  $\mathbb{E}[X|B_n]$ , že nastal atomární jev  $B_n$  v případě, že nastal jev  $B_n =$

$[Y = b_n]$ . Tato situace nastává například pokud veličina  $Y$  je diskrétní. Výše uvedená věta nám tak dává interpretaci podmíněné střední hodnoty

$$\mathsf{E}[X|Y] \stackrel{\text{s.j.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathsf{E}[X|Y_n],$$

kde např.  $Y_n = \lfloor X \cdot 2^n \rfloor \cdot 2^{-n}$  je zaokrouhlení náhodné veličiny  $Y$  dolů vzhledem k dyadickému ekvidistantnímu dělení s krokem  $2^{-n}$ .

# Kapitola 1

## Markovské časy

### 1.1 Markovský čas

V této části budeme vždy předpokládat, že  $T \subseteq \mathbb{R}$  je množina přípustných časových okamžiků. Připomeňme, že filtrací  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ , rozumíme neklesající posloupnost  $\sigma$ -algeber na měřitelném prostoru  $(\Omega, \mathcal{A})$ , přičemž  $\sigma$ -algebru  $\mathcal{F}_t$  interpretujeme jako informaci dostupnou v čase  $t \in T$ . Předpoklad, že systém  $\sigma$ -algeber  $(\mathcal{F}_t, t \in T)$  je neklesající znamená, že v průběhu času  $t \in T$  nedochází ke ztrátě informace. Dále připomeňme, že systém měřitelných veličin  $(X_t, t \in T)$  na daném pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  označujeme jako **náhodný proces** a informaci

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \in T, s \leq t)$$

založenou na jeho pozorování jako **kanonickou (přirozenou) filtraci** tohoto procesu (filtrace generovaná procesem  $X$ ). Symbolem

$$\mathbb{L}(\Omega, \mathcal{A}) = \mathbb{L}(\mathcal{A}) = \{X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))\}$$

rozumíme systém všech reálných náhodných veličin na měřitelném prostoru  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Je-li  $Y_t \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_t)$ ,  $t \in T$  a  $(\mathcal{F}_t, t \in T)$  filtrace, pak říkáme, že proces  $(Y_t, t \in T)$  je  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ -**adaptovaný**, zkáceně píšeme  $(Y_t, t \in T) \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$ . Představujeme si, že proces  $Y_t$  v čase  $t$  je zkonstruován na základě informace  $\mathcal{F}_t$ .

Abychom si tuto situaci lépe představili, budeme předpokládat, že filtrace  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  je generovaná procesem  $(X_t, t \in T)$ , kde  $X_t : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (E_t, \mathcal{E}_t)$ . Pak podle věty 2.1 z [5] existuje systém měřitelných funkcí

$$h_t : \bigotimes_{T \ni s \leq t} (E_s, \mathcal{E}_s) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

takový, že

$$Y_t = h(X_s, s \leq t, s \in T), \quad t \in T.$$

Připomeňme, že každá  $\sigma$ -algebra je generovaná nějakou náhodnou veličinou, a tedy každá filtrace je generovaná nějakým náhodným procesem.

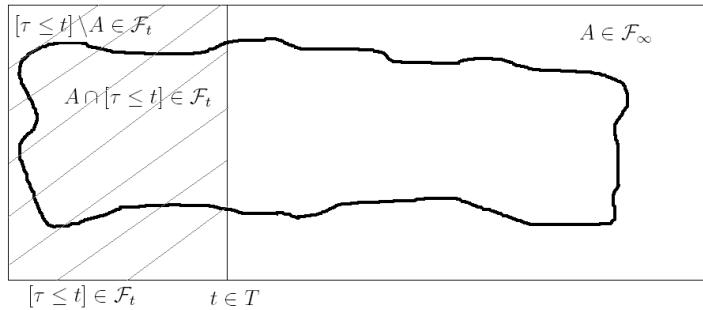
O náhodném čase  $\tau : \Omega \rightarrow T \cup \{\infty\}$  řekneme, že je markovský, pokud  $[\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t$  platí pro každý čas  $t \in T$ , tj. informace o tom zda v čase  $t \in T$  nastal jev  $[\tau \leq t]$  či ne, je obsažena v informaci  $\mathcal{F}_t$ .

Analogicky můžeme říci, že čas  $\tau$  je markovský, pokud příslušný čítací proces  $1_{[\tau \leq t]}$  je  $\mathcal{F}_t$ -adaptovaný. Podobně jako máme  $\sigma$ -algebru  $\sigma(\mathcal{F}_t)$  vyjadřující informaci dostupnou v čase  $t$  tak i pro markovský čas můžeme vytvořit podobně  $\mathcal{F}_\tau$ ,  **$\sigma$ -algebru událostí do času  $\tau$** , kterou definujeme předpisem

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \in T, A \cap [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t\}, \quad \text{kde } \mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t \in T} \mathcal{F}_t)$$

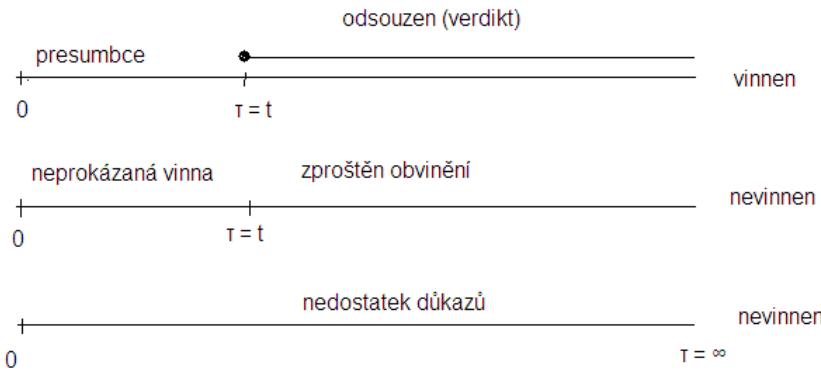
tj. jev  $A \in \mathcal{F}_\infty$ , o kterém v nekonečném čase dokážeme rozhodnout zda nastal či nikoli, je prvkem  $\mathcal{F}_\tau$  tehdy, když

$$1_{A \cap [\tau \leq t]} = 1_{[\tau \leq t]} \cdot 1_A \text{ je } \mathcal{F}_t\text{-adaptovaný.} \quad (1.1)$$



Obrázek 1.1: Možnosti rozhodnutí.

Pro objasnění podmínky (1.1) uvedeme příklad ze soudního prostředí. Okamžik  $\tau$  bude okamžik vnesení rozsudku o vině či nevině a jev  $A$  bude značit vinu. Pokud je obžalovaný nevinen  $[\omega \in \Omega \setminus A]$  nebo je-li propuštěn pro nedostatek důkazů  $[\tau(\omega) = \infty]$ , pak proces (1.1) je identická nula. V opačném případě proces (1.1) skočí z hodnoty nula na hodnotu 1 právě v okamžiku vnesení verdiktu o vině. Do té doby je podle práva považován za nevinného.



Obrázek 1.2: Možnosti rozhodnutí o vině.

Podobně při testování hypotéz, dokud neprokážeme platnost alternativní hypotézy oproti nulové, setrváváme v představě, že nulová hypotéza platí. Okamžik rozhodnutí o platnosti alternativní hypotézy pak bude markovským časem.

**Lemma 1.1.1** *Bud'  $(\mathcal{F}_t, t \in T)$  filtrace na pravděpodobnostní prostor  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Nechť  $\tau$  a  $\nu$  jsou  $\mathcal{F}_t$ -markovské časy. Potom*

1.  $\tau$  je  $\mathcal{F}_\tau$ -měřitelná náhodná veličina
2.  $\nu \wedge \tau, \nu \vee \tau$  a  $\nu + \tau$  je  $\mathcal{F}_t$ -markovský čas
3.  $\tau \wedge t$  je  $\mathcal{F}_t$ -měřitelná náhodná veličina pro nějaké  $t \in \mathbb{R}^+$
4.  $F \in \mathcal{F}_\nu \Rightarrow F \cap [\nu \leq \tau] \in \mathcal{F}_\tau$
5.  $\nu \leq \tau \Rightarrow \mathcal{F}_\nu \subseteq \mathcal{F}_\tau$
6.  $[\nu < \tau], [\nu \leq \tau], [\nu = \tau] \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\nu$
7.  $\mathcal{F}_\nu \cap \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\nu \wedge \tau}$ .

**Důkaz:** Důkaz je uveden v lemmatu 1.3.1 [2]. Poznamenejme jen, že důkaz (1),(2),(3) se provádí přímo a dále se v [2] ukazuje, že (3) $\Rightarrow$ (4), což přímo dává (5).

**Příklad 1.1.1** *Nechť  $(S_n, n \in \mathbb{N})$  je  $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ -adaptovaný proces a  $B$  je borelovská podmnožina  $\mathbb{R}$ . Pak čas prvního výstupu  $S_n$  z množiny  $B$ ,*

tj.  $\tau = \min\{n \in \mathbb{N} : S_n \notin B\}$ , je markovský čas vzhledem k filtraci  $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ . Používáme úmluvu, že  $\min\{\emptyset\} = \infty$ .

Zřejmě

$$[\tau = n] = [S_1 \in B] \cap [S_2 \in B] \cap \dots \cap [S_{n-1} \in B] \cap [S_n \notin B] \in \mathcal{F}_n,$$

$$\text{a tedy } [\tau \leq n] = \bigcup_{j \geq n} [\tau = j] \in \mathcal{F}_n.$$

**Příklad 1.1.2** Nechť  $T = \Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A} = \mathbb{B}([0, 1])$  a  $P = \lambda|_{[0,1]}$ , kde  $\lambda$  je Lebesgueova míra. Nechť dále  $A \subseteq [0, 1]$  není borelovská množina. Definujme tedy

$$\begin{aligned} X_t(\omega) &= 1 \quad \text{pokud } t = \omega \in A \\ &= 0 \quad \text{jinak.} \end{aligned}$$

Uvažujme  $\tau$  čas prvního výstupu procesu  $X$  z jednobodové množiny  $\{0\}$ . Pak

$$\begin{aligned} \tau(\omega) &= \min\{t \in [0, 1] : X_t \neq 0\} = \omega \quad \text{pokud } \omega \in A \\ &= \infty \quad \text{jinak.} \end{aligned}$$

$[\tau \leq 1] = A$  není borelovská množina, a proto čas  $\tau$  není  $\mathcal{A}$  měřitelné zobrazení vzhledem k jakékoli filtraci na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Potom tedy není náhodnou veličinou a ani markovským časem.

**Příklad 1.1.3** Máme množinu  $T = [0, 1]$  a proces  $X_t(\omega) = 1_{[t=\omega]}$ . Dále  $\sigma(X_t) = \{0, \{t\}, \Omega \setminus \{t\}, \Omega\}$ . Potom  $\mathcal{F}_t^X = \{N, \Omega \setminus N : N \subseteq [0, t]$  spočetná} a  $\tau(\omega) = \omega$  není  $(\mathcal{F}_t^X)$ -markovský čas.

**Tvrzení 1.1.1** Nechť  $\tau : \Omega \rightarrow T \cup \{\infty\}$  je markovský čas vzhledem k filtraci  $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ . Pak  $\mathcal{F}_\tau$  je  $\sigma$ -algebra a  $\tau$  je  $\mathcal{F}_\tau$ -měřitelná náhodná veličina.

**Důkaz:** tvrzení 1.22 viz [4]

**Poznámka 1.1.1** Dále je-li  $\rho \geq \tau$   $\mathcal{F}_\tau$ -měřitelná veličina s hodnotami v  $T \cup \{\infty\}$ , pak je  $\rho$   $\mathcal{F}_t$ -markovský čas, neboť  $[\rho \leq t] = [\rho \leq t] \cap [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t$  dle definice, protože  $[\rho \leq t] \in \mathcal{F}_\tau$ . Intuitivně si  $\rho$  můžeme představit

jako událost jejíž datum je stanoven nejpozději v čase události  $\tau$ . Protože  $\tau$  je bezprostředně pozorovatelná událost na základě dostupného toku informací  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  (formálně  $\tau$  je  $\mathcal{F}_t$ -markovský čas), můžeme totéž říci i o času  $\rho$ .

Často potřebujeme approximovat markovský čas, který nabývá hodnot v nespočetné množině pomocí markovského času, který nabývá pouze spočetně hodnot. Vezmeme-li si příklad Poissonova procesu, pak nemáme šanci nalézt spočetně hodnotové markovské časy, které approximují tyto časy zespodu. Následující lemma z [4] nám však ukazuje, že lze zamýšlenou approximaci vždy provést shora.

**Lemma 1.1.2** 1. Nechť  $T \subseteq \mathbb{R}$  a  $\varepsilon > 0$ . Pak existuje lokálně konečná podmnožina  $S \subseteq T$  taková, že  $S \cap [t, t + \varepsilon) \neq \emptyset$  platí pro každé  $t \in T$ . V tomto případě zavádíme následující označení

$$\lceil t \rceil_S = \inf\{s \in S; s \geq t\},$$

pak pro každé  $t \in T \cup \{\infty\}$  platí  $t \leq \lceil t \rceil_S \leq t + \varepsilon$ . Tuto hodnotu  $\lceil t \rceil_S$  nazveme zaokrouhlení  $t \in T \cup \{\infty\}$  nahoru vzhledem k (lokálně konečnému) dělení  $S$  množiny  $T$ .

2. Je-li  $T \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$  a  $S$  jako v 1. a je-li  $\tau : \Omega \rightarrow T \cup \{\infty\}$   $\mathcal{F}_t$ -markovský čas, pak  $\lceil \tau \rceil_S : \Omega \rightarrow S \cup \{\infty\}$  je také  $\mathcal{F}_t$ -markovský čas nabývající hodnot ve spočetné množině  $S \cup \{\infty\}$  takový, že  $\tau \leq \lceil \tau \rceil_S \leq \tau + \varepsilon$ .

**Důkaz:** Lemma 1.30 o approximaci shora (pro (1.)) a tvrzení 1.24 (pro (2.)) viz [4].

## 1.2 Progresivní (postupná) měřitelnost

V dalším textu budeme dost často potřebovat, abychom mohli do nějakého procesu dosazovat konečný markovský čas, popř. nějaký proces zkonzervovat v okamžiku, kdy nastane nějaká událost (myšleno: markovský čas). Rádi bychom, aby takovýto proces byl opět adaptovaný na původní filtraci a aby zastavení procesu byla náhodná veličina, která je měřitelná vzhledem k  $\sigma$ -algebře událostí do tohoto markovského času tak, jak to platí pro deterministické markovské časy u adaptovaného procesu.

Pro  $T \subseteq \mathbb{R}$  řekneme, že proces  $X = (X(t), t \in T)$  definovaný na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je  **$\mathcal{F}$ -měřitelný**, kde  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$  je  $\sigma$ -algebra, pokud  $X : (T \times \Omega, \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  je měřitelná veličina. V této souvislosti budeme používat následující značení

$$[X \in B] := X^{-1}B = \{(t, \omega) \in T \times \Omega, X(t, \omega) \in B\} \text{ pro } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

a podobně

$$[X < c] := X^{-1}(-\infty, c) \text{ pro } c \in \mathbb{R}.$$

Proces  $X = (X(t), t \in T)$  je tedy  $\mathcal{F}$ -měřitelný právě tehdy, když pro každé  $c \in \mathbb{R}$  platí  $[X < c] \in \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}$ .

**Poznámka 1.2.1** Je-li proces  $X = (X(t), t \in T)$   $\mathcal{F}$ -měřitelný, pak je veličina  $Y(t, \omega) = (X(t, \omega), \omega)$  měřitelná v následujícím smyslu:

$$Y : (T \times \Omega, \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R} \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}).$$

**Důkaz:** Protože součinová  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}$  je generována systémem  $\{(-\infty, c) \times F; c \in \mathbb{R}, F \in \mathcal{F}\}$  stačí si uvědomit, že

$$\{(t, \omega) \in T \times \Omega, Y(t, \omega) \in (-\infty, c) \times F\} = [X < c] \cap (T \times F) \in \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F},$$

neboť proces  $X$  je podle předpokladu  $\mathcal{F}$ -měřitelný.  $\square$

Dále budeme předpokládat, že  $(\mathcal{F}_t, t \in T)$  je filtrace na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Připomeneme si, že proces  $Y = (Y_t, t \in T)$  na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je  $\mathcal{F}$ -měřitelný právě tehdy, když  $[X < c] \in \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}$ . Řekneme, že proces  $X = (X(t), t \in T)$

je **postupně (či progresivně)  $\mathcal{F}_t$ -měřitelný**, pokud postupně pro každé  $t \in T$  je restringovaný proces  $X|_t = (X(s), s \in T_t)$   $\mathcal{F}_t$ -měřitelný, kde  $T_t = \{s \in T, s \leq t\}$ . Ekvivalentní podmínka odpovídá následujícímu tvaru  $\llbracket X|_t < c \rrbracket \in \mathcal{B}(T_t) \otimes \mathcal{F}_t$ , kdykoli  $t \in T, c \in \mathbb{R}$ .

Mohli bychom také říkat, že proces  $X$  je **postupně měřitelný** vzhledem k filtraci  $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ , což vyjadřuje myšlenku, že **postupně** každá restrikce tohoto procesu je **měřitelná**.

Pro ilustraci si můžeme představovat, že filtrace  $\mathcal{F}_t$  je generována nějakým procesem, řekněme  $(Y_t, t \in T)$ . Pak proces  $(X_t, t \in T)$  je progresivně (postupně)  $\mathcal{F}_t$ -měřitelný právě, když pro každé  $t \in T$  existuje  $B(T_t) \otimes \mathcal{E}|_t$ -měřitelná funkce  $h_t$  taková, že

$$X_t = h_t(t, Y|_t) = h(t, (Y_s)_{s \leq t}),$$

kde

$$\mathcal{E}|_t = \bigotimes_{s \in T_t} \mathcal{E}_s \quad \text{a} \quad Y_t : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (E_t, \mathcal{E}_t).$$

Na začátku si uvedeme příklad procesu, který není progresivně (postupně) měřitelný vzhledem ke své kanonické filtraci, podíváme se jak vypadají markovské časy vzhledem k této filtraci a ukážeme si, že i v tomto případě zastavený proces bude opět adaptovaný. To znamená, že požadavek progresivní měřitelnosti pro naše účely není nutný, ale je postačující, jak dále uvidíme a je také dostatečně obecný.

**Příklad 1.2.1** Bud'  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  pravděpodobnostní prostor, kde  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A} = B[0, 1]$  a  $P$  je Lebesgueova míra na  $[0, 1]$ . Pro  $t \in T = [0, 1]$  položíme  $X_t(\omega) = 1_{[t=\omega]}$ .

Pak  $\mathcal{F}_t^X = \sigma(\{s\}; s \leq t) = \mathcal{S}_t \cup \mathcal{N}_t$ , kde  $\mathcal{S}_t$  je systém všech spočetných podmnožin množiny  $[0, t]$  a  $\mathcal{N}_t$  je systém všech (nespočetných) doplňků množin ze systému  $\mathcal{S}_t$ , tj.  $\mathcal{N}_t = \{[0, 1] \setminus S, S \in \mathcal{S}_t\}$ .

Nyní ukážeme, že proces  $X = (X_t, t \in T)$  není  $\mathcal{F}_t^X$ -progresivně měřitelný. Stačí uvažovat libovolné  $t \in (0, 1)$ . Pak

$$\begin{aligned} \llbracket X|_t = 1 \rrbracket &= \{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega; X(s, \omega) = 1\} \\ &= \{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega; s = \omega\} \\ &= \{(s, s), s \in [0, t]\} = \text{diag}[0, t] \end{aligned}$$

je diagonála čtverce  $[0, t]^2$ , která není  $\mathcal{B}[0, t] \otimes \mathcal{F}_t^X$ -měřitelná. Pro názornost si ukážeme, jak taková součinová  $\sigma$ -algebra vypadá. Opět se skládá ze dvou částí.

$$\mathcal{B}[0, t] \otimes \mathcal{F}_t^X = B\mathcal{S}_t \cup B\mathcal{N}_t, \quad \text{kde} \quad B\mathcal{N}_t = \{[0, t] \times \Omega \setminus D, D \in B\mathcal{S}_t\}$$

je systém doplňků množin z  $B\mathcal{S}_t$ , kde

$$B\mathcal{S}_t = \{\bigcup_{s \in S} B_s \times \{s\}; B_s \in \mathcal{B}[0, t], s \in S, S \subseteq [0, t] \text{ je spočetná}\}.$$

Další otázkou, o kterou se zajímáme, je, jak vypadají markovské časy vzhledem k filtraci  $\mathcal{F}_t^X$ . Je-li  $\tau$   $\mathcal{F}_t^X$ -markovský čas, pak  $\{[\tau \leq t], t \in [0, 1]\}$  je neklesající zprava spojité systém množin, přičemž  $[\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t^X$ . Každá taková množina musí být buď spočetná, nebo její doplněk musí být spočetný. Existuje tedy  $t_0 \in [0, 1]$  takové, že pro  $t \in [0, t_0)$  je množina  $[\tau \leq t]$  spočetná a pro  $t \in (t_0, 1]$  je spočetná naopak množina  $[\tau > t]$ . Pak ovšem i  $[\tau > t_0]$  je spočetným sjednocením spočetných množin, a je tedy také spočetná. Je-li tedy  $t \in [0, t_0)$ , pak  $[\tau \leq t] \in \mathcal{S}_t$  a je-li  $t \in [t_0, 1]$ , pak  $[\tau > t] \in \mathcal{S}_t$ . Do času  $t_0$  ostře tedy  $\tau$  nabývá pouze spočetně hodnot či spíše existuje spočetná podmnožina  $S \subseteq [0, t_0)$  taková, že pouze pro  $\omega \in S$  může nastat  $\tau(\omega) \in [0, t_0)$  přičemž požadujeme, aby  $\tau(\omega) \geq \omega$ . V opačném případě  $\tau(\omega) < \omega$  bychom pro  $t \in [\tau(\omega), \omega)$  dostali spor s požadavkem  $[\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t$ . Je-li  $t = t_0$ , pak z dříve uvedených argumentů a závěrů plyne, že  $[\tau = t_0]$  je doplňkem spočetné množiny. Platí tedy, že  $[\tau > t_0] \in \mathcal{F}_{t_0}$  je spočetná množina  $S \subseteq [0, t_0]$ .

Shrneme-li naše poznatky, pak existuje spočetná podmnožina  $S \subseteq [0, t_0]$  taková, že pro každé  $\omega \in [0, 1] \setminus S$  platí  $\tau(\omega) = t_0$  a pro  $\omega \in S$  platí  $\tau(\omega) \geq \omega$ .

Speciálně tedy každý  $\mathcal{F}_t^X$ -markovský čas je spočetně hodnotový. Pak pro konečný  $\mathcal{F}_t^X$ -markovský čas  $\tau$  je vždy  $X(\tau)$  měřitelná náhodná veličina.

**Poznámka 1.2.2** Bud'  $T \subseteq \mathbb{R}$  a  $(\mathcal{F}_t, t \in T)$  filtrace na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Proces  $X = (X_t, t \in T)$  je  $\mathcal{F}_t$ -progresivně měřitelný právě tehdy, když tento proces je jako veličina  $\mathbb{PM}(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ -měřitelný, kde  $\mathbb{PM}(\mathcal{F}_t)_{t \in T} = \bigcap_{t \in T} \mathbb{PM}(\mathcal{F}_t)$  je  $\sigma$ -algebra, kterou budeme nazývat  **$\sigma$ -algebra všech  $\mathcal{F}_t$ -progresivních**

**množin**, kde

$$\mathbb{PM}(\mathcal{F}_t) = \{\mathbb{A} \in T \times \Omega; \mathbb{A} \cap \mathbb{T}_t \in B(T_t) \otimes \mathcal{F}_t\}, \text{ kde } \mathbb{T}_t = T_t \times \Omega.$$

Obecněji pro  $\tau : \Omega \rightarrow T \cup \{\infty\}$  budeme značit

$$\mathbb{T}_\tau = \{(t, \omega) \in T \times \Omega; t \leq \tau(\omega)\}.$$

**Důkaz:** Důkaz je okamžitým důsledkem následující rovnosti  $\llbracket X < c \rrbracket \cap \mathbb{T}_t = \llbracket X|_t < c \rrbracket$  pro  $t \in T, c \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Tvrzení 1.2.1** Bud'  $(\mathcal{F}_t, t \in T)$  filtrace na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , kde  $T \subseteq \mathbb{R}$ .

1. Je-li  $(X_t, t \in T)$   $\mathcal{F}_t$ -adaptovaný proces se zprava spojitymi trajektoriemi, pak je to  $\mathcal{F}_t$ -progresivní proces.
2. Nechť  $\tau : \Omega \rightarrow T \cup \{\infty\}$  je  $\mathcal{F}_t$ -markovský čas a nechť  $X = (X_t, t \in T)$  je  $\mathcal{F}_t$ -progresivní. Pak
  - (a)  $t \wedge \tau, X(t \wedge \tau)$  jsou  $\mathcal{F}_t$ -progresivní procesy.
  - (b)  $X_\tau 1_{[\tau < \infty]}$  je  $\mathcal{F}_\tau$ -měřitelná náhodná veličina.

**Důkaz:**

1. Bud'  $t \in T$  pevné a  $S_n \subseteq T$  bud' neklesající posloupnost lokálně konečných dělení obsahujících  $t$  takových, že  $S_n \cap [s, s + 2^{-n}) \neq \emptyset$  kdykoli  $s \in T$  a  $n \in \mathbb{N}$ . Pro  $n \in \mathbb{N}$  položme  $X_n(s) = X(\lceil s \rceil_{S_n})$ . Pak  $X|_t = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n|_t$  neboť  $X$  je zprava spojitý proces dle předpokladu. Zobrazení  $X_n|_t$  jsou  $\mathcal{B}(T_t) \otimes \mathcal{F}_t$ -měřitelná a měřitelné je tedy i limitní zobrazení  $X|_t$  vzhledem k  $\mathcal{B}(T_t) \otimes \mathcal{F}_t$ . Protože  $t \in T$  bylo libovolné, dostáváme, že proces  $X$  je  $\mathcal{F}_t$ -progresivní.
2. (a) Proces  $t \wedge \tau$  je zřejmě spojitý, a tedy i zprava spojitý. Ukážeme, že je  $\mathcal{F}_t$ -adaptovaný. Bud'  $c \in \mathbb{R}$ . Je-li  $c \geq t$ , pak  $[t \wedge \tau \leq c] = \Omega \in \mathcal{F}_t$ . Nechť nyní  $c < t$ . Bud'  $S \subseteq T_t \cap (c, \infty)$  spočetná hustá podmnožina taková, že  $\max S = t$ . Pak

$$[t \wedge \tau \leq c] = [\tau \leq c] = \bigcap_{s \in S} [\tau \leq s] \in \mathcal{F}_t.$$

Podle bodu 1. tak dostáváme, že  $Z_t = t \wedge \tau$  je  $\mathcal{F}_t$ -progresivní proces. Podle poznámky 1.2.1 je veličina  $Y_t(s, \omega) = (Z|_t(s, \omega), \omega)$  měřitelná v následujícím smyslu

$$Y_t : (T_t \times \Omega, \mathcal{B}(T_t) \otimes \mathcal{F}_t) \rightarrow (\mathbb{R} \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}_t)$$

Pak  $V(t, \omega) = X(t \wedge \tau(\omega), \omega) = X|_t \circ Y_t$  je  $\mathcal{B}(T_t) \otimes \mathcal{F}_t$ -měřitelná funkce, neboť  $X|_t : (T_t \times \Omega, \mathcal{B}(T_t) \otimes \mathcal{F}_t) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Pro ilustraci toto složení měřitelných zobrazení znázorníme graficky

$$(T_t \times \Omega, \mathcal{B}(T_t) \otimes \mathcal{F}_t) \xrightarrow{Y_t} (T_t \times \Omega, \mathcal{B}(T_t) \otimes \mathcal{F}_t) \xrightarrow{X|_t} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

Tedy postupně pro všechna  $t \in T$  je  $Z|_t$   $\mathcal{F}_t$ -měřitelný proces, a tedy  $Z$  je postupně  $\mathcal{F}_t$ -měřitelný proces.

- (b) Stačí ukázat, že pro každé  $c \in \mathbb{R}$  je  $[X(\tau) < c] \cap [\tau < \infty] \in \mathcal{F}_\tau$ . To však plyne z definice  $\sigma$ -algebry událostí do času  $\tau$ , neboť

$$[X(\tau) < c] \cap [\tau < \infty] \cap [\tau \leq t] = [X(t \wedge \tau) < c] \cap [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t$$

pro každé  $t \in T, c \in \mathbb{R}$ .  $\square$

### Poznámka 1.2.3

1. Je-li  $(X_t, t \in T)$  progresivně  $\mathcal{F}_t$ -měřitelný, pak je  $\mathcal{F}_t$ -adaptovaný.
2. Je-li  $(X_t, t \in T)$   $\mathcal{F}_t$ -adaptovaný proces a  $T \subseteq \mathbb{R}$  spočetná, pak  $X_t$  je  $\mathcal{F}_t$ -progresivní proces.

#### Důkaz:

1. Je-li  $c \in \mathbb{R}, t \in T$ , pak podle předpokladu  $\llbracket X|_t < c \rrbracket \in \mathcal{B}(T_t) \otimes \mathcal{F}_t$ . A tedy její řez  $[X_t < c]$  v bodě  $t$  je  $\mathcal{F}_t$ -měřitelný. Formálně, že jde o řez lze ověřit z rovnosti

$$\llbracket X|_t < c \rrbracket \cap (\{t\} \times \Omega) = \{t\} \times [X_t < c].$$

2. Bud'  $t \in T$  a  $c \in \mathbb{R}$ . Protože  $T$  je podle předpokladu spočetná množina, je spočetná i množina  $T_t$ . Pak

$$\llbracket X|_t < c \rrbracket = \bigcup_{s \in T_t} \{s\} \times [X_s < c] \in \mathcal{B}(T_t) \otimes \mathcal{F}_t.$$

**Lemma 1.2.1** *Předpokládejme, že  $Z \in \mathbb{L}_1$  a  $\tau, \nu$  jsou  $\mathcal{F}_t$ -markovské časy. Potom*

1.  $\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_\nu] 1_{[\nu \leq \tau]} \stackrel{s.j.}{=} \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_{\nu \wedge \tau}] 1_{[\nu \leq \tau]}$
2.  $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\nu} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau} Z = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{\nu \wedge \tau}} Z$  skoro jistě.

**Důkaz:** str. 246 lemma 1.3.5 viz [2]

Nyní uvedeme několik základních příkladů na markovské časy.

**Příklad 1.2.2** *Nechť  $X_1, \dots$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s alternativním rozdělením  $Alt(p)$ , označme*

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n), \quad T = \mathbb{N}_0.$$

1. Ukažte, že  $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}, S_n = 5\}$  je  $\mathcal{F}_n$ -markovský čas.

*Řešení:* Důkaz provedeme z definice markovského času nebo z věty o markovských časech. Tím ověříme, že se jedná o markovský čas.

Protože  $S_n$  je  $\mathcal{F}_t$ -adaptovaný proces dostaváme, že

$$[\tau \leq n] = \left[ \max_{k \leq n} S_k \geq 5 \right] \in \mathcal{F}_n.$$

2. Rozhodněte, zda  $\nu = \tau + 1$  je markovský čas.

*Řešení:*

(a)  $Z$  definice:

$$\begin{aligned} [\nu \leq n] &= [\tau + 1 \leq n] = [\tau \leq n - 1] \in \mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n && \text{pro } n \geq 1 \\ &\emptyset \in \mathcal{F}_n && \text{pro } n = 0 \end{aligned}$$

(b) Protože  $\nu \geq \tau, \sigma(\nu) \subseteq \sigma(\tau) \subseteq \mathcal{F}_\tau$ , z poznámky 1.1.1 plyne, že  $\nu$  je  $(\mathcal{F}_n)$ -markovský čas.

3. Rozhodněte, zda  $\rho = (\tau - 1)^+$  je markovský čas.

*Řešení:* Ukážeme, že  $\rho$  není markovský čas, tj. ukážeme, že  $n \in \mathbb{N}_0$  takové, že  $[\rho \leq n] = [\tau \leq n + 1] \notin \mathcal{F}_n$ . Pro  $n = 0, 1, 2, 3$  platí

$$[\tau \leq n + 1] = \emptyset \in \mathcal{F}_n.$$

Pro  $n = 5$  lze očekávat, že  $[\tau \leq 5] = [\tau = 5] \in \mathcal{F}_5 \setminus \mathcal{F}_4$ . Dále budeme sporem předpokládat, že  $[\tau \leq 5] \in \mathcal{F}_4$ . Pak

$$1_{[\tau=5]} \in \mathbb{L}(\sigma(X_1, \dots, X_5)) = \mathbb{L}(\mathcal{F}_5)$$

a podle věty 2.1 z [5] existuje měřitelná funkce taková, že

$$f(X_1, \dots, X_n) = 1_{[\tau=5]}.$$

Abychom ukázali spor  $1 = f(1, 1, 1, 1, 1) = f(1, 1, 1, 1, 0) = 0$ , ukážeme, že existují

$$\begin{aligned}\omega^1 &\in \Omega \text{ takové, že } (X_1, \dots, X_5)(\omega^1) = (1, \dots, 1, 1) \\ \omega^2 &\in \Omega \text{ takové, že } (X_1, \dots, X_5)(\omega^2) = (1, \dots, 1, 0).\end{aligned}$$

Tato dvě  $\omega$  existují, protože

$$\begin{aligned}P(X_1 = 1, \dots, X_4 = 1, X_5 = 1) &= 2^{-5} > 0, \\ P(X_1 = 1, \dots, X_4 = 1, X_5 = 0) &= 2^{-5} > 0.\end{aligned}$$

4. Rozhodněte, zda  $\kappa = 2\rho$  je  $\mathcal{F}_n$ -markovský čas.

**Řešení:** Podobně jako v bodě 2. platí  $\sigma(\kappa) \subseteq \sigma(\tau) \subseteq \mathcal{F}_\tau$ , a protože  $\tau \geq 2$ , platí

$$\kappa = 2\rho = 2(\tau - 1) = 2\tau - 2 \geq \tau$$

Podle poznámky 1.1.1 je  $\kappa$  markovský čas.

5. Rozhodněte, zda  $\lambda = \tau \wedge 10$  je  $\mathcal{F}_n$ -markovský čas.

**Řešení:** Protože minimum z markovských časů je opět markovský čas, je  $\lambda$  také  $\mathcal{F}_n$ -markovský čas.

6. Rozhodněte, jestli  $\mu = \tau \vee 20$  je markovský čas.

**Řešení:** Protože maximum z markovských časů je opět markovský čas, je  $\mu$  také  $\mathcal{F}_n$ -markovský čas. Podobně bychom jako v bodě 2. a 4. dostali stejný závěr i z poznámky 1.1.1, neboť  $\mu \geq \tau$  a  $\sigma(\mu) \subseteq \sigma(\tau) \subseteq \mathcal{F}_\tau$ .

7. Rozhodněte, zda  $\gamma = \lambda + \mu$  je markovský čas.

**Řešení:** Čas  $\gamma$  si můžeme rozepsat pomocí dvou markovských časů  $\lambda \wedge \mu$  a  $\lambda \vee \mu$ . Potom dostáváme, že

$$\gamma = \lambda \wedge \mu + \lambda \vee \mu \geq \lambda \vee \mu$$

přičemž  $\sigma(\gamma) = \sigma(\lambda + \mu) \subseteq \mathcal{F}_{\lambda \vee \mu}$ . podobně jako v bodech 2., 4. a 6. dostáváme, že  $\gamma$  je  $\mathcal{F}_n$ -markovský čas.

# Kapitola 2

## Martingaly

### 2.1 Základní definice a vlastnosti martingalů

Bud'  $T \subseteq \mathbb{R}$  a  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  filtrace na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Řekneme, že proces  $(X_t, t \in T)$  je  $\mathcal{F}_t$ -martingal, pokud pro každé  $s, t \in T, s \leq t$  platí  $X_t \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_t, P|\mathcal{F}_t)$  a

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \stackrel{\text{s.j.}}{=} X_s. \quad (2.1)$$

Velmi důležitý příklad martingalu je  $X_t = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t], t \in T$ , kde  $Y \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Snadno se ukáže, viz lemma 4.7 [4], že tento systém veličin je stejnoměrně integrovatelný. Je-li  $(X_t, t \in T)$  stejnoměrně integrovatelný systém náhodných veličin tvořící  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ -martingal, pak řekneme, že tento systém  $(X_t, t \in T)$  je **stejnoměrně integrovatelný**  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ -martingal.

Pro představu, uvedeme větu 4.8 z [4], která říká, že  $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$  adaptovaný proces  $S = (S_n, n \in \mathbb{N})$  je stejnoměrně integrovatelný  $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ -martingal právě tehdy, když existuje  $S \in \mathbb{L}_1$  taková, že  $\mathbb{E}[S|\mathcal{F}_n] \stackrel{\text{s.j.}}{=} S_n$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ , tj. právě tehdy, když je proces  $S$  tvaru zmíněném ve výše uvedeném příkladě.

Pokud existuje veličina  $Y \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$  taková, že  $X_t = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t], t \in T$ , pak řekneme, že veličina  $Y$  je **uzávěrem**  $\mathcal{F}_t$ -martingalu  $(X_t, t \in T)$ . Je-li  $X = (X_t, t \in T)$   $\mathcal{F}_t$ -martingal a existuje-li maximální  $t_\infty \in T$ , tj.  $t_\infty = \max T$ , pak zřejmě  $X_T$  je uzávěrem  $\mathcal{F}_t$ -martingalu  $X$ .

**Tvrzení 2.1.1** Je-li  $(X_t, t \in T)$  stejnoměrně integrovatelný  $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ -martingal, pak má uzávěr  $X_\infty \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P|\mathcal{F}_\infty)$ , tj.  $X_t = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t], t \in T$ .

**Důkaz:** Pokud existuje  $t_\infty$  maximální prvek  $T$ , volíme  $X_\infty = X_{t_\infty}$ , neboť  $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_{t_\infty}$ . V opačném případě existuje  $t_n \nearrow t_\infty = \sup T$ . Pak  $X_{t_n}$  je  $(\mathcal{F}_{t_n}, n \in \mathbb{N})$  stejnoměrně integrovatelný  $\mathcal{F}_{t_n}$ -martingal a podle výše uvedené věty 4.8 z [4] existuje  $S \in \mathbb{L}_1$  taková, že  $X_{t_n} = \mathbb{E}[S|\mathcal{F}_{t_n}], n \in \mathbb{N}$ . Pak  $X_\infty = \mathbb{E}[S|\mathcal{F}_\infty]$  je uzávěrem  $\mathcal{F}_{t_n}$ -martingalu  $X_{t_n}$ . Zbývá tedy ukázat, že je také uzávěrem  $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ -martingalu  $X_t$ . Je-li  $t \in T$ , pak existuje  $n \in \mathbb{N}$  takové, že  $t_n \geq t$ . Odtud plyne vztah

$$\mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t] \stackrel{\text{s.j.}}{=} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_{t_n}]|\mathcal{F}_t] \stackrel{\text{s.j.}}{=} \mathbb{E}[X_{t_n}|\mathcal{F}_t] \stackrel{\text{s.j.}}{=} X_t$$

Je-li  $(X_t, t \in T)$   $\mathcal{F}_t$ -martingal a  $X_t \in \mathbb{L}_2$  pro každé  $t \in T$ , pak řekneme, že  $X_t$  je  $(\mathbb{L}_2, \mathcal{F}_t)$ -martingal. Stručně budeme říkat, že proces  $(X_t, t \in T)$  je  $\mathbb{L}_2$ -martingal, pokud existuje filtrace  $(\mathcal{F}_t, t \in T)$  taková, že  $X_t$  je  $(\mathbb{L}_2, \mathcal{F}_t)$ -martingal, což je právě tehdy, když  $X$  je  $(\mathbb{L}_2, \mathcal{F}_t^X)$ -martingal. V takovém případě jsou přírůstky procesu  $X_t$  ortogonální v  $\mathbb{L}_2(\mathcal{F}_\infty)$ , tj. pro  $r < u < s < t$  z indexové množiny  $T$  platí

$$\text{cov}(X_t - X_s, X_u - X_r) = \mathbb{E}(X_t - X_s)(X_u - X_r) = 0.$$

O procesu s konečnými druhými momenty splňující předchozí podmínu ortogonality přírůstků hovoříme jako o **ortogonálním přírůstkovém procesu**.

**Poznámka 2.1.1** Je-li indexová množina  $T$  lokálně konečná, stačí ověřovat rovnost (2.1) pro sousední body  $s, t \in T, s \leq t$ . Speciálně, je-li množina  $T$  ekvidistantní s krokem  $\delta$ , stačí ověřovat podmínu

$$\mathbb{E}[X_{s+\delta}|\mathcal{F}_s] \stackrel{\text{s.j.}}{=} X_s$$

pro  $s, s+\delta \in T$ . V následujících příkladech budeme tuto podmínu mlčky ověřovat pro  $\delta = 1$ .

**Příklad 2.1.1** Nechť  $X_n, n \in \mathbb{N}$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou  $\mu \in \mathbb{R}$ . Definujme  $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ . Ukažte, že  $M_n = S_n - n\mu$  je martingal pro  $T = \mathbb{N}_0$ .

**Řešení:** Pro  $n \in \mathbb{N}_0$  položme

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sigma(S_1, \dots, S_n) = \sigma(M_1, \dots, M_n).$$

Pak  $\mathcal{F}_n$  je kanonická filtrace procesu  $M_n$ . Zřejmě  $M_n \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_n)$ . Abychom ukázali, že proces  $M_n$  je  $\mathcal{F}_n$ -martingal stačí ukázat, že pro každé  $n \in \mathbb{N}_0$  platí rovnost  $\mathbf{E}[M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n] \stackrel{s.j.}{=} 0$  přičemž platí  $M_{n+1} - M_n = X_{n+1} - \mu$ . Dostáváme tedy

$$\mathbf{E}[M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n] \stackrel{s.j.}{=} \mathbf{E}[X_{n+1} - \mu | \mathcal{F}_n] \stackrel{s.j.}{=} \mathbf{E}X_{n+1} - \mu = 0,$$

neboť  $X_{n+1} - \mu$  je náhodná veličina nezávislá se  $\sigma$ -algebrou  $\mathcal{F}_n$ .  $\square$

**Příklad 2.1.2** Nechť  $X_n, n \in \mathbb{N}$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou  $\mathbf{E}X_1 = 0$  a rozptylem  $\text{var } X_1 = \sigma^2, \sigma^2 < \infty$ . Definujme  $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ . Ukažte, že  $M_n = S_n^2 - n\sigma^2 \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_n)$  je martingal pro  $T = \mathbb{N}_0$ .

**Řešení:** Vezměme filtraci  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Pokud ověříme vlastnosti vůči této filtraci, pak získáme martingalovou vlastnost také vůči kanonické filtraci. Poznamenejme, že  $\mathcal{F}_0 = \{0, \Omega\}$ . Nyní ověřme martingalovou vlastnost s pomocí vztahu

$$M_{n+1} - M_n = S_{n+1}^2 - S_n^2 - \sigma^2 = -\sigma^2 + (S_{n+1} - S_n)(S_{n+1} + S_n),$$

kde  $S_{n+1} - S_n$  odpovídá  $X_{n+1}$ , což je nezávislé se  $\sigma$ -algebrou  $\mathcal{F}_n$  a  $S_{n+1} + S_n$  odpovídá  $2S_n + X_{n+1}$ , kde  $S_n$  je měřitelné. Potom tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n] &\stackrel{s.j.}{=} -\sigma^2 + \mathbf{E}[X_{n+1}(2S_n + X_{n+1}) | \mathcal{F}_n] \\ &\stackrel{s.j.}{=} -\sigma^2 + \mathbf{E}[X_{n+1}2S_n | \mathcal{F}_n] + \mathbf{E}[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] \\ &\stackrel{s.j.}{=} -\sigma^2 + 2S_n \mathbf{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] + \mathbf{E}[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] \\ &\stackrel{s.j.}{=} -\sigma^2 + 2S_n \mathbf{E}X_{n+1} + \mathbf{E}X_{n+1}^2 \\ &= -\sigma^2 + 2S_n \cdot 0 + \text{var } X_{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Tímto jsme ověřili martingalovou vlastnost  $M_n$  a můžeme tvrdit, že  $M_n$  je  $\mathcal{F}_n$ -martingal.  $\square$

**Příklad 2.1.3** Nechť  $X_n, n \in \mathbb{N}$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou  $\mathbf{E}X_1 = \frac{1}{\beta}$ . Ukažte, že  $\beta^n \Pi_n := \beta^n \prod_{j=1}^n X_j$  je martingal pro  $T = \mathbb{N}_0$ .

**Řešení:** Označme  $\mathcal{F}_n = (X_1, \dots, X_n)$ . Protože  $X_j$  jsou nezávislé integrovatelné veličiny, je jejich součin  $\Pi_n$  podle věty 5.10 (ii) [5] také integrovatelná veličina. Dostáváme tak, že  $\beta^n \Pi_n \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_n)$ . Protože  $\Pi_n \in$

$\mathbb{L}(\mathcal{F}_n)$  a  $X_{n+1}$  je nezávislé s  $\mathcal{F}_n$ , dostáváme

$$\begin{aligned}\mathsf{E} [\beta^{n+1} \Pi_{n+1} | \mathcal{F}_n] &\stackrel{s.j.}{=} \beta^{n+1} \mathsf{E} [\Pi_n X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ &\stackrel{s.j.}{=} \beta^{n+1} \Pi_n \mathsf{E} [X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ &\stackrel{s.j.}{=} \beta^{n+1} \Pi_n \mathsf{E} X_{n+1} = \beta^{n+1} \Pi_n \frac{1}{\beta} = \beta^n \Pi_n.\end{aligned}$$

Proces  $\beta^n \Pi_n$  je tedy  $\mathcal{F}_n$ -martingal.  $\square$

**Příklad 2.1.4** Nechť  $X_n, n \in \mathbb{N}$  jsou reálné náhodné veličiny a pro každé  $n \in \mathbb{N}$  má náhodný vektor  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  spojité rozdělení s hustotou  $f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , která je všude kladná. Dále je dán konzistentní systém hustot  $g_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , t.j.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi) d\xi = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

pro skoro všechna  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  a  $g_0 = 1$  (aby to byly hustoty). Pro  $n \in \mathbb{N}$  označme  $\mathcal{S}_n = \frac{g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ . Ukažte, že  $(\mathcal{S}_n, n \in \mathbb{N})$  je martingal.

**Řešení:** Zda je  $\mathcal{S}_n$  martingal ověříme přímým výpočtem podmíněné střední hodnoty. Pro připomenutí definic a základních vlastností podmíněné střední hodnoty a podmíněného rozdělení může čtenář nahlédnout do [5]. Zda se jedná o martingal ověříme následovně

$$\begin{aligned}\mathsf{E} [\mathcal{S}_{n+1} | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi)}{f_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi)} \mathsf{P}_{X_{n+1}|X_1, \dots, X_n}(d\xi | x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi)}{f_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi)} f_{X_{n+1}|X_1, \dots, X_n}(\xi | x_1, x_2, \dots, x_n) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi)}{f_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi)} f_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi) f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi)}{f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} d\xi = \frac{g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}\end{aligned}$$

pro skoro všechna  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi) \in \mathbb{R}^n$ . Zpětným dosazením, dostaneme

$$\mathsf{E} [\mathcal{S}_{n+1} | X_1, X_2, \dots, X_n] = \mathcal{S}_n \quad s.j.$$

Ověřili jsme, že  $(\mathcal{S}_n, n \in \mathbb{N})$  je  $(\sigma(X_1, \dots, X_n), n \in \mathbb{N})$ -martingal, potom  $(\mathcal{S}_n, n \in \mathbb{N})$  je martingal. Tedy věrohodnostní poměr je nezáporný martingal startující z jedničky.  $\square$

Následující příklad je zobecněním příkladu 2.1.4.

**Příklad 2.1.5** *Nechť  $X_n : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (S_n, \mathcal{S}), n \in \mathbb{N}$  je posloupnost náhodných veličin. Bud'  $P$  pravděpodobnostní míra na  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Bud' dále  $\nu_n, n \in \mathbb{N}$  konzistentní posloupnost pravděpodobnostních měr takových, že  $\nu_n \ll P_{X_1, \dots, X_n} =: \mu_n$ . Ukažte, že následující věrohodnostní poměr  $T_n = \frac{d\nu_n}{d\mu_n}(X_1, \dots, X_n)$  mezi  $H_1 : (X_1, \dots, X_n)^T \sim \nu_n$  a  $H_0 : (X_1, \dots, X_n)^T \sim \mu_n$  je  $\sigma(X_1, \dots, X_n)$ -martingal za platnosti nulové hypotézy  $H_0$ .*

**Řešení:** Podle předpokladu  $\nu_n$  je marginální míra pravděpodobnosti  $\nu_{n+1}$  odpovídající prvním  $n$  souřadnicím. Zřejmě  $T_n \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_n)$ , kde  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ . Dále  $T_n \geq 0$  skoro jistě. Abychom ukázali, že  $T_n \in \mathbb{L}_1$ , spočteme jeho střední hodnotu a ukážeme, že je konečná. Protože předpokládáme, že platí nulová hypotéza  $H_0 : (X_1, \dots, X_n)^T \sim \mu_n$ , dostáváme, že

$$\begin{aligned}\mathbb{E} T_n &= \int T_n dP = \int \frac{d\nu_n}{d\mu_n}(X_1, \dots, X_n) dP \\ &= \int \frac{d\nu_n}{d\mu_n} dP_{X_1, \dots, X_n} = \int d\nu_n = 1 < \infty.\end{aligned}$$

Nyní ověříme, že  $\mathbb{E}[T_{n+1} | \mathcal{F}_n] \stackrel{s.j.}{=} T_n$ . Bud'  $B \in \mathcal{S}^n$ , pak

$$\begin{aligned}\int_{[(X_1, \dots, X_n)^T \in B]} T_n dP &= \int_B \frac{d\nu_n}{d\mu_n} dP_{X_1, \dots, X_n} = \nu_n(B) = \nu_{n+1}(B \times S) \\ &= \int_{B \times S} \frac{d\nu_{n+1}}{d\mu_{n+1}} dP_{X_1, \dots, X_{n+1}} = \int_{[(X_1, \dots, X_n)^T \in B]} T_{n+1} dP.\end{aligned}$$

□

**Příklad 2.1.6 PÓLYOVO URNOVÉ SCHÉMA:**

V osudí je na počátku v čase  $n = 0$  celkem  $b$  bílých a  $c$  černých kuliček. V časovém období  $(n, n+1)$  pro  $n \in \mathbb{N}_0$  vždy náhodně z osudí vytáhneme jednu kuličku, zaznamenáme její barvu, vrátíme ji zpět do osudí a sní celkem dalších  $\Delta \in \mathbb{N}_0$  kuliček též barvy. Označme  $X_n$  indikátorovou náhodnou veličinu, která indikuje, že v  $n$ -tému tahu byla tažená bílá koule a  $T_n$  bude označovat relativní počet bílých koulí v osudí v čase  $n$  pro  $n \in \mathbb{N}_0$ .

1. Ukažte, že posloupnost  $T_n$  je martingal vzhledem ke kanonické filtraci  $\mathcal{F}_n = \sigma(T_1, \dots, T_n) = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ .
2. Ukažte, že existuje limita  $T = \lim_n T_n$  pro  $n \rightarrow \infty$  skoro jistě a zjistěte rozdělení limitní veličiny.

*Řešení:*

1. Zřejmě

$$T_n = \frac{b + \Delta \sum_{k=1}^n X_k}{b + c + n\Delta}.$$

Odsud ihned vidíme, že  $\sigma(T_1, \dots, T_n) \subseteq \sigma(X_1, \dots, X_n)$ . Opačnou inkluzi lze také snadno odvodit z výše uvedené formule. Protože proces  $T_n$  nabývá hodnot v intervalu  $[0, 1]$ , je integrovatelný. Dále

$$E[T_{n+1} | \mathcal{F}_n] \stackrel{s.j.}{=} \frac{b + \Delta(\sum_{k=1}^n X_k + E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n))}{b + c + (n+1)\Delta}. \quad (2.2)$$

Abychom mohli spočítat pravou stranu (2.2), potřebujeme nejdříve vyjádřit

$$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \stackrel{s.j.}{=} P(X_{n+1} = 1 | \mathcal{F}_n) \stackrel{s.j.}{=} T_n.$$

Tuto rovnost lze odůvodnit intuitivní představou, že v čase  $n$  je (podmíněná) pravděpodobnost, že v následujícím tahu bude tažena bílá koule daná právě relativním počtem bílých kuliček v urně. Celkem tak dostáváme rovnost

$$\begin{aligned} E[T_{n+1} | \mathcal{F}_n] &\stackrel{s.j.}{=} \frac{b + \Delta(\sum_{k=1}^n X_k + T_n)}{b + c + (n+1)\Delta} \stackrel{s.j.}{=} \frac{b + \Delta(\sum_{k=1}^n X_k + \frac{b + \Delta \sum_{k=1}^n X_k}{b + c + n\Delta})}{b + c + (n+1)\Delta} \\ &\stackrel{s.j.}{=} \frac{(b + \Delta(\sum_{k=1}^n X_k))(b + c + n\Delta) + b + \Delta \sum_{k=1}^n X_k}{(b + c + n\Delta)(b + c + (n+1)\Delta)} \stackrel{s.j.}{=} T_n. \end{aligned}$$

Ověřili jsme tak, že proces  $T_n$  je  $\mathcal{F}_n$ -martingal.

2. Protože je proces  $T_n$  omezený, existuje podle věty 4.1 z [4] veličina  $T \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_\infty)$  taková, že  $T_n \rightarrow T$  skoro jistě a jistě také v  $\mathbb{L}_1$ .

(a) Z vyjádření

$$T_n = \frac{b + \Delta \sum_{k=1}^n X_k}{b + c + \Delta n}$$

ihned plyne, že  $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k + o(1)$  pro  $n \rightarrow \infty$ .

(b) Veličiny  $X_1, \dots, X_n$  jsou zřejmě permutovatelné, neboť platí

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \frac{\prod_{k=0}^{m-1} (a + k\Delta) \prod_{k=0}^{n-m-1} (b + k\Delta)}{\prod_{k=0}^{m-1} (a + b + k\Delta)},$$

kde  $m = \sum_{k=1}^n x_k$ , pokud  $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}$ . Pak zřejmě

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_1 \cdot \dots \cdot X_k &= P(X_1 = 1, \dots, X_k = 1) \\ &= \frac{a}{a+b} \cdot \dots \cdot \frac{a + \Delta(k-1)}{a + b + \Delta(k-1)} \\ &= \frac{\Gamma(k + \frac{a}{\Delta}) \Gamma(\frac{a+b}{\Delta})}{\Gamma(\frac{a}{\Delta}) \Gamma(k + \frac{a+b}{\Delta})}\end{aligned}$$

(c) Z martingalové vlastnosti  $T_n$  plyne, že  $\mathbb{E}T_n = \mathbb{E}T_0 = \frac{b}{b+c}$ . Dále

$$\begin{aligned}\mathbb{E}T_n^2 &= o(1) + \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right)^2 = \frac{1}{n^2} \left(\mathbb{E} \sum_{k \neq j=1}^n X_k^2 + \sum_{k=1}^n X_k X_j\right) \\ &= o(1) + \frac{n(n-1)}{n^2} \mathbb{E}X_1 X_2.\end{aligned}$$

Platí tedy, že  $\mathbb{E}T_n^2 \rightarrow \mathbb{E}X_1 X_2$  pro  $n \rightarrow \infty$ . Podobně bychom dostali pro  $k \in \mathbb{N}$ , že  $\mathbb{E}T_n^k \rightarrow \mathbb{E}X_1 \cdot \dots \cdot X_k$  pro  $n \rightarrow \infty$ .

(d) Protože  $T_n \rightarrow T$  skoro jistě, platí, že

$$\mathbb{E}T^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}T_n^k = \frac{\Gamma(k + \frac{a}{\Delta}) \Gamma(\frac{a+b}{\Delta})}{\Gamma(\frac{a}{\Delta}) \Gamma(k + \frac{a+b}{\Delta})}.$$

Protože náhodná veličina  $T$  je omezená, je její rozdělení určeno výše uvedenými momenty, které odpovídají beta rozdělení  $B(\frac{a}{\Delta}, \frac{b}{\Delta})$ .

## 2.2 Martingaly a markovské časy

V příkladech předchozí části jsme využívali toho, že každý martingal má konstantní střední hodnotu. Není to však postačující podmínka, ale pouze nutná.

V této části budeme martingal interpretovat jako výši výplaty mezi dvěma hráči hrající spolu tzv. spravedlivou hru. Filtraci  $(\mathcal{F}_t, t \in T)$  budeeme interpretovat jako postupný přísun informace např. pro prvního hráče, který má možnost hru kdykoli ukončit. Protože požadujeme, aby se náš hráč rozhodoval na základě dostupné informace  $\mathcal{F}_t$  v čase  $t$ , budeme předpokládat, že doba ukončení hry  $\tau$  bude  $\mathcal{F}_t$ -markovský čas. V tom případě výše výplaty našeho hráče bude  $X_\tau$ , která bude za určitých technických předpokladů popsaných ke konci první kapitoly  $\mathcal{F}_\tau$ -měřitelná náhodná veličina.

**Tvrzení 2.2.1** *Bud'  $(X_t, t \in T)$  integrovatelný  $\mathcal{F}_t$ -adaptovaný proces. Pak  $(X_t, t \in T)$  je  $\mathcal{F}_t$ -martingal právě tehdy, když*

$$\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_u \quad \text{pro každý } \tau : \Omega \rightarrow \{s, u\} \subseteq T \quad (2.3)$$

*dvouhodnotový  $\mathcal{F}_t$ -markovský čas.*

**Dukaz:** Nechť platí (2.3), ukážeme, že proces  $X_t$  je  $\mathcal{F}_t$ -martingal. Nechť  $s < u$ ,  $F \in \mathcal{F}_s$ ,  $s, u \in T$ . Dále zaved'me  $\tau = s$  na  $F$  a  $\tau = u$  na  $\Omega \setminus F$ . Pak pro

1.  $r < s$  platí  $[\tau \leq r] = \emptyset \in \mathcal{F}_r$ ,
2.  $r \geq u$  platí  $[\tau \leq r] = \Omega \in \mathcal{F}_r$
3.  $s \leq r < u$  platí  $[\tau \leq r] = F \in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_r$ .

Čas  $\tau$  je tedy  $\mathcal{F}_t$ -markovský čas. Podle (2.3) platí  $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_u$ , což znamená, že

$$\mathbb{E}[X_s 1_F + X_u 1_{\Omega \setminus F}] = \mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_u = \mathbb{E}[X_u 1_F + X_u 1_{\Omega \setminus F}].$$

Tedy  $\mathbb{E}[X_s 1_F] = \mathbb{E}[X_u 1_F]$  pro každé  $F \in \mathcal{F}$ , a tak  $\mathbb{E}[X_u | \mathcal{F}_s] \stackrel{\text{s.j.}}{=} X_s$ . Proces  $X$  je tedy  $\mathcal{F}_t$ -martingal.

Opačná implikace plyne okamžitě z Optional Sampling Theorem pro martingaly pro markovské časy nabývající konečně mnoha hodnot viz tvrzení 2.2.2.  $\square$

Podobné tvrzení platí pokud bychom místo požadavku, že  $\tau$  nabývá maximálně dvě hodnoty z  $T$ , požadovali, aby  $\tau$  nabývalo konečně mnoha hodnot. Zřejmě, pokud podmínka (2.3) z tvrzení 2.2.1 platí pro  $\mathcal{F}_t$ -markovské časy nabývající konečně mnoha hodnot z  $T$ , pak (2.3) platí i pro dvouhodnotové konečné  $\mathcal{F}_t$ -markovské časy a tedy  $(X_t, t \in T)$  je  $\mathcal{F}_t$ -martingal.

Opačná implikace je důsledkem obecnější věty, kterou označujeme jako Optional Sampling Theorem pro martingaly.

**Tvrzení 2.2.2** (*Optional Sampling Theorem pro martingaly a markovské časy nabývající konečně mnoha hodnot, jednodimenzionální případ:*)

Nechť  $(S_n, n \in \mathbb{N}_0)$  je  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ -martingal a  $\tau, \rho : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$  jsou markovské časy vzhledem k filtraci  $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0)$ . Když existuje  $k \in \mathbb{N}_0$  tak, že  $\rho \leq \tau \leq k$ , pak

$$S_\tau, S_\rho \in \mathbb{L}_1 \quad a \quad \mathsf{E}[S_\tau | \mathcal{F}_\rho] = S_\rho \text{ s.j.}$$

**Dukaz:** Tvrzení je okamžitým důsledkem tvrzení 2.1 a 2.5 z [4].

### Poznámka 2.2.1

1. V souvislosti s předchozím tvrzením bychom rádi interpretovali martingal jako proces jehož přírůstky se dají interpretovat jako spravedlivá hra (tj. očekávaný zisk měřený podmíněnou střední hodnotou při vstupu do hry je nulový.) Podle Optional Sampling Theorem tutéž vlastnost mají za určitých okolností i přírůstky martingalu, pokud okamžik vstupu do hry a okamžik ukončení hry jsou markovské časy.
2. Pokud očekávaný zisk budeme měřit čistě střední hodnotou, pak tvrzení 2.2.1 nám říká, že integrovatelný adaptovaný proces je martingal právě tehdy, když střední zisk každé hry začínající v pevně zvoleném čase a končící v dvouhodnotovém (či konečně hodnotovém) markovském čase je nulový.

Čas  $\rho$  můžeme interpretovat jako okamžik, kdy se náš hráč rozhodne vstoupit do hry a čas  $\tau \leq k$  čas, kdy hru opustí.

**Protipříklad 2.2.0** Uvedené tvrzení neplatí bez předpokladu  $\tau \leq k$ . Nechť  $X_k$  jsou nezávislé stejně rozdelené náhodné veličiny s rovnoměrným rozdelením  $R\{-1, 1\}$  na dvou prvkové množině. Zavedeme  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Bud'  $\tau$  první okamžik vstupu  $S_n$  do jednoprvkové množiny obsahující 1. Podle příkladu (princip zrcadlení)  $\tau < \infty$  skoro jistě, a tedy  $S_\tau = 1$  s.j. Pak  $\mathbb{E}S_\tau = 1 \neq 0 = \mathbb{E}S_0$ .

Naopak pokud  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  je stejnoměrně integrovatelný martingal, pak výše uvedené tvrzení platí i pro neomezené konečné časy.

**Tvrzení 2.2.3** *Nechť  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  je stejnoměrně integrovatelný  $\mathcal{F}_n$ -martingal a  $\tau, \rho : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  jsou markovské časy, pak*

$$\mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\rho] \stackrel{s.j.}{=} X_\rho \quad \text{pokud } \rho \leq \tau.$$

**Dukaz:** Zřejmě  $X_{\rho \wedge n} \xrightarrow{s.j.} X_\rho$  a podobně pro  $\tau$  předpoklad stejnoměrné integrovatelnosti dává konvergenci skoro jistě  $X_{\tau \wedge n} \xrightarrow{\mathbb{L}_1} X_\tau$ . Podle lemmatu 1.2.1 (2) platí

$$\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_\tau] \stackrel{s.j.}{=} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_n] | \mathcal{F}_\tau] \stackrel{s.j.}{=} \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{\tau \wedge n}] \stackrel{s.j.}{=} X_{\tau \wedge n}.$$

Podobně pro  $\rho$  platí  $\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_\rho] \stackrel{s.j.}{=} X_{\rho \wedge n}$ . Pak

$$\mathbb{E}[X_{\tau \wedge n} | \mathcal{F}_\rho] \stackrel{s.j.}{=} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_\tau] | \mathcal{F}_\rho] \stackrel{s.j.}{=} \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_\rho] \stackrel{s.j.}{=} X_{n \wedge \rho} \xrightarrow{s.j.} X_\rho,$$

neboť  $\mathcal{F}_\rho \subseteq \mathcal{F}_\tau$ , a protože  $\mathbb{E}[X_{\tau \wedge n} | \mathcal{F}_\rho] \xrightarrow{\mathbb{L}_1} \mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\rho]$  dostáváme rovnost

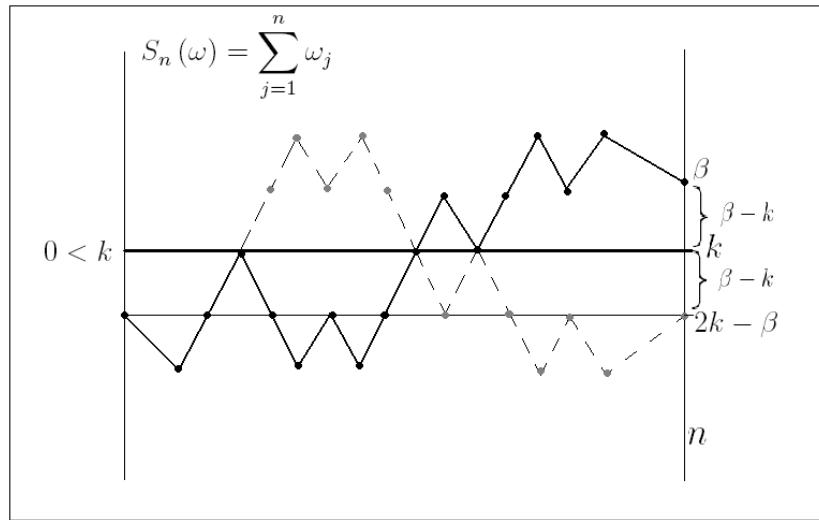
$$X_\rho \stackrel{s.j.}{=} \mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\rho].$$

□

**Poznámka 2.2.2** Tvrzení 2.2.3 platí i za mírnějšího předpokladu, že proces  $(X_{n \wedge \tau}, n \in \mathbb{N})$ , je stejnoměrně integrovatelný  $\mathcal{F}_n$ -martingal.

### 2.2.1 Princip zrcadlení

Budeme pracovat se symetrickou náhodnou procházkou  $S_n(\omega) = \sum_{j=1}^n \omega_j$  na  $\Omega = \{-1, 1\}^n$ . Volme  $k > 0$  a dále  $n \in \mathbb{N}$  pevné. Pro jednoduchost předpokládejme, že je  $n + k$  liché, což implikuje  $S_n \neq k$ . Potom platí, že počet trajektorií, které skončí v bodě  $\beta > k$  v čase  $n$  se rovná počtu trajektorií, které v průběhu času dosáhnou úrovně  $k$  a skončí v zrcadleném bodě  $2k - \beta$  v čase  $n$ ,



Obrázek 2.1: Znázornění trajektorie rozhodnutí při principu zrcadlení.

neboli pro  $\beta \geq k > 0$  platí

$$\#\{\omega \in \Omega; S_n(\omega) = \beta\} = \#\{\omega \in \Omega, S_n(\omega) = 2k - \beta; \max_{j \leq n} S_j(\omega) \geq k\},$$

což se dá také zapsat

$$\#\{\omega \in \Omega; \max_{j \leq n} S_j(\omega) \geq k\} = 2 \cdot \#\{\omega \in \Omega; S_n(\omega) \geq k\}.$$

#### Aplikace principu zrcadlení na symetrické náhodné procházce

Pro  $k = 1$  a  $n$  sudé platí

$$P(\tau \leq n) = P\left(\max_{j \leq n} S_j \geq 1\right) = 2P(S_n \geq 1) = 2P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow 1$$

podle centrální limitní věty (CLV) pro  $n \rightarrow \infty$  v následujícím tvaru.

$$\sup_{X \in \mathbb{R}} |F_{S_n}(X) - F_{N(0,1)}(X)| \rightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

Potom  $1 = P(\tau < \infty)$ .

## 2.3 Waldovy rovnosti

**Věta 2.3.1 (Waldovy rovnosti pro markovské časy)**

Nechť  $X_k, k \in \mathbb{N}$  jsou nezávislé stejně rozdělené reálné náhodné veličiny a položme  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Nechť pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je  $\sigma(X_n) \subseteq \mathcal{F}_n$  a  $\sigma$ -algebry  $\mathcal{F}_n$  a  $\sigma(X_{n+1})$  jsou nezávislé a  $\tau, \rho : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  jsou markovské časy vzhledem k filtraci  $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ ,  $\rho \leq \tau$ .

1. Když  $X_1, \tau \in \mathbb{L}_1$  a  $\mathbf{E}X_1 = 0$ , pak  $\mathbf{E}[S_\tau | \mathcal{F}_\rho] \stackrel{s.j.}{=} S_\rho$ .
2. Nechť  $X_1 \in \mathbb{L}_2$ ,  $\tau \in \mathbb{L}_1$ ,  $\mathbf{E}X_1 = 0$  a  $\tau$  je nezávislý s  $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$ . Označme  $V_n = S_n^2 - n \text{Var}(X_1)$ , pak  $\mathbf{E}[V_\tau | \mathcal{F}_\rho] \stackrel{s.j.}{=} V_\rho$ .
3. Když  $X_1 \in \mathbb{L}_2$ ,  $\tau \in \mathbb{L}_1$ ,  $\mathbf{E}X_1 = 0$  a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} 1_{[\tau > n]} \cdot |S_n| \in \mathbb{L}_\infty, \quad (2.4)$$

potom  $\mathbf{E}[V_\tau | \mathcal{F}_\rho] \stackrel{s.j.}{=} V_\rho$ .

4. Nechť  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$  je takové, že  $e^{\alpha X_1} \in \mathbb{L}_1$ . Když  $P(\tau < \infty) = 1$  a  $\tau$  je nezávislý s  $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$ . Označme  $\mathcal{E}_n = e^{\alpha S_n} / \mathbf{E}(e^{\alpha S_n})$ , potom  $\mathbf{E}[\mathcal{E}_\tau | \mathcal{F}_\rho] \stackrel{s.j.}{=} \mathcal{E}_\rho$ .

5. Nechť  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$  je takové, že  $e^{\alpha X_1} \in \mathbb{L}_1$  a  $X_1, \tau \in \mathbb{L}_1$ . Když

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} 1_{[\tau > n]} \cdot |S_n - n \mathbf{E}[X_1]| \in \mathbb{L}_\infty, \quad (2.5)$$

potom  $\mathbf{E}[\mathcal{E}_\tau | \mathcal{F}_\rho] \stackrel{s.j.}{=} \mathcal{E}_\rho$ .

**Věta 2.3.2 (Waldovy rovnosti)**

Nechť  $X_k, k \in \mathbb{N}$  jsou nezávislé stejně rozdělené reálné náhodné veličiny a položme  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Dále nechť  $(S_n, n \in \mathbb{N})$  je  $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ -adaptovaný proces, přičemž pro každé  $n \in \mathbb{N}$  jsou  $\sigma$ -algebry  $\mathcal{F}_n$  a  $\sigma(X_i, i > n)$  nezávislé a  $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  je markovský čas vzhledem k filtraci  $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ .

1. Nechť  $X_1, \tau \in \mathbb{L}_1$  a nechť  $\mathbf{E}[X_1] = 0$ .

(a) Pak  $\mathbf{E}[S_\tau] = 0$ .

- (b) Pokud navíc  $X_1 \in \mathbb{L}_2$  a  $\tau$  je nezávislý s  $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$ , potom  $\text{Var}(S_\tau) = \mathbb{E}S_\tau^2 = \mathbb{E}[\tau] \cdot \text{Var}(X_1)$ .
- (c) Nechť platí (2.4), pak  $\text{Var}(S_\tau) = \mathbb{E}S_\tau^2 = \mathbb{E}[\tau] \cdot \text{Var}(X_1)$ .
2. Nechť  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$  je takové, že  $e^{\alpha X_1} \in \mathbb{L}_1$ . Když  $P(\tau < \infty) = 1$  a  $\tau$  je nazávislý s  $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$ , potom  $\mathbb{E}[\mathcal{E}_\tau] = 1$ .
3. Nechť  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$  je takové, že  $e^{\alpha X_1} \in \mathbb{L}_1$ . Když  $X_1, \tau \in \mathbb{L}_1$  a platí (2.5), potom  $\mathbb{E}[\mathcal{E}_\tau] = 1$ .

**Poznámka 2.3.1** Věty 2.3.1 a 2.3.2 okamžitě plynou z vět 2.18 a 2.19 v [4]. Větu 2.18 z [4] lze naopak snadno odvodit z věty 2.3.1. Podobně lze snadno odvodit z věty 2.3.2 znění věty 2.19 z [4] až na části využívající předpokladu  $\tau \in \mathbb{L}_2$  a na bod (i)  $\mathbb{E}[S_\tau] = \mathbb{E}[\tau] \cdot \mathbb{E}[X_1]$ , pokud  $X_1, \tau \in \mathbb{L}_1$ .

**Příklad 2.3.1** Nechť  $X_n, n \in \mathbb{N}$  jsou nezávislé veličiny s rovnoměrným rozdělením na dvoubodové množině  $\{-1, 1\}$ . Označme odpovídající náhodnou procházku  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ , kanonickou filtraci  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$  a čas

$$\tau_{a,b} = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n \in \{a, b\}\}.$$

Rozhodněte, zda  $\nu = \tau_{-3,5} - 1$  je markovský čas vzhledem ke kanonické filtraci  $\mathcal{F}_n$ .

**Řešení:** Zřejmě  $\tau = \tau_{-3,5}$  je  $\mathcal{F}_n$ -markovský čas. Protože proces  $S_n$  je do času  $\tau$  omezený, platí

$$0 = \mathbb{E}S_{\tau_{-3,5}} = -3P(S_\tau = -3) + 5P(S_\tau = 5).$$

Odtud plyne, že  $P(S_\nu = 4) = P(S_\tau = 5) = \frac{3}{8}$  a podobně  $P(S_\nu = -2) = P(S_\tau = -3) = \frac{5}{8}$ .

Ukážeme, že  $\nu$  není  $\mathcal{F}_n$ -markovský čas. Mohli bychom zvolit postup obdobný jako v příkladu 1.2.2 v bodě 3. Takový postup necháme čtenáři jako cvičení. Místo toho ukážeme, že platí nerovnost  $\mathbb{E}S_\nu \neq \mathbb{E}S_0 = 0$ , a to

$$\begin{aligned} \mathbb{E}S_\nu &= 4P(S_\nu = 4) - 2P(S_\nu = -2) \\ &= 4P(S_\tau = 5) - 2P(S_\tau = -3) \\ &= 4\frac{3}{8} - 2\frac{5}{8} = \frac{6-5}{4} = \frac{1}{4} \neq 0. \end{aligned}$$

Dostaneme tímto spor s  $\mathbb{E}[S_\nu | \mathcal{F}_0] = S_0 = 0$ , neboť  $S_{\nu \wedge n}$  je omezený, a tedy stejnoměrně integrovatelný  $\mathcal{F}_n$ -martingal.

## 2.4 Lokální martingaly

Nechť  $(X_t, t \in T)$  je  $\mathcal{F}_t$ -adaptovaný proces a  $T \subseteq \mathbb{R}$ . Pokud existuje neklesající posloupnost markovských časů  $\tau_n \nearrow \infty$  s.j. pro  $n \rightarrow \infty$  taková, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, s \in T \text{ proces } (X_{t \wedge \tau_n} - X_{s \wedge \tau_n}, s \leq t) \text{ je } \mathcal{F}_t\text{-martingal,}$$

pak říkáme, že proces  $X_t$  je **lokální  $\mathcal{F}_t$ -martingal** a posloupnost  $\tau_n$  označujeme jako **lokalační posloupnost procesu  $X_t$** .

**Poznámka 2.4.1**  $\mathcal{F}_t$ -adaptovaný proces  $(X_t, t \in T)$  je lokální  $\mathcal{F}_t$ -martingal s lokalační posloupností  $\tau_n$  (neklesající posloupnost  $\mathcal{F}_t$ -markovských časů s  $\tau_n \nearrow \infty$  s.j. pro  $n \rightarrow \infty$ ) právě tehdy, když pro každé  $n \in \mathbb{N}, s, r \in T$  a markovský čas  $\nu : \Omega \rightarrow \{s, r\} \subseteq T$  je veličina  $X_{\nu \wedge \tau_n} - X_{r \wedge \tau_n}$  centrovaná, tj. její střední hodnota existuje a je rovna 0.

Budeme-li se snažit interpretovat posloupnost markovských časů  $\tau_n$ , můžeme říci, že se jedná o posloupnost varování, či o varovné události.

**Poznámka 2.4.2** Každý martingal je také lokálním martingalem. Pro ověření platnosti stáčí volit lokalační posloupnost  $\tau_n = \infty$ .

Pokud  $T = \mathbb{N}$  a  $X_1 \in \mathbb{L}_1$ , pak každý integrovatelný lokální  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ -martingal je  $\mathcal{F}_t$ -martingal. Což je důvod, proč se již více nebudeme zabývat lokálními martingaly.

Pokud  $T = [0, \infty)$ , pak existuje dokonce stejnoměrně integrovatelný spojitý lokální  $\mathcal{F}_t$ -martingal, který není martingal.

Zafixujme  $d \geq 2, d \in \mathbb{N}$ ,  $w_0 \in \mathbb{R}^d$  a  $W$   $d$ -dimenzionální  $\mathcal{F}_t$ -Wienerův proces. Říkáme, že proces  $R = (R_t, t \geq 0)$ , kde  $R_t = \|w_0 + W_t\|$ , nazveme  **$\mathcal{F}_t$ -Besselův proces s dimenzí  $d$  startující z  $r_0 = \|w_0\|$** , kde  $\|w_0\|$  značí euklidovskou normu vektoru  $w_0 \in \mathbb{R}^d$ .

**Tvrzení 2.4.1** (*Nedosažitelnost počátku pomocí Brownova pohybu v d-dimenzionálním prostoru pro  $d \geq 2$ :*) Nechť  $d \geq 2$ ,  $d \in \mathbb{N}$  a  $r \geq 0$ . Potom Besselův proces  $R$  s dimenzí  $d$  startující z  $r$  má následující vlastnost

$$P [R_t > 0; \forall 0 < t < \infty] = 1. \quad (2.6)$$

**Důkaz:** str. 161 tvrzení 3.22 viz [3]

Dále nechť  $R$  je Besselův proces s dimenzí  $d \geq 3$  startující v  $r \geq 0$ . Pak také platí, že

$$P [\lim_{t \rightarrow \infty} R_t = \infty] = 1.$$

Což znamená spolu s (2.6), že  $P (\inf_{t \geq 0} R_t > 0) = 1$  pokud  $r > 0$ . Podle cvičení 3.36 str. 168 [3] lze ukázat, že takto definovaný proces je stejnoměrně integrovatelný lokální martingal, který není martingal.

## 2.5 Martingalové diference

Nechť  $T \subseteq \mathbb{R}$  je ekvidistantní množina  $I \subseteq \mathbb{N}_0$  s krokem  $d = 1$ <sup>1</sup>. Je-li  $(X_{t_i}, t \in T)$   $(\mathcal{F}_{t_i})_{t \in T}$ -adaptovaný proces a  $X_t \in \mathbb{L}_1$  pro každé  $t \in T$ , pak říkáme, že  $(X_t, t \in T)$  jsou  $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ -**martingalové diference**, jestliže

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0 \text{ s.j. pro každé } t \in T \text{ takové, že } t - 1 \in T.$$

Dále budeme říkat, že  $(X_t, t \in T)$  jsou **martingalové diference**, jestliže  $(X_t, t \in T)$  jsou  $(\mathcal{S}_t, t \in T)$ -martingalové diference pro přirozenou filtraci  $\mathcal{S}_t = \sigma(X_s, s \leq t, s \in T)$ .

Martingalové diference jsou až na počáteční hodnotu zobecněné posloupnosti nezávislých veličin s nulovou střední hodnotou. Pro přehled uvedeme některé limitní věty pro martingalové diference, které zobecňují příslušné limitní věty pro nezávislé veličiny.

**Věta 2.5.1** Nechť  $(X_t, t \in T)$  jsou martingalové diference a  $X_n \in \mathbb{L}_2$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ . Když  $\sum_{k=1}^{\infty} \text{Var}(X_k) < \infty$ , pak je řada  $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$  sčitatelná s.j. i v  $\mathbb{L}_2$ .

**Důkaz:** str. 41 věta 4.13 viz [4]

**Věta 2.5.2 (SZVČ pro martingalové diference)**

Nechť  $(X_t, t \in T)$  jsou martingalové diference a  $X_n \in \mathbb{L}_2$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ . Když  $0 < b_n \nearrow \infty$  a  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_k)}{b_k^2} < \infty$ , potom

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} 0 \quad \text{a} \quad \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{L}_2} 0.$$

**Důkaz:** str. 41 věta 4.14 viz [4]

**Věta 2.5.3 (CLV Brown)**

Nechť pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je dáno  $k_n \in \mathbb{N}$ , dále reálné náhodné veličiny  $X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{k_n,n} \in \mathbb{L}_1$  a  $\sigma$ -algebry  $\mathcal{F}_{0,n} \subseteq \mathcal{F}_{1,n} \subseteq \mathcal{F}_{2,n} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_{k_n,n} \subseteq \mathcal{A}_n$ . Nechť dále

---

<sup>1</sup>tj. pokud  $a, b \in T$  jsou takové, že  $a < b$  a  $b - a \in \mathbb{Z}$ , pak také  $a + 1, b - 1 \in T$ .

1.  $(X_{k,n}, k = 1, 2, \dots, k_n)$  jsou  $(\mathcal{F}_{k,n}, k = 1, 2, \dots, k_n)$ -martingalové diference pro každé  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Je pro každé  $\varepsilon > 0$  splněna podmínka

$$PL_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{k_n} \mathsf{E} [X_{k,n}^2 \mathbb{I}_{[|X_{k,n}| \geq \varepsilon]} | \mathcal{F}_{k-1,n}] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathsf{P}} 0.$$

3. Nechť  $V_n = \sum_{k=1}^{k_n} \text{Var}(X_{k,n} | \mathcal{F}_{k-1,n}) = \sum_{k=1}^{k_n} \mathsf{E}[X_{k,n}^2 | \mathcal{F}_{k-1,n}]$ , potom platí  $V_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathsf{P}} 1$ .

Potom  $\sum_{k=1}^{k_n} X_{k,n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} X$  a  $\mathcal{L}(X) = N(0, 1)$ .

**Důkaz:** str. 45 věta 5.7 viz [4]

Martingalové diference budeme interpretovat jako přírůstky martingalů, což můžeme také chápat jako elementární spravedlivou hru mezi dvěma hráči. Tato hra je založena na tom, že v jednom okamžiku začneme a v druhém ihned skončíme.

## 2.6 Prediktabilní filtrace, spojitost filtrací

Nejprve si pro filtraci  $(\mathcal{F}_t, t \in T)$  definujme

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{t\uparrow} &:= \sigma \left( \bigcup_{s < t, s \in T} \mathcal{F}_s \right) \quad \text{když } t > \inf T, \\ &:= \mathcal{F}_t \quad \text{když } t = \inf T.\end{aligned}$$

Nyní rozepišme definici filtrace  $\mathcal{F}_{t\uparrow}$  pro konkrétní indexové množiny. Je-li  $T = [0, \infty)$ , pak

$$\mathcal{F}_{t\uparrow} = \begin{cases} \mathcal{F}_{t-}; & t \in (0, \infty) \dots \text{informace před časem } t \\ \mathcal{F}_0; & t = 0 \dots \text{nejmenší možná informace} \end{cases}$$

Pro diskrétní indexovou množinu  $T = \mathbb{N}_0$  je

$$\mathcal{F}_{n\uparrow} = \begin{cases} \mathcal{F}_{n-1}; & n \in \mathbb{N} \dots \text{informace do času } n-1 \\ \mathcal{F}_0; & n = 0 \dots \text{nejmenší možná informace} \end{cases}$$

Nyní se vraťme ke zmíněnému sázení. Jak již bylo zmíněno, sázíme pouze na přírůstek martingalu  $X_t$  a velikosti  $X_t = \Delta M_t = M_t - M_{t-1}$  v čase  $t-1$ . Velikost sázky označme  $K_t \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{L}(\mathcal{F}_{t\uparrow})_{t \in \mathbb{N}}$ . Pak zisk je  $K_t \cdot X_t = K_t(M_t - M_{t-1})$ . Potom  $K_t \cdot X_t$  je opět posloupnost martingalových diferencí za předpokladu, že  $K_t X_t \in \mathbb{L}_1$  viz věta 7.13 [5]. Za výše uvedeného předpokladu platí, že

$$S_n = \sum_{t=1}^n K_t X_t = \sum_{t=1}^n K_t (M_t - M_{t-1}) \text{ je } \mathcal{F}_t\text{-martingal.}$$

Můžeme říci, že  $S_n$  udává vývoj spravedlivé hry, kdy v čase  $t-1$  sázíme  $K_t$  na elementární hru.

Nechť je  $\mathcal{F}_{t\uparrow}$  **prediktabilní filtrace**, potom  $K_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_{t\uparrow})$  je proces adaptovaný a prediktabilní filtraci, což budeme stručně označovat, že  $K_t$  je **predikovatelný proces**.

Pokud máme predikovatelný proces, můžeme si představit, že hodnotu v čase  $t$  dokážeme stanovit na základě informace získané v čase  $t-1$ .

## 2.7 Wienerův a Poissonův proces

Nejprve si definujme **Wienerův proces**, neboť jej budeme potřebovat v následujícím příkladu. Stochastický proces  $W = (W_t, t \geq 0)$  se nazývá Wienerův, jestliže

1.  $W_0 = 0$  s.j. a má spojité trajektorie
2. proces má nezávislé přírůstky; platí  $\forall 0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 \dots$   
 $W_{t_{2k}} - W_{t_{2k-1}}$  jsou stochasticky nezávislé pro  $k = 1, 2, \dots$
3.  $\mathcal{L}(W_t - W_s) = N(0, |t - s|), \quad t, s \geq 0$

Ekvivalentně: Wienerův proces je centrováný gaussovský spojitý proces s kovariancemi  $\mathbb{E}W_t W_s = t \wedge s \quad t, s \geq 0$ .

**Příklad 2.7.1** Nechť  $T = [0, \infty)$ ,  $W_t$  je Wienerův proces a  $\mathcal{F}_t^W$  je kanonická filtrace Wienerova procesu, potom  $W_t$  je  $\mathcal{F}_t^W$ -prediktabilní proces.

$$W_t = \lim_{n \rightarrow \infty} W\left(t - \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_{t-}) = \mathbb{L}(\mathcal{F}_{t\uparrow}), \quad t > 0$$

$$W_0 = 0 \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_0) = \mathbb{L}\{\emptyset, \Omega\}.$$

**Příklad 2.7.2** Poissonovým procesem s intenzitou  $\lambda > 0$  rozumíme proces

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{[\nu_k \leq t]}, \quad \text{kde } \nu_k = \sum_{i=1}^k X_i$$

a kde  $X_n, n \in \mathbb{N}$  jsou nezávislé kladné náhodné veličiny s hustotou  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot 1_{(x>0)}$ .

1. Pro  $n \in \mathbb{N}$  ukažte, že  $f_{\nu_1, \dots, \nu_n}(y_1, \dots, y_n) = \lambda^n e^{-\lambda y_n} \cdot 1_{(0 < y_1 < \dots < y_n)}$ .

**Řešení:** Plyně přímo z věty o transformaci, neboť Jakobián  $|J|=1$ .

2. Pro  $k \in \mathbb{N}$  ukažte, že  $f_{\nu_k, \nu_{k+1}}(y, z) = \lambda^{k+1} \frac{y^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda z} \cdot 1_{(0 < y < z)}$ .

**Řešení:** Bez újmy na obecnosti je  $n = k + 1$ , integrujeme výsledek z 1. v daných mezích přes zbylé proměnné, tím získám marginální

hustotu a platí tedy vztah

$$\begin{aligned} f_{\nu_k, \nu_{k+1}}(y, z) &= \int \lambda^{k+1} e^{-\lambda z} 1_{[0 < y_1 < \dots < y_{k-1} < y < z]} dy_1 \dots dy_{k-1} \\ &= \lambda^{k+1} e^{-\lambda z} \frac{y^{k-1}}{(k-1)!} \cdot 1_{[0 < y < z]}. \end{aligned}$$

3. Pro  $k \in \mathbb{N}_0$  ukažte, že  $P(N_t = k) = P(\nu_k \leq t < \nu_{k+1}) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ , tj.  $N_t \sim Po(\lambda t)$ .

*Řešení:* K výslednému vztahu dojdeme prostou integrací.

$$\begin{aligned} P(N_t = k) &= P(\nu_k \leq t < \nu_{k+1}) = \int f_{\nu_k, \nu_{k+1}}(y, z) 1_{[y \leq t < z]} dy dz \\ &= \int \lambda^{k+1} e^{-\lambda z} \frac{y^{k-1}}{(k-1)!} \cdot 1_{[0 < y \leq t < z]} dy dz \\ &= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^t y^{k-1} dy \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda z} dz \\ &= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda z} = P(Po(\lambda t) = k); \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

Pro  $k = 0$  se jedná o dopočet do 1 nebo přímo z  $P(N_t = 0) = P(\nu_1 > t) = e^{-\lambda t}$ .

4. Pro  $n > k$  ukažte, že

$$f_{\nu_1, \dots, \nu_n | N_t = k}(y_1, \dots, y_n) = k! \lambda^{n-k} t^{-k} e^{-\lambda(y_n - t)} \cdot 1_{(0 < y_1 < \dots < y_k \leq t < y_{k+1} < \dots < y_n)}.$$

*Řešení:* Původní sdruženou hustotu z 1. podmiňujeme  $[N_t = k]$

$$\begin{aligned} f_{\nu_1, \dots, \nu_n | N_t = k}(y_1, \dots, y_n) &= \frac{f_{\nu_1, \dots, \nu_n}(y_1, \dots, y_n) 1_{(y_k \leq t < y_{k+1})}}{P(N_t = k)} \\ &= \frac{\lambda^n e^{-\lambda y_n} 1_{[0 < y_1 < \dots < y_k \leq t < y_{k+1} < \dots < y_n]}}{\frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda z}} \\ &= \lambda^{n-k} t^{-k} k! e^{-\lambda(y_n - t)} 1_{[0 < y_1 < \dots < y_k \leq t]} 1_{[t < y_{k+1} < \dots < y_n]} \end{aligned}$$

Výsledná hustota je tvorěna součinem dvou hustot. Jedná se tedy o 2 nezávislé vektory. Přitom využíváme

$$[N_t = k] = [\nu_k \leq t < \nu_{k+1}] \in \sigma(X_1, \dots, X_n) = \sigma(\nu_1, \dots, \nu_n).$$

5. Pro  $n > k$  ukažte, že  $f_{\nu_1, \dots, \nu_k | N_t = k}(y_1, \dots, y_k) = k! t^{-k} 1_{(0 < y_1 < \dots < y_k \leq t)}$ .

*Řešení:* Jedná se o rovnoměrné rozdělení na simplexu. Výsledek je okamžitě vypozorovatelný z (4).

6. Pro  $n > k$  ukažte, že

$$f_{\nu_{k+1}, \dots, \nu_n | N_t = k}(y_{k+1}, \dots, y_n) = \lambda^{n-k} e^{-\lambda(y_n - t)} \cdot 1_{(t < y_{k+1} < \dots < y_n)}.$$

*Řešení:* Jedná se o hustotu druhého vektoru a uvedený výsledek je tedy opět vidět z výsledku 4.

7. Ukažte, že  $(\nu_1, \dots, \nu_k)^T$  a  $(\nu_n)_{n=k+1}^\infty$  jsou nezávislé při míře  $P|_{N_t = k}$ .

*Řešení:* Při řešení tohoto úkolu se explicitně využívá věta 4.4 z [5] o nezávislosti  $\sigma$ -algeber.

(a) Nezávislost  $(\nu_1, \dots, \nu_k) \perp\!\!\!\perp (\nu_{k+1}, \dots, \nu_n)$  při míře  $P|_{N_t = k}$  plyne z tvaru hustoty v bodě 4. a platí pro všechna  $n > k$ .

(b) Zbytek plyne přímo z věty 4.4 z [5].

8. Ukažte, že  $P_{\nu_{k+j}-t, j \in \mathbb{N} | N_t = k} = P_{(\nu_n, n \in \mathbb{N})}$ .

*Řešení:* Nechť  $y_n = \tilde{y}_n + t$  a  $\nu_n = \tilde{\nu}_n - t + t$ , potom

$$\begin{aligned} f_{\nu_{k+1}-t, \dots, \nu_n-t | N_t = k}(\tilde{y}_{k+1}, \dots, \tilde{y}_n) &= \lambda^{n-k} \exp^{-\lambda \tilde{y}_n} 1_{[0 < \tilde{y}_{k+1} < \dots < \tilde{y}_n]} \\ &= f_{\nu_1, \dots, \nu_{n-k}}(\tilde{y}_{k+1}, \dots, \tilde{y}_n), \end{aligned}$$

tj.  $P_{\nu_{k+1}-t, \dots, \nu_n-t | N_t = k} = P_{\nu_1, \dots, \nu_{n-k}}$  a z tohoto plyne bod 8. okamžitě.

9. Ukažte, že  $N_s^{[t]} = N_{t+s} - N_t, s \geq 0$  je Poissonův proces při míře  $P|_{N_t = k}$ , kdykoli  $k \in \mathbb{N}_0$ .

*Řešení:*  $N_s^{[t]}$  je Poissonův proces při míře  $P|_{N_t = k}$ . Potom na množině  $[N_t = k]$  platí

$$\begin{aligned} N_s^{[t]} &= N_{t+s} - N_t \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} 1_{[\nu_j \leq t+s]} - \sum_{j=1}^{\infty} 1_{[\nu_j \leq t]} = \sum_{j=1}^{\infty} 1_{[t < \nu_j \leq t+s]} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} 1_{[0 < \nu_j - t \leq s]} = \sum_{j=k+1}^{\infty} 1_{[\nu_j - t \leq s]}. \end{aligned}$$

Zbytek řešení plyně přímo z bodu 8.

10. Ukažte, že proces  $N^{[t]}$  je nezávislý s  $(\nu_1, \dots, \nu_k)^T$  při míře  $P_{|N_t=k}$ .

*Řešení:* Posloupnost  $(\nu_1, \dots, \nu_k)^T$  je nezávislá s procesem

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} 1_{[\nu_k - t \leq s]} \text{ při míře } P_{|N_t=k},$$

což plyně z bodu 9. Potom nezávislost  $N^{[t]}$  plyně ze 7.

11. Ukažte, že Poissonův proces  $(N_t, t \geq 0)$  má nezávislé přírůstky.

*Řešení:*

- (a) Ukážeme, že  $N_t \perp\!\!\!\perp N^{[t]}$ . To plyně ihned z bodu 9., neboť podmíněné rozdělení

$$\mathcal{L}(N^{[t]} | N_t = k) = P_{|N_t=k} \left( N^{[t]} \right)^{-1} = P_N$$

nezávisí na hodnotě  $k \in \mathbb{N}_0$ .

- (b) Postupně z 1. dostáváme, že  $N_{t_1} \perp\!\!\!\perp N^{[t_1]}$ , dále

$$N_{t_2} - N_{t_1} = N_{t_2-t_1}^{[t_1]} \perp\!\!\!\perp (N^{[t_1]})^{[t_2-t_1]} = N^{[t_2]} \text{ atd.}$$

Dále už si jen stačí uvědomit, že

$$\begin{aligned} \sigma(N^{[t_1]}) &\supseteq N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}} \\ \sigma(N^{[t_2]}) &\supseteq N_{t_3} - N_{t_2}, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}} \quad \text{atd.} \end{aligned}$$

12. Ukažte, že  $P_{(N_s, s \leq t) | N_t}$  nezávisí na  $\lambda > 0$ , tj.  $N_t$  je postačující statistika pro systém  $(N_s, s \leq t)$ .

*Řešení:* Plyně okamžitě z bodu 5.

Ekvivalentně lze **Poissonův proces** definovat pomocí následujících axiomů. Poissonův proces je náhodný proces s celočíselnými nezápornými hodnotami ve spojitém čase  $\{N_t, t \geq 0\}$ , kde

1.  $N_0 = 0$ ;
2.  $N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$  jsou nezávislé pro libovolnou posloupnost  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ ;

3.  $N_t - N_s$  má Poissonovo rozdělení s intenzitou  $\lambda(t-s)$  pro libovolné  $0 \leq s < t$ .

Přičemž  $N_t$  udává v čase  $t \geq 0$  počet výskytů náhodné události v časovém horizontu  $[0, t]$ . Proces se užívá pro modelování výskytů tzv. řídkých jevů (např. otřesy burzy). Speciálně, počet  $N_t$  výskytů dané události do času  $t$  má Poissonovo rozdělení se střední hodnotou  $\lambda \cdot t$ . Potom délky intervalů mezi jednotlivými událostmi jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotu  $\frac{1}{\lambda}$ .

**Lemma 2.7.1** *Nechť  $X, Y$  jsou náhodné veličiny na  $(\Omega, \mathcal{A})$  s hodnotami v postupně měřitelných prostorech  $(S, \mathcal{S})$ ,  $(H, \mathcal{H})$  a nechť  $Y = f(X)$ , kde  $f : (S, \mathcal{S}) \rightarrow (H, \mathcal{H})$ . Bud'te  $P, Q$  pravděpodobnosti na  $(\Omega, \mathcal{A})$  a dále předpokládejme, že pro každé  $F \in \mathcal{S}$  platí  $P(X \in F|Y) \stackrel{s.j.}{=} Q(X \in F|Y)$  vzhledem k  $P$ . Nechť  $Q_Y \ll P_Y$ , pak*

1.  $Q_X \ll P_X$
2.  $\frac{dQ_X}{dP_X}(X) \stackrel{s.j.}{=} \frac{dQ_Y}{dP_Y}(Y)$  při  $[P]$ .

**Poznámka 2.7.1** Druhý bod lemmatu říká, že věrohodnostní poměr  $Q$  vůči  $P$  při pozorování  $X$  se rovná věrohodnostnímu poměru  $Q$  vzhledem k  $P$  při pozorování  $Y$ .

**Důkaz:** Víme, že existuje Radon-Nikodymova derivace  $f(y) = \frac{dQ_Y}{dP_Y}(y)$  a ukážeme, že  $g = \frac{dQ_Y}{dP_Y} \circ f$  je Radon-Nikodymova derivace míry  $Q_X$  podle  $P_X$ . Tím dostaneme 1. i 2. Bud'  $F \in \mathcal{S}$ , pak

$$\begin{aligned} \int_F g dP_X &= \int_F \frac{dQ_Y}{dP_Y}(f) dP_X = \mathbb{E}_P \left[ \frac{dQ_Y}{dP_Y}(f(X)) 1_{[X \in F]} \right] \\ &= \mathbb{E}_P \left[ 1_{[X \in F]} \frac{dQ_Y}{dP_Y}(Y) \right] = \mathbb{E}_P \left[ P(X \in F|Y) \frac{dQ_Y}{dP_Y}(Y) \right] \\ &= \int P(X \in F|Y=y) \frac{dQ_Y}{dP_Y}(y) dP_Y \\ &= \int P(X \in F|Y=y) dQ_Y(y) = \int P(X \in F|Y) dQ \\ &= \int Q(X \in F|Y) dQ = Q(X \in F) = Q_X(P), \end{aligned}$$

neboť  $P(X \in F|Y) \stackrel{\text{s.j.}}{=} Q(X \in F|Y)$ .

**Příklad 2.7.3** Wienerův proces s driftem

Spočtěte věrohodnostní poměr  $H_1 : \nu = \nu_1$  oproti  $H_0 : \nu = \nu_0$  v modelu  $B_t = W_t + \nu t$  na základě pozorování procesu  $B_s$  do času  $t$ .

**Poznámka 2.7.2** Nechť  $W$  je Wienerův proces a  $t > 0$ . Pak proces  $W^0 = (W_s - \frac{s}{t}W_t, s \leq t)$  je nezávislý s veličinou  $W_t$ .

**Důkaz:** Proces  $(W_s^0, W_t, s \leq t)$  je zřejmě gaussovský a pro  $s \leq t$  platí

$$\text{cov}(W_s^0, W_t) = \text{cov}(W_s, W_t) - \frac{s}{t} \text{cov}(W_t, W_t) = s \wedge t - \frac{s}{t}t = 0.$$

Konečně rozměrné podvektory procesu  $W^0$  jsou tedy nezávislé s veličinou  $W_t$ . Zbytek plyne přímo z věty 4.4 v [5].  $\square$

**Poznámka 2.7.3** Ukážeme, že  $B_t$  je postačující statistika  $B|_t$ , kde  $B_t = W_t + \nu t$ . Označme

$$B_s^0 = B_s - \frac{s}{t}B_t, s \leq t.$$

Protože  $B_s^0 = W_s + s\nu - \frac{s}{t}(W_t + t\nu) = W_s - \frac{s}{t}W_t = W_s^0$ , dostáváme, že

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(B|_t | B_t) &= \mathcal{L}(B^0 + B_t | B_t) = \mathcal{L}(W^0 + B_t | B_t) \\ &= \mathcal{L}(W^0 + b | B_t) |_{b=B_t} \end{aligned}$$

a vidíme, že toto podmíněné rozdělení nezávisí na hodnotě  $\nu$ . Tedy  $B_t$  je postačující statistika pro systém  $(B_s, s \leq t) = B|_t$ .

**Řešení:** Věrohodnostní poměr  $H_1 : \nu = \nu_1$  oproti  $H_0 : \nu = \nu_0$  na základě informace  $B|_t$  můžeme podle lemmatu 2.7.1 spočítat tak, že spočteme věrohodnostní poměr  $H_1 : \nu = \nu_1$  oproti  $H_0 : \nu = \nu_0$  na základě informace  $B_t$ . Protože  $B_t \sim N(\nu_1 t, t)$  při  $H_1$  a  $B_t \sim N(\nu_0 t, t)$  při  $H_0$  je odpovídající věrohodnostní poměr tvaru  $L_t = l(B_t)$ , kde

$$\begin{aligned} l(x) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{t}}\varphi\left(\frac{x-\nu_1 t}{\sqrt{t}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{t}}\varphi\left(\frac{x-\nu_0 t}{\sqrt{t}}\right)} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\nu_1 t}{\sqrt{t}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x-\nu_0 t}{\sqrt{t}}\right)^2\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2t}\left[2x(\nu_1 - \nu_0)t + (\nu_0^2 - \nu_1^2)t^2\right]\right\}, \end{aligned}$$

*potom věrohodnostní poměr*

$$L_t = l(B_t) = \exp\left\{-\frac{1}{2t} [2B_t(\nu_1 - \nu_0)t + (\nu_0^2 - \nu_1^2)t^2]\right\}.$$

□

**Poznámka 2.7.4** Dále se budeme zajímat o to, zda i v tomto případě je věrohodnostní poměr  $L_t$   $\mathcal{F}_t$ -martingalem při platnosti  $H_0$ . Za platnosti  $H_0$  platí

$$\begin{aligned} L_t &= \exp\left\{-\frac{\nu_1 - \nu_0}{2} [2(W_t + \nu_0 t) - (\nu_0 + \nu_1)t]\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{\nu_1 - \nu_0}{2} [2W_t + (\nu_1 - \nu_0)t]\right\} \\ &= \exp\{\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\}; \quad \lambda = \nu_0 - \nu_1. \end{aligned}$$

Tento proces je  $\mathcal{F}_t$ -martingalem viz příklad 1.7 bod 3. z [4].

## 2.8 Kompenzátor

Nechť  $(S_t, t \in T)$  je  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ -adaptovaný proces. Řekneme, že náhodný proces  $(K_t, t \in T)$  je **kompenzátor** procesu  $(S_t, t \in T)$  vzhledem k filtraci  $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ , jestliže  $(S_t - K_t, t \in T)$  je  $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ -martingal a  $(K_t, t \in T)$  je  $(\mathcal{F}_{t \uparrow}, t \in T)$ -adaptovaný proces.

Nyní uvedeme tvrzení k jednoznačnosti kompenzátorů.

**Tvrzení 2.8.1** Nechť  $(\mathcal{S}_t, t \in \mathbb{N})$  je integrovatelný  $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{N})$ -adaptovaný proces je  $(K_t, t \in \mathbb{N})$  je  $(\mathcal{F}_{t \uparrow}, t \in \mathbb{N})$ -adaptovaný proces. Pak  $(K_t, t \in \mathbb{N})$  je kompenzátor procesu  $(\mathcal{S}_t, t \in \mathbb{N})$  vzhledem k filtraci  $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{N})$  tehdy a jen tehdy, když existuje  $X \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_1)$  taková, že

$$K_t = X + \sum_{j=1}^{t-1} (\mathbb{E}[\mathcal{S}_{j+1} | \mathcal{F}_j] - \mathcal{S}_j) \quad s.j.$$

**Důkaz:** Viz tvrzení 1.17 v [4].

**Příklad 2.8.1** Nechť  $X_n$  je  $\mathcal{F}_n$ -adaptovaný integrovatelný proces s kompenzátem  $K_n$  a nechť  $H_n$  je omezený proces adaptovaný na filtraci  $\mathcal{F}_{n \uparrow}$ . Spočtěte kompenzátor procesu  $S_n = \sum_{t=1}^n H_t (X_t - X_{t-1})$ , kde  $X_0 := 0$ .

**Řešení:** Proces  $S_n$  je zřejmě integrovatelný a  $\mathcal{F}_n$ -adaptovaný. Podle tvrzení 2.8.1 spočítáme přírůstek kompenzátoru  $\mathcal{K}_n$  vzorcem

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{K}_n &= \mathcal{K}_n - \mathcal{K}_{n-1} \stackrel{s.j.}{=} \mathbb{E}[S_n - S_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &\stackrel{s.j.}{=} \mathbb{E}[H_n (X_n - X_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &\stackrel{s.j.}{=} H_n \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &\stackrel{s.j.}{=} H_n (K_n - K_{n-1}). \end{aligned}$$

Můžeme tedy říct, že kompenzátor procesu  $S_n = \sum_{k=1}^n H_k (X_k - X_{k-1})$  je

$$\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_1 + \sum_{k=2}^n H_k (K_k - K_{k-1}),$$

kde  $\mathcal{K}_1 \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_1)$ .

Uved'me ještě některé příklady kompenzátorů.

**Příklad 2.8.2** Nechť  $X_n, n \in \mathbb{N}$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny. Definujme  $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ . Určete kompenzátor  $K_n$  procesu  $S_n$  vzhledem k filtraci  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$  pro indexovou množinu  $T = \mathbb{N}_0$ .  
**Řešení:** Pro  $n \in T$  dostaneme přírůstek kompenzátoru  $K_n$  jako projekci přírůstku procesu  $S_{n+1} - S_n$  na  $\sigma$ -algebру  $\mathcal{F}_n$

$$K_{n+1} - K_n \stackrel{s.j.}{=} \mathbf{E}[S_{n+1} - S_n | \mathcal{F}_n] \stackrel{s.j.}{=} \mathbf{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \stackrel{s.j.}{=} \mathbf{E}X_{n+1} = \mu.$$

Kompenzátor  $K_n$  nyní dostaneme nasčítáním odpovídajících přírůstků

$$K_n = K_0 + \sum_{j=0}^{n-1} K_{j+1} - K_j = K_0 + n\mu,$$

kde  $K_0 \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_0) \subseteq \mathbb{L}(\mathcal{F}_0)$ , neboť  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ . Potože  $\mathcal{F}_0$  je triviální  $\sigma$ -algebra, podmínka  $K_0 \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_0)$  říká, že náhodná veličina je konstantní, což při ztotožnění konstantních funkcí s odpovídající reálnou hodnotou lze psát ve tvaru  $K_0 \in \mathbb{R}$ . Pokud by  $T = \mathbb{N}$ , pak by byl kompenzátor  $K_n$  obecně tvaru

$$K_n = K_1 + \sum_{j=1}^{n-1} K_{j+1} - K_j = K_1 + (n-1)\mu, \quad \text{kde } K_1 \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_1).$$

□

**Příklad 2.8.3** Spočtěte kompenzátor procesu  $N_n = S_n^2$  z předchozího příkladu za předpokladu  $\mathbf{E}X_n = \mu = 0$  vzhledem ke kanonické filtraci  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$  na indexové množině  $T = \mathbb{N}_0$ .

**Řešení:** Protože  $X_{n+1}$  je nezávislé na filtraci  $\mathcal{F}_n$ , platí

$$\begin{aligned} K_{n+1} - K_n &\stackrel{s.j.}{=} \mathbf{E}[S_{n+1}^2 - S_n^2 | \mathcal{F}_n] \\ &\stackrel{s.j.}{=} \mathbf{E}[X_{n+1}(2S_n + X_{n+1}) | \mathcal{F}_n] \\ &\stackrel{s.j.}{=} 2S_n \mathbf{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] + \mathbf{E}[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] \\ &\stackrel{s.j.}{=} 2S_n \mathbf{E}X_{n+1} + \mathbf{E}X_{n+1}^2 \\ &\stackrel{s.j.}{=} 2S_n 0 + \sigma^2 = \sigma^2. \end{aligned}$$

Pro  $\mu = 0$  je tedy kompenzátor tvaru  $K_n = K_0 + n\sigma^2$  a pro  $\mu \in \mathbb{R}$  obecné je kompenzátor tvaru

$$K_n = K_0 + n\sigma^2 + 2\mu \cdot \sum_{j=0}^{n-1} S_j,$$

kde  $K_0 \in \mathbb{R}$ . □

**Příklad 2.8.4** Spočtěte kompenzátor procesu  $N_n = S_n^2$  z předchozího příkladu za předpokladu  $\mathbf{E}X_n = \mu = 0$  tentokrát vzhledem k filtraci  $\mathcal{G}_n = \sigma(S_1^2, \dots, S_n^2) \subseteq \mathcal{F}_n$  na indexové množině  $T = \mathbb{N}_0$ .

**Řešení:** Protože  $X_{n+1}$  je nezávislé na filtraci  $\mathcal{G}_n$ , platí

$$\begin{aligned} K_{n+1} - K_n &\stackrel{s.j.}{=} \mathbf{E}[S_{n+1}^2 - S_n^2 | \mathcal{G}_n] \\ &\stackrel{s.j.}{=} \mathbf{E}[X_{n+1}(2S_n + X_{n+1}) | \mathcal{G}_n] \\ &\stackrel{s.j.}{=} \mathbf{E}[\mathbf{E}(S_{n+1}^2 - S_n^2 | \mathcal{F}_n) | \mathcal{G}_n] \\ &\stackrel{s.j.}{=} \mathbf{E}[2S_n \mathbf{E}X_{n+1} + \mathbf{E}X_{n+1}^2 | \mathcal{G}_n] \\ &\stackrel{s.j.}{=} \mathbf{E}[2S_n\mu + \sigma^2 | \mathcal{G}_n] \\ &\stackrel{s.j.}{=} \sigma^2 + 2\mu \mathbf{E}[S_n | \mathcal{G}_n]. \end{aligned}$$

Pro  $\mu = 0$  je kompenzátor tvaru  $K_n = K_0 + n\sigma^2$ . Pro  $\mu \in \mathbb{R}$  obecné je kompenzátor tvaru

$$K_n = K_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \sigma^2 + 2\mu \cdot \mathbf{E}[S_j | \mathcal{G}_n] = K_0 + n\sigma^2 + \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{E}(S_j | |S_1|, \dots, |S_n|) \right] 2\mu,$$

kde  $K_0 \in \mathbb{R}$ . □

## 2.9 Submartingaly a supermartingaly

Bud'  $T \subseteq \mathbb{R}$  a  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  filtrace na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Řekneme, že proces  $(S_t, t \in T)$  je  $\mathcal{F}_t$ -submartingal, pokud pro každé  $t \in T$  platí  $S_t \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_t, P | \mathcal{F}_t)$  a pro  $s, t \in T, s \leq t$  platí

$$\mathbb{E}[S_t | \mathcal{F}_s] \geq S_s \text{ s.j..}$$

**Tvrzení 2.9.1** Bud'  $(M_t)_{t \in T}$   $\mathcal{F}_t$ -martingal nabývající hodnot v intervalu  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$  a  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  konvexní taková, že  $S_t = f(M_t)$  je integrovatelný proces, pak  $(S_t)_{t \in T}$  je  $\mathcal{F}_t$ -submartingal.

**Důkaz:** Submartingalová vlastnost plyne z Jensenovy nerovnosti

$$\mathbb{E}[S_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(M_t) | \mathcal{F}_s] \geq f(\mathbb{E}[S_t | \mathcal{F}_s]) = f(M_s) = S_s \text{ s.j.}$$

□

**Věta 2.9.1** (Jensenova pro podmíněnou střední hodnotu)

Nechť  $X = (X_1, \dots, X_k)^T \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)^k$ . Je reálný náhodný vektor s hodnotami v neprázdné konvexní množině  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  a  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$  bud'  $\sigma$ -algebra.

1. Pak  $\mathbb{E}[X | \mathcal{F}] \in D$  skoro jistě.
2. Je-li  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  konvexní taková, že  $f(X) \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , pak platí

$$E[f(X) | \mathcal{F}] \geq f(\mathbb{E}[X | \mathcal{F}]) \quad \text{s.j.} \quad (2.7)$$

**Důkaz:** Protože  $X$  je borelovsky měřitelná náhodná veličina s hodnotami v úplném separabilním metrickém prostoru  $\mathbb{R}^k$ , existuje podle věty 9.3 z [5] podmíněné rozdělení náhodné veličiny  $X$  za podmínky  $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega, \mathcal{F})$ , kde  $Y(\omega) = \omega$  je kanonická náhodná veličina na  $\Omega$ . Protože podmíněná střední hodnota je podle věty 9.2 z [5] střední hodnotou vzhledem k podmíněnému rozdělení dostaváme

$$1 = P(X \in D) = EP(X \in D | Y) = P_{X|Y}(D) \text{ a tedy } P_{X|Y}(D) = 1 \quad \text{s.j.}$$

Speciálně  $f$  je  $P_{X|Y}$ - skoro všude definovaná skoro jistě a platí dle věty 9.2 z [5], že

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[f(X)|\mathcal{F}] &= \mathsf{E}[f(X)|Y] = \int f(x)dP_{X|Y} \geq f\left(\int x dP_{X|Y}(x)\right) \\ &= f(\mathsf{E}[X|Y]) = f(\mathsf{E}[X|\mathcal{F}]) \quad \text{s.j.} \quad \square\end{aligned}$$

**Poznámka 2.9.1** Je-li  $(S_t)_{t \in T}$   $\mathcal{F}_t$ -submartingal s hodnotami v intervalu  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$  a  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  konvexní neklesající taková, že  $f(S_t)$  je integrovatelný proces, pak opět z výše uvedené Jensenovy nerovnosti dostaneme, že  $f(S_t)$  je  $\mathcal{F}_t$ -submartingal, neboť pro  $s, t \in T, s \leq t$  platí

$$\mathsf{E}[f(S_t)|\mathcal{F}_s] \geq f(\mathsf{E}[S_t|\mathcal{F}_s]) \geq f(S_s) \quad \text{s.j.}$$

Je-li proces  $(-S_t)_{t \in T}$   $\mathcal{F}_t$ -submartingal, pak řekneme, že proces  $(S_t)_{t \in T}$   $\mathcal{F}_t$ -supermartingal. Zřejmě, pokud  $S_t$  je  $\mathcal{F}_t$ -supermartingal,  $\mathcal{F}_t$ -submartingal, pak  $(S_t)_{t \in T}$  je  $\mathcal{F}_t$ -martingal.

**Tvrzení 2.9.2** Je-li  $(X_t, t \in T)$   $\mathcal{F}_t$ -submartingal s konstantní střední hodnotou  $\mathsf{E}X_t$ . Pak  $X_t$  je  $\mathcal{F}_t$ -martingal.

**Důkaz:** Z předpokladu, že  $X_t$  je  $\mathcal{F}_t$ -submartingal plyne, že pro  $s, t \in T, s < t$  platí

$$Y = \mathsf{E}[X_t|\mathcal{F}_s] - X_s \geq 0 \quad \text{s.j. } [P]$$

a podle předpokladu konstantní střední hodnoty  $\mathsf{E}X_t = \mathsf{E}X_s$  platí  $\mathsf{E}Y = 0$ . Tedy  $Y = 0$  skoro jistě, a tedy  $\mathsf{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \stackrel{\text{s.j.}}{=} X_s$  s.j.  $\square$

Nechť  $\mathbb{T}$  je metrický prostor,  $T \subseteq \mathbb{T}$  a  $t_0 \in \mathbb{T} \setminus T$  hromadný bod  $T$ . Je-li  $(X_t, t \in T)$  reálný náhodný proces na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  a  $X \in \mathbb{L}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , píšeme  $X_t \rightsquigarrow X$  pro  $T \ni t \rightarrow t_0$ , pokud pro každou posloupnost  $t_n \in T$  konvergující k  $t_0$  platí  $X_{t_n} \rightarrow X$  skoro jistě.

**Poznámka 2.9.2** Z vlastností konvergence v pravděpodobnosti a jejímu vztahu ke konvergenci skoro jistě, plyne, že  $X_t \rightsquigarrow X$  pro  $T \ni t \rightarrow t_0$  implikuje konvergenci  $X_t \rightsquigarrow X$  pro  $T \ni t \rightarrow t_0$  v pravděpodobnosti. Dále

pokud  $T = \mathbb{N}$  a  $t_0 = \infty$ , pak  $X_n \rightsquigarrow X$  pro  $n \rightarrow \infty$  právě tehdy, když  $X_n \rightarrow X$  skoro jistě pro  $n \rightarrow \infty$ .

**Lemma 2.9.1** *Nechť  $T \subseteq \mathbb{R}$  ( $X_t, t \in T$ ) je reálný náhodný proces na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  a pro každé  $T \ni t_n \rightarrow t_0 \in \mathbb{R} \setminus T$  existuje limita skoro jistě posloupnosti  $X_{t_n}$ . Bud'  $T \ni t_n \rightarrow t_0 \in \mathbb{R}$  pevné, označme  $X_\infty = F(X_{t_n}, n \in \mathbb{N})$ , kde*

$$F : (x_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} x_n 1_{[\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ existuje v } \mathbb{R}]}$$

Pak  $X_t \rightsquigarrow X_\infty$  pro  $T \ni t \rightarrow t_0$ . Je-li navíc proces  $X_t$  adaptovaný vzhledem k filtraci  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  a  $t_0 = \sup T$  či  $t_0 = \inf T$ , pak  $X_\infty \in \mathbb{L}(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$  resp.  $X_\infty \in \mathbb{L}(\Omega, \mathcal{F}_{-\infty})$ .

**Dukaz:** Je-li  $t_n$  pevně zvoleno jako ve znění lemmatu a veličina  $X_\infty = F(X_{t_n}, n \in \mathbb{N})$ . Pak zřejmě  $X_{t_n} \rightarrow X_\infty$  skoro jistě. Dále je-li  $X_t$   $\mathcal{F}_t$ -adaptovaný proces a  $t_0 = \sup T \notin T$ , pak  $X_\infty$  je  $\mathcal{F}_\infty$ -měřitelná náhodná veličina a podobně, pokud  $t_0 = \inf T \notin T$ , je  $X_\infty$   $\mathcal{F}_{-\infty}$ -měřitelná náhodná veličina. Je-li  $T \ni s_n \rightarrow t_0, n \rightarrow \infty$  jiná posloupnost, pak existuje posloupnost  $T \ni r_n \rightarrow t_0$  a posloupnosti  $n_k \nearrow \infty, m_k \nearrow \infty$  takové, že  $r_{n_k} = t_k$  a  $r_{m_k} = s_k$ . Podle předpokladu existuje  $X \in \mathbb{L}$  taková, že  $X_{r_n} \rightarrow X$  skoro jistě pro  $n \rightarrow \infty$ . Pak

$$X_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} X_{t_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} X_{r_{n_k}} = X = \lim_{k \rightarrow \infty} X_{r_{m_k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} X_{s_k} \quad \text{s.j..}$$

Platí tedy  $X_{s_k} \rightarrow X_\infty$  s.j. a tedy  $X_t \rightsquigarrow X_{t_0}$  pro  $T \ni t \rightarrow t_0$ .  $\square$

**Věta 2.9.2** *Nechť  $T \subseteq \mathbb{R}$  a  $(S_t)_{t \in T}$   $\mathcal{F}_t$ -submartingal.*

1. Nechť  $t_\infty = \sup T \notin T$  a nechť  $S_t^+, t \in T$  jsou stejnoměrně integrovatelné veličiny, pak existuje  $S_\infty \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P|\mathcal{F}_\infty)$  takové, že  $S_t \rightsquigarrow S_\infty$  pro  $T \ni t \rightarrow t_\infty$ .
2. Nechť  $t_{-\infty} = \inf T \notin T$ , pak existuje  $S_{-\infty} \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_{-\infty}, P|\mathcal{F}_{-\infty})$  taková, že  $S_t \rightsquigarrow S_{-\infty}$  pro  $T \ni t \rightarrow t_{-\infty}$ .

**Dukaz:**

- Podle věty 4.1 z [4] kdykoli  $T \ni t_n \rightarrow t_\infty$  existuje  $S \in \mathbb{L}_1$  taková, že  $S_{t_n} \rightarrow S$  s.j. Podle lemmatu  $S_\infty := F_\infty(S_{t_n}, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{L}(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$  a platí  $S_t \rightsquigarrow S_\infty$ , navíc také  $S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{t_n} = S \in \mathbb{L}_1$  skoro jistě. Tedy  $S_\infty \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P|\mathcal{F}_\infty)$ .
- Podle věty 4.1 z [4] kdykoli  $T \ni t_n \rightarrow t_{-\infty}$  existuje  $S \in \mathbb{L}_1$  taková, že  $S_{t_n} \rightarrow S$  s.j. Opět podle lemmatu  $S_{-\infty} := F_\infty(S_{t_n}, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{L}(\Omega, \mathcal{F}_{-\infty})$  a platí  $S_t \rightsquigarrow S_{-\infty}$ , navíc  $S_{-\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{t_n} = S \in \mathbb{L}_1$  skoro jistě. Tedy  $S_{-\infty} \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_{-\infty}, P|\mathcal{F}_{-\infty})$ .

□

**Věta 2.9.3** *Bud'  $T \subseteq \mathbb{R}$ ,  $(S_t)_{t \in T}$  stejnoměrně integrovatelný  $\mathcal{F}_t$ -submartingal.*

- Nechť  $t_\infty = \sup T \notin T$ , pak existuje veličina  $S_\infty \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P|\mathcal{F}_\infty)$  taková, že

$$\mathbb{E}[S_\infty | \mathcal{F}_t] \geq S_t \rightsquigarrow S_\infty \text{ pro } T \ni t \rightarrow t_\infty \text{ i v } \mathbb{L}_1.$$

- Nechť  $t_{-\infty} = \inf T \notin T$ , pak existuje veličina  $S_{-\infty} \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_{-\infty}, P|\mathcal{F}_{-\infty})$  taková, že

$$S_{-\infty} \leq \mathbb{E}[S_t | \mathcal{F}_{-\infty}] \rightsquigarrow S_{-\infty} \text{ pro } T \ni t \rightarrow t_{-\infty} \text{ i v } \mathbb{L}_1.$$

**Dukaz:**

- Podle věty 2.9.2 existuje  $S_\infty \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P|\mathcal{F}_\infty)$  taková, že  $S_t \rightsquigarrow S_\infty$  pro takové  $T \ni t \rightarrow t_\infty$ . Protože proces  $(S_t, t \in T)$  je stejnoměrně integrovatelný a  $S_t \rightarrow S_\infty$  v pravděpodobnosti, dostáváme také konvergenci v  $\mathbb{L}_1$ . Je-li  $T \in t_n \nearrow t_\infty$  pevná posloupnost, existuje dle věty 4.5 z [4]  $S \in \mathbb{L}_1$  taková, že  $S_{t_n} \rightarrow S$  skoro jistě a navíc platí  $\mathbb{E}[S | \mathcal{F}_{t_n}] \geq S_{t_n}$  skoro jistě. Platí tedy  $S = S_\infty$  skoro jistě, neboť  $S_t \rightsquigarrow S_\infty$  pro  $T \ni t \rightarrow t_\infty$ . Je-li  $t \in T$ , pak existuje  $n \in \mathbb{N}$  takové, že  $t \leq t_n$  a platí

$$\mathbb{E}[S_\infty | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[S | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S | \mathcal{F}_{t_n}] | \mathcal{F}_t] \geq \mathbb{E}[S_{t_n} | \mathcal{F}_t] \geq S_t \text{ s.j.}$$

2. Podle věty 2.9.2 existuje  $S_{-\infty} \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_{-\infty}, P|\mathcal{F}_{-\infty})$  taková, že  $S_t \rightsquigarrow S_{-\infty}$  pro  $T \ni t \rightarrow t_{-\infty}$ . Protože je proces  $(S_t, t \in T)$  opět stejnoměrně integrovatelný a  $S_t \rightarrow S_{\infty}$  v pravděpodobnosti, máme  $S_t \rightarrow S_{\infty}$  v  $\mathbb{L}_1$ . Je-li  $T \in t_n \searrow t_{-\infty}$  pevná posloupnost, existuje dle věty 4.6 z [4]  $S \in \mathbb{L}_1$  taková, že  $S_{t_n} \rightarrow S$  skoro jistě a  $S \leq \mathbb{E}[S_{t_n}|\mathcal{F}_{-\infty}]$  skoro jistě. Pak zřejmě  $S_{\infty} \stackrel{\text{s.j.}}{=} S \in \mathbb{L}_1$ . Je-li  $t \in T$ , pak existuje  $n \in \mathbb{N}$  takové, že  $t \geq t_n$ , a tak

$$\mathbb{E}[S_t|\mathcal{F}_{-\infty}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t|\mathcal{F}_{t_n}]|\mathcal{F}_{-\infty}] \geq \mathbb{E}[S_{t_n}|\mathcal{F}_{-\infty}] \geq S \geq S_{\infty} \quad \text{s.j.}$$

□

**Lemma 2.9.2 (Stejnoměrná integrovatelnost)**

Submartingal  $X$  je na  $\mathbb{Z}_0^-$  stejnoměrně integrovatelný právě tehdy, když střední hodnota  $\mathbb{E}X$  je omezená.

**Dukaz:** Nechť  $\mathbb{E}X$  je omezená. Zaved'me si posloupnost

$$\alpha_n = \mathbb{E}[\Delta X_n|\mathcal{F}_{n-1}] \geq 0, \quad n \leq 0, \quad \text{kde} \quad \Delta X := X_n - X_{n+1}$$

a poznamenejme, že

$$\mathbb{E} \sum_{n \leq 0} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_0 - \mathbb{E}X_{-n} = \mathbb{E}X_0 - \inf_{n \leq 0} \mathbb{E}X_n < \infty.$$

Tudíž  $\sum_n \alpha_n < \infty$  s.j., potom pro  $n \in \mathbb{Z}_0^-$  můžeme definovat

$$A_n = \sum_{k \leq n} \alpha_k, \quad M_n = X_n - A_n.$$

Zde  $\mathbb{E}A_0 < \infty$ ,  $A_{n+1} \in \mathbb{L}^*(\mathcal{F}_n)$ . Ukážeme, že proces  $M_n$  je  $\mathcal{F}_n$ -martingal.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &\stackrel{\text{s.j.}}{=} \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[A_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &\stackrel{\text{s.j.}}{=} \mathbb{E}[\Delta X_{n+1}|\mathcal{F}_n] + X_n - A_n - \alpha_{n+1} \stackrel{\text{s.j.}}{=} M_n. \end{aligned}$$

Proces  $M_n$  je tedy martingal s uzávěrem  $M_0$  a je tedy stejnoměrně integrovatelný. Proces  $A$  je majorizován veličinou  $|A_0| \in \mathbb{L}_1$ , a je tedy stejnoměrně integrovatelný. Pak proces  $X_n = M_n + A_n$  je také stejnoměrně integrovatelný.

Opačná implikace plyne z vlastnosti stejnoměrné integrovatelnosti.  $\square$

Pro úplnost uvedeme Doobovu větu z [3] o regularizaci submartingalu.

Věta 6.27 str. 11 v [3] (regularizace submartingalu, Doob)

**Věta 2.9.4** Nechť  $X_t$  je  $\mathcal{F}_t$ -submartingal na  $T = [0, \infty)$  na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  a restrikcí  $Y = (X_t, t \in T \cap \mathbb{Q})$ .

1. Pak existuje  $P$ -nulová množina  $A$  taková, že následující proces

$$Z(t, \omega) = \lim_{\mathbb{Q} \ni r \searrow t} Y(r, \omega) \cdot 1_{[\omega \notin A]}$$

je dobře definovaný zprava spojitý  $\mathcal{G}_{t+}$ -submartingal s trajektoriami, které mají limity zleva, kde  $\mathcal{G}_t = \sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{N})$  a kde  $\mathcal{N} = \{B \in \mathcal{A}; P(B) = 0\}$  je systém  $P$ -nulových množin, který obohacuje filtraci  $\mathcal{F}_t$ .

2. Je-li filtrace  $\mathcal{F}_t$  zprava spojitá, pak proces  $X_t$  má zprava spojitu modifikaci s trajektoriami, které mají limity zleva právě tehdy, když je funkce  $t \in T \mapsto \mathbf{E} X_t$  zprava spojitá. Tato podmínka je splněna například, pokud proces  $X_t$  je martingal.

**Důkaz:** Důkaz je uveden ve větě 6.27 v [3].

# Kapitola 3

## Martingalové míry a reprezentační vlastnost

### 3.1 Martingalové míry

Je-li proces  $(M_t, t \in T)$   $\mathcal{F}_t$ -martingalem na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ , pak pravděpodobnostní míru  $P$  na  $\mathcal{F}_\infty$  nazveme  $\mathcal{F}_t$ -*martingalovou mírou* procesu  $M_t$ .

**Poznámka 3.1.1** Množina martingalových mér je konvexní.

**Důkaz:** Nechť  $P, Q$  jsou  $\mathcal{F}_t$ -martingalové míry procesu  $M_t$ , pak pro každé  $s \leq t, F \in \mathcal{F}_s$  platí

$$\int_F (M_t - M_s) dP = 0 = \int_F (M_t - M_s) dQ$$

a tedy  $\int_F (M_t - M_s) dR = 0$  platí pro  $R = \lambda P + (1 - \lambda) Q$  kdykoli  $\lambda \in (0, 1)$ . Protože  $M_t$  je  $\mathcal{F}_t$ -adaptovaný proces, je to  $\mathcal{F}_t$ -martingal i při míře  $R$ , neboť

$$\int |M_t| dR = \lambda \int |M_t| dP + (1 - \lambda) \int |M_t| dQ < \infty.$$

**Lemma 3.1.1** Nechť  $0 \leq X \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Pak

1.  $X 1_{[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = 0]} = 0$  s.j.
2. Označme  $Y = \frac{X}{\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]}$  při konvenci „ $\frac{cokoli}{0} = 0$ “. Pak  $Y \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$  a  $\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] \leq 1$  s.j.

3. Je-li  $Z \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{F}, P|\mathcal{F})$ , pak  $ZY \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$  a platí

$$\mathbf{E}[ZY|\mathcal{F}] = Z \cdot \mathbf{E}[Y|\mathcal{F}].$$

**Důkaz:**

1. Označme  $0 \leq U = X1_{[\mathbf{E}[X|\mathcal{F}] = 0]} \in \mathbb{L}_1$ . Pak

$$\mathbf{E}[U|\mathcal{F}] = 1_{[\mathbf{E}[X|\mathcal{F}] = 0]}\mathbf{E}[X|\mathcal{F}] = 0 \quad \text{s.j.,}$$

a tedy  $\mathbf{E}U = 0$ . Protože  $U \geq 0$ , máme  $U = 0$  skoro jistě.

2. Podle bodu (1) je veličina  $Y$  dobře definována při konvenci „ $\frac{0}{0} = 0$ “ až na množinu míry 0. Konvence „ $\frac{\text{cokoli}}{0} = 0$ “ znamená, že veličiny  $Y$  dodefinováváme nulou na množině míry 0. Protože  $\mathbf{E}[X|\mathcal{F}] \geq 0$  skoro jistě, platí skoro jistě také, že  $Y \geq 0$ . Označme  $F_n = [|\mathbf{E}[X|\mathcal{F}]| \geq \frac{1}{n}] \in \mathcal{F}$ . Protože  $1_{F_n}\mathbf{E}[X|\mathcal{F}]^{-1} \in \mathbb{L}_\infty(\mathcal{F})$ , platí

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[1_{F_n}Y] &= \mathbf{E}\left[1_{F_n}\mathbf{E}[X|\mathcal{F}]^{-1}X\right] \\ &= \mathbf{E}\left[1_{F_n}\mathbf{E}[X|\mathcal{F}]^{-1}\mathbf{E}[X|\mathcal{F}]\right] = P(F_n) \leq 1. \end{aligned}$$

Z Léviho věty o monotónní konvergenci dostaneme, že  $\mathbf{E}[1_{F_n}Y] \rightarrow \mathbf{E}[1_FY] = \mathbf{E}Y$ , kde  $F = [\mathbf{E}[X|\mathcal{F}] \neq 0] \in \mathcal{F}$ , neboť  $1_FY = Y$  s.j. Pak máme  $\mathbf{E}Y \leq 1$ , a tedy  $Y \in \mathbb{L}_1$ . Z věty 7.13 v [5] plyne, že

$$\mathbf{E}[Y|\mathcal{F}] = \mathbf{E}[X|\mathcal{F}]^{-1} \cdot \mathbf{E}[X|\mathcal{F}] = 1_{[\mathbf{E}[X|\mathcal{F}] \neq 0]} \leq 1 \quad \text{s.j.}$$

3. Z věty 7.13 viz [5] plyne, že stačí ukázat  $ZY \in \mathbb{L}_1$ . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokladat, že  $Z \geq 0$ , jinak bychom pracovali s  $|Z|$  místo se  $Z$ . Pro  $n \in \mathbb{N}$  označíme  $G_n = [Z \leq n]$ . Protože  $1_{G_n}Z \in \mathbb{L}_\infty(\mathcal{F})$ , platí

$$\mathbf{E}[1_{G_n}ZY] = \mathbf{E}[1_{G_n}ZE[Y|\mathcal{F}]] \leq \mathbf{E}[1_{G_n}Z] \rightarrow \mathbf{E}[Z]$$

podle Léviho věty. Dostáváme tak  $\mathbf{E}[ZY] \leq \mathbf{E}[Z] < \infty$ , a tedy  $ZY \in \mathbb{L}_1$ .  $\square$

**Lemma 3.1.2** *Nechť  $P, Q$  jsou pravděpodobnosti na  $(\Omega, \mathcal{A})$  a  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$  je  $\sigma$ -algebra taková, že  $P|\mathcal{F} \ll Q|\mathcal{F}$  a  $Q \ll P$ . Bud'  $X \in \mathbb{L}(\mathcal{A})$ , pak*

1.  $X \in \mathbb{L}_1(Q)$  právě tehdy, když  $X \frac{dQ}{dP} \in \mathbb{L}_1(P)$

2. Nechť  $X \in \mathbb{L}_1(Q)$ , pak

$$\mathbb{E}_Q[X|\mathcal{F}] = \frac{\mathbb{E}\left[X \frac{dQ}{dP}|\mathcal{F}\right]}{\mathbb{E}_Q\left[\frac{dQ}{dP}|\mathcal{F}\right]} \text{ skoro jistě vzhledem k } P, Q.$$

**Důkaz:**

$$1. \mathbb{E}_Q|X| = \int |X|dQ = \int |X| \frac{dQ}{dP} dP = \mathbb{E}|X \frac{dQ}{dP}|$$

2. Bez újmy na obecnosti  $X \geq 0$  skoro jistě, jinak  $X$  rozložíme na  $X = X^+ - X^-$ . Podle 1. platí  $X \frac{dQ}{dP} \in \mathbb{L}_1(P)$ . Podobně bychom dostali, že  $\mathbb{E}\left[\frac{dQ}{dP}|\mathcal{F}\right] = \frac{dQ|\mathcal{F}}{dP|\mathcal{F}}$ . Protože však  $P|\mathcal{F} \ll Q|\mathcal{F}$  je tato náhodná veličina kladná skoro jistě vzhledem k  $[P]$ . Označme pravou stranu v rovnosti v bodě 2. jako náhodnou veličinu  $0 \leq Y \in \mathbb{L}(\mathcal{F})$ , která je skoro jistě dobře definovaná a skoro jistě nezáporná. Pak pro  $F \in \mathcal{F}$  z definice podmíněné střední hodnoty dostaneme, že

$$\begin{aligned} \int_F Y dQ &= \int_F \mathbb{E}\left[X \frac{dQ}{dP} \middle| \mathcal{F}\right] \frac{dP|\mathcal{F}}{dQ|\mathcal{F}} dQ|\mathcal{F} \\ &= \int_F \mathbb{E}\left[X \frac{dQ}{dP} \middle| \mathcal{F}\right] dP|\mathcal{F} = \int_F X \frac{dQ}{dP} dP \\ &= \int_F X dQ. \end{aligned}$$

Dostaneme tak, že  $Y \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{F}, Q|\mathcal{F})$  a  $\mathbb{E}_Q[X|\mathcal{F}] = Y$   $Q$ -skoro jistě, ale protože jsou obě veličiny  $\mathcal{F}$ -měřitelné a  $Q|\mathcal{F} \sim P|\mathcal{F}$  dostáváme také rovnost  $P$ -skoro jistě.  $\square$

## 3.2 Reprezentační vlastnost

Bud'  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  pravděpodobnostní prostor a  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$   $\sigma$ -algebra. Řekneme, že veličina  $\Delta M \in \mathbb{L}(\mathcal{A})$  má **reprezentační vlastnost**  $\sigma$ -algebry  $\mathcal{A}$  vzhledem k  $\mathcal{F}$ , pokud

$$\forall X \in \mathbb{L}_\infty(\mathcal{A}) \quad \exists H, C \in \mathbb{L}(\mathcal{F}) \quad X = C + H \cdot \Delta M \quad \text{s.j. } [P]. \quad (3.1)$$

**Poznámka 3.2.1** Pokud  $\Delta M \in \mathbb{L}_1$  a  $\mathbf{E}[\Delta M|\mathcal{F}] \stackrel{\text{s.j.}}{=} 0$ , pak  $\Delta M$  má reprezentační vlastnost  $\mathcal{A}$  vzhledem k  $\mathcal{F}$  právě tehdy, když

$$\forall X \in \mathbb{L}_\infty(\mathcal{A}) \quad \exists H \in \mathbb{L}(\mathcal{F}) \quad X \stackrel{\text{s.j.}}{=} \mathbf{E}[X|\mathcal{F}] + H \cdot \Delta M \quad (3.2)$$

**Důkaz:** Jedna implikace je zřejmá. Dokážeme opačnou. Předpokládejme, že  $\Delta M$  má reprezentační vlastnost  $\mathcal{A}$  vzhledem k  $\mathcal{F}$ . Označme  $Y = X - \mathbf{E}[X|\mathcal{F}] \in \mathbb{L}_\infty(\mathcal{A})$ . Pak  $\mathbf{E}[Y|\mathcal{F}] \stackrel{\text{s.j.}}{=} 0$ . Platí-li (3.1), pak  $Y \stackrel{\text{s.j.}}{=} C + H \cdot \Delta M$ , kde  $H, C \in \mathbb{L}(\mathcal{F})$ . Je-li  $F \in \mathcal{F}$ , pak

$$F_n = F \cap [|H| \leq n] \in \mathcal{F} \quad \text{a} \quad H_n = H \mathbf{1}_{[|H| \leq n]} \in \mathbb{L}_\infty(\mathcal{F}).$$

Pak

$$0 = \int_{F_n} Y dP = \int_{F_n} (C + H \Delta M) dP = \int_{F_n} C dP + \int_F H_n \cdot \Delta M dP. \quad (3.3)$$

Protože  $\mathbf{E}[H_n \Delta M|\mathcal{F}] = H_n \mathbf{E}[\Delta M|\mathcal{F}] = 0$  s.j. a  $F \in \mathcal{F}$ , je poslední člen (3.3) roven nule. Tedy pro každé  $F \in \mathcal{F}$  platí  $\int_F C \mathbf{1}_{[|H| \leq n]} dP = \int_{F_n} C dP = 0$ , což znamená, že  $C \mathbf{1}_{[|H| \leq n]} = 0$  skoro jistě pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a tedy  $C = 0$  s.j., neboť  $C \in \mathbb{L}(\mathcal{F})$ . Pak platí  $Y \stackrel{\text{s.j.}}{=} H \cdot \Delta M$ , a tedy  $X \stackrel{\text{s.j.}}{=} \mathbf{E}[X|\mathcal{F}] + H \cdot \Delta M$ .  $\square$

**Poznámka 3.2.2** Pokud  $\Delta M \in \mathbb{L}_1$  a  $\mathbf{E}[\Delta M|\mathcal{F}] \stackrel{\text{s.j.}}{=} 0$ , pak  $\Delta M$  má reprezentační vlastnost na  $\mathcal{A}$  vzhledem k  $\mathcal{F}$  právě tehdy, když

$$\forall X \in \mathbb{L}_1(\mathcal{A}) \quad \exists H \in \mathbb{L}(\mathcal{F}) \quad X \stackrel{\text{s.j.}}{=} \mathbf{E}[X|\mathcal{F}] + H \cdot \Delta M. \quad (3.4)$$

**Důkaz:** Opět je jedna implikace zřejmá, neboť  $\mathbb{L}_\infty(\mathcal{A}) \subseteq \mathbb{L}_1(\mathcal{A})$ . Pokud platí (3.4), pak pro  $n \in \mathbb{N}$  platí  $X_n = X \mathbf{1}_{[|X| \leq n]} \in \mathbb{L}_\infty(\mathcal{A})$ , a tedy

$$X_n = \mathbf{E}[X_n|\mathcal{F}] + H_n \cdot \Delta M$$

pro nějaké  $H_n \in \mathbb{L}(\mathcal{F})$ . Zřejmě tedy

$$H_n \mathbf{1}_{[\Delta M \neq 0]} \stackrel{\text{s.j.}}{=} \frac{X_n - \mathbf{E}[X_n|\mathcal{F}]}{\Delta M} \cdot \mathbf{1}_{[\Delta M \neq 0]} \stackrel{\text{s.j.}}{\rightarrow} \frac{X - \mathbf{E}[X|\mathcal{F}]}{\Delta M} \cdot \mathbf{1}_{[\Delta M \neq 0]} =: \tilde{H}.$$

Bud'  $u : x \in \bar{\mathbb{R}} \mapsto x \mathbf{1}_{[x \in \mathbb{R}]} \in \mathbb{R}$ , pak

$$H := u \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} H_n \right) \in \mathbb{L}(\mathcal{F}) \quad \& \quad H \stackrel{\text{s.j.}}{=} \tilde{H}$$

a potom  $X \stackrel{\text{s.j.}}{=} \mathbf{E}[X|\mathcal{F}] + H \cdot \Delta M$ . □

Budě  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  pravděpodobnostní prostor a  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$   $\sigma$ -algebra. Řekneme, že míra  $P$  **vyvažuje veličinu**  $N \in \mathbb{L}(\mathcal{A})$  na  $\mathcal{A}$  vzhledem k  $\mathcal{F}$ , pokud  $N \in \mathbb{L}_1(P)$  a  $\mathbf{E}[N|\mathcal{F}] = 0$ .

**Poznámka 3.2.3**  $P$  je vyvažující míra  $N$  na  $\mathcal{A}$  vzhledem k  $\mathcal{F}$  právě tehdy, když  $P$  je martingalová míra procesu  $(0, N)$  vzhledem k filtraci  $(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ .

**Tvrzení 3.2.1** *Nechť existují alespoň dvě různé vyvažující míry  $Q, R$  náhodné veličiny  $N \in \mathbb{L}(\mathcal{A})$ , které se shodují na  $\sigma$ -algebře  $\mathcal{F}$  (tj.  $Q|\mathcal{F} = R|\mathcal{F}$ ) a jsou ekvivalentní s mírou  $P$ , pak  $N$  nemá reprezentační vlastnost  $\mathcal{A}$  vzhledem k  $\mathcal{F}$  při  $P$ .*

**Důkaz:** Budě  $\lambda \in (0, 1)$  a  $S = \lambda Q + (1 - \lambda)R$ . Pak  $S \sim P$  je vyvažující míra  $N$ , neboť množina vyvažujících měr je konvexní dle poznámky 3.1.1. Platí tedy  $N \in \mathbb{L}_1(S)$  a  $\mathbf{E}_S[N|\mathcal{F}] = 0$ . Označme  $X = \frac{dQ}{dS}$ , pak  $X \in \mathbb{L}_\infty(\mathcal{A})$ , neboť  $X \in [0, \frac{1}{\lambda}]$  skoro jistě  $[S]$ , což plyne z nerovnosti  $S \geq \lambda Q$ . Označme dále  $Y = X - \mathbf{E}[X|\mathcal{F}] \in \mathbb{L}_\infty(\mathcal{A})$ . Protože  $Q|\mathcal{F} = S|\mathcal{F}$ , platí

$$\mathbf{E}[X|\mathcal{F}] = \mathbf{E}\left[\frac{dQ}{dS}|\mathcal{F}\right] = \frac{dQ|\mathcal{F}}{dS|\mathcal{F}} = 1 \text{ s.j.} \quad (3.5)$$

Sporem předpokládejme, že  $N$  má reprezentační vlastnost na  $\mathcal{A}$  vzhledem k  $\mathcal{F}$ . Existuje tedy  $H \in \mathbb{L}(\mathcal{F})$  takové, že  $Y \stackrel{\text{s.j.}}{=} HN$ , neboť  $\mathbf{E}_S[Y|\mathcal{F}] \stackrel{\text{s.j.}}{=} 0$ . Protože  $Y \stackrel{\text{s.j.}}{=} HN \in \mathbb{L}_\infty(\mathcal{A})$  platí  $N_n := N1_{F_n} \in \mathbb{L}_\infty(\mathcal{A})$ , kde  $F_n = [|H| > \frac{1}{n}] \in \mathcal{F}$ . Protože  $Q, S$  jsou vyvažující míry  $N$  na  $\mathcal{A}$  vzhledem k  $\mathcal{F}$ , platí dle 3.5, že

$$\int_F Y N_n dS = \int_{F \cap F_n} Y N dS = \int_{F \cap F_n} N (dQ - dS) = 0,$$

kdykoli  $F \in \mathcal{F}$ . Tedy

$$0 = \mathbf{E}_S[YN_n|\mathcal{F}] \stackrel{\text{s.j.}}{=} \mathbf{E}_S[HN_n^2|\mathcal{F}] \stackrel{\text{s.j.}}{=} H \cdot \mathbf{E}_S[N_n^2|\mathcal{F}] .$$

Odtud dostáváme, že

$$0 = n|H| \mathbf{E}_S[N_n^2|\mathcal{F}] \geq \mathbf{E}_S[N_n^2|\mathcal{F}] \geq \mathbf{E}_S[|N_n||\mathcal{F}]^2 \rightarrow \mathbf{E}_S[|N||\mathcal{F}]^2 1_{[H \neq 0]}$$

skoro jistě. Tedy

$$0 \stackrel{\text{s.j.}}{=} |H|1_{[H \neq 0]} \mathsf{E}_S [|N| | \mathcal{F}] \stackrel{\text{s.j.}}{=} \mathsf{E}_S [|HN| | \mathcal{F}],$$

a tak  $\mathsf{E}|HN| = 0$ , tj.  $Y = HN = 0$  skoro jistě. To znamená, že  $X = 1$  skoro jistě  $[S]$ , a tak  $Q = S$ , což dává, že  $R = Q$ .  $\square$

**Tvrzení 3.2.2** *Nechť  $N \in \mathbb{L}_\infty(\mathcal{A})$  a nechť existuje právě jedna vyvažující míra  $Q$  veličiny  $N$  na  $\mathcal{A}$  vzhledem k  $\mathcal{F}$  ekvivalentní s  $P$  taková, že  $Q|\mathcal{F} = P|\mathcal{F}$ , pak  $N$  má reprezentační vlastnost na  $\mathcal{A}$  vzhledem k  $\mathcal{F}$ .*

**Důkaz:** Bud'  $X \in \mathbb{L}_\infty(\mathcal{A})$  a označme  $Y = X - \mathsf{E}_Q[X|\mathcal{F}] \in \mathbb{L}_\infty(\mathcal{F})$ . Označme

$$H = \frac{\mathsf{E}[YN|\mathcal{F}]}{\mathsf{E}[N^2|\mathcal{F}]} \in \mathbb{L}(\mathcal{F}),$$

přičemž používáme konvenci „cokoli/0 = 0“. Poznamenejme, že podle lemmatu 3.1.1 bodu 1 platí  $\mathsf{E}[YN|\mathcal{F}] 1_{[\mathsf{E}[N^2|\mathcal{F}]=0]} \stackrel{\text{s.j.}}{=} 0$ , což znamená, že dělíme nenulovou hodnotu nulou pouze na množině míry nula. Označme  $Z = Y - HN$ . Nechť  $K \in (0, \infty)$  je takové, že  $|Y|, |N| \leq K$  skoro jistě. Pak

$$|Z| \leq |Y| + |HN| \leq K(1 + |H|) < K(2 + |H|) \text{ skoro jistě.}$$

Označme  $D = [K(2 + |H|)]^{-1} \in \mathbb{L}_\infty(\mathcal{F})$ , pak  $|DZ| < 1$  skoro jistě. Dále definujme míru

$$R : A \in \mathcal{A} \mapsto \int_A (1 + DZ) \, dQ.$$

Ukážeme, že jde o pravděpodobnost. Označme  $G_n = [|D| > \frac{1}{n}]$  a  $D_n = D1_{G_n}$ . Pak  $|Z1_{G_n}| \leq |ZD|n \in \mathbb{L}_\infty$  pro  $n \in \mathbb{N}$  a podobně

$$|HN1_{G_n}| \leq |Y| + |Z|1_{G_n} \in \mathbb{L}_\infty.$$

Pro  $n \in \mathbb{N}$  tak platí

$$\mathsf{E}_Q[Y|\mathcal{F}] \stackrel{\text{s.j.}}{=} 0 \quad \& \quad \mathsf{E}_Q[HN1_{G_n}|\mathcal{F}] \stackrel{\text{s.j.}}{=} H1_{G_n} \mathsf{E}_Q[N|\mathcal{F}] \stackrel{\text{s.j.}}{=} 0.$$

Pak také

$$\mathsf{E}_Q[Z1_{G_n}|\mathcal{F}] \stackrel{\text{s.j.}}{=} 1_{G_n} \mathsf{E}_Q[Y|\mathcal{F}] - \mathsf{E}_Q[HN1_{G_n}|\mathcal{F}] \stackrel{\text{s.j.}}{=} 0,$$

a tedy  $\mathbb{E}_Q [D_n Z | \mathcal{F}] = D\mathbb{E}_Q [Z 1_{G_n} | \mathcal{F}] = 0$  skoro jistě. Odtud limitním přechodem pro  $n \rightarrow \infty$  dostaneme, že

$$0 \stackrel{\text{s.j.}}{=} \mathbb{E}_Q [D_n Z | \mathcal{F}] \stackrel{\text{s.j.}}{\rightarrow} \mathbb{E}_Q [DZ | \mathcal{F}]$$

a tedy  $\mathbb{E}_Q [DZ | \mathcal{F}] \stackrel{\text{s.j.}}{=} 0$ . Pak

$$R(\Omega) = Q(\Omega) + \mathbb{E}_Q(DZ) = 1,$$

a tedy  $R$  je pravděpodobnostní míra. Navíc  $Q = R$  na  $\mathcal{F}$ , neboť pro  $F \in \mathcal{F}$  platí

$$R(F) - Q(F) = \mathbb{E}_Q [\mathbb{E}_Q [DZ 1_F | \mathcal{F}]] = \mathbb{E}_Q [1_F \mathbb{E}_Q [DZ | \mathcal{F}]] = 0.$$

Ukážeme, že  $R$  vyvažuje  $N$  vzhledem k  $\mathcal{F}$ . Podle předpokladu  $N \in \mathbb{L}_\infty(P) = \mathbb{L}_\infty(Q) = \mathbb{L}_\infty(R)$ . Dále z definice  $H$  dostaneme, že

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q [ND_n Z | \mathcal{F}] &\stackrel{\text{s.j.}}{=} \mathbb{E}_Q [ND_n Y | \mathcal{F}] - \mathbb{E}_Q [N^2 D_n H | \mathcal{F}] \\ &\stackrel{\text{s.j.}}{=} D_n (\mathbb{E}_Q [NY | \mathcal{F}] - H \mathbb{E}_Q [N^2 | \mathcal{F}]) \stackrel{\text{s.j.}}{=} 0. \end{aligned}$$

Limitním přechodem pro  $n \rightarrow \infty$  dostaneme, že

$$0 \stackrel{\text{s.j.}}{=} \mathbb{E}_Q [ND_n Z | \mathcal{F}] \stackrel{\text{s.j.}}{\rightarrow} \mathbb{E}_Q [NDZ | \mathcal{F}]. \quad (3.6)$$

Protože  $Q = R$  na  $\mathcal{F}$ , platí  $\mathbb{E}_Q \left[ \frac{dR}{dQ} | \mathcal{F} \right] \stackrel{\text{s.j.}}{=} \frac{dR| \mathcal{F}}{dQ| \mathcal{F}} \stackrel{\text{s.j.}}{=} 1$ . Protože  $N$  vyvažuje  $Q$  na  $\mathcal{F}$ , tj.  $\mathbb{E}_Q (N | \mathcal{F}) \stackrel{\text{s.j.}}{=} 0$ , dostáváme podle lemmatu 3.1.2 a 3.6, že

$$\mathbb{E}_R [N | \mathcal{F}] = \mathbb{E}_Q [N (1 + DZ) | \mathcal{F}] = \mathbb{E}_Q [NDZ | \mathcal{F}] = 0 \text{ s.j. } [Q], [R].$$

Protože  $R \sim Q \sim P$ ,  $R|\mathcal{F} = Q|\mathcal{F} = P|\mathcal{F}$  a protože  $R$  vyvažuje  $N$  na  $\mathcal{F}$ , dostaneme podle předpokladu tvrzení, že  $R = Q$ , což znamená, že  $DZ = 0$  s.j., ale protože  $D > 0$  dostáváme, že  $Z = 0$  s.j., což znamená  $Y \stackrel{\text{s.j.}}{=} HN$ , tj.  $X = \mathbb{E}[X | \mathcal{F}] + HN$  s.j. Veličina  $N$  má tedy reprezentační vlastnost na  $\mathcal{A}$  vzhledem k  $\mathcal{F}$ .  $\square$

#### Poznámka 3.2.4

1. Nechť náhodná veličina  $N : \Omega \rightarrow \{a, b\}$ , kde  $a < 0 < b$  je nezávislá se  $\sigma$ -algebrou  $\mathcal{F}$  na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Budeme se zajímat o to, jak vypadá

míra  $Q \sim P$  na  $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F} \cup \sigma(N))$  taková, že  $Q = P$  na  $\mathcal{F}$ , která vyvažuje náhodnou veličinu  $N$  vzhledem k  $\mathcal{F}$ . Nutnou podmínkou je, aby

$$0 \stackrel{\text{s.j.}}{=} \mathbb{E}_Q(N|\mathcal{F}) \stackrel{\text{s.j.}}{=} a(N = a|\mathcal{F}) + bQ(N = b|\mathcal{F}).$$

Odtud dostáváme požadavek

$$Q(N = a|\mathcal{F}) \stackrel{\text{s.j.}}{=} \frac{b}{b-a}, \quad Q(N = b|\mathcal{F}) \stackrel{\text{s.j.}}{=} \frac{a}{a-b} \quad (3.7)$$

Vidíme tedy, že míra  $Q$  na  $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F} \cup \sigma(N))$  je určena podmínkou (3.7) spolu s požadavkem  $Q|\mathcal{F} = P|\mathcal{F}$  určena jednoznačně. Vidíme, že v tomto případě existuje právě jedna míra  $Q \sim P$  s  $Q|\mathcal{F} = P|\mathcal{F}$  vyvažující náhodnou veličinu  $N$ , a podle tvrzení 3.2.4 má veličina  $N$  vzhledem k  $\mathcal{F}$  reprezentační vlastnost i při míře  $P$  ovšem za předpokladu, že  $P(N = a) \in (0, 1)$ . Potřebujeme totiž splnit požadavek  $P \sim Q$ .

2. Pokud náhodná veličina  $N : \Omega \rightarrow \{a, b, c\}$  nezávislá se  $\sigma$ -algebrou  $\mathcal{F}$  na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  nabývá alespoň tří různých hodnot s kladnou pravděpodobností, pak bud'
  - (a) neexistuje  $Q \sim P$  míra vyvažující náhodnou veličinu  $N$  vzhledem k  $\mathcal{F}$  na  $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F} \cup \sigma(N))$ . To nastává v případě, že  $\min\{a, b, c\} \leq 0$  nebo pokud  $\max\{a, b, c\} \geq 0$ .
  - (b) existují alespoň dvě různé míry  $Q \sim P \sim R$  s  $Q|\mathcal{F} = P|\mathcal{F} = R|\mathcal{F}$ , které vyvažují náhodnou veličinu  $N$  vzhledem k  $\mathcal{F}$ .

Bud'  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  pravděpodobnostní prostor s filtrací  $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}_0$ . Řekneme, že  $\mathcal{F}_n$ -adaptovaný proces  $X_n, n \in \mathbb{N}$  má **(prediktabilní) reprezentační vlastnost vzhledem k filtraci  $\mathcal{F}_n$** , pokud

$$\forall Y \in \mathbb{L}_\infty(\mathcal{F}_\infty) \quad \exists C \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_0) \quad \exists H_n \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_{n\uparrow}) \quad (3.8)$$

$$Y = C + \sum_{n=1}^{\infty} H_n(X_n - X_{n-1}) \quad \text{s.j. } [P] \quad (3.9)$$

a zároveň proces

$$Y_m = C + \sum_{n=1}^m H_n (X_n - X_{n-1}) \quad (3.10)$$

je omezený, tj.  $\sup_{m \in \mathbb{N}_0} |Y_m| \in \mathbb{L}_\infty$ .

**Poznámka 3.2.5** Nechť  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$  je  $\sigma$ -algebra a  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je pravděpodobnostní prostor. Pak veličina  $N = \Delta M \in \mathbb{L}(\mathcal{A})$  má reprezentační vlastnost  $\sigma$ -algebry  $\mathcal{A}$  vzhledem k  $\mathcal{F}$  právě tehdy, když  $X_n, n \in \mathbb{N}_0$  má reprezentační vlastnost vzhledem k  $\mathcal{F}_n$ , pokud  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}, \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_n = \mathcal{A}$  pro  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_0 = 0, X_n = N, n \in \mathbb{N}$ , neboť zřejmě  $C + \sum_{n=1}^\infty H_n (X_n - X_{n-1}) = C + H_1 N$ .

**Poznámka 3.2.6** Pokud proces  $X_n$  je  $\mathcal{F}_n$ -martingal, pak  $X$  má  $\mathcal{F}_n$ -reprezentační vlastnost právě tehdy, když

$$\forall Y \in \mathbb{L}_\infty(\mathcal{F}_\infty) \quad \exists C \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_0) \quad \exists H_n \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_{n\uparrow}) \quad (3.11)$$

$$Y_m := \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_m] \stackrel{s.j.}{=} Y_0 + \sum_{n=1}^m H_n (X_n - X_{n-1}) \quad s.j. [P], \quad m \in \mathbb{N}_0. \quad (3.12)$$

**Důkaz:** Pokud platí (3.11-3.12), platí i (3.8-3.9). Pokud  $C \in \mathbb{R}$  je takové, že  $|Y| \leq C$  skoro jistě, pak totiž z definice  $Y_m$  plyne, že také  $|Y_m| \leq C$  skoro jistě. Proces  $Y_m$  je tedy omezený hodnotou  $C$  až na množinu míry 0.

Nechť platí (3.8-3.9). Je-li  $Z \in \mathbb{L}_\infty(\mathcal{F}_\infty)$ , pak existují  $C, H_n$  takové jako v (3.8) takové, že

$$Z_m := C + \sum_{n=1}^m H_n (X_n - X_{n-1}) \rightarrow Z \quad \text{pro } m \rightarrow \infty$$

a  $\sup\{|Z_m|, m \in \mathbb{N}_0\} \in \mathbb{L}_\infty$ . Zřejmě tedy  $Z_m - Z_{m-1} \in \mathbb{L}_\infty \subseteq \mathbb{L}_1$  a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_m - Z_{m-1}|\mathcal{F}_{m-1}] &= \mathbb{E}[H_m (X_m - X_{m-1})|\mathcal{F}_{m-1}] \\ &= H_m \mathbb{E}[X_m - X_{m-1}|\mathcal{F}_{m-1}] = 0 \quad s.j., \end{aligned} \quad (3.13)$$

neboť předpokládáme, že proces  $X_n$  je martingal. Z podmínky (3.13) plyne, že proces  $Z_m$  je omezený  $\mathcal{F}_m$ -martingal. Pak  $Z$  je uzávěrem  $Z_m$ , a tedy  $\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_m] \stackrel{s.j.}{=} Z_m$ .  $\square$

**Tvrzení 3.2.3** Nechť  $X_n, n \in \mathbb{N}_0$  má  $\mathcal{F}_n$ -reprezentační vlastnost vzhledem k  $P$  a nechť existuje martingalová míra  $Q \sim P$ . Pak pro  $n \in \mathbb{N}$  má veličina  $N_n = X_n - X_{n-1}$  reprezentační vlastnost  $\mathcal{F}_n$  vzhledem k  $\mathcal{F}_{n-1}$ .

**Důkaz:** Bez újmy na obecnosti je  $P = Q$ . Nechť  $Y \in \mathbb{L}_\infty(\mathcal{F}_n)$ , podle předpokladu existuje  $C \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_0)$  a  $\mathcal{F}_{n\uparrow}$  adaptovaný proces  $H_n$  takový, že platí (3.12). Zřejmě pak

$$H_m N_m \stackrel{\text{s.j.}}{=} Y_m - Y_{m-1} \in \mathbb{L}_\infty(\mathcal{F}_m) \subseteq \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_m). \quad (3.14)$$

Protože  $N_m$  je martingalová diference, platí pro  $m > n$ , že

$$\mathbb{E}[Y_m - Y_{m-1} | \mathcal{F}_n] \stackrel{\text{s.j.}}{=} \mathbb{E}[H_m N_m | \mathcal{F}_n] \stackrel{\text{s.j.}}{=} H_m \mathbb{E}[N_m | \mathcal{F}_n] = 0. \quad (3.15)$$

Pak

$$Y \stackrel{\text{s.j.}}{=} \mathbb{E}[Y | \mathcal{F}_n] \stackrel{\text{s.j.}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_m | \mathcal{F}_n] \stackrel{\text{s.j.}}{=} Y_n. \quad (3.16)$$

Pak tedy

$$Y \stackrel{\text{s.j.}}{=} Y_n \stackrel{\text{s.j.}}{=} Y_{n-1} + H_n N_n,$$

kde  $Y_{n-1}, H_n \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_{n\uparrow})$ , tj.  $N_n$  má  $\mathcal{F}_n$ -reprezentační vlastnost vzhledem k  $\mathcal{F}_{n-1}$ .  $\square$

**Tvrzení 3.2.4** Jsou-li  $R, Q \sim P$  dvě různé  $(\mathcal{F}_n)$ -martingalové míry procesu  $X_n, n \in \mathbb{N}_0$  shodující se na  $\mathcal{F}_0$ , tj.  $Q|\mathcal{F}_0 = R|\mathcal{F}_0$ , pak  $X_n$  nemá  $\mathcal{F}_n$ -reprezentační vlastnost vzhledem k  $\mathcal{F}_n$  při  $P, Q, R$ .

**Důkaz:** Protože  $Q|\mathcal{F}_0 = R|\mathcal{F}_0$  a  $Q|\mathcal{F}_\infty \neq R|\mathcal{F}_\infty$ , existuje  $n \in \mathbb{N}$  takové, že  $Q|\mathcal{F}_n = R|\mathcal{F}_n$ , ale  $Q|\mathcal{F}_{n+1} \neq R|\mathcal{F}_{n+1}$ . Jinak  $Q = R$ . Podle tvrzení 3.2.1  $X_{n+1} - X_n$  nemá reprezentační vlastnost  $\mathcal{F}_{n+1}$  vzhledem k  $\mathcal{F}_n$  při  $P$  pro  $n \in \mathbb{N}$ . Potom  $X_n$  podle tvrzení 3.2.3 nemá  $\mathcal{F}_n$ -reprezentační vlastnost vzhledem k  $P$ .  $\square$

**Věta 3.2.1** Nechť existuje právě jedna martingalová míra  $Q \sim P$  procesu  $X_n$  taková, že  $Q|\mathcal{F}_0 = P|\mathcal{F}_0$ . Nechť  $X_n \in \mathbb{L}_\infty(P)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pak  $X_n$  má prediktabilní  $\mathcal{F}_n$ -reprezentační vlastnost při  $Q, P$ .

**Důkaz:** Bez újmy na obecnosti  $P$  je martingalová míra, v opačném případě volíme  $P = Q$ . Symbol  $Q$  budeme v důkazu užívat v jiné souvislosti.

- Pro každé  $n \in \mathbb{N}_0$  ukážeme, že existuje právě jedna pravděpodobnost  $R$  na  $\mathcal{F}_{n+1}$  taková, že  $R \sim P|\mathcal{F}_{n+1}$  a  $R|\mathcal{F}_n = P|\mathcal{F}_n$  vyvažující náhodnou veličinu  $X_{n+1} - X_n$  vzhledem k  $\sigma$ -algebře  $\mathcal{F}_n$ . Zřejmě  $P|\mathcal{F}_{n+1}$  vyvažuje  $X_{n+1} - X_n$  na  $\mathcal{F}_{n+1}$  vzhledem k  $\mathcal{F}_n$ . Dále ukážeme jednoznačnost vyvažující míry. Bud'  $R$  na  $\mathcal{F}_{n+1}$  jako výše, dále bud'  $Q \sim P$  pravděpodobnost na  $\mathcal{F}_\infty$  taková, že

$$dQ = \frac{dR}{dP|\mathcal{F}_{n+1}} dP,$$

pak  $Q|\mathcal{F}_n = P|\mathcal{F}_n = R|\mathcal{F}_n$ . Zřejmě  $X_n \in \mathbb{L}_\infty(Q)$ , neboť  $Q \sim P$ . Ukážeme, že  $\mathsf{E}_Q(X_{k+1} - X_k|\mathcal{F}_k) \stackrel{\text{s.j.}}{=} 0$ . Nechť nejprve  $k > n$ , pak  $\frac{dQ}{dP} \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_{n+1}) \subseteq \mathbb{L}(\mathcal{F}_k)$  a podle lemmatu 3.1.2 platí

$$\mathsf{E}_Q[X_{k+1} - X_k|\mathcal{F}_k] \stackrel{\text{s.j.}}{=} \frac{\mathsf{E}_P[(X_{k+1} - X_k)\frac{dQ}{dP}|\mathcal{F}_k]}{\mathsf{E}_P[\frac{dQ}{dP}|\mathcal{F}_k]} \stackrel{\text{s.j.}}{=} \frac{dQ}{dP} \frac{\mathsf{E}_P[X_{k+1} - X_k|\mathcal{F}_k]}{\mathsf{E}_P[\frac{dQ}{dP}|\mathcal{F}_k]} \stackrel{\text{s.j.}}{=} 0,$$

neboť  $X_k$  je  $\mathcal{F}_k$ -martingal při míře  $P$  dle předpokladu. Nechť nyní  $k = n$  a  $B \in \mathcal{F}_k$ , pak

$$\begin{aligned} \int_{B \in \mathcal{F}_k} (X_{k+1} - X_k) dQ &= \int_B (X_{n+1} - X_n) \frac{dR}{dP|\mathcal{F}_{n+1}} dP|\mathcal{F}_{n+1} \\ &= \int_B (X_{n+1} - X_n) dR = 0, \end{aligned}$$

neboť míra  $R$  je vyvažující vzhledem k  $X_{n+1} - X_n$  a  $B \in \mathcal{F}_n$ .

Nechť  $k < n$ , potom podobně jako v případě  $k > n$  ukážeme, že

$$\mathsf{E}_P \left[ (X_{k+1} - X_k) \frac{dQ}{dP} \middle| \mathcal{F}_k \right] \stackrel{\text{s.j.}}{=} 0. \quad (3.17)$$

Protože  $R = P$  na  $\mathcal{F}_k + 1 \subseteq \mathcal{F}_n$ , platí  $\frac{dR|\mathcal{F}_{k+1}}{dP|\mathcal{F}_{k+1}} = 1$  s.j. [P]. Dostáváme tak, že levá strana (3.17) je rovna

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_P \left[ (X_{k+1} - X_k) \mathsf{E}_P \left( \frac{dQ}{dP} \middle| \mathcal{F}_{k+1} \right) \middle| \mathcal{F}_k \right] &\stackrel{\text{s.j.}}{=} \mathsf{E}_P \left[ (X_{k+1} - X_k) \frac{dR|\mathcal{F}_{k+1}}{dP|\mathcal{F}_{k+1}} \middle| \mathcal{F}_k \right] \\ &\stackrel{\text{s.j.}}{=} \mathsf{E}_P[X_{k+1} - X_k|\mathcal{F}_k] \stackrel{\text{s.j.}}{=} 0. \end{aligned}$$

Podobně jako v případě  $k > n$  dostáváme

$$\mathsf{E}_Q[X_{k+1} - X_k|\mathcal{F}_k] \stackrel{\text{s.j.}}{=} \frac{\mathsf{E}_P \left[ (X_{k+1} - X_k) \frac{dQ}{dP} \right]}{\mathsf{E}_P \left[ \frac{dQ}{dP} \middle| \mathcal{F}_k \right]} \stackrel{\text{s.j.}}{=} 0.$$

Ukázali jsme tedy, že  $Q$  je martingalová míra procesu  $X_n$  a z předpokladu jednoznačnosti martingalové míry plyne, že  $Q = P$ . To podle definice míry  $Q$  znamená, že  $R = P|\mathcal{F}_{n+1}$ . Tím jsme ukázali jednoznačnost vyvažující míry veličiny  $X_{n+1} - X_n$  vzhledem k  $\mathcal{F}_n$ .

2. Podle tvrzení 3.2.1 má veličina  $X_{n+1} - X_n$  reprezentační vlastnost na  $\mathcal{F}_{n+1}$  vzhledem k  $\mathcal{F}_n$ .
3. Nechť  $Y \in \mathbb{L}_\infty(\mathcal{F}_n)$ , potom podle 2. existují  $H_n \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_{n\uparrow})$  takové, že

$$Y_n := \mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_n] \stackrel{\text{s.j.}}{=} Y_{n-1} + H_n(X_n - X_{n-1}).$$

Dále podle Doobovy věty o konvergenci martingalů platí  $Y_n \rightarrow Y$  s.j. v  $\mathbb{L}_1$  a tedy

$$Y = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} H_k(X_k - X_{k-1}) \text{ s.j. vzhledem k mře } P.$$

Nechť  $K \in \mathbb{R}^+$  je takové, že  $|Y| \leq K$  s.j., pak také platí, že  $|Y_n| \leq K$  s.j. Potom máme splněnu i definici reprezentační vlastnosti.  $\square$

**Poznámka 3.2.7** Nechť  $X_n$  má prediktabilní reprezentační vlastnost vzhledem k  $P$  a nechť  $Q$  je martingalová míra ekvivalentní s  $P$ . Je-li  $Z \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_\infty, Q)$ , pak existuje adaptovaný proces  $H_n \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_{n\uparrow})$  takový, že

$$Z \stackrel{\text{s.j.}}{=} \mathbf{E}_Q[Z|\mathcal{F}_0] + \sum_{n=1}^{\infty} H_n(X_n - X_{n-1}), \quad (3.18)$$

a že  $Z_n : \mathbf{E}[Z|\mathcal{F}_n] \stackrel{\text{s.j.}}{=} Z_0 + \sum_{k=1}^n H_k(X_k - X_{k-1})$ .

**Důkaz:** Bud'  $Q \sim P$  martingalová míra procesu  $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$  a  $Z \in \mathbb{L}_1(Q)$ . Pak  $Z^{(m)} = Z \cdot 1_{[|Z| \leq m]} \in \mathbb{L}_\infty(\mathcal{F}_\infty)$ . Podle poznámky 3.2.6 existují  $H_k^{(m)} \in \mathcal{F}_{k\uparrow}$  takové, že

$$Z_n^{(m)} := \mathbf{E}_Q[Z^{(m)}|\mathcal{F}_n] \stackrel{\text{s.j.}}{=} \mathbf{E}_Q[Z^{(m)}|\mathcal{F}_0] + \sum_{k=1}^n H_k^{(m)} N_k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.19)$$

kde  $N_n = X_n - X_{n-1}$ . Položme  $u : x \in \bar{\mathbb{R}} \mapsto x 1_{[x \in \mathbb{R}]} \in \mathbb{R}$  a

$$H_n := u \left( \limsup_{m \rightarrow \infty} H_n^{(m)} \right) \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_{n\uparrow}).$$

Z definice  $Z_n^{(m)}$ ,  $Z^{(m)}$ ,  $Z_n$  a z vlastností podmíněné střední hodnoty a konvergence stejnoměrně integrovatelného martingalu dostáváme následující konvergence skoro jistě i v  $\mathbb{L}_1$

$$Z \xleftarrow{m \rightarrow \infty} Z^{(m)} \xleftarrow{n \rightarrow \infty} Z_n^{(m)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} Z_n \stackrel{\text{s.j.}}{=} \mathbb{E}_Q[Z|\mathcal{F}_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z. \quad (3.20)$$

Z rovnosti (3.19) tak dostáváme, že

$$H_n^{(m)} 1_{[N_n \neq 0]} \stackrel{\text{s.j.}}{=} \frac{Z_n^{(m)} - Z_{n-1}^{(m)}}{N_n} \cdot 1_{[N_n \neq 0]} \rightarrow \frac{Z_n - Z_{n-1}}{N_n} \cdot 1_{[N_n \neq 0]}$$

skoro jistě i v  $\mathbb{L}_1$  pro  $m \rightarrow \infty$ . Z definice  $H_n$  tak dostáváme, že  $Z_n \stackrel{\text{s.j.}}{=} Z_{n-1} + H_n N_n$ . Z konvergence (3.20) pak plyne rovnost (3.18) skoro jistě.  $\square$

### 3.3 Finanční interpretace

$X_n$	...	Obchodovatelné aktivum (např. diskontovaná cena akcie).
$H_n \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_{n\uparrow})$	...	Počet jednotek obchodovatelného aktiva v portfoliu v období $n-1$ až $n$ .
$C$	...	Počáteční tržní hodnota portfolia.
$Y \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_\infty, Q)$	...	(Plánovaný) finanční tok v čase $T = \infty$ .
$Q$	...	Martingalová míra ekvivalentní s $P$ (Bezriziková míra).
$\mathbb{E}_Q[Y \mathcal{F}_0]$	...	Spravedlivá cena plánovaného finančního toku $Y$ v čase $T = \infty$ .

**Poznámka 3.3.1** Věta 3.2.1 zaručuje, že pokud existuje právě jedna ekvivalentní martingalová míra  $Q$ , pak skutečná míra  $P$  procesu  $X_n$ , která se shoduje s mírou  $Q$  na počáteční  $\sigma$ -algebře. Pak existuje strategie, která replikuje plánovaný finanční tok v čase  $T = \infty$ . Taková, která respektuje princip přiměřenosti.

**Poznámka 3.3.2** Abychom mohli vůbec stanovit něco jako spravedlivou cenu budoucího finančního toku, potřebujeme dodržet některé základní principy.

#### 1. Požadavek neexistence arbitráže v konečném horizontu

Tento požadavek je možné zajistit existencí ekvivalentní martingalové míry.

## 2. Požadavek neexistence arbitráže v nekonečném horizontu

Ke splnění tohoto požadavku nestačí existence ekvivalentní martingalové míry. Uvažujme proces  $M_n = 1 - X_n$ , kde  $X_n = 2^n \cdot 1_{[Z \leq n]}$ ,  $Z - 1 \sim Ge\left(\frac{1}{2}\right)$ . Pak  $M_n$  je shora omezený martingal, který není (zdola) stejnoměrně integrovatelný. Zřejmě  $M_0 = 0$  a  $M_\infty = 1$ . Tento proces dosahuje čistého bezrizikového zisku 1 v nekonečném časovém horizontu. Abychom takovémuto jevu zamezili, potřebujeme se omezit na martingaly, které budou stejnoměrně integrovatelné. Pro replikaci skoro jistě omezených náhodných veličin můžeme ekvivalentně požadovat, aby replikující martingal byl také omezený skoro jistě. Výhodou této formulace je, že se nemusíme ohlížet na stejnoměrnou integrovatelnost procesu vzhledem k ekvivalentní míře.

K zamezení arbitráže v nekonečném horizontu je třeba, aby si investor nemohl neomezeně půjčovat. Taková podmínka odpovídá požadavku stejnoměrné integrovatelnosti zdola procesu  $M_n$  v bodě 2., respektive požadavku omezenosti procesu  $M_n$  zdola.

Symetrickým požadavkem ke stejnoměrné integrovatelnosti či omezenosti zdola je požadavek stejnoměrné integrovatelnosti či omezenosti ze shora. Tento požadavek odpovídá přirozenému chování hospodárnosti investora, který se chce vyhnout tomu, aby dopadl podobně jako proces  $X_n$ , který je v čase 0 na hodnotě  $1 = X_0$  a v nekonečném horizontu na hodnotě  $X_\infty \stackrel{s.j.}{=} 0$ .

V klasické teorii oceňování opcí se tento požadavek neprosazuje formou omezení, ale formulací úlohy v tom smyslu, že nás zajímá minimální počáteční hodnota portfolia, se kterou je možné dosáhnout replikování stanoveného finančního toku. Touto formulací se vyřadí všechny nehospodárné strategie.

### 3.3.1 Markovské procesy

**Definice 3.3.1** Nechť  $X_n, n \in \mathbb{N}_0$  je  $\mathcal{F}_n$ -adaptovaný proces s hodnotami v konečné množině  $S$ . Pak řekneme, že  $X_n$  je  **$\mathcal{F}_n$ -markovský proces** s hodnotami v konečné množině  $S$ , pokud

$$\mathcal{L}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \stackrel{s.j.}{=} \mathcal{L}(X_{n+1}|X_n).$$

**Úmluva:** Dále budeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že  $S = \{1, \dots, m\}$ . Je-li  $Y \in \mathbb{L}_1$ , pak víme, že existuje funkce  $g : S \rightarrow \mathbb{R}$  taková, že  $\mathbf{E}[Y|X_n] = g(X_n)$ . Tuto funkci  $g(x)$  běžně značíme  $\mathbf{E}[Y|X_n = x]$  pro  $x \in S$ . Abychom mohli přejít k maticovému zápisu, budeme na funkci  $g$  nahlížet jako na vektor  $g \in \mathbb{R}^m$ , což nám právě umožňuje úmluva  $S = \{1, \dots, m\}$ . Vektorový přístup potlačující proměnnou  $x \in S$  vyžaduje zavést nové označení pro podmíněnou střední hodnotu  $g =: \mathbf{E}_n Y$ , tedy

$$(\mathbf{E}_n Y)(x) = \mathbf{E}[Y|X_n = x], \quad \text{resp. } (\mathbf{E}_n Y)(X_n) = \mathbf{E}[Y|X_n].$$

**Poznámka 3.3.3** Nechť  $\mathbf{P}_n$  je matice přechodu řetězce  $X_n$  mezi časy  $n$  a  $n+1$ , tj.  $\mathbf{P}_n \in \mathbb{R}^{m \times m}$  je stochastická matice taková, že

$$\mathbf{P}_n(X_n, j) \stackrel{\text{s.j.}}{=} P(X_{n+1} = j|X_n), \quad j \in S.$$

Je-li funkce  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , tj.  $f \in \mathbb{R}^m$ , pak

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] &\stackrel{\text{s.j.}}{=} \sum_{j \in S} f(j) \cdot P(X_{n+1} = j|\mathcal{F}_n) \\ &\stackrel{\text{s.j.}}{=} \sum_{j \in S} f(j) \cdot \mathbf{P}_n(X_n, j) = \mathbf{e}_{X_n}^\top \mathbf{P}_n f, \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^m$  je jednotkový prvek, který má na  $i$ -tém místě 1 a jinak samé 0.

Můžeme zavést definici: Řekneme, že  $\mathcal{F}_n$ -markovský proces  $X_n$  je homogenní s maticí přechodu (pravděpodobností)  $\mathbf{P}$ , pokud  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  je stochastická matice taková, že  $\mathbf{P}_n(X_n, j) \stackrel{\text{s.j.}}{=} P(X_{n+1} = j|X_n)$  platí pro každé  $j \in S$  a  $n \in \mathbb{N}_0$ , tj. pokud  $\mathbf{P}$  vyhovuje požadavkům kladeným na matici přechodu  $\mathbf{P}_n$  v období  $(n, n+1)$ .

### 3.3.2 Lineární řízení Markovových řetězců

V této části budeme pracovat jen s homogenními Markovovými řetězci s konečně mnoha stavami. Nyní ke každému stavu  $s \in S$  uvažujme konečnou

množinu přípustných rozhodnutí  $R_s$ . Homogenním řízením řetězce  $X_n$  pak budeme rozumět jakýkoli prvek

$$\mathbf{r} = (r_s)_{s \in S} \in \mathbf{R} := \prod_{s \in S} R_s,$$

který ke každému stavu  $s \in S$  přiřazuje rozhodnutí  $r_s \in R_s$ .

Předpokládejme, že přechod řetězce  $X_n$  ze stavu  $i \in S$  do stavu  $j \in S$  je spojen se ziskem  ${}_\rho z_{ij}$  pokud jsme zvolili rozhodnutí  $\rho \in R_i$ . Dále předpokládejme, že přechod řetězce  $X_n$  ze stavu  $i \in S$  do stavu  $j \in S$  nastane při rozhodnutí  $\rho \in R_i$  s pravděpodobností  ${}_\rho p_{ij}$ . Je-li tedy řetězec  $X_n$  ve stavu  $i \in S$  a my zvolili rozhodnutí  $\rho \in R_i$ , bude se hodnota řetězce  $X_{n+1}$  v následujícím okamžiku řídit rozdělením  ${}_\rho \mathbf{p}_i := ({}_\rho p_{ij})_{j \in S}$ . Získané hodnoty odpovídající jednotlivým přechodům pak budeme zapisovat pomocí vektoru ocenění  ${}_\rho \mathbf{z}_i := ({}_\rho z_{ij})_{j \in S}$ .

Pro konkrétní homogenní řízení  $\mathbf{r} \in \mathbf{R}$  je pak  $X_n$  homogenním Markovovým řetězcem s maticí přechodu  ${}_\mathbf{r} \mathbf{P}$  a s oceněním přechodů daných maticí  ${}_\mathbf{r} \mathbf{Z}$ , kde

$${}_\mathbf{r} \mathbf{P} = ({}_{r_i} \mathbf{p}_i^\top)_{i \in S} = ({}_{r_i} p_{ij})_{i, j \in S}, \quad {}_\mathbf{r} \mathbf{Z} = ({}_{r_i} \mathbf{z}_i^\top)_{i \in S} = ({}_{r_i} z_{ij})_{i, j \in S}.$$

Tyto rovnosti upravují vztahy mezi maticovým, vektorovým a složkovým zápisem. Dále zavedeme vektor středních výnosů za jedno období  ${}_\mathbf{r} \mathbf{q}$  odpovídající různým počátečním stavům a řízení  $\mathbf{r} \in \mathbf{R}$  předpisem

$${}_\mathbf{r} \mathbf{q} := ({}_{r_i} q_i)_{i \in S}, \text{ kde } {}_\rho q_i := {}_\rho \mathbf{p}_i^\top {}_\rho \mathbf{z}_i$$

představuje střední výnos za jedno období odpovídající počátečnímu stavu  $i \in S$  Markovova řetězce  $X_n$  a rozhodnutí  $\rho \in R_i$ .

### 3.3.3 Homogenní Markovovy řetězce s oceněním přechodu

V této části budeme předpokládat, že řízení  $\mathbf{r} \in \mathbf{R}$  je pevně zvoleno a že je realizováno v každém čase  $n \in \mathbb{N}_0$ . Výsledný proces  $X_n$  tedy bude homogenní Markovův řetězec s maticí přechodu  $\mathbf{P} := {}_\mathbf{r} \mathbf{P}$  a vektorem středních výnosů  $\mathbf{q} := {}_\mathbf{r} \mathbf{q}$ . Budeme také pro jednoduchost předpokládat, že uvedený řetězec  $X_n$  je při řízení  $\mathbf{r}$  ergodický, tj. nerozložitelný a periodický, kde všechny stavy jsou trvalé nulové. Pro podrobnost týkající

se klasifikace stavů homogenního Markovova řetězce čtenáře odkazujeme například na skripta [1],[6]. Výše uvedené předpoklady podle věty 3. a poznámky na str. 115 z [1] zaručují, že limitní matici  $\mathbf{P}^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n$  existuje a má všechny řádky stejné. Odtud ihned plyne, že vektor  $\mathbf{c} := \mathbf{P}^\infty \mathbf{q}$  je tvaru  $\mathbf{c} = c\mathbf{1}$ , kde  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^m$ . Podle věty 1 na str. 116 z [1] následující maticová řada konverguje, a lze tedy zavést matici

$$\mathbf{A} := \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{P}^k - \mathbf{P}^\infty).$$

Interpretaci vektoru  $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$  a hodnoty  $c \in \mathbb{R}$  nám dává věta 2 na str. 117 z [1], která mj. říká, že vektorový střední výnos za období  $(0, n)$  podmíněný počáteční hodnotou řetězce  $X_n$  v čase  $n = 0$  je tvaru

$$v(n) = n \cdot c \cdot \mathbf{1} + \mathbf{b} + o(1) \quad \text{pro } n \rightarrow \infty \quad (3.21)$$

Pak očekávaný střední výnos lze psát ve tvaru  $v(n) = n\mathbf{c} + \mathbf{b} + o(1)$ , kde  $\mathbf{c} = c\mathbf{1}$  reprezentuje dlouhodobý přírůstek vektoru středních výnosů za jedno období. Vektor  $\mathbf{b}$  pak představuje korekce zohledňující to, ze kterého stavu řetězec vychází.

Formálně můžeme zavést  $v(n)$  vztahem

$$v(n) = \mathbf{E}_n[V(n)], \quad \text{kde } V(n) = \sum_{k=0}^{\infty} z(X_k, X_{k+1})$$

je celkový výnos za období  $(0, n)$  při řízení  $\mathbf{r} \in \mathbf{R}$ , který vznikne postupným nasčítáním zisků  $z(X_k, X_{k+1})$  z přechodu Markovova řetězce  $X_n$  ze stavu  $X_k$  v čase  $k$  do stavu  $X_{k+1}$  v čase  $k+1$ .

**Tvrzení 3.3.1** Za výše uvedených předpokladů a značení v této sekci je proces  $M_n = V(n) - \mathbf{b}(X_n) - cn$  martingal vzhledem k filtraci  $\mathcal{F}_n$ .

**Důkaz:** Podle poznámky 3.3.3 platí

$$\mathbf{E}[\mathbf{b}(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n] = \mathbf{e}_{X_n}^\top \mathbf{P} \mathbf{b}.$$

Z definice vektorů středních výnosů  $\mathbf{q}$  za jedno období plyne, že

$$\mathbf{q}(X_n) \stackrel{s.j.}{=} \mathbf{E}[z(X_n, X_{n+1}) | \mathcal{F}_n].$$

Pak tedy

$$\mathsf{E}[V(n+1)|\mathcal{F}_n] \stackrel{\text{s.j.}}{=} V(n) + \mathsf{E}[z(X_n, X_{n+1})|\mathcal{F}_n] \stackrel{\text{s.j.}}{=} V(n) + \mathbf{q}(X_n).$$

Abychom ukázali, že proces  $M_n$  je skutečně  $\mathcal{F}_n$ -martingal, potřebujeme ukázat, že následující veličina je rovna nule skoro jistě

$$\mathsf{E}[M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n] \stackrel{\text{s.j.}}{=} \mathbf{q}(X_n) + (\mathbf{P}\mathbf{b})(X_n) - \mathbf{b}(X_n) - c. \quad (3.22)$$

Výše zmíněný požadavek bude splněn, pokud ověříme následující rovnost

$$\mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{b} - \mathbf{b} = c\mathbf{1}.$$

Tato rovnost však plyne ihned z definice  $\mathbf{b}$  a  $\mathbf{c}$  následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\mathbf{b} &= \mathbf{P} \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{P}^k - \mathbf{P}^{\infty})\mathbf{q} = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{P}^k - \mathbf{P}^{\infty})\mathbf{q} \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{I} + \mathbf{P}^{\infty})\mathbf{q} = \mathbf{b} - \mathbf{q} + c\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Proces  $M_n$  je tedy  $\mathcal{F}_n$ -martingal.  $\square$

**Poznámka 3.3.4** O zápisu výnosu  $V(n) = M_n + \mathbf{b}(X_n) + cn$  lze říci, že  $cn$  je lineární trend,  $\mathbf{b}(X_n)$  je stacionární složka procesu  $V(n)$  a  $M_n$  je martingalová část, která je vzhledem k lineární složce zanedbatelná, jak následně uvidíme ze SZVČ pro martingalové diference 2.5.2.

Martingalové diference

$$\begin{aligned} \Delta M_n &= M_{n+1} - M_n \\ &= (V_{n+1} - V_n) + \mathbf{b}(X_{n+1}) - \mathbf{b}(X_n) - \mathbf{c} \\ &= \mathbf{z}(X_n, X_{n+1}) + \mathbf{b}(X_{n+1}) - \mathbf{b}(X_n) - \mathbf{c} \end{aligned}$$

zřejmě nabývají hodnot z nějaké konečné podmnožiny  $\mathbf{Z} \subseteq \mathbb{R}$  a jsou tedy stejně omezené. Podle SZVČ pro martingalové diference tak platí

$$M_n = V(n) - \mathbf{b}(X_n) - \mathbf{c}n = o_{s.j.}(b_n)$$

kdykoli

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k^2} < \infty \quad \text{a} \quad 0 < b_k \nearrow \infty.$$

Speciálně volbou například  $b_k = k$  dostáváme

$$V(n) = \mathbf{b}(X_n) + cn + o_{s.j.}(n),$$

což nám dává interpretaci hodnoty  $c \in \mathbb{R}$  pomocí konvergence skoro jistě

$$c \stackrel{s.j.}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} V(n).$$

### 3.3.4 Optimální řízení v Markovových řetězcích

Podle části Řízené Markovovy řetězce ve skriptech [1], existuje řízení  $\mathbf{r} \in \mathbf{R}$ , které lze získat z Howardova algoritmu, takové, že platí následující vztahy

$$(\mathbf{rP} - \mathbf{I}) \mathbf{r} \mathbf{b} = \mathbf{r} c \mathbf{1} - \mathbf{r} \mathbf{q} \quad \& \quad (\mathbf{sP} - \mathbf{I}) \mathbf{r} \mathbf{b} \leq \mathbf{r} c \mathbf{1} - \mathbf{s} \mathbf{q}$$

kdykoli  $\mathbf{s} \in \mathbf{R}$  je jakékoli jiné homogenní řízení. Pokud v čase  $n$  pro časový interval  $(n, n+1)$  zvolíme řízení  $\mathbf{s} \in \mathbf{R}$ , pak pro přírůstek procesu

$$S_n = V(n) + \mathbf{r} \mathbf{b}(X_n) - \mathbf{r} cn$$

platí podobně jako v (3.22)

$$\mathbf{E}[S_{n+1} - S_n | \mathcal{F}_n] \stackrel{s.j.}{=} \mathbf{s} \mathbf{q}(X_n) + (\mathbf{sP} \mathbf{r} \mathbf{b})(X_n) - \mathbf{r} \mathbf{b}(X_n) - \mathbf{r} c \leq 0$$

skoro jistě. Celkem tak dostáváme, že proces  $S_n$  je  $\mathcal{F}_n$ -submartingal a to nezávisle na tom jaké zvolíme řízení  $\mathbf{s} \in \mathbf{R}$  v každém čase  $n \in \mathbb{N}_0$ , které třeba bude záviset na hodnotách  $X_1, \dots, X_n$  či obecněji, pokud posloupnost řízení  $\mathbf{s}_n$  bude  $\mathcal{F}_n$ -adaptovaný proces. Protože veličiny  $S_{n+1} - S_n$  mohou nabývat pouze konečně mnoha hodnot, budou přírůstky  $\mathcal{F}_n$ -kompenzátoru  $K_{n+1} - K_n = \mathbf{E}[S_{n+1} - S_n | \mathcal{F}_n] \leq 0$  skoro jistě stejně omezené náhodné veličiny. Totéž lze tedy tvrdit o přírůstcích

$$M_{n+1} - M_n = S_{n+1} - S_n - (K_{n+1} - K_n)$$

$\mathcal{F}_n$ -martingalu  $M_n = S_n - K_n$ . Podobně jako v předchozí části nám SZVČ pro martingalové diference dá, že  $M_n = o_{s.j.}(n)$  pro  $n \rightarrow \infty$  a tedy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{n} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{K_n}{n} \leq 0$$

skoro jistě. Pak vidíme, že řízení  $\mathbf{r} \in \mathbf{R}$  dávají asymptotický trend  $_{\mathbf{r}}c$  optimální v následujícím smyslu formulovaným v řeči konvergence skoro jistě

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{V(n)}{n} \leq {}_{\mathbf{r}}c \quad \text{s.j.}$$

Tedy lepšího asymptotického výsledku než  $_{\mathbf{r}}c$  není možné dosáhnout.

# Literatura

- [1] Dupač V., Dupačová J. (1975): Markovovy procesy I, SPN, Praha
- [2] Dupačová J., Hurt J. a Štěpán J. (2002): Stochastic modeling in economics and finance, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht
- [3] Kallenberg O. (1997): Probability and its Applications, Springer-Verlag, New York
- [4] Lachout P. (2007): Diskrétní martingaly, Skripta MFF UK, Praha
- [5] Lachout P. (1998): Teorie pravděpodobnosti, Nakladatelství Karolinum, Praha
- [6] Prášková Z., Lachout P. (2001): Základy náhodných procesů, Nakladatelství Karolinum, Praha