

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## DIPLOMOVÁ PRÁCE



Dana Králová

### **Dynamická analýza portfolia pomocí Kalmanova filtru**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematická statistika, pravděpodobnost a ekonometrie

Studijní plán: Ekonometrie

2010

Děkuji vedoucím své diplomové práce Prof. Tomáši Ciprovi za výběr a udělení zajímavého téma a za cenné připomínky a rady, které pomohly ke zlepšení tohoto textu.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 15. dubna 2010

Dana Králová

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>5</b>
<b>1 Teoretické zázemí</b>	<b>6</b>
1.1 Kalmanův filtr - filtrování, vyhlazování a předpovídání . . . . .	6
1.2 Počáteční podmínky . . . . .	14
1.3 Odhad parametrů modelu . . . . .	17
1.4 Chybějící pozorování . . . . .	20
<b>2 Praktická implementace</b>	<b>22</b>
2.1 Rekurentní odhad parametrů AR(p) . . . . .	23
2.2 Rekurentní odhad parametrů AR(p) v případě chybějících pozorování .	28
2.3 Předpovídání v modelu AR(p) . . . . .	30
<b>3 Některé aspekty teorie portfolia</b>	<b>34</b>
3.1 Aktiva . . . . .	34
3.2 Portfolio . . . . .	36
3.3 Analýza portfolia založená na výnosu . . . . .	37
<b>4 Dynamická analýza portfolia</b>	<b>39</b>
4.1 Model pro dynamickou analýzu portfolia . . . . .	39
4.2 Modifikace pro zajišťovací fondy . . . . .	42
<b>5 Analýza vybraných českých fondů</b>	<b>45</b>
5.1 Akciový fond . . . . .	46
5.2 Dluhopisový fond . . . . .	52
<b>Závěr</b>	<b>58</b>
<b>Literatura</b>	<b>59</b>

**Název práce:** Dynamická analýza portfolia pomocí Kalmanova filtru

**Autor:** Dana Králová

**Katedra:** Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

**Vedoucí diplomové práce:** Prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc.

**e-mail vedoucího:** cipra@karlin.mff.cuni.cz

**Abstrakt:** Cílem této práce je představit poměrně novou metodu dynamické analýzy portfolia, která na základě výnosů portfolia odhadne složení tohoto portfolia. V práci popisujeme problematiku Kalmanova filtru a stavového modelování. Uvádíme příklady využití Kalmanova filtru a na nich demonstrujeme práci s ekonometrickým softwarem EViews v oblasti stavového modelování. Věnujeme se také popisu vybraných aspektů z teorie portfolia. Popisujeme starší metodu pro analýzu portfolia využívající regresní model a upozorňujeme na její podstatný nedostatek. Následně se podrobněji zabýváme metodou pro dynamickou analýzu portfolia, která je založena na stavovém modelování a která odstraňuje nedostatek starší metody. Také zde uvažujeme modifikaci této metody pro zajišťovací fondy. Nakonec aplikujeme metodu pro dynamickou analýzu portfolia na reálná data dvou českých podílových fondů a ověříme tak kvalitu modelu.

**Klíčová slova:** dynamický styl analýzy, Kalmanův filtr, rozložení portfolia, stavové modelování.

**Title:** Dynamic analysis of portfolio by means of Kalman filter

**Author:** Dana Králová

**Department:** Department of Probability and Mathematical Statistics

**Supervisor:** Prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc.

**Supervisor's e-mail address:** cipra@karlin.mff.cuni.cz

**Abstract:** The aim of the presented work is to introduce the new method of dynamic analysis of portfolio which estimates the composition of portfolio on the base of its returns. In the work, we describe the theory of Kalman filter and state space models. We mention examples of application of Kalman filter and demonstrate the work with econometric software EViews in the field of state space models on this examples. We deal with selected aspects from the portfolio theory. We present the older method of analysis of portfolio which uses the regression model and we draw attention to its essential lack. We deal, in more details, with the method of dynamic analysis of portfolio which is based on the state space models and which removes the lack of the older method. We also study the modification of this method for hedge funds. In the end, we apply the method of dynamic analysis of portfolio on the real data of two Czech investment funds and so we verify the quality of the model.

**Keywords:** dynamic style analysis, Kalman filter, portfolio allocation, state space models.

# Úvod

V dnešní době existuje poměrně velké množství různých podílových a zajišťovacích fondů, které svůj obor činnosti zakládají na řízení portfolia. O strategiích těchto fondů nejsou vždy známy všechny informace. K dispozici jsou obvykle jejich výnosy, ale podstatně méně toho víme o vývoji složení jejich portfolia v čase. Informace o složení portfolia fondu je jistě důležitá pro investory, kteří si vybírají do jakého fondu investovat, tuto informaci využívají také vedoucí manažeři fondu pro sledování a kontrolu manažerského stylu svých podřízených a dále je tato informace také užitečná pro vypracování hodnocení fondu.

Donedávna byla pro odhad složení portfolia používána především metoda nazývaná *analýza portfolia založená na výnosu*, jejímž základem je regresní model. Ačkoliv je to hojně využívaná metoda investiční analýzy, obsahuje podstatný nedostatek - nebere v úvahu, že se rozvržení portfolia mění v čase. My si v této práci představíme výrazně flexibilnější metodu nazvanou *dynamická analýza portfolia*, která tento nedostatek odstraňuje a pomocí níž lze odhadnout složení portfolia měnící se v čase.

Cílem této práce je představit metodu dynamické analýzy portfolia a následně otestovat její kvalitu na reálných datech.

Hlavním stavebním kamenem metody dynamické analýzy portfolia je teorie Kalmanova filtru a stavového modelování. První kapitola diplomové práce popisuje tuto problematiku. Následuje kapitola 2, která představí jednoduché příklady využití Kalmanova filtru a především na nich bude demonstrovat použití softwaru EViews pro stavové modelování. Ve třetí kapitole se seznámíme s vybranými aspekty teorie portfolia, které je vhodné připomenout pro lepší pochopení následujícího textu. Mezi jinými pojmy je zde také popsána statistická procedura pro odhad složení portfolia - analýza portfolia založená na výnosu.

Stěžejní část práce představuje kapitola 4, která popisuje myšlenku dynamické analýzy portfolia. Je zde také uvažována možná modifikace pro zajišťovací fondy, které se v jistých směrech liší od podílových fondů. Poslední kapitola je věnována praktické aplikaci uvedené metody. Budeme zde analyzovat dva české podílové fondy, na základě výnosů fondů odhadneme vývoj složení jejich portfolia v čase.

# Kapitola 1

## Teoretické zázemí

V této kapitole se seznámíme s teorií, kterou budeme v následujících kapitolách využívat. V první části 1.1 je popsán dynamický lineární systém a problém lineárního filtrování. Jako řešení tohoto problému je následně odvozen Kalmanův filtr a poté je zde popsáno využití tohoto filtru i pro vyhlazování a předpovídání. Podkapitola 1.2 se zabývá určením počátečních podmínek pro inicializaci Kalmanova filtru. Další část 1.3 popisuje odhad parametrů v dynamickém lineárním systému pomocí metody maximální věrohodnosti. A poslední podkapitola 1.4 uvažuje jak vyřešit situaci, kdy určitá pozorování chybí.

### 1.1 Kalmanův filtr - filtrování, vyhlazování a předpovídání

Při popisu Kalmanova filtru v této podkapitole jsem čerpala z knih Anderson, Moore [2], Cipra [4] a Durbin, Koopman [5].

V roce 1960 publikoval R.E. Kalman fundamentální práci o novém přístupu k problému lineárního filtrování a předpovídání. V článku navrhl rekurentní řešení problému diskrétního lineárního filtrování v dynamickém lineárním systému, navržená metoda získala později název *Kalmanův filtr*. Dynamický lineární systém je vyhledáván především proto, že do systému lze začlenit nepozorovatelné veličiny a následně je i odhadnout. Kalmanův filtr je velmi silný rekurzivní algoritmus pro analyzování a odhad tohoto systému. Jeho velká výhoda spočívá v tom, že pracuje přímo, tedy že pro spočítání nejlepšího odhadu využívá pouze minulý odhad a nové měření a pro výpočet nejlepšího odhadu není třeba uvažovat znovu všechna předešlá měření.

Využití Kalmanova filtru je velmi rozsáhlé například v letectví a námořnictví k navigaci, v radiokomunikaci ke zpracování signálu, v seismologii, v bioinženýrství a pak také v ekonometrii a statistice. V ekonometrii je Kalmanův filtr využíván například pro rekurentní odhad parametrů ARMA modelu či pro odhad koeficientů proměnných

v čase v lineární regresi.

Nyní upřesníme, co se vlastně míní filtrováním. Uvažujme vektor veličin, který je součástí určitého dynamického lineárního systému, a my bychom rádi znali hodnotu vektoru v každém časovém okamžiku. Hodnotu tohoto vektoru v čase  $t$  si označíme  $\mathbf{x}_t$ . Tento vektor veličin nelze přímo změřit, ale máme k dispozici pozorování jiného vektoru veličin  $\mathbf{z}$  daného systému. Tato pozorování nejsou však přesná, obsahují navíc ještě kromě hodnoty vektoru také náhodnou složku (neboli tzv. šum). Náhodná složka může být způsobena například nepřesností měřícího přístroje. Vektor pozorování v daném čase  $t$  budeme značit  $\mathbf{z}_t$ . Filtrování znamená, že na základě informace obsažené v  $\mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{z}_{t-2}, \dots$  rekurentně odhadneme vektor  $\mathbf{x}_t$ .

Dále ještě rozlišujeme vyrovnávání a předpovídání. Při vyrovnávání odhadujeme vektor  $\mathbf{x}_t$  na základě informace obsažené v  $\mathbf{z}_s, \mathbf{z}_{s-1}, \mathbf{z}_{s-2}, \dots$ , kde  $t \leq s$ . A při předpovídání využíváme informaci obsaženou v  $\mathbf{z}_s, \mathbf{z}_{s-1}, \mathbf{z}_{s-2}, \dots$  pro rekurentní odhad  $\mathbf{x}_t$ , kde naopak  $t > s$ .

My zde budeme pracovat s dynamickým lineárním systémem ve tvaru:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{G}_t \mathbf{w}_t, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{H}'_t \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t, \quad (1.2)$$

kde  $t = 0, 1, \dots$ . První z rovnic se nazývá *stavová rovnice*, neboť popisuje vývoj stavového vektoru  $\mathbf{x}_t$ . Druhá rovnice, nazývaná *rovnice pozorování*, vyjadřuje vztah mezi vektorem pozorování  $\mathbf{z}_t$  a stavovým vektorem  $\mathbf{x}_t$ . Dále pak  $\mathbf{F}_t, \mathbf{G}_t$  a  $\mathbf{H}_t$  jsou známé matice parametrů. A vektory  $\mathbf{w}_t$  a  $\mathbf{v}_t$  představují náhodné složky. Dimenze těchto vektorů a matic jsou uvedeny v tabulce 1.1.

Vektory		Matice	
$\mathbf{x}_t$	$n \times 1$	$\mathbf{F}_t$	$n \times n$
$\mathbf{z}_t$	$m \times 1$	$\mathbf{G}_t$	$n \times n$
$\mathbf{w}_t$	$n \times 1$	$\mathbf{H}'_t$	$m \times n$
$\mathbf{v}_t$	$m \times 1$		

Tabulka 1.1: Dimenze prvků dynamického lineárního systému

Tedy úloha lineárního filtrování (případně vyrovnávání a předpovídání) v daném dynamickém systému zní: odhadnout  $\mathbf{x}_t$ , pokud máme k dispozici pozorování  $\mathbf{z}_s, \mathbf{z}_{s-1}, \mathbf{z}_{s-2}, \dots$ . Kalmanův filtr pro tento odhad využívá podmíněné rozdělení stavového vektoru  $\mathbf{x}_t$  podmíněné pozorováními do času  $s$ . Proto zavedeme následující značení

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|s} := E(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_s), \quad t, s = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\Sigma_{t|s} := E\left[(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|s})(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|s})' | \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_s\right], \quad t, s = 0, 1, 2, \dots$$

Ve speciálním případě pro  $t = 0$  a  $s = -1$  bude platit:  $\hat{\mathbf{x}}_{0|-1}$  je odhad stavového vektoru  $\mathbf{x}_0$ , pokud nemáme žádná pozorování. A potom chybová varianční matice v tomto speciálním případě má tvar

$$\Sigma_{0|-1} := E \left[ (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|-1}) (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|-1})' \right].$$

Pro zjednodušení zápisu si označme

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_0 &:= E(\mathbf{x}_0) = \hat{\mathbf{x}}_{0|-1}, \\ \mathbf{P}_0 &:= E \left[ (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|-1}) (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|-1})' \right] = \Sigma_{0|-1}. \end{aligned}$$

Ukážeme, že  $\hat{\mathbf{x}}_{t|s}$  je nejlepší odhad stavového vektoru  $\mathbf{x}_t$  na základě informace obsažené v  $\mathbf{z}_s, \mathbf{z}_{s-1}, \mathbf{z}_{s-2}, \dots$ .

**Definice 1** *Nechť  $\Phi$  je třída borelovsky měřitelných funkcí z  $\mathbb{R}^m$  do  $\mathbb{R}^n$ . Pro libovolnou funkci  $\phi \in \Phi$  budeme výraz  $\phi(\mathbf{y})$  nazývat odhad  $n$ -rozměrného náhodného vektoru  $\mathbf{X}$  založený na pozorováních  $m$ -rozměrného vektoru  $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$ . Chybu odhadu měříme pomocí*

$$E(\|\mathbf{X} - \phi(\mathbf{y})\|^2 | \mathbf{Y} = \mathbf{y}),$$

kde platí  $\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a}'\mathbf{a}$ . Odhad  $\hat{\phi}(\mathbf{y})$  se nazývá odhad s minimální střední čtvercovou chybou, pokud platí

$$E\left(\|\mathbf{X} - \hat{\phi}(\mathbf{y})\|^2 | \mathbf{Y} = \mathbf{y}\right) \leq E(\|\mathbf{X} - \phi(\mathbf{y})\|^2 | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$$

pro všechny funkce  $\phi \in \Phi$ .

**Věta 1** *Nechť  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{Y}$  jsou dva spojitě rozdělené náhodné vektory a hodnota vektoru  $\mathbf{Y}$  je známá. Nechť odhad s minimální střední čtvercovou chybou vektoru  $\mathbf{X}$  je  $\hat{\phi}(\mathbf{y})$ . Potom odhad  $\hat{\phi}(\mathbf{y})$  je jednoznačný a daný vztahem*

$$\hat{\phi}(\mathbf{y}) = E(\mathbf{X} | \mathbf{Y} = \mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x} p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) dx.$$

(Poznámka: Výraz  $p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y})$  označuje podmíněnou hustotu  $\mathbf{X}$ , která je podmíněna znalostí  $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$ . Platí

$$p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{p_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})},$$

kde čitatel představuje sdruženou hustotu  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{Y}$  a jmenovatel hustotu  $\mathbf{Y}$ . Předpokládáme  $p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) \neq 0$ .)



*Důkaz (převzat z knihy Anderson, Moore [2]):* Výraz  $\phi(\mathbf{y})$  značí jako v předešlé definici odhad náhodného vektoru  $\mathbf{X}$  v případě, kdy známe náhodný vektor  $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$ . Odvodíme, pro jakou funkci  $\phi(\mathbf{y})$  je střední čtvercová chyba minimální.

$$\begin{aligned} & E(\|\mathbf{X} - \phi(\mathbf{y})\|^2 | \mathbf{Y} = \mathbf{y}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{x} - \phi(\mathbf{y})]' [\mathbf{x} - \phi(\mathbf{y})] p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}' \mathbf{x} p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) dx - 2\phi(\mathbf{y})' \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x} p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) dx + \phi(\mathbf{y})' \phi(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

kde jsme využili, že  $\phi(\mathbf{y})$  závisí na  $\mathbf{y}$ , ale nezávisí  $\mathbf{x}$ . Pokud k tomuto výrazu přičteme a poté zas odečteme člen  $\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x} p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) dx \right\|^2$ , dojdeme k rovnosti

$$\begin{aligned} & E(\|\mathbf{X} - \phi(\mathbf{y})\|^2 | \mathbf{Y} = \mathbf{y}) \\ &= \left[ \phi(\mathbf{y})' - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}' p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) dx \right] \left[ \phi(\mathbf{y}) - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x} p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) dx \right] \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}' \mathbf{x} p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) dx - \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x} p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) dx \right\|^2. \end{aligned}$$

Výraz na pravé straně rovnosti bude minimální pokud  $\phi(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x} p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) dx$ , neboli pokud  $\phi(\mathbf{y}) = E(\mathbf{X}|\mathbf{Y})$ . Navíc je zřejmé, že toto minimum je jednoznačné.

□

Podle této věty je tedy  $\hat{\mathbf{x}}_{t|s}$  nejlepší odhad stavového vektoru  $\mathbf{x}_t$  na základě informace obsažené v  $\mathbf{z}_s, \mathbf{z}_{s-1}, \mathbf{z}_{s-2}, \dots$  (nejlepší odhad ve smyslu minimální střední čtvercové chyby). Přitom matice  $\Sigma_{t|s}$  představuje střední čtvercovou chybu odhadu  $\hat{\mathbf{x}}_{t|s}$ . Jen připomeňme, že pro  $t = s$  se jedná o filtrování v rámci dynamického lineárního systému, pro  $t \leq s$  jde o vyrovnávání a pro  $t > s$  mluvíme o předpovídání. Nyní nás tedy bude zajímat, jak vypočítat hodnotu  $\hat{\mathbf{x}}_{t|s}$ . Odpověď pro případ filtrování a předpovídání o jeden krok dopředu je obsahem následující věty, která odvozuje velmi silný rekurzivní algoritmus známý jako Kalmanův filtr. Pro množinu  $\{(\mathbf{v}_t, t) | t \geq 0\}$  budeme užívat symbol  $\{\mathbf{v}_t\}$ .

**Věta 2 (Kalmanův filtr)** *Nechť máme lineární, konečně dimenzionální, diskrétní systém reprezentovaný rovnicemi (1.1) a (1.2) definovanými pro  $t \geq 0$ . Náhodné procesy  $\{\mathbf{v}_t\}$  a  $\{\mathbf{w}_t\}$  jsou nezávislé, s normálním rozdělením a platí*

$$E(\mathbf{v}_t) = \mathbf{0}, \quad E(\mathbf{w}_t) = \mathbf{0}, \quad \forall t \geq 0,$$

$$E(\mathbf{v}_t \mathbf{v}'_s) = \delta_{ts} \mathbf{R}_t, \quad E(\mathbf{w}_t \mathbf{w}'_s) = \delta_{ts} \mathbf{Q}_t, \quad \forall t, s \geq 0,$$

kde  $\delta_{ts}$  představuje Kroneckerovo delta. Dále předpokládáme, že počáteční stav  $\mathbf{x}_0$  je normálně rozdělená náhodná veličina se střední hodnotou  $\bar{\mathbf{x}}_0$  a s varianční maticí  $\mathbf{P}_0$ . Počáteční stav  $\mathbf{x}_0$  je nezávislý na  $\{\mathbf{v}_t\}$  a  $\{\mathbf{w}_t\}$ . Potom platí

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} = (\mathbf{F}_t - \mathbf{K}_t \mathbf{H}'_t) \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t \mathbf{z}_t$$

s počáteční podmínkou

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|-1} = \bar{\mathbf{x}}_0$$

a maticí  $\mathbf{K}_t$  ve tvaru

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{F}_t \Sigma_{t|t-1} \mathbf{H}_t (\mathbf{H}'_t \Sigma_{t|t-1} \mathbf{H}_t + \mathbf{R}_t)^{-1},$$

kde předpokládáme, že inverze matice  $(\mathbf{H}'_t \Sigma_{t|t-1} \mathbf{H}_t + \mathbf{R}_t)$  existuje. Dále pak

$$\Sigma_{t+1|t} = \mathbf{F}_t \left[ \Sigma_{t|t-1} - \Sigma_{t|t-1} \mathbf{H}_t (\mathbf{H}'_t \Sigma_{t|t-1} \mathbf{H}_t + \mathbf{R}_t)^{-1} \mathbf{H}'_t \Sigma_{t|t-1} \right] \mathbf{F}'_t + \mathbf{G}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{G}'_t$$

s počáteční podmínkou

$$\Sigma_{0|-1} = \mathbf{P}_0.$$

Přítom  $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$  a  $\Sigma_{t|t}$  získáme z rovnic

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{t|t} &= \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \Sigma_{t|t-1} \mathbf{H}_t (\mathbf{H}'_t \Sigma_{t|t-1} \mathbf{H}_t + \mathbf{R}_t)^{-1} (\mathbf{z}_t - \mathbf{H}'_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}), \\ \Sigma_{t|t} &= \Sigma_{t|t-1} - \Sigma_{t|t-1} \mathbf{H}_t (\mathbf{H}'_t \Sigma_{t|t-1} \mathbf{H}_t + \mathbf{R}_t)^{-1} \mathbf{H}'_t \Sigma_{t|t-1}. \end{aligned}$$

Před důkazem věty 2 si uvedeme pomocnou větu. Důkaz této pomocné věty lze nalézt v knize Anderson, Moore [2] (příklad 3.2).

**Věta 3** *Nechť náhodné vektory  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{Y}$  mají spojitě normální rozdělení,  $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}' \quad \mathbf{Y}')$  a  $\mathbf{Z}$  má normální rozdělení se střední hodnotou  $(\bar{\mathbf{x}}' \quad \bar{\mathbf{y}})'$  a s varianční maticí*

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{pmatrix}.$$

*Potom náhodný vektor  $\mathbf{X}$  při podmíněné informaci  $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$  má normální rozdělení se střední hodnotou*

$$\bar{\mathbf{x}} + \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})$$

*a s rozptylem*

$$\Sigma_{xx} - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx}.$$

*(Poznámka: Platí i následující rozšíření. Nechť máme navíc náhodný vektor  $\mathbf{W}$  a vektory  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  a  $\mathbf{W}$  mají normální rozdělení. Předpokládáme, že známe střední hodnotu*

a varianční matice vektoru  $\mathbf{Z}$  podmíněné informací  $\mathbf{W} = \mathbf{w}$ . Potom  $\mathbf{X}$  při podmíněné informaci  $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$  a  $\mathbf{W} = \mathbf{w}$  má normální rozdělení. Střední hodnotu a varianční matice spočítáme stejně jako v případě bez  $\mathbf{W}$ , pouze nahradíme střední hodnotu a varianční matice vektoru  $\mathbf{Z}$  podmíněnou střední hodnotu a podmíněnou varianční maticí vektoru  $\mathbf{Z}$  podmíněné informací  $\mathbf{W} = \mathbf{w}$ .)

Důkaz věty 2 (převzat z knihy Anderson, Moore [2]):

1. Nejprve vypočítáme střední hodnotu a varianční matici náhodného vektoru  $(\mathbf{x}'_0 \quad \mathbf{z}'_0)'$ , kde využijeme nezávislosti  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{v}_0$ :

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}_0) &= \bar{\mathbf{x}}_0, \\ E(\mathbf{z}_0) &= E(\mathbf{H}'_0\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0) = \mathbf{H}'_0\bar{\mathbf{x}}_0, \\ \text{var}(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{P}_0, \\ \text{cov}(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) &= \text{cov}(\mathbf{x}_0, \mathbf{H}'_0\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0) = \text{cov}(\mathbf{x}_0, \mathbf{H}'_0\mathbf{x}_0) + \text{cov}(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) = \mathbf{H}'_0\mathbf{P}_0, \\ \text{var}(\mathbf{z}_0) &= \text{var}(\mathbf{H}'_0\mathbf{x}_0) + \text{var}(\mathbf{v}_0) = \mathbf{H}'_0\mathbf{P}_0\mathbf{H}_0 + \mathbf{R}_0. \end{aligned}$$

Tedy střední hodnota náhodného vektoru  $(\mathbf{x}'_0 \quad \mathbf{z}'_0)'$  je  $(\bar{\mathbf{x}}'_0 \quad \bar{\mathbf{x}}'_0\mathbf{H}_0)'$  a varianční matice

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_0\mathbf{H}_0 \\ \mathbf{H}'_0\mathbf{P}_0 & \mathbf{H}'_0\mathbf{P}_0\mathbf{H}_0 + \mathbf{R}_0 \end{pmatrix}.$$

Zde využijeme větu 3. Z ní plyne, že náhodný vektor  $\mathbf{x}_0$  při podmíněné informaci  $\mathbf{z}_0$  má střední hodnotou

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \bar{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{P}_0\mathbf{H}_0(\mathbf{H}'_0\mathbf{P}_0\mathbf{H}_0 + \mathbf{R}_0)^{-1}(\mathbf{z}_0 - \mathbf{H}'_0\bar{\mathbf{x}}_0)$$

a rozptyl

$$\Sigma_{0|0} = \mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_0\mathbf{H}_0(\mathbf{H}'_0\mathbf{P}_0\mathbf{H}_0 + \mathbf{R}_0)^{-1}\mathbf{H}'_0\mathbf{P}_0.$$

2. Nyní vyjádříme  $\hat{\mathbf{x}}_{1|0}$  a  $\Sigma_{1|0}$  s využitím nezávislosti  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{w}_0$  a nezávislosti  $\mathbf{v}_0$  a  $\mathbf{w}_0$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{1|0} &= E(\mathbf{x}_1|\mathbf{z}_0) = E(\mathbf{F}_0\mathbf{x}_0 + \mathbf{G}_0\mathbf{w}_0|\mathbf{z}_0) = E(\mathbf{F}_0\mathbf{x}_0|\mathbf{z}_0) + E(\mathbf{G}_0\mathbf{w}_0|\mathbf{z}_0) = \\ &= \mathbf{F}_0E(\mathbf{x}_0|\mathbf{z}_0) + E(\mathbf{G}_0\mathbf{w}_0) = \mathbf{F}_0\hat{\mathbf{x}}_{0|0} \end{aligned}$$

a podobnými úpravami získáme

$$\Sigma_{1|0} = \text{var}(\mathbf{x}_1|\mathbf{z}_0) = \text{var}(\mathbf{F}_0\mathbf{x}_0|\mathbf{z}_0) + \text{var}(\mathbf{G}_0\mathbf{w}_0) = \mathbf{F}_0\Sigma_{0|0}\mathbf{F}'_0 + \mathbf{G}_0\mathbf{Q}_0\mathbf{G}'_0.$$

3. Z těchto rovnic a z rovnice (1.2) vyplývá, že  $\mathbf{z}_1$  podmíněné informací  $\mathbf{z}_0$  má normální rozdělení se střední hodnotou (s využitím nezávislosti  $\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{x}_0$  a nezávislosti  $\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{v}_0$ )

$$\hat{\mathbf{z}}_{1|0} = E(\mathbf{z}_1|\mathbf{z}_0) = E(\mathbf{H}'_1\mathbf{x}_1|\mathbf{z}_0) + E(\mathbf{v}_1|\mathbf{z}_0) = \mathbf{H}'_1E(\mathbf{x}_1|\mathbf{z}_0) + E(\mathbf{v}_1) = \mathbf{H}'_1\hat{\mathbf{x}}_{1|0}$$

a varianční maticí

$$\text{var}(\mathbf{z}_1 | \mathbf{z}_0) = \text{var}(\mathbf{H}'_1 \mathbf{x}_1 | \mathbf{z}_0) + \text{var}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{H}'_1 \boldsymbol{\Sigma}_{1|0} \mathbf{H}_1 + \mathbf{R}_1.$$

A dále platí

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ (\mathbf{x}_1 - \hat{\mathbf{x}}_{1|0}) (\mathbf{z}_1 - \hat{\mathbf{z}}_{1|0})' | \mathbf{z}_0 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ (\mathbf{x}_1 - \hat{\mathbf{x}}_{1|0}) (\mathbf{H}'_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{v}_1 - \mathbf{H}'_1 \hat{\mathbf{x}}_{1|0})' | \mathbf{z}_0 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ (\mathbf{x}_1 - \hat{\mathbf{x}}_{1|0}) \mathbf{v}_1 | \mathbf{z}_0 \right] + \mathbb{E} \left[ (\mathbf{x}_1 - \hat{\mathbf{x}}_{1|0}) \mathbf{H}'_1 (\mathbf{x}_1 - \hat{\mathbf{x}}_{1|0})' | \mathbf{z}_0 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ (\mathbf{x}_1 - \hat{\mathbf{x}}_{1|0}) (\mathbf{x}_1 - \hat{\mathbf{x}}_{1|0})' | \mathbf{z}_0 \right] \mathbf{H}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_{1|0} \mathbf{H}_1. \end{aligned}$$

Tedy z těchto výpočtů získáváme, že náhodný vektor  $(\mathbf{x}'_1 \quad \mathbf{z}'_1)'$  podmíněný informací  $\mathbf{z}_0$  má střední hodnotu  $(\hat{\mathbf{x}}'_{1|0} \quad \hat{\mathbf{x}}'_{1|0} \mathbf{H}_1)'$  a varianční maticí

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{1|0} & \boldsymbol{\Sigma}_{1|0} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}'_1 \boldsymbol{\Sigma}_{1|0} & \mathbf{H}'_1 \boldsymbol{\Sigma}_{1|0} \mathbf{H}_1 + \mathbf{R}_1 \end{pmatrix}.$$

4. Opět použijeme větu 3 podle, které má náhodný vektor  $\mathbf{x}_1$  při podmíněné informaci  $\mathbf{z}_0$  a  $\mathbf{z}_1$  střední hodnotou

$$\hat{\mathbf{x}}_{1|1} = \hat{\mathbf{x}}_{1|0} + \boldsymbol{\Sigma}_{1|0} \mathbf{H}_1 (\mathbf{H}'_1 \boldsymbol{\Sigma}_{1|0} \mathbf{H}_1 + \mathbf{R}_1)^{-1} (\mathbf{z}_1 - \mathbf{H}'_1 \hat{\mathbf{x}}_{1|0})$$

a rozptyl

$$\boldsymbol{\Sigma}_{1|1} = \boldsymbol{\Sigma}_{1|0} - \boldsymbol{\Sigma}_{1|0} \mathbf{H}_1 (\mathbf{H}'_1 \boldsymbol{\Sigma}_{1|0} \mathbf{H}_1 + \mathbf{R}_1)^{-1} \mathbf{H}'_1 \boldsymbol{\Sigma}_{1|0}.$$

5. Když budeme postupovat podobně jako v kroku 2 dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{2|1} &= \mathbf{F}_1 \hat{\mathbf{x}}_{1|1}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{2|1} &= \mathbf{F}_1 \boldsymbol{\Sigma}_{1|1} \mathbf{F}'_1 + \mathbf{G}_1 \mathbf{Q}_1 \mathbf{G}'_1. \end{aligned}$$

A opakováním kroků 2 až 4 získáme rekurzivní rovnice

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{t|t} &= \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1} \mathbf{H}_t (\mathbf{H}'_t \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1} \mathbf{H}_t + \mathbf{R}_t)^{-1} (\mathbf{z}_t - \mathbf{H}'_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}), \\ \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} &= \mathbf{F}_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{t|t} &= \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1} - \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1} \mathbf{H}_t (\mathbf{H}'_t \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1} \mathbf{H}_t + \mathbf{R}_t)^{-1} \mathbf{H}'_t \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{t+1|t} &= \mathbf{F}_t \boldsymbol{\Sigma}_{t|t} \mathbf{F}'_t + \mathbf{G}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{G}'_t. \end{aligned}$$

Sice  $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}$  není přesně ve tvaru, v kterém jej uvádí věta, ale pokud dosadíme za  $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$ , po jednoduchých úpravách získáme stejný tvar:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} &= \mathbf{F}_t \left[ \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1} \mathbf{H}_t (\mathbf{H}'_t \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1} \mathbf{H}_t + \mathbf{R}_t)^{-1} (\mathbf{z}_t - \mathbf{H}'_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) \right] \\ &= \mathbf{F}_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{F}_t \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1} \mathbf{H}_t (\mathbf{H}'_t \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1} \mathbf{H}_t + \mathbf{R}_t)^{-1} (\mathbf{z}_t - \mathbf{H}'_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) \\ &= \mathbf{F}_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t \mathbf{z}_t - \mathbf{K}_t \mathbf{H}'_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} = (\mathbf{F}_t - \mathbf{K}_t \mathbf{H}'_t) \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t \mathbf{z}_t \end{aligned}$$

A pro získání  $\Sigma_{t|t+1}$  ve tvaru, v kterém jej uvádí věta, stačí jen dosadit za  $\Sigma_{t|t}$ .

⊠

Tato věta tedy říká, že pokud v dynamickém lineárním systému známe hodnoty matic  $\mathbf{F}_t$ ,  $\mathbf{G}_t$ ,  $\mathbf{H}_t$ ,  $\mathbf{R}_t$ ,  $\mathbf{Q}_t$  a  $\mathbf{P}_0$ , vektoru  $\hat{\mathbf{x}}_0$  a pozorování  $\mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{z}_{t-2}, \dots$  a navíc jsou ještě splněny určité podmínky nezávislosti, normality a rozdělení náhodných vektorů, potom pomocí Kalmanových rekurzivních vzorců dokážeme spočítat odhad stavového vektoru o jeden krok dopředu  $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}$  (předpovídání) a odhad současné hodnoty stavového vektoru  $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$  (filtrování). Pro tyto odhady lze získat i příslušné varianční matice odhadů  $\Sigma_{t+1|t}$  a  $\Sigma_{t|t}$ . Dále, jak je z důkazu věty patrné, lze z těchto informací také spočítat odhad vektoru pozorování o jeden krok dopředu

$$\hat{\mathbf{z}}_{t+1|t} = \mathbf{H}'_{t+1} \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}$$

a odpovídající varianční matici tohoto odhadu

$$\text{var}(\mathbf{z}_{t+1} | \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_t) = \mathbf{H}'_{t+1} \Sigma_{t+1|t} \mathbf{H}_{t+1} + \mathbf{R}_{t+1}.$$

Věta 2 nám dává návod pouze pro výpočet předpovědi o jeden krok dopředu a pro výpočet odhadu současné hodnoty. Nyní si uvedeme vzorce pro vyrovnávání a předpovídání ve stavovém modelu a přitom budeme předpokládat platnost všech podmínek z věty 2.

Rozlišujeme tři druhy vyrovnávání. *Vyrovnávání s pevným bodem* se zabývá odhadem stavového vektoru  $\mathbf{x}_k$  pro pevné  $k$  na základě informace obsažené v  $\mathbf{z}_{k+t}, \mathbf{z}_{k+t-1}, \mathbf{z}_{k+t-2}, \dots$ , kde platí  $t \in \mathbb{N}$ . Výstupem pak je posloupnost  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k+1}, \hat{\mathbf{x}}_{k|k+2}, \hat{\mathbf{x}}_{k|k+3}, \dots$ . *Vyrovnávání s pevným zpožděním* počítá odhad  $\hat{\mathbf{x}}_{t-j|t}$ , kde  $j$  je pevně dané zpoždění a  $t = j, j+1, \dots$ . Tedy cílem je získat posloupnost  $\hat{\mathbf{x}}_{0|j}, \hat{\mathbf{x}}_{1|j+1}, \hat{\mathbf{x}}_{2|j+2}, \dots$ . Poslední druh vyrovnávání se nazývá *vyrovnávání s pevným intervalem*. V tomto případě uvažujeme konečnou množinu pozorování o velikosti  $T$  a hledáme odhad  $\hat{\mathbf{x}}_{t|T}$  pro pevné  $T$  a  $0 \leq t \leq T$ . V této práci se omezíme na případ vyrovnávání s pevným intervalem.

Algoritmus pro vyrovnávání s pevným intervalem je složen z rekurzivních vzorců, které využívají hodnoty  $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$  a  $\Sigma_{t|t}$ , tyto hodnoty lze získat z Kalmanových vzorců (viz věta 2). Algoritmus pracuje proti pohybu času. Vzorce jsou dány

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|T} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t} + \Sigma_{t|t}^* (\hat{\mathbf{x}}_{t+1|T} - \mathbf{F}_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t})$$

a

$$\Sigma_{t|T} = \Sigma_{t|t} + \Sigma_{t|t}^* (\Sigma_{t+1|T} - \Sigma_{t+1|t}) \Sigma_{t|t}^{*'},$$

kde

$$\Sigma_{t|t}^* = \Sigma_{t|t} \mathbf{F}'_t \Sigma_{t+1|t}^{-1}, \quad t = T-1, T-2, \dots, 0.$$

Tedy pro výpočet je třeba mít uloženy hodnoty  $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$  a  $\Sigma_{t|t}$  pro  $t = 0, 1, \dots, T$ . Pokud matice  $\Sigma_{t+1|t}$  je singulární pro nějaké  $t$ , a tedy její inverzní matice  $\Sigma_{t+1|t}^{-1}$  neexistuje, můžeme inverzní matici nahradit pseudoinverzní. Odvození těchto vzorců lze nalézt například v knize Anderson, Moore [2].

*Předpovídáním* míníme odhad stavového vektoru  $\mathbf{x}_{t+h}$ , pokud máme k dispozici pozorování  $\mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{z}_{t-2}, \dots$ , tedy hledáme odhad  $\hat{\mathbf{x}}_{t+h|t}$  pro  $h = 1, 2, \dots$ . Nyní si odvodíme rekurzivní výpočet  $\hat{\mathbf{x}}_{t+h|t}$  a  $\Sigma_{t+h|t}$ :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{t+h|t} &= \mathbb{E}(\mathbf{x}_{t+h} | \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_t) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{F}_{t+h-1}\mathbf{x}_{t+h-1} + \mathbf{G}_{t+h-1}\mathbf{w}_{t+h-1} | \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_t) \\ &= \mathbf{F}_{t+h-1}\mathbb{E}(\mathbf{x}_{t+h-1} | \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_t) + \mathbf{G}_{t+h-1}\mathbb{E}(\mathbf{w}_{t+h-1} | \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_t),\end{aligned}$$

kde druhý člen na posledním řádku vypadne, neboť  $\mathbf{w}_{t+h-1}$  nezávisí na pozorováních do času  $t$  a jeho střední hodnota je nulová. Odtud dostáváme vzorec

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+h|t} = \mathbf{F}_{t+h-1}\hat{\mathbf{x}}_{t+h-1|t} \quad \text{pro } h = 1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

v němž použijeme jako počáteční hodnotu  $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}$  spočítanou pomocí Kalmanova filtru. Dále

$$\begin{aligned}\Sigma_{t+h|t} &= \mathbb{E}\left[(\mathbf{x}_{t+h} - \hat{\mathbf{x}}_{t+h|t})(\mathbf{x}_{t+h} - \hat{\mathbf{x}}_{t+h|t})' | \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_t\right] \\ &= \mathbf{F}_{t+h-1}\mathbb{E}\left[(\mathbf{x}_{t+h-1} - \hat{\mathbf{x}}_{t+h-1|t})(\mathbf{x}_{t+h-1} - \hat{\mathbf{x}}_{t+h-1|t})' | \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_t\right] \mathbf{F}_{t+h-1}' \\ &\quad + \mathbf{G}_{t+h-1}\mathbb{E}(\mathbf{w}_{t+h-1}\mathbf{w}_{t+h-1}' | \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_t) \mathbf{G}_{t+h-1}' \\ &= \mathbf{F}_{t+h-1}\Sigma_{t+h-1|t}\mathbf{F}_{t+h-1}' + \mathbf{G}_{t+h-1}\mathbb{E}(\mathbf{w}_{t+h-1}\mathbf{w}_{t+h-1}') \mathbf{G}_{t+h-1}' \\ &= \mathbf{F}_{t+h-1}\Sigma_{t+h-1|t}\mathbf{F}_{t+h-1}' + \mathbf{G}_{t+h-1}\mathbf{Q}_{t+h-1}\mathbf{G}_{t+h-1}',\end{aligned}$$

kde jsme použili (1.1) a (1.3) a využili nezávislosti plynoucí z předpokladů věty 2. Zajímavé je, že i pokud neplatí předpoklad normality, je  $\hat{\mathbf{x}}_{t+h|t}$  stále lineární odhad s minimální střední čtvercovou chybou.

## 1.2 Počáteční podmínky

Pro použití rekurzivních vzorců Kalmanova filtru potřebujeme znát střední hodnotu počátečního stavu  $\bar{\mathbf{x}}_0$  a varianční matici  $\mathbf{P}_0$ . Nyní se tedy budeme zabývat tím, jakým způsobem určit počáteční podmínky. Při psaní této podkapitoly jsem využívala knihu Harvey [9].

Nejprve si uvedeme dvě definice, které v následujícím textu využijeme.

**Definice 1 (Stacionarita)** *Vícerozměrná časová řada  $\mathbf{y}_t, t \in T$  je (slabě) stacionární, jestliže platí*

$$E(\mathbf{y}_t) = \mu = \textit{konstanta},$$

$$\text{cov}(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_s) = \text{cov}(\mathbf{y}_{t+h}, \mathbf{y}_{s+h}) \quad \textit{pro libovolné } h.$$

**Definice 2 (Kroneckerův součin)** *Nechť  $\mathbf{A}$  je matice typu  $n \times n$  a  $\mathbf{B}$  je matice typu  $p \times p$ . Pak Kroneckerův součin je definován*

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{1,1}\mathbf{A} & \dots & b_{1,p}\mathbf{A} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p,1}\mathbf{A} & \dots & b_{p,p}\mathbf{A} \end{pmatrix}.$$

Nejjednodušší případ pro určení počátečních podmínek je, pokud jsou předem známé. Ale to se v praxi příliš často nestává. Častější je situace, kdy je třeba počáteční podmínky odhadnout či vypočítat. My si zde uvedeme dva možné způsoby určení počátečních podmínek.

První způsob lze použít jen ve speciálním případě, kdy se model nemění v čase. To znamená, že matice  $\mathbf{F}_t, \mathbf{G}_t, \mathbf{H}_t, \mathbf{R}_t$  a  $\mathbf{Q}_t$  jsou stejné pro každé  $t$ . Tedy dynamický lineární systém má tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= \mathbf{F}\mathbf{x}_t + \mathbf{G}\mathbf{w}_t, \\ \mathbf{z}_t &= \mathbf{H}'\mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \end{aligned}$$

pro  $t = 0, 1, \dots$ . A platí

$$E(\mathbf{v}_t \mathbf{v}'_s) = \delta_{ts} \mathbf{R}, \quad E(\mathbf{w}_t \mathbf{w}'_s) = \delta_{ts} \mathbf{Q}, \quad \forall t, s \geq 0.$$

Dále požadujeme, aby stavový vektor byl stacionární. Potom střední hodnota stavového vektoru je rovna  $\mathbf{0}$  (ve smyslu nulový vektor  $n \times 1$ ). Neboť pokud je stavový vektor stacionární, musí platit

$$E(\mathbf{x}_t) = \mu = \textit{konstanta} \quad \textit{pro } \forall t = 0, 1, \dots$$

a dále ze stavové rovnice musí být splněna rovnost

$$E(\mathbf{x}_{t+1}) = \mathbf{F}E(\mathbf{x}_t).$$

Z těchto rovnic vyplývá, že buď matice  $\mathbf{F}$  je jednotková, nebo že je splněna rovnost  $E(\mathbf{x}_t) = \mathbf{0}$ . Ale matice  $\mathbf{F}$  není obecně jednotková matice, z toho plyne, že střední hodnota stavového vektoru musí být rovna nulovému vektoru. Tedy speciálně platí  $E(\mathbf{x}_0) = \bar{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$ .

Hodnota varianční matice  $\mathbf{P}_0$  se za výše uvedených podmínek odvodí následujícím způsobem

$$\mathbf{P}_0 = \mathbb{E} [(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)'] = \mathbb{E}(\mathbf{x}_0\mathbf{x}'_0) - \bar{\mathbf{x}}_0\bar{\mathbf{x}}_0' = \mathbb{E}(\mathbf{x}_0\mathbf{x}'_0) = \mathbb{E}(\mathbf{x}_t\mathbf{x}'_t).$$

U třetí rovnosti jsme využili předešlého výsledku  $\bar{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$ . U poslední rovnosti jsme zas použili stacionaritu stavového vektoru, podle které je proces invariantní vůči posunům v čase v rámci momentů druhého řádu. Zavedme si označení

$$\mathbf{P}_\tau := \mathbb{E}(\mathbf{x}_t\mathbf{x}'_{t-\tau}), \quad \tau \in \mathbb{Z}.$$

Potom platí

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\tau &= \mathbb{E}(\mathbf{x}_t\mathbf{x}'_{t-\tau}) = \mathbb{E}[(\mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{G}\mathbf{w}_{t-1})\mathbf{x}'_{t-\tau}] = \mathbf{F}\mathbb{E}(\mathbf{x}_{t-1}\mathbf{x}'_{t-\tau}) + \mathbf{G}\mathbb{E}(\mathbf{w}_{t-1}\mathbf{x}'_{t-\tau}) \\ &= \mathbf{F}\mathbf{P}_{\tau-1} \quad \text{pro } \tau \geq 1. \end{aligned}$$

V tomto odvození jsme využili nezávislosti  $\mathbf{x}_{t-\tau}$  a  $\mathbf{w}_{t-1}$  ( $\mathbf{x}_t$  závisí pouze na  $\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_{t-1}$ ) a nulové střední hodnoty vektoru  $\mathbf{w}_{t-1}$ . Z tohoto výsledku postupným dosazováním za  $\mathbf{P}_{\tau-k}$  pro  $k = 1, 2, \dots, \tau - 1$  dostaneme

$$\mathbf{P}_\tau = \mathbf{F}^\tau \mathbf{P}_0 \quad \text{pro } \tau \geq 0.$$

Pokud  $\tau = 0$

$$\mathbb{E}(\mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1}\mathbf{x}'_t) = \mathbf{F}\mathbf{P}_{-1} = \mathbf{F}\mathbf{P}'_1 = \mathbf{F}\mathbf{P}_0\mathbf{F}'$$

a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbf{G}\mathbf{w}_{t-1}\mathbf{x}'_t) &= \mathbb{E}[\mathbf{G}\mathbf{w}_{t-1}(\mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{G}\mathbf{w}_{t-1})'] \\ &= \mathbf{G}\mathbb{E}(\mathbf{w}_{t-1}\mathbf{x}'_{t-1})\mathbf{F}' + \mathbf{G}\mathbb{E}(\mathbf{w}_{t-1}\mathbf{w}'_{t-1})\mathbf{G}' \\ &= \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}'. \end{aligned}$$

Odtud dostaneme

$$\mathbf{P}_0 = \mathbb{E}(\mathbf{x}_t\mathbf{x}'_t) = \mathbb{E}(\mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1}\mathbf{x}'_t) + \mathbb{E}(\mathbf{G}\mathbf{w}_{t-1}\mathbf{x}'_t) = \mathbf{F}\mathbf{P}_0\mathbf{F}' + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}'.$$

Tedy varianční matici  $\mathbf{P}_0$  lze vypočítat jako řešení rovnice

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{F}\mathbf{P}_0\mathbf{F}' + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}'.$$

Jedna z možností, jak  $\mathbf{P}_0$  z rovnice vypočítat, je založena na pozorování

$$\text{vec}(\mathbf{P}_0) = (\mathbf{I} - \mathbf{F} \otimes \mathbf{F})^{-1} \text{vec}(\mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}'),$$

kde  $\otimes$  je Kroneckerův součin,  $\mathbf{I}$  je jednotková matice a operátor  $\text{vec}(\cdot)$  vyjadřuje, že sloupce matice jsou navrstveny jeden na druhém (více podrobností viz Gardner, Phillips [8]).



Jestliže stavová rovnice není stacionární, potom nepodmíněné rozdělení stavového vektoru není definované. V tomto případě je časté řešení zvolit počáteční podmínky jako

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{P}_0 &= \kappa \mathbf{I},\end{aligned}$$

kde  $\kappa \rightarrow \infty$ . Tyto podmínky jsou označovány v anglické literatuře jako *diffuse priors*.

Hledisko konvergence, v případě určení počátečních podmínek výše uvedeným způsobem, je uvažováno v knize Harvey [9].

### 1.3 Odhad parametrů modelu

Pro řešení dynamického lineárního systému pomocí Kalmanova filtru je třeba znát hodnoty matic  $\mathbf{F}_t$ ,  $\mathbf{G}_t$ ,  $\mathbf{H}_t$ ,  $\mathbf{R}_t$  a  $\mathbf{Q}_t$ . Ale v reálných situacích nejsou vždy hodnoty těchto parametrů známy, takže musí být odhadnuty. V této podkapitole se budeme zabývat tím, jak lze parametry odhadnout pomocí maximální věrohodnosti (viz např. Durbin, Koopman [5] a Harvey [9]).

*Metoda maximální věrohodnosti* je metoda pro konstrukci bodových odhadů. Předpokládejme, že máme množinu pozorování  $\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_T$ , která jsou nezávislá a stejně rozdělená. Sdružená hustota má pak tvar

$$L(\mathbf{z}, \Psi) = \prod_{t=0}^T p(\mathbf{z}_t),$$

kde  $p(\mathbf{z}_t)$  je spojitá hustota odpovídající pozorování  $\mathbf{z}_t$  a parametry zde zastupuje  $\Psi$ . V případě, že nejsou známy žádné parametry, je tedy  $\Psi = (\mathbf{F}_t, \mathbf{G}_t, \mathbf{H}_t, \mathbf{R}_t, \mathbf{Q}_t)$ . V praxi se někdy stává, že o určitých parametrech máme informaci a o jiných zas nikoliv, potom  $\Psi$  obsahuje pouze ty neznámé parametry. Funkce  $L(\mathbf{z}, \Psi)$  je také zároveň věrohodnostní funkce pro danou množinu pozorování. Pokud budeme věrohodnostní funkci maximalizovat podle  $\Psi$ , získáme maximálně věrohodný odhad  $\hat{\Psi}$ .

Ale v naší situaci jsou jednotlivá pozorování  $\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_T$  navzájem závislá. Stačí jen do rovnice pozorování dosadit za  $\mathbf{x}_t$

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{H}'_t(\mathbf{F}_{t-1}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{G}_{t-1}\mathbf{w}_{t-1}) + \mathbf{v}_t$$

a ihned vidíme, že  $\mathbf{z}_t$  závisí na  $\mathbf{x}_{t-1}$  stejně jako  $\mathbf{z}_{t-1}$ . Z toho plyne, že model popsáný výše neplatí, protože není splněna nezávislost. Tento problém lze odstranit, pokud místo hustoty použijeme podmíněnou hustotu. Věrohodnostní funkce se pak změní na

$$L(\mathbf{z}, \Psi) = \prod_{t=0}^T p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{t-1}),$$

kde  $p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{t-1})$  představuje hustotu odpovídající pozorování  $\mathbf{z}_t$  podmíněnou informací do času  $t - 1$ . Ve speciálním případě, kdy  $t = 0$ , platí  $p(\mathbf{z}_0 | \mathbf{z}_{-1}) = p(\mathbf{z}_0)$ .

Pokud náhodné složky  $\{\mathbf{w}_t\}$  a  $\{\mathbf{v}_t\}$  a počáteční stavový vektor  $\mathbf{x}_0$  mají mnohorozměrné normální rozdělení, potom platí, že rozdělení  $\mathbf{z}_t$  podmíněné informací  $\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{t-1}$  má také normální rozdělení. Nyní si vzpomeňme na důkaz věty 2, kde jsme odvodili podmíněnou střední hodnotu  $\mathbf{z}_t$

$$\hat{\mathbf{z}}_{t|t-1} = \mathbf{H}'_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}$$

a podmíněnou varianční matici  $\mathbf{z}_t$  (označme ji jako  $\mathbf{S}_t$ )

$$\mathbf{S}_t := \text{var}(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{t-1}) = \mathbf{H}'_t \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1} \mathbf{H}_t + \mathbf{R}_t.$$

Jak uvádí např. Anděl [1], pokud náhodný  $m$ -rozměrný vektor  $\mathbf{Y}$  má regulární normální rozdělení  $N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ , pak jeho hustota existuje a je dána vzorcem

$$f(\mathbf{y}) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} |\mathbf{V}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \right].$$

Pokud je tedy splněna normalita náhodných složek  $\{\mathbf{w}_t\}$  a  $\{\mathbf{v}_t\}$  a počátečního stavového vektor  $\mathbf{x}_0$ , platí  $\mathbf{z}_t \sim N(\hat{\mathbf{z}}_{t|t-1}, \mathbf{S}_t)$  a věrohodnostní funkci pak lze zapsat

$$L(\mathbf{z}, \boldsymbol{\Psi}) = \prod_{t=0}^T (2\pi)^{-\frac{m}{2}} |\mathbf{S}_t|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{z}_t - \hat{\mathbf{z}}_{t|t-1})' \mathbf{S}_t^{-1} (\mathbf{z}_t - \hat{\mathbf{z}}_{t|t-1}) \right],$$

kde  $m$  je délka vektoru  $\mathbf{z}_t$ . Zpravidla je vhodnější pracovat s logaritmicou věrohodnostní funkcí, která převede součinnový tvar na součtový. Logaritmicou věrohodnostní funkci získáme pouhým zlogaritmováním věrohodnostní funkce:

$$\log L(\mathbf{z}, \boldsymbol{\Psi}) = -\frac{m(T+1)}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=0}^T \log |\mathbf{S}_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=0}^T \left[ (\mathbf{z}_t - \hat{\mathbf{z}}_{t|t-1})' \mathbf{S}_t^{-1} (\mathbf{z}_t - \hat{\mathbf{z}}_{t|t-1}) \right].$$

Pro nalezení maximálně věrohodného odhadu parametrů je třeba maximalizovat logaritmicou věrohodnostní funkci podle  $\boldsymbol{\Psi}$ . Pro maximalizaci je dostupný široký výběr algoritmů, mnohé z nich jsou založeny na Newtonově metodě, kterou si zde přiblížíme. Newtonova metoda řeší rovnici

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\Psi}) = \frac{\partial \log L(\mathbf{z}, \boldsymbol{\Psi})}{\partial \boldsymbol{\Psi}} = \mathbf{0},$$

tedy hledá, pro jaké  $\boldsymbol{\Psi}$  se gradient logaritmicke věrohodnostní funkce  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\Psi})$  rovná nulovému vektoru. Využívá k tomu lineární část Taylorova rozvoje, podle něhož lze  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\Psi})$  aproximovat výrazem

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\Psi}) \simeq \mathbf{g}_0(\boldsymbol{\Psi}) + \mathbf{G}_0(\boldsymbol{\Psi}) (\boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Psi}_0). \quad (1.4)$$

Zde  $\Psi_0$  je pevně zvolená počáteční hodnota parametrů a

$$g_0(\Psi) = g(\Psi)|_{\Psi=\Psi_0}, \quad G_0(\Psi) = G(\Psi)|_{\Psi=\Psi_0},$$

kde výrazem  $G(\Psi)$  míníme Hessovu matici logaritmické věrohodnostní funkce

$$G(\Psi) = \frac{\partial^2 \log L(\mathbf{z}, \Psi)}{\partial \Psi \partial \Psi'}.$$

Položíme pravou stranu (1.4) rovnou nule a budeme hledat hodnotu parametru  $\Psi$ , pro který je tato rovnost splněna. Tuto hodnotu označíme  $\Psi_1$ :

$$\begin{aligned} g_0(\Psi) + G_0(\Psi)(\Psi - \Psi_0) &= \mathbf{0} \\ G_0(\Psi)\Psi &= G_0(\Psi)\Psi_0 - g_0(\Psi) \\ \Psi &= G_0(\Psi)^{-1}G_0(\Psi)\Psi_0 - G_0(\Psi)^{-1}g_0(\Psi). \end{aligned}$$

Tedy dostáváme

$$\Psi_1 = \Psi_0 - G_0(\Psi)^{-1}g_0(\Psi).$$

S nově spočítaným vektorem parametrů  $\Psi_1$  provedeme stejný postup jako s  $\Psi_0$  a získáme tím další vektor parametrů  $\Psi_2$ . Iterační krok má pak podobu

$$\Psi_{k+1} = \Psi_k - G_k(\Psi)^{-1}g_k(\Psi) \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.5)$$

Iteraci provádíme tak dlouho, dokud se  $\Psi_{k+1}$  liší od  $\Psi_k$ , tedy dokud není  $g_{k+1}(\Psi)$  dostatečně blízko nuly. Pro bližší pochopení tohoto algoritmu si uvědomíme následující fakta. Gradient  $g(\Psi)$  nám říká, jakým směrem se vydat, abychom šli ve směru růstu funkce, tedy ve směru k jejímu maximu. A Hessova matice  $G(\Psi)$  upravuje velikost tohoto kroku. Tudíž podle vzorce (1.5) se z bodu  $\Psi_k$  posuneme o danou velikost kroku ve směru růstu funkce. Pokud je Hessova matice negativně definitní pro všechny  $\Psi$ , potom logaritmická věrohodnostní funkce je konkávní a tudíž má také jednoznačné maximum.

V reálných situacích je často velmi náročné spočítat  $g(\Psi)$  a  $G(\Psi)$  analyticky. Existují různé postupy pro aproximaci matice  $G(\Psi)$ , některé z nich využívají tak zvanou BFGS metodu (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shannon metoda). Gradient  $g(\Psi)$  lze obvykle spočítat numericky.

V případě chybějících pozorování se pro konstrukci maximálně věrohodných odhadů využívá EM algoritmus. Jeho popis obsahuje např. monografie Durbin, Koopman [5].

## 1.4 Chybějící pozorování

Doposud jsme předpokládali, že pokud máme informaci až do času  $s$ , všechna pozorování  $\mathbf{z}_s, \mathbf{z}_{s-1}, \mathbf{z}_{s-2}, \dots$  jsou dostupná. Ale v praxi nemusí být tento předpoklad vždy splněn, některá pozorování mohou chybět. My zde probereme dvě situace. Nejprve se budeme zabývat případem, kdy v nějakém vektoru pozorování  $\mathbf{z}_t$  chybí pouze určité prvky, a pak budeme uvažovat případ, kdy chybí celý vektor  $\mathbf{z}_t$  (viz např. Durbin, Koopman [5]).

Tedy nejprve předpokládejme, že v čase  $t$  chybí určité prvky vektoru pozorování  $\mathbf{z}_t$ . Výraz  $\tilde{\mathbf{z}}_t$  bude značit vektor hodnot, které jsou dostupné. Vektor  $\tilde{\mathbf{z}}_t$  má pak stejný nebo menší počet prvků než vektor  $\mathbf{z}_t$ , velikost vektoru  $\tilde{\mathbf{z}}_t$  označme  $\tilde{m}$ . Potom platí

$$\tilde{\mathbf{z}}_t = \mathbf{W}_t \mathbf{z}_t,$$

kde  $\mathbf{W}_t$  je známá matice velikosti  $\tilde{m} \times m$ . Pokud například chybí  $k$ -tý prvek vektoru  $\mathbf{z}_t$ , je matice  $\mathbf{W}_t$  rovna jednotkové matici s vynechaným  $k$ -tým řádkem.

Řešením tohoto problému je v časových okamžicích, v kterých nejsou dostupné všechny prvky  $\mathbf{z}_t$ , přepsat rovnici (1.2) a rozptylovou matici její náhodné složky jako

$$\tilde{\mathbf{z}}_t = \tilde{\mathbf{H}}_t' \mathbf{x}_t + \tilde{\mathbf{v}}_t, \quad \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{v}}_t \tilde{\mathbf{v}}_s') = \delta_{ts} \tilde{\mathbf{R}}_t,$$

kde platí

$$\tilde{\mathbf{H}}_t = \mathbf{W}_t \mathbf{H}_t \quad \tilde{\mathbf{v}}_t = \mathbf{W}_t \mathbf{v}_t \quad \tilde{\mathbf{R}}_t = \mathbf{W}_t \mathbf{R}_t \mathbf{W}_t'.$$

Filtrování pomocí Kalmanova filtru a vyhlazování poté pracují přesně jako dříve, pouze jsou v příslušných časových okamžicích  $\mathbf{z}_t, \mathbf{H}_t$  a  $\mathbf{R}_t$  nahrazeny  $\tilde{\mathbf{z}}_t, \tilde{\mathbf{H}}_t$  a  $\tilde{\mathbf{R}}_t$ . Chybějící prvky vektoru pozorování můžeme poté odhadnout pomocí odhadu stavového vektoru

$$\hat{\mathbf{z}}_{t|t-1} = \mathbf{H}_t' \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}.$$

Nyní přejdeme k druhé situaci, kdy neznáme skupinu vektorů pozorování  $\mathbf{z}_a, \mathbf{z}_{a+1}, \dots, \mathbf{z}_b$ . Spočítáme si odhad stavového vektoru  $\mathbf{x}_{t+1}$  pro časové okamžiky  $t$ , kdy neznáme vektor pozorování:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} &= \mathbb{E}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-1}, \dots) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{a-1}, \mathbf{z}_{a-2}, \dots) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{F}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{G}_t \mathbf{w}_t | \mathbf{z}_{a-1}, \mathbf{z}_{a-2}, \dots) \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{F}_t (\mathbf{F}_{t-1} \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{G}_{t-1} \mathbf{w}_{t-1}) + \mathbf{G}_t \mathbf{w}_t | \mathbf{z}_{a-1}, \mathbf{z}_{a-2}, \dots] \\ &\vdots \\ &= \mathbb{E} \left\{ \mathbf{F}_t \cdots \mathbf{F}_a \mathbf{x}_a + \sum_{k=0}^{t-a} \left[ \left( \prod_{j=0}^{k-1} \mathbf{F}_{t-j} \right) \mathbf{G}_{t-k} \mathbf{w}_{t-k} \right] | \mathbf{z}_{a-1}, \mathbf{z}_{a-2}, \dots \right\} \\ &= \mathbf{F}_t \cdots \mathbf{F}_a \hat{\mathbf{x}}_{a|a-1} \end{aligned}$$

pro  $t = a, \dots, b-1$ . U druhé rovnosti jsme odebrali pozorování  $\mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-1}, \dots, \mathbf{z}_a$ , protože jejich hodnoty nejsou známy. Pokud tento výsledek převedeme do rekurzivního vzorce, dostaneme

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} = \mathbf{F}_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}, \quad t = a, \dots, b-1$$

s počáteční hodnotou  $\hat{\mathbf{x}}_{a|a-1}$ , kterou vypočítáme klasicky pomocí Kalmanova filtru. A nyní odvodíme rekurzivní vzorec pro matici  $\Sigma_{t+1|t}$ :

$$\begin{aligned} \Sigma_{t+1|t} &= \text{var}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-1}, \dots) \\ &= \text{var}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{z}_{t-2}, \dots) \\ &= \text{var}(\mathbf{F}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{G}_t \mathbf{w}_t | \mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{z}_{t-2}, \dots) \\ &= \mathbf{F}_t \Sigma_{t|t-1} \mathbf{F}_t' + \mathbf{G}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{G}_t' \end{aligned}$$

pro  $t = a, \dots, b-1$  s počáteční hodnotou  $\Sigma_{a|a-1}$ , kterou vypočítáme klasicky pomocí Kalmanova filtru. U druhé rovnosti jsme opět odebrali pozorování  $\mathbf{z}_t$ , protože jeho hodnota není známa. Zbývající hodnoty  $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}$  a  $\Sigma_{t+1|t}$  pro  $t \neq a, \dots, b-1$  se spočítají jako dříve podle rekurzivních Kalmanových vzorců. Pokud by nastal případ, kdy chybí více skupin pozorování, postupujeme analogicky.

Tento jednoduchý přístup k chybějícím pozorováním je považován za velkou výhodu stavového modelování.

# Kapitola 2

## Praktická implementace

Tato kapitola obsahuje jednoduché příklady využití Kalmanova filtru, na kterých je demonstrováno řešení v softwaru EViews. V první části 2.1 je stavové modelování využito k odhadu parametrů procesu AR(p). Podkapitola 2.2 se zabývá též úlohou, ale navíc je zde situace ztížena chybějícími pozorováními, s čímž se Kalmanův filtr velmi dobře vypořádá. A nakonec podkapitola 2.3 přináší ukázkou, jak lze v modelu AR(p) předpovídat v rámci stavového modelování.

V této kapitole budeme pracovat s daty převzatými z knihy Cipra [4]. Jedná se o data Dreimonatsgeld (DMG) pro roky 1960-1999, a to o tříměsíční úrokové míry v % p. a. v Německu. Jejich hodnoty jsou uvedeny v tabulce 2.1 a průběh této řady ukazuje obrázek 2.1.

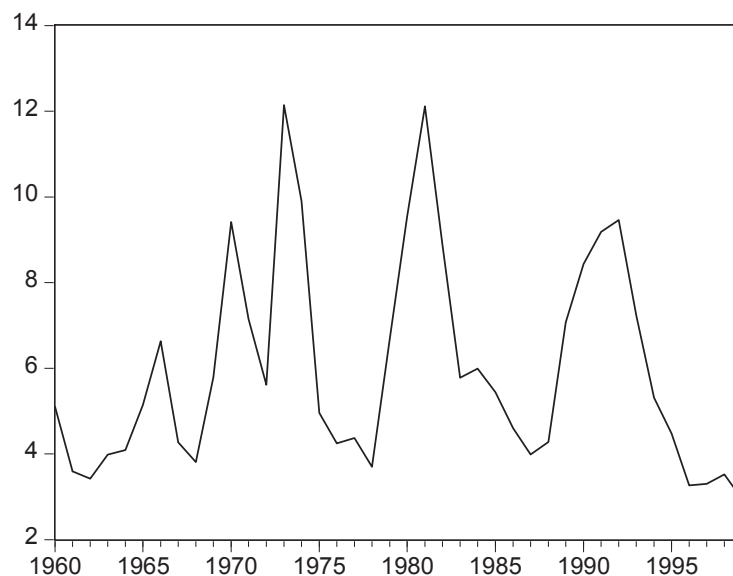
K modelování časových řad se často využívá smíšený proces ARMA s řády  $p$  a  $q$ , který má tvar

$$z_t = \varphi_1 z_{t-1} + \dots + \varphi_p z_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q},$$

kde  $z_t$  představuje modelovanou časovou řadu,  $\epsilon_t$  je bílý šum (tj. posloupnost nekorelovaných náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a konstantním kladným konečným

rok	DMG	rok	DMG	rok	DMG	rok	DMG
1960	5,10	1970	9,41	1980	9,54	1990	8,43
1961	3,59	1971	7,15	1981	12,11	1991	9,18
1962	3,42	1972	5,61	1982	8,88	1992	9,46
1963	3,98	1973	12,14	1983	5,78	1993	7,24
1964	4,09	1974	9,90	1984	5,99	1994	5,31
1965	5,14	1975	4,96	1985	5,44	1995	4,48
1966	6,63	1976	4,25	1986	4,60	1996	3,27
1967	4,27	1977	4,37	1987	3,99	1997	3,30
1968	3,81	1978	3,70	1988	4,28	1998	3,52
1969	5,79	1979	6,69	1989	7,07	1999	2,94

Tabulka 2.1: Tříměsíční úrokové míry pro roky 1960-1999



Obrázek 2.1: Tříměsíční úrokové míry pro roky 1960-1999

rozptylem  $\sigma^2$ ) a parametry modelu jsou  $\varphi_1, \dots, \varphi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$ . V knize Cipra [4] je řada Dreimonatsgeld identifikována jako autoregresní proces čtvrtého řádu. K identifikaci je zde použit odhadnutý korelogram a parciální korelogram. Následně je v knize i ověřena vhodnost zvoleného modelu. Tedy tuto časovou řadu lze modelovat jako

$$z_t = \varphi_1 z_{t-1} + \varphi_2 z_{t-2} + \varphi_3 z_{t-3} + \varphi_4 z_{t-4} + \epsilon_t.$$

Pro zjednodušení následujících výpočtů časovou řadu vycentrujeme, neboli vytvoříme řadu  $z_t^{centr} = z_t - \mu$ , kde  $\mu$  je výběrový průměr řady  $z_t$ . Nadále budeme pracovat s řadou  $z_t^{centr}$  (tedy výrazem  $z_t$  budeme mít v následujícím textu namysli vycentrovanou řadu  $z_t^{centr}$ ), k původní časové řadě se kdykoliv snadno vrátíme pouhým přičtením hodnoty  $\mu$ .

## 2.1 Rekurentní odhad parametrů AR(p)

V této podkapitole si ukážeme, jak lze stavové modelování využít k odhadu parametrů v autoregresním procesu. Uvažujme dynamický lineární systém jako v podkapitole 1.1

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{G}_t \mathbf{w}_t, \quad E(\mathbf{w}_t \mathbf{w}_t') = \mathbf{Q}_t,$$

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{H}_t' \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t, \quad E(\mathbf{v}_t \mathbf{v}_t') = \mathbf{R}_t,$$

kde  $t = 0, 1, \dots$ . Pro tento případ, kdy chceme odhadnout parametry autoregresního procesu řádu  $p$ , bude platit (podle knihy Cipra [4])

$$\mathbf{x}_t = (\varphi_{1t}, \dots, \varphi_{pt})', \quad \mathbf{F}_t = \mathbf{I}, \quad \mathbf{G}_t = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}_t = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q}_t = \mathbf{0}$$

a

$$\mathbf{z}_t = z_t, \quad \mathbf{H}'_t = (z_{t-1}, \dots, z_{t-p}), \quad \mathbf{v}_t = \epsilon_t, \quad \mathbf{R}_t = \sigma^2.$$

Tedy stavová rovnice a rovnice pozorování budou mít tvar

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t,$$

$$z_t = (z_{t-1}, \dots, z_{t-p}) \mathbf{x}_t + \epsilon_t.$$

Pro náš konkrétní příklad, kdy uvažujeme proces AR(4), má dynamický lineární systém tvar

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t,$$

$$z_t = (z_{t-1}, z_{t-2}, z_{t-3}, z_{t-4}) \mathbf{x}_t + \epsilon_t,$$

kde

$$\mathbf{x}_t = (\varphi_{1t}, \varphi_{2t}, \varphi_{3t}, \varphi_{4t})'.$$

K výpočtu využijeme software EViews, který obsahuje objekt `sspace`. Objekt `sspace` představuje snadný nástroj pro specifikace systému, filtrování, vyhlazování, předpovídání a odhad parametrů v rámci stavového modelování. Dále tento objekt poskytuje přehled o kovarianční matici a počátečních podmínkách. My se zde seznámíme pouze s určitými možnostmi tohoto objektu, podrobnější instrukce a pravidla pro využívání objektu `sspace` lze nalézt v EViews 5 User's Guide [7].

Pro definování stavové rovnice a rovnice pozorování lze použít speciální autospecifikaci, která je vhodná například pro standardní regresi s pevnými či rekurzivními koeficienty nebo pro chybovou složkou s ARMA strukturou. Při autospecifikaci se objeví tři tabulky, které je třeba vyplnit, a poté program na základě zadaných informací vytvoří zápis stavového modelu. V této práci je však využito více obecné metody a to přímého zápisu rovnic pomocí klíčových slov. Zápis pro náš případ:

```
@state sv1=sv1(-1)
@state sv2=sv2(-1)
@state sv3=sv3(-1)
@state sv4=sv4(-1)

@signal z=sv1*z(-1) + sv2*z(-2) + sv3*z(-3) + sv4*z(-4) + [var=exp(C(1))]
```

První čtyři rovnic jsou stavové rovnice (označené pomocí klíčového slova `@state`) a za nimi následuje rovnice pozorování (označená pomocí klíčového slova `@signal`). Výraz `z` zde zastupuje pozorovanou časovou řadu, `sv1`, `sv2`, `sv3`, `sv4` představují složky stavového



vektoru a  $c(1)$  je odhadovaný parametr. Označením  $sv1(-1)$  míníme zpožděnou složku stavového vektoru o jednu časovou jednotku.

V tomto prostředí je ve stavové rovnici dovoleno zpoždění maximálně o jednu časovou jednotku. Potřebujeme-li vyšší zpoždění, lze toto nařízení obejít definováním nové složky stavového vektoru  $sv2 = sv1(-1)$ . V rovnici pak můžeme použít  $sv2(-1)$ , což je vlastně zpoždění  $sv1$  o dvě jednotky. A stejným způsobem lze vytvořit i zpoždění o tři a více jednotek. Dále při zápisu stavové rovnice není dovolena nelinearita ve stavových veličinách a nesmí se vyjadřovat závislá proměnná jako funkce stavové veličiny. V rovnici pozorování zas není povoleno používat zpožděnou stavovou veličinu a je zde také zakázána nelinearita ve stavových veličinách.

EViews obvykle automaticky přidává k rovnici náhodný člen. Objekt `sspace` je však výjimkou: pokud rovnice obsahuje náhodný člen, je třeba jej do rovnice zapsat, jinak je rovnice považována za deterministickou. Hodnota rozptylu může být známá konstanta, funkce neznámého parametru nebo také hodnota měnící se v závislosti na čase. Zde využíváme druhé možnosti a rozptyl definujeme jako exponenciální funkci neznámého parametru. Exponenciální funkce byla vybrána záměrně, aby se zajistil kladný rozptyl. Tento software také nabízí možnost pracovat s korelovanými chybami.

Jestliže známe počáteční podmínky systému, přidáme tuto informaci ke specifikaci modelu (využitím klíčových slov `@mprior` a `@vprior`). Pokud nejsou počáteční podmínky známy, EViews vypočítá jejich odhad (viz podkapitola 1.2). V naší situaci byly počáteční podmínky odhadnuty

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{P}_0 &= \kappa \mathbf{I},\end{aligned}$$

kde  $\kappa \rightarrow \infty$ . První způsob určení počátečních podmínek z podkapitoly 1.2 nelze použít, protože model se mění v čase. Tedy počáteční podmínky jsou zde určeny druhým způsobem zmiňovaným v téže podkapitole.

Nyní přistoupíme k odhadu stavových veličin a parametrů uvažovaného modelu. V dialogovém okně pro odhad nastavíme vlastnosti odhadu (rozsah pozorovaných hodnot, optimalizační algoritmus, maximální počet iteračních kroků, dovolená odchylka konvergence ...). V tomto případě je použito standardní nastavení, které je v EViews přednastaveno. Výsledek odhadu ukazuje obrázek 2.2. Odhad parametru  $C(1)$  je 1,044, tedy odhad rozptylu bílého šumu v uvažovaném modelu AR(4) je  $\hat{\sigma}^2 = \exp(1,044) = 2,840$ . Rekurzivní odhad parametrů procesu AR(4) nalezneme v podobě konečné pozice stavového vektoru (jedná se o  $\hat{\mathbf{x}}_{T+1|T}$ , kde  $T$  je počet pozorování, tedy je to předpověď o jeden krok dopředu v čase  $T$ ). Řada Dreimonatsgeld byla tudíž rekurzivně odhadnuta ve tvaru

$$z_t = 0,851z_{t-1} - 0,756z_{t-2} + 0,523z_{t-3} - 0,562z_{t-4} + \epsilon_t, \quad \hat{\sigma}^2 = 2,840.$$

Tabulka dává také přehled o hodnotě logaritmické věrohodnostní funkce, Akaikeho informačního kritéria, Schwarzova informačního kritéria a o dalších informacích.

Method: Maximum likelihood (Marquardt)

Sample: 1960 1999

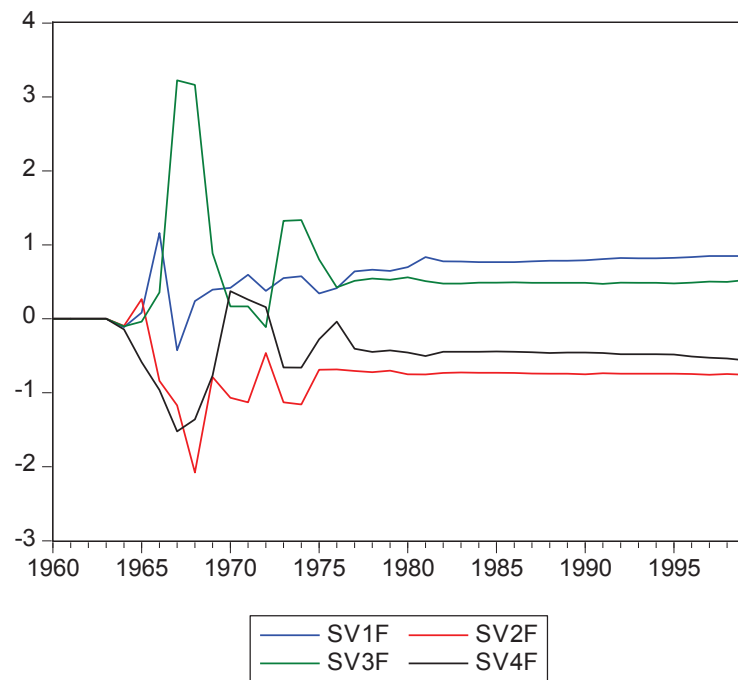
Included observations: 40

Valid observations: 36

Convergence achieved after 5 iterations

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	1.043531	0.214440	4.866309	0.0000
	Final State	Root MSE	z-Statistic	Prob.
SV1	0.850806	0.142330	5.977706	0.0000
SV2	-0.755636	0.207030	-3.649892	0.0003
SV3	0.523063	0.206443	2.533690	0.0113
SV4	-0.562022	0.141101	-3.983126	0.0001
Log likelihood	-108.7859	Akaike info criterion		6.099215
Parameters	1	Schwarz criterion		6.143202
Diffuse priors	4	Hannan-Quinn criter.		6.114568

Obrázek 2.2: Odhad parametrů modelu AR(4) pomocí Kalmanova filtru



Obrázek 2.3: Vývoj odhadu stavových veličin (= odhadu parametrů AR(4))

Dependent Variable: Z  
Method: Least Squares

Sample (adjusted): 1964 1999  
Included observations: 36 after adjustments  
Convergence achieved after 3 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.955814	0.161057	5.934631	0.0000
AR(2)	-0.723223	0.214294	-3.374912	0.0019
AR(3)	0.541377	0.213165	2.539712	0.0162
AR(4)	-0.442792	0.162740	-2.720859	0.0104
R-squared	0.563525	Mean dependent var		0.216417
Adjusted R-squared	0.522606	S.D. dependent var		2.513598
S.E. of regression	1.736739	Akaike info criterion		4.046335
Sum squared resid	96.52040	Schwarz criterion		4.222281
Log likelihood	-68.83402	Hannan-Quinn criter.		4.107745
Durbin-Watson stat	2.047890			
Inverted AR Roots	.70-.48i	.70+.48i	-.22+.75i	-.22-.75i

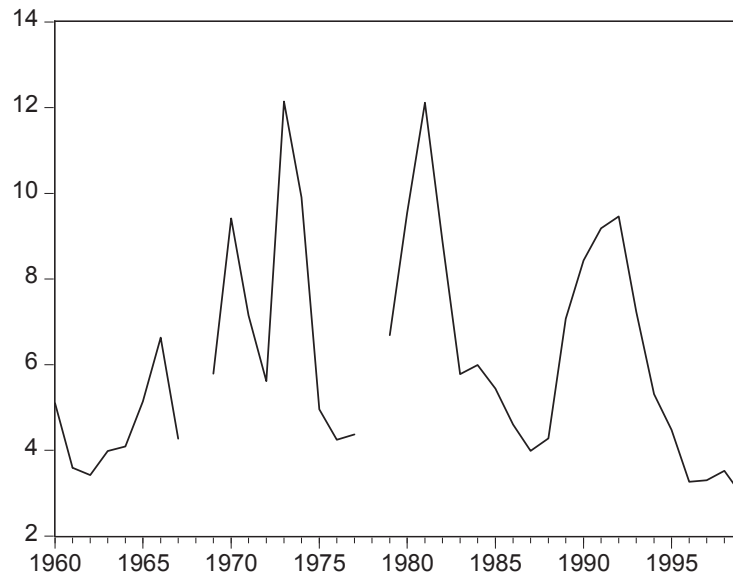
Obrázek 2.4: Odhad parametrů modelu AR(4) metodou nejmenších čtverců

Pokud chceme získat větší podrobnosti o stavových veličinách, využijeme v nabídce programu EViews položku *Make State Series*. Zde lze vytvořit jednokrokové předpovědi stavové veličiny  $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}$ , filtrované hodnoty  $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$ , vyhlazené hodnoty  $\hat{\mathbf{x}}_{t|T}$ , odhad bílého šumu ve stavové rovnici a další jiné odhady spojené se stavovou veličinou. Nás budou nyní zajímat předpovědi o jeden krok dopředu. Obrázek 2.3 zachycuje vývoj stavových veličin, jedná se o posloupnost  $\hat{\mathbf{x}}_{1|0}, \hat{\mathbf{x}}_{2|1}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{T|T-1}$ . Jak je vidět z grafu, odhady se přibližně v roce 1978 (tj. v čase  $t = 19$ ) ustálily a až na malé výkyvy svou hodnotu do roku 1999 (tj. do času  $t = 40$ ) nezměnily.

Pokud pro odhad parametrů v AR(4) modelu využijeme metody nejmenších čtverců (viz obrázek 2.4), získáme následující výsledek

$$z_t = 0,956z_{t-1} - 0,723z_{t-2} + 0,541z_{t-3} - 0,443z_{t-4} + \epsilon_t, \quad \hat{\sigma}^2 = 1,737^2 = 3,017.$$

Odhad získaný metodou nejmenších čtverců se příliš neliší od rekurentního odhadu pomocí Kalmanova filtru. Jaké výhody nám tedy přináší stavové modelování? Za prvé, jak bylo již zmíněno na začátku práce, Kalmanův filtr pracuje přímo, pro spočítání nejlepšího odhadu využívá pouze minulý odhad a nové měření a pro výpočet nejlepšího odhadu není třeba uvažovat znovu všechna předešlá měření. Za druhé při stavovém modelování lze jednoduchou modifikací umožnit, aby parametry  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$  byly proměnné v čase. Například tak, že pro stavový vektor budeme uvažovat model náhodné procházky. A za třetí v případě chybějících pozorování lze bez problému pracovat, použijeme-li Kalmanovy rekurzivní vzorce, zatímco v rámci Boxovy-Jenkinsonovy metodologie je tato situace obtížná. Práci s chybějícími pozorováními budeme demonstrovat v následující podkapitole.



Obrázek 2.5: Tříměsíční úrokové míry pro roky 1960-1999 s chybějícími pozorováními

## 2.2 Rekurentní odhad parametrů AR(p) v případě chybějících pozorování

Zde budeme uvažovat případ, kdy určitá pozorování chybí. Budeme pracovat opět se stejnými daty (Dreimonatsgeld), ale nejprve z nich odstraníme pozorování z roku 1968 a 1978 (tedy nebude k dispozici pozorování pro čas  $t = 9$  a  $t = 19$ ). Výsledná data nám ukazuje obrázek 2.5.

Postupujeme analogicky jako v předchozí situaci, kdy byla známá všechna pozorování. Opět pracujeme s vycentrovanými daty. Výsledný odhad naleznete na obrázku 2.6. V situaci s chybějícími pozorováními jsme tedy model odhadli ve tvaru

$$z_t = 0,818z_{t-1} - 0,745z_{t-2} + 0,656z_{t-3} - 0,705z_{t-4} + \epsilon_t, \quad \hat{\sigma}^2 = 2,601.$$

Vývoj odhadu stavových veličin naleznete na obrázku 2.7. Zpočátku se odhady stavových veličin vyvíjely odlišně než v předchozí úloze, ale kolem roku 1977 (tedy již v čase  $t = 18$ ) se ustálily na podobných hodnotách jako v případě se všemi pozorováními.

Pokud tento výsledek porovnáváme s případem, kdy jsme znali všechna pozorování, malé rozdíly v odhadnutých parametrech naleznete, ale nikoli výrazné. Kalmanův filtr tudíž představuje velmi jednoduchý přístup k chybějícím pozorováním.

Method: Maximum likelihood (Marquardt)

Sample: 1960 1999

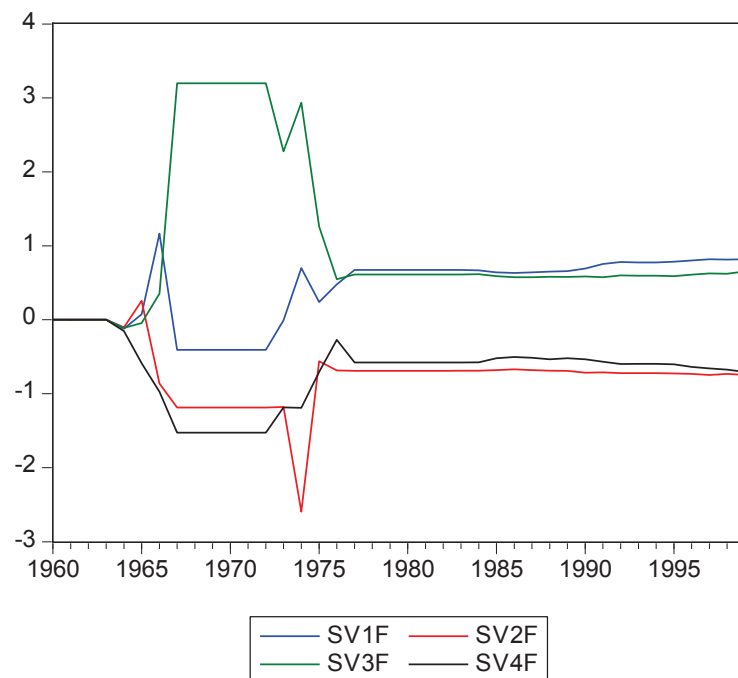
Included observations: 40

Valid observations: 26

Convergence achieved after 9 iterations

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	0.958521	0.182392	5.255269	0.0000
	Final State	Root MSE	z-Statistic	Prob.
SV1	0.817815	0.175848	4.650693	0.0000
SV2	-0.744963	0.230849	-3.227054	0.0013
SV3	0.655706	0.224158	2.925200	0.0034
SV4	-0.704584	0.164043	-4.295114	0.0000
Log likelihood	-87.59603	Akaike info criterion		6.815079
Parameters	1	Schwarz criterion		6.863467
Diffuse priors	4	Hannan-Quinn criter.		6.829013

Obrázek 2.6: Odhad parametrů modelu AR(4) pomocí Kalmanova filtru v případě chybějících pozorování



Obrázek 2.7: Vývoj odhadu stavových veličin (= odhadu parametrů AR(4)) v případě chybějících pozorování

## 2.3 Předpovídání v modelu AR(p)

Nyní se budeme zabývat předpovídáním v modelu AR(p). Opět budeme pracovat s časovou řadou Dreimonatsgeld (přesněji s její modifikací, která vznikne vycentrováním původní řady).

Pokud chceme v autoregresním procesu řádu  $p$  zkonstruovat předpovědi pomocí Kalmanových rekurzivních vzorců, podle knihy Cipra [4] bude mít dynamický lineární systém tvar

$$\mathbf{x}_{t+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ \varphi_p & \varphi_{p-1} & \varphi_{p-2} & \cdots & \varphi_1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \epsilon_{t+1} \end{pmatrix},$$

$$z_t = (0, 0, \dots, 1) \mathbf{x}_t,$$

kde

$$\mathbf{x}_t = (z_{t-p+1}, z_{t-p+2}, \dots, z_t)'$$

A tedy speciálně platí

$$\mathbf{F}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ \varphi_p & \varphi_{p-1} & \varphi_{p-2} & \cdots & \varphi_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_t = \mathbf{I}, \quad \mathbf{w}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \epsilon_{t+1} \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{z}_t = z_t, \quad \mathbf{H}'_t = (0, 0, \dots, 1), \quad \mathbf{v}_t = 0.$$

Pro případ modelu AR(4) platí

$$\mathbf{x}_{t+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \varphi_4 & \varphi_3 & \varphi_2 & \varphi_1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \epsilon_{t+1} \end{pmatrix},$$

$$z_t = (0, 0, 0, 1) \mathbf{x}_t,$$

kde

$$\mathbf{x}_t = (z_{t-3}, z_{t-2}, z_{t-1}, z_t)'$$

Method: Maximum likelihood (Marquardt)

Sample: 1960 1999

Included observations: 40

Convergence achieved after 139 iterations

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	-0.415019	0.247410	-1.677457	0.0935
C(2)	0.508545	0.258790	1.965084	0.0494
C(3)	-0.700143	0.365038	-1.918003	0.0551
C(4)	0.960554	0.181718	5.285973	0.0000
C(5)	0.920069	0.202811	4.536577	0.0000
	Final State	Root MSE	z-Statistic	Prob.
SV1	-2.670250	0.000000	NA	0.0000
SV2	-2.450250	0.000000	NA	0.0000
SV3	-3.030250	0.000000	NA	0.0000
SV4	-1.432478	1.584129	-0.904269	0.3659
Log likelihood	-75.96191	Akaike info criterion		4.048096
Parameters	5	Schwarz criterion		4.259206
Diffuse priors	0	Hannan-Quinn criter.		4.124426

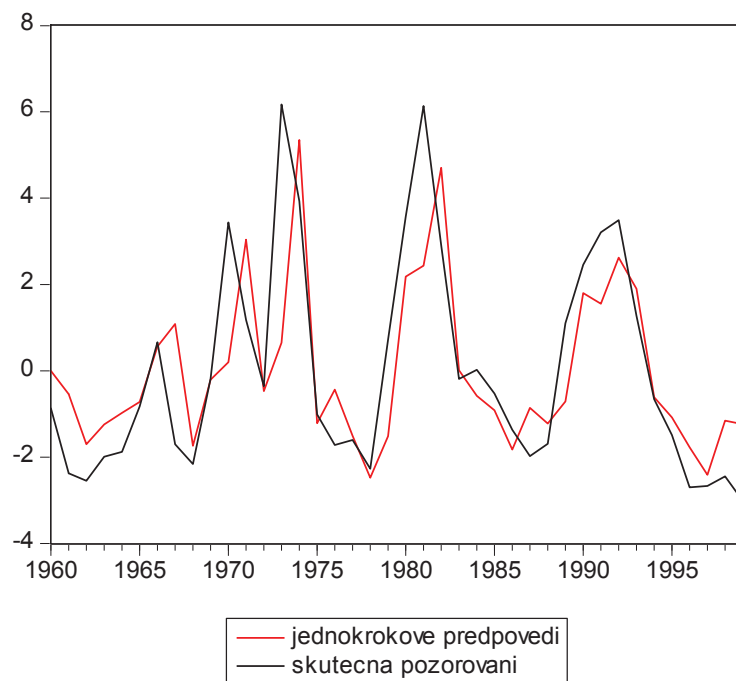
Obrázek 2.8: Odhad modelu AR(4) pomocí Kalmanova filtru

Zápis stavového modelu v EViews pak bude mít podobu:

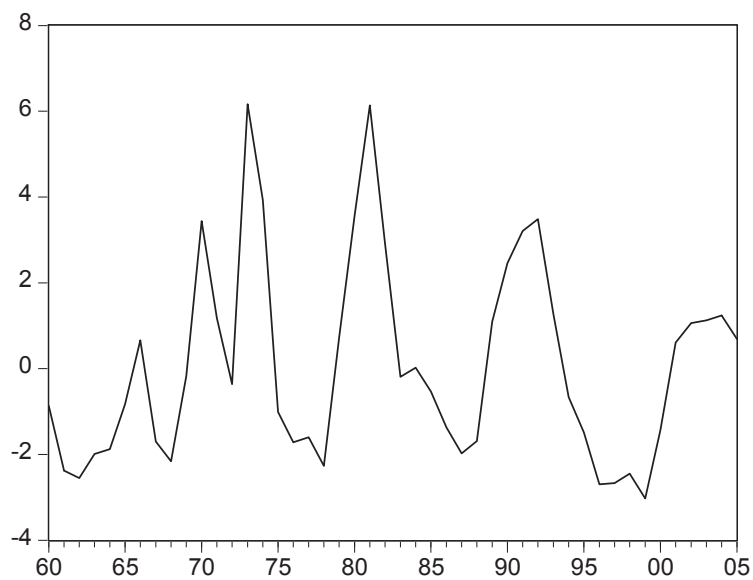
```
@state sv1=sv2(-1)
@state sv2=sv3(-1)
@state sv3=sv4(-1)
@state sv4=C(1)*sv1(-1) + C(2)*sv2(-1) + C(3)*sv3(-1)+ C(4)*sv4(-1)
+ [var=exp(C(5))]
@signal z=sv4
```

Výsledek odhadu ukazuje obrázek 2.8. Odhadnuté parametry modelu se v této situaci skrývají pod parametry  $C(1) = \varphi_4$ ,  $C(2) = \varphi_3$ ,  $C(3) = \varphi_2$ ,  $C(4) = \varphi_1$ . Tedy jsou opět vcelku podobné parametrům odhadnutým v části 2.1. Ale v tomto případě nás především zajímá předpověď, na obrázku 2.9 naleznete porovnání skutečných hodnot řady s jednokrokovými předpověďmi. Předpovědi vcelku dobře odpovídají skutečnému vývoji časové řady. Sice zpočátku reagují na skutečný vývoj s malým zpožděním, ale s rostoucím časem se toto zpoždění zmenšuje a předpovědi se blíží skutečným hodnotám.

A na závěr zkonstruujeme předpovědi na 6 období dopředu. V EViews si rozšíříme počet pozorování na roky 1960 - 2005 a poté použijeme funkci *Forecast*. Tato funkce nabízí výběr ze tří druhů předpovědí. My využijeme předpověď  $n$ -kroků dopředu, neboť tento druh předpovědi se shoduje s předpovědí, kterou v této práci uvažujeme a která je popsána v kapitole 1.1. Je možné učinit předpověď pro stavové veličiny, pro  $z_t$



Obrázek 2.9: Graf porovnání skutečných hodnot řady s jednokrokovými předpověďmi



Obrázek 2.10: Skutečné čtvrtletní úrokové míry pro roky 1960-1999 a předpovědi čtvrtletních úrokových měr pro roky 2000-2005



a pro standardizované náhodné složky. My vybereme předpověď pro stavovou veličinu (pozn.: v naší konkrétní situaci bude předpověď pro čtvrtou stavovou veličinu shodná s předpovědí pro  $z_t$  z důvodu speciálního tvaru rovnice pozorování). Výsledek ukazuje obrázek 2.10. Podle předpovědi lze očekávat v letech 2000-2004 nárůst úrokových měr.

Předpovídat v procesu AR(p) jde samozřejmě i rámci Boxovy-Jenkinsonovy metodologie, ale Kalmanův filtr přináší jisté výhody, které již byly zmíněny na konci podkapitoly 2.2 (jednoduchý přístup k chybějícím pozorováním, možnost parametrů proměnných v čase a ke konstrukci nového odhadu využívá pouze minulý odhad a nové měření).

# Kapitola 3

## Některé aspekty teorie portfolia

Tato kapitola seznámí čtenáře s vybranými aspekty teorie portfolia. Budeme se zabývat pouze malým zlomkem této velké oblasti. Teorii portfolia ve velmi podrobném zpracování lze nalézt například v knize Elton, Gruber [6].

V první části této kapitoly si přiblížíme pojem aktiva. Další podkapitola je věnována samotnému portfoliu a pojmům s ním souvisejícím, jako je střední míra zisku, finanční riziko či podílové a zajišťovací fondy. A v poslední podkapitole si přiblížíme statistickou proceduru pro odhad složení portfolia.

### 3.1 Aktiva

*Aktiva* jsou obecně hmotné i nehmotné statky, práva a nároky vlastníka vytvářející další hodnoty. Jinak řečeno, aktiva jsou věci, které produkují příjmy. Pro lepší představu si můžeme uvést několik příkladů. Za aktivum lze považovat byt, díky jehož nájmu vzniká zisk, cenné papíry, ze kterých plynou dividendy. Aktiva jsou dále peníze poskytnuté druhým, ze kterých plynou úroky, firmy, které vydělávají, různé patenty či autorské honoráře.

V této práci budeme uvažovat především aktiva v podobě cenných papírů. Cenné papíry se dělí na tři základní typy: dluhopisy, akcie a finanční deriváty.

#### Dluhopisy

*Dluhopisy*, také jinak označované jako obligace či bondy, jsou velmi rozšířeným druhem cenných papírů. Vydavatel dluhopisů, o kterém se mluví jako o emitentovi, je v rámci českého trhu povinen žádat Českou národní banku o povolení k jejich vydání (neboli emisi). Emise dluhopisů je jednou z možností, jak si zajistit kapitál pro podnikání. Dluhopis de facto představuje půjčku, kterou jeho nový majitel (věřitel) poskytuje emitentovi. Přesněji řečeno, dluhopis obsahuje závazek dlužníka (emitenta) splatit věřiteli k dohodnutému datu zapůjčenou částku a případně platit v pravidelných intervalech dohodnutý úrok. Dluhopisy se od klasických úvěrů liší v tom, že je s nimi možné obchodovat na sekundárních trzích cenných papírů.

## Akcie

*Akcie* je obchodovatelný cenný papír, který potvrzuje, že jeho majitel je akcionář. Být akcionářem znamená vložit určitý majetkový podíl do akciové společnosti. Akciové společnosti si vytvářejí základní kapitál emisí akcií. Tímto způsobem se rizika podnikání rozloží mezi více osob. Akcionář má svá práva: právo podílet se na řízení společnosti (je oprávněn hlasovat na valné hromadě), právo na dividendu (podíl na zisku společnosti), právo na likvidační zůstatek při případném zániku společnosti a přednostní odběrné právo na nově emitované akcie.

Rozdíl mezi dluhopisem a akcií je, že dluhopis zaručuje pravidelnou výplatu dohodnutého úroku, kdežto dividendy u akcie závisí na zisku a strategii společnosti. Dalším rozdílem je, že v případě dluhopisu je jeho nominální hodnota splacena v době splatnosti, ale akcie nejsou vydány na určitou dobu a není zde právo na vyplacení. A narozdíl od držitele dluhopisu má akcionář právo na valnou hromadu a tím pádem může ovlivnit řízení společnosti.

## Finanční deriváty

*Finanční deriváty* jsou finanční instrumenty založené na nějakém jiném finančním instrumentu (podkladovém aktivu). Hodnota finančního derivátu se odvíjí od hodnoty tohoto podkladového aktiva. Podkladové aktivum může být například dluhopis či akcie. Finanční deriváty patří mezi termínované obchody, které jsou charakteristické tím, že den uzavření obchodu a den jeho plnění se liší. Uzavření termínovaného obchodu spočívá ve sjednání práva prodat či koupit k danému budoucím termínu stanovené množství určitého finančního instrumentu za předem dohodnutou cenu. Finanční deriváty slouží k zajištění a spekulacím. Základními typy derivátů jsou forwardy, futures, swapy a opce.

Rozdíl mezi obchodováním s klasickými finančními instrumenty (akciemi, dluhopisy) a deriváty spočívá v tom, že pokud chceme například na trhu s akciemi spekulovat na růst jejich ceny, musíme si akcie koupit a zaplatit za ně celou jejich hodnotu. U derivátů můžeme obchodovat kontrakty o vysoké nominální hodnotě, aniž bychom museli skutečně investovat (mít na obchodním účtu) celou nominální hodnotu kontraktu, který obchodujeme. Stačí mít k dispozici malou část z této nominální hodnoty. Právě tato možnost ovládat aktiva ve vysoké nominální hodnotě prostřednictvím mnohem nižší částky se nazývá *pákový efekt*. Investor pak s relativně nízkou počáteční investicí může dosáhnout výrazného zisku nebo také ztráty.

V souvislosti s cennými papíry se setkáváme s pojmem krátký prodej. *Krátký prodej* je způsob spekulace na pokles ceny cenného papíru. Investor si předmět spekulace za úplatu zapůjčí a okamžitě jej prodá třetí straně. Za nějaký čas (nejpozději v době, kdy má předmět spekulace vrátit tomu, kdo mu jej půjčil) investor nakoupí na trhu a vrátí to, co si předtím vypůjčil. Rozdíl cen v době prodeje třetí straně a v době zpětného nákupu je základem jeho zisku nebo ztráty. V případě, že cena mezi prodejem a zpětným nákupem výrazněji poklesla, je spekulace výhodná, zatímco v opačném případě investor zaznamená ztrátu. Krátký prodej proto používají obchodníci, kteří spekulují na pokles

cen nebo se chtějí proti poklesu cen zajistit. Krátké prodeje se vyskytují ve značném množství na New York Stock Exchange. Ale naopak existuje řada institucí, které krátké prodeje zakazují.

Opačná spekulace, tedy na růst ceny, se nazývá *dlouhý prodej*. Investor si předmět spekulace zakoupí a po nějaké době jej prodá třetí straně. V případě, že cena mezi nákupem a odprodejem výrazněji vzrostla, je spekulace výhodná, zatímco v opačném případě investor zaznamená ztrátu. Dlouhý prodej proto používají obchodníci, kteří spekulují na vzestup cen nebo se chtějí proti vzestupu cen zajistit.

Pro studium cenných papírů lze doporučit knihu Cipra [3], kde je tato problematika velmi přehledně zpracována. Zmiňovaná kniha byla využívána při psaní této podkapi- toly.

## 3.2 Portfolio

Pod pojmem portfolio rozumíme skupinu různých aktiv, které jsou předmětem investování jednoho subjektu. Racionální investor si tuto skupinu aktiv vybírá s cílem maximalizovat zisk a současně minimalizovat riziko.

Nechť portfolio obsahuje  $N$  aktiv a výraz  $y_n$  označuje část z jednotkového majetku investovanou do  $n$ -tého aktiva ( $n = 1, \dots, N$ ). Tedy zřejmě platí

$$\sum_{n=1}^N y_n = 1.$$

Potom složení portfolio reprezentuje vektor  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)'$ . Obecně připouštíme i možnost  $y_n < 0$  (což je vlastně situace krátkého prodeje).

Řízení portfolio zahrnuje rozhodnutí jaká aktiva vybrat do portfolio, tato rozhodnutí závisí na záměru vlastníka a na změnách na trhu daných aktiv. Obvykle se investor rozhoduje na základě ukazatelů jako je *střední míra zisku* a *finanční riziko*. Uvažujme  $n$ -té aktivum portfolio, jeho střední míru zisku  $\bar{r}_n$  získáme ze vztahu

$$\bar{r}_n = E(r_n) = \sum_{j=1}^J r_{nj} p_j,$$

kde  $r_{nj}$  jsou možné výnosy tohoto aktiva a  $p_j$  jejich odpovídající pravděpodobnosti. Finanční riziko  $n$ -tého aktiva  $\sigma(r_n)$  spočítáme podle vzorce

$$\sigma(r_n) = \sqrt{\text{var}(r_n)} = \sqrt{(r_{n1} - \bar{r}_n)^2 p_1 + \dots + (r_{nJ} - \bar{r}_n)^2 p_J}.$$

V praxi se používají statistické odhady (výběrový průměr a výběrová směrodatná odchylka) spočítané z historických dat.

Střední míra zisku portfolio  $\bar{r}^P$  je pak určena jako

$$\bar{r}^P = \sum_{n=1}^N \bar{r}_n y_n$$

a finanční riziko portfolia  $\sigma(r^P)$  určuje vztah

$$\sigma(r^P) = \sqrt{\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N y_m y_n \sigma_{mn}},$$

kde  $\sigma_{mn} = \text{cov}(r_m, r_n) = E(r_m - \bar{r}_m)(r_n - \bar{r}_n)$  a zřejmě  $\sigma_{nn} = \text{var}(r_n)$ . Závisí pak už na samotném investorovi, jaké riziko je ochoten podstoupit pro jaký očekávaný výnos.

Známy výnos z  $n$ -tého aktiva o jednotkovém objemu označíme  $R_n$ . Potom výnos celého portfolia  $R^P$  získáme ze vztahu

$$R^P = \sum_{n=1}^N R_n \cdot y_n.$$

Existují i společnosti, které svůj obor činnosti založily na řízení portfolia. Zde si přiblížíme podílové a zajišťovací fondy.

*Podílový fond* umožňuje i malým investorům získat podíl na investicích, které by si jinak nemohli dovolit a k nimž by ani neměli přístup. Prodejem podílových listů otevřeného podílového fondu vzniká kapitál, který investiční společnost shromažďuje, aby jej mohla investovat. Investor vloží své prostředky do fondu tak, že nakoupí podílové listy a stane se tak podílníkem fondu. Každý fond se řídí svým statutem, který přesně určuje, do čeho smí nebo nesmí fond investovat. O tom, kam budou směřovány investice podílníků, rozhodují odborníci (manažeři fondů).

*Zajišťovací fond* podléhá velmi malým nebo žádným zákonným omezením, co se týče zásad investování. Využívá pokročilé investiční strategie jako například pákový efekt a krátký prodej. Zajišťovací fondy jsou označovány za velmi flexibilní, při změnách tržních podmínek dokáží velmi rychle zaujmout dlouhou či krátkou pozici v různých finančních instrumentech. Investují jak na domácím, tak i na zahraničním trhu s cílem vytvořit vysoký zisk, což sebou samozřejmě přináší vyšší tržní riziko. Legální zajišťovací fondy jsou nejčastěji zaváděny jako osobní investiční společnosti, které jsou přístupné jen omezenému počtu investorů a požadují velmi vysoký počáteční vklad. Investování do zajišťovacích fondů je nelikvidní, neboť je častou podmínkou ponechat peníze ve fondu alespoň jeden rok.

### 3.3 Analýza portfolia založená na výnosu

O strategiích podílových a zajišťovacích fondů nejsou vždy známy všechny informace. Zatímco jejich celkové výnosy jsou obvykle dostupné, podstatně méně víme o vývoji složení jejich portfolia v čase. Představíme si zde model zabývající se odhadem složení portfolia, při jeho popisu jsem čerpala z článku Pizzinga et al. [11].

*Analýza portfolia založená na výnosu* je statistická procedura pro odhad složení portfolia s použitím pouze tzv. externích informací, kterými jsou výnos portfolia

a tržní indexy výnosů. Neboť jak se mění tržní podmínky, tak i manažer portfolia mění strategii řízení. Hlavním cílem analýzy portfolia je odhalit alokaci portfolia mezi různé finanční tržní oblasti (akciový trh, nástroje peněžního trhu, trh s dluhopisy, ...).

Standardní způsob této analýzy využívá model regresního typu navržený v práci Sharpe [13]. Model byl následně modifikován a obohacen o absolutní člen a dospěl do následující podoby

$$R_t^P = \alpha + y_1 R_{t1} + y_2 R_{t2} + \dots + y_N R_{tN} + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (3.1)$$

V regresním modelu  $R_t^P$  představuje výnos portfolia v čase  $t$  (výnos vzhledem k jednotkovému kapitálu), dále  $\mathbf{R}_t = (R_{t1}, R_{t2}, \dots, R_{tN})'$  představují vývoj indexů výnosů aktiv (např. index PX, index českých státních dluhopisů EFFAS, sazba PRIBID, ...). Požaduje se, aby indexy výnosů byly kompletní, tj. aby do modelu byly zahrnuty všechny významné indexy pro uvažované portfolio. Výrazy  $y_1, y_2, \dots, y_N$  reprezentují neznámé parametry rozvržení portfolia. Jak již bylo zmíněno výše, požaduje se splnění podmínky  $\sum_{n=1}^N y_n = 1$ . Symbol  $\epsilon_t$  označuje bílý šum.

Model ještě obsahuje prvek  $\alpha$ , tzv. *Jensenova alfa*. Tento ukazatel se snaží kvantifikovat úspěch fondu při zohlednění jeho výkonnosti i rizikovosti. Jensenova alfa měří, jak se dokáže manažer fondu vypořádat se systematickým rizikem trhu. Měří schopnost manažera portfolia zvyšovat aktivní správou výnos fondu nad výnos daný prostým kopírováním indexu. Jestliže je výsledek kladný, pak se mu to daří, dokáže přebít trh. Jestliže je výsledek záporný, pak je jeho aktivní správa neúspěšná.

Pomocí tohoto regresního modelu tedy můžeme na základě celkového výnosu portfolia a indexů výnosů aktiv odhadnout složení portfolia. Může jej využívat například manažer penzijního fondu nebo manažer fondu fondů k odhadu aktuálního rozložení fondu, jehož podíl vlastní. Díky analýze portfolia může pak manažer kontrolovat, zda odhadnutá alokace portfolia fondu souhlasí s alokací zapsanou v kontraktu mezi těmito společnostmi. Analýza portfolia je také užitečná pro vypracování hodnocení fondu. Využívají ji také vedoucí manažeři fondu pro sledování a kontrolu manažerského stylu svých podřízených.

Ačkoliv model daný rovnicí (3.1) je hojně využívaný nástroj investiční analýzy, obsahuje podstatný nedostatek. Nebere v úvahu, že rozvržení portfolia se mění v čase neboli, že parametry  $y_1, y_2, \dots, y_N$  závisí také na čase. Manažer portfolia totiž ve skutečnosti složení portfolia v čase mění podle toho, jak se vyvíjí situace na trhu. Ale model (3.1) uvažuje stále stejné složení portfolia pro všechny časové okamžiky. V článku McGuire et al. [10] tento problém řeší rolovanou regresí (rolling regression). My si ale v následující kapitole představíme řešení, které je ještě blíže skutečné situaci. V tomto modelu budou váhy portfolia a Jensenova alfa proměnné v čase. Jedná se o přímé zobecnění modelu (3.1), které využívá omezený lineární stavový model.

# Kapitola 4

## Dynamická analýza portfolia

V této kapitole si představíme model pro dynamickou analýzu portfolia, který odstraňuje podstatný nedostatek regresního modelu 3.1. V tomto novém modelu mohou být váhy portfolia a Jensenova alfa proměnné v čase, čímž je model více přiblížen realitě. Podkapitola 4.1, která popisuje tento model, je napsána na základě článku Pizzinga et al. [11]. Dále si v této kapitole uvedeme modifikaci modelu pro zajišťovací fondy.

### 4.1 Model pro dynamickou analýzu portfolia

Nejprve si připomeňme teorii Kalmanova filtru, kterou jsme si podrobněji popsali v kapitole 1. Dynamický lineární systém je tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= \mathbf{F}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{G}_t \mathbf{w}_t, \\ \mathbf{z}_t &= \mathbf{H}'_t \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t, \quad \text{kde } t = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

První z rovnic popisuje vývoj stavového (nepozorovatelného) vektoru  $\mathbf{x}_t$ . Druhá rovnice vyjadřuje vztah mezi vektorem pozorování  $\mathbf{z}_t$  a stavovým vektorem  $\mathbf{x}_t$ . Dále pak  $\mathbf{F}_t$ ,  $\mathbf{G}_t$  a  $\mathbf{H}_t$  jsou známé matice parametrů. A vektory  $\mathbf{w}_t$  a  $\mathbf{v}_t$  představují náhodné složky. Úloha zní: odhadnout stavový vektor  $\mathbf{x}_t$  na základě informace obsažené v  $\mathbf{z}_s, \mathbf{z}_{s-1}, \mathbf{z}_{s-2}, \dots$ .

Ukázali jsme, že nejlepším odhadem stavového vektoru  $\mathbf{x}_t$  na základě informace obsažené v  $\mathbf{z}_s, \mathbf{z}_{s-1}, \mathbf{z}_{s-2}, \dots$  je

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|s} := \mathbb{E}(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_s), \quad t, s = 0, 1, 2, \dots$$

Rekurzivní vzorce pro výpočet  $\hat{\mathbf{x}}_{t|s}$  a odvození těchto vzorců uvádí podkapitola 1.1.

Abychom mohli Kalmanův filtr využít pro dynamickou analýzu portfolia, je nutné teorii Kalmanova filtru z kapitoly 1 ještě rozšířit o jednu větu. Pomocí této věty 4 (viz dál) budeme moci do modelu začlenit omezení pro váhy portfolia ( $\sum_{n=1}^N y_{tn} = 1$ ).

**Věta 4** *Nechť máme stavový model definovaný v části 1.1. Vektor  $\mathbf{x}_t$  splňuje lineární omezení  $\mathbf{A}_t \mathbf{x}_t = \mathbf{q}_t$  pro  $t = 0, 1, \dots$ , kde  $\mathbf{A}_t$  jsou známé matice ( $k \times n$ ) a  $\mathbf{q}_t$  jsou známé vektory ( $k \times 1$ ). Nechť je vektor  $\mathbf{z}_t$  nahrazen vektorem  $\mathbf{z}_t^* = (\mathbf{z}'_t, \mathbf{q}'_t)'$ , matice  $\mathbf{H}_t$  je nahrazena maticí  $\mathbf{H}^*'_t = [\mathbf{H}_t, \mathbf{A}'_t]'$  a vektor  $\mathbf{v}_t$  je nahrazen vektorem  $\mathbf{v}^*_t = (\mathbf{v}'_t, \mathbf{0}')'$ . Potom v tomto novém lineárním stavovém modelu splňuje odhad stavového vektoru (v rámci filtrování a vyrovnávání) s pravděpodobností jedna požadované lineární omezení. Tedy platí pro  $t \leq s$*

$$\mathbf{A}_t \widehat{\mathbf{x}}_{t|s} = \mathbf{q}_t \quad s.j..$$

*Důkaz (převzat z článku Pizzinga a kol. [11]):* Nechť  $t$  je libovolný časový okamžik,  $s$  je pevně dané a platí  $t \leq s$ . Potom s pravděpodobností jedna platí

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_t \widehat{\mathbf{x}}_{t|s} &= \mathbf{A}_t \mathbb{E}(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{z}_1, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{z}_s, \mathbf{q}_s) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{A}_t \mathbf{x}_t | \mathbf{z}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{z}_1, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{z}_s, \mathbf{q}_s) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{q}_t | \mathbf{z}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{z}_1, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{z}_s, \mathbf{q}_s) \\ &= \mathbf{q}_t. \end{aligned}$$

První rovnost využívá definici pro  $\widehat{\mathbf{x}}_{t|s}$ , kde je oproti kapitole 1 střední hodnota podmíněná ještě vektory  $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_s$ , neboť vektor pozorování se ze  $\mathbf{z}_t$  změnil na  $\mathbf{z}_t^* = (\mathbf{z}'_t, \mathbf{q}'_t)'$ . Druhá rovnost platí, neboť podmíněná střední hodnota je skoro jistě lineární. Třetí rovnost je pouhé přepsání lineárního omezení. A poslední rovnost plyne z toho, že  $\mathbf{q}_t$  je funkcí prvků podmínky.

⊠

Tato věta tedy říká, že pokud daným způsobem rozšíříme stavový model, potom lze standardně použít Kalmanovy rekurzivní vzorce a získáme odhad stavového vektoru, který skoro jistě splňuje požadovaná lineární omezení.

Nyní již máme kompletní teorii k tomu, abychom mohli odstranit podstatný nedostatek modelu 3.1. Tento nedostatek spočívá v tom, že model uvažuje váhy portfolia neměnné v čase, ale v reálném světě se váhy portfolia v čase mění. Zavedeme model pro dynamickou analýzu portfolia využívající Kalmanův filtr, kde jsou váhy portfolia i Jensenova alfa proměnné v čase.

Stavový vektor uvažujme ve tvaru

$$\mathbf{x}_t = (\alpha_t, y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tN})'.$$

Výraz  $\alpha_t$  označuje Jensenovu alfu v čase  $t$  a další složky  $y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tN}$  jsou váhy portfolia v čase  $t$ . Pro vývoj Jensenovy alfy a pro vývoj vah portfolia předpokládáme model náhodné procházky, který zaručuje následující stavová rovnice

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t, \quad \mathbf{w}_t \sim iid \quad N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}), \quad (4.1)$$



kde  $\mathbf{Q}$  je diagonální matice. Model náhodné procházky je vybrán pro jeho jednoduchost a stabilitu. Nemáme zde žádný teoretický signál k výběru složitějšího modelu, tudíž není důvod uvažovat jiný statisticky obtížnější model.

Za vektor pozorování zvolíme  $\mathbf{z}_t = R_t^P$ , rovnice pozorování nám pak popisuje vztah mezi stavovým vektorem a vektorem pozorování

$$R_t^P = (1, \mathbf{R}_t') \mathbf{x}_t + v_t, \quad v_t \sim iid \quad N(0, \sigma^2).$$

Rozptylová matice  $\mathbf{Q}$  a rozptyl  $\sigma^2$  mohou být také závislé na čase, v takovém případě bychom jejich označení změnili na  $\mathbf{Q}_t$  a  $\sigma_t^2$ .

My ale ještě navíc požadujeme lineární omezení  $\sum_{n=1}^N y_{tn} = 1$  pro  $\forall t$ . Pokud toto omezení přepíšeme do tvaru  $\mathbf{A}_t \mathbf{x}_t = \mathbf{q}_t$ , je  $\mathbf{A}_t = (0, 1, \dots, 1)$  a  $q_t = 1$  pro  $\forall t$ . Využijeme tedy větu 4.1 a podle ní přepíšeme rovnici pozorování do tvaru

$$\begin{pmatrix} R_t^P \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{R}_t' \\ 0 & 1 \dots 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_t + \begin{pmatrix} v_t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_t \\ 0 \end{pmatrix} \sim iid \quad N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right). \quad (4.2)$$

Tedy speciálně platí

$$\mathbf{x}_t = (\alpha_t, y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tN})', \quad \mathbf{F}_t = \mathbf{I}, \quad \mathbf{G}_t = \mathbf{I}$$

a

$$\mathbf{z}_t = \begin{pmatrix} R_t^P \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}'_t = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{R}_t' \\ 0 & 1 \dots 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_t = \begin{pmatrix} v_t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Autoři tohoto modelu uvádějí následující argumenty pro vhodnost modelu: je úsporný a srozumitelný, je skoro jistě neexplozivní a jak již bylo zmíněno, uvažuje změny složení portfolia v čase.

Tento model pro dynamickou analýzu portfolia, daný rovnicemi 4.1 a 4.2, je tedy dynamický lineární systém. Pro odhad stavového vektoru  $\mathbf{x}_t = (\alpha_t, y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tN})'$  využijeme Kalmanovy rekurzivní vzorce pro filtrování a vyrovnávání. Získáme tak odhady rozložení vah portfolia pro časy  $t = 0, 1, \dots, T$ , které splňují omezení  $\sum_{n=1}^N y_{tn} = 1$  pro  $\forall t$ .

Nyní zhodnotíme omezení, která jsme předepsali pro veličiny  $y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tN}$ . Požadujeme pouze, aby byl jejich součet rovný jedné. Jejich jednotlivé hodnoty mohou být i záporné, což představuje vlastně krátký prodej. Je vhodné zakázat krátké pozice? U některých podílových fondů je ze zákona zakázána krátká pozice. Na druhou stranu existuje řada fondů (např. zajišťovací fondy), které krátkou pozici využívají. Pokud bychom uvažovali omezení krátkých pozic (tedy zakázali zápornost  $y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tN}$ ), mohli bychom opustit lineární rámec stavového prostoru a musela by se použít složitější teorie pro nelineární filtrování. V článku Pizzinga, Fernandes [12] je uveden model pro dynamickou analýzu portfolia, který využívá rozšířeného Kalmanova filtru

a umožňuje tak začlenění omezení krátkých pozic. My se zde ale zabýváme pouze lineárním Kalmanovým filtrem, tedy nebudeme uvažovat omezení krátkých pozic. Pracujeme-li s fondem, který využívá krátké pozice, je vše v pořádku. Ale pokud budeme tento model aplikovat na fond, o kterém víme, že nevyužívá krátké pozice, je nutné si uvědomit rizika (rizika v podobě ztráty efektivity z důvodů nezahrnutí známých omezení). Vyjdou-li váhy u takového fondu výrazněji záporné, model zřejmě neodhadl dobře rozložení portfolia fondu.

**Poznámka:** Parametr, který zde označujeme jako Jensenova alfa, není ale úplně ekvivalentní původnímu významu Jensenovy alfy. Jensenova alfa se poprvé objevila v kontextu rovnováhy modelu (např. model CAMP a ATP, viz Elton, Gruber [6]), kde představuje míru reprezentovanou průměrným ziskem portfolia, jenž se získá navíc, než je předpovězeno modelem. V případě časově proměnného APT modelu, který těsně souvisí s modelem 4.1 - 4.2, je Jensenova alfa dána vztahem

$$\alpha_t = R_t^P - (rf + \sum_{n=1}^N \delta_{tn} F_{tn}).$$

Ve vzorci  $rf$  představuje bezrizikový výnos,  $F_{tn}$  jsou průmyslové a ekonomické faktory a  $\delta_{tn}$  jejich odpovídající parametry. Model 4.1 - 4.2 lze brát jako speciální případ ATP  $m$ -faktorového modelu s dvěma odlišnostmi. Zaprvé parametry  $\delta_{tn}$  nemusí splňovat žádná omezení narozdíl od  $y_{tn}$ , která musejí dát v součtu jedničku. A za druhé  $F_{tn}$  nejsou nutně spojeny se ziskem daným množinou indexů aktiv, zatímco  $R_{tn}$  z modelu 4.1 - 4.2 představují právě indexy výnosů daných aktiv. Přes tyto odlišnosti budeme i nadále parametr  $\alpha$  označovat jako Jensenova alfa, neboť oba přístupy slouží stejnému cíli - ohodnocují úspěšnost řízení fondu manažerem portfolia.

## 4.2 Modifikace pro zajišťovací fondy

Model navržený v předchozí části je vhodný především pro podílové fondy. Zajišťovací fondy se však od podílových fondů liší, je pro ně typické časté využívání pákového efektu a krátkého prodeje. Pokusíme se zde model modifikovat, aby se mohl aplikovat i na zajišťovací fondy (tedy aby uvažoval i pákový efekt).

Fondy mohou pákového efektu docílit dvěma způsoby. První způsob spočívá v půjčení prostředků na nákup daného aktiva. Tedy například fond disponuje prostředky o objemu 20, půjčí si 80 a nakoupí aktiva za 100 jednotek. Pokud hodnota aktiv vzroste na 105, fond uskuteční výnos 25 %, neboť investoval 20 a získal 25 (pro jednoduchost jsme zanedbali úrok, který vznikne půjčením prostředků a který je poté fond povinen zaplatit). Druhý způsob jak uskutečnit pákový efekt jsme již popsali v části 3.1. Jedná se o investici do finančních derivátů.

V článku McGuire et al. [10] navrhují do modelu začlenit dva ukazatele pro vysvětlení pákového efektu. V tomto případě se trochu změní interpretace hodnot  $y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tN}$ ,

již nebudeme mluvit o vahách portfolia ale o míře citlivosti portfolia na dané aktivum. Myšlenku z tohoto článku, jak modifikovat model pro zajišťovací fondy, si nyní podrobněji přiblížíme.

Nejprve se zaměříme na první případ pákového efektu, kdy si fond půjčí prostředky na nákup aktiv. Do modelu přidáme ukazatel  $\lambda_t$ , který bude měřit, jak velkou část prostředků si fond zapůjčil na nákup aktiv v čase  $t$  (vyjádřeno jako část ze skutečného majetku fondu). To učiníme tak, že omezení pro váhy portfolia změňme do následující podoby

$$\sum_{n=1}^N y_{tn} = (1 + \lambda_t) \quad \text{pro } \forall t.$$

Pokud platí  $\lambda_t = 0$ , jedná se o fond, který nemá žádný dluh v čase  $t$ . A je-li například  $\lambda_t = 1$ , pak fond v čase  $t$  dluží prostředky v hodnotě rovné svému majetku.

Pro druhý případ pákového efektu (investice do finančních derivátů) nemůžeme využít stejný postup, neboť výnosy z finančních derivátů jsou nelineární vzhledem k indexům výnosů daných aktiv. Definujme stupeň nelinearity výnosu portfolia závisícího na aktivu  $n$  v čase  $t$  jako

$$\zeta_{tn} = \frac{\phi_{tn}}{R_{tn}},$$

kde  $\phi_{tn}$  je výnos z nelineární strategie (související s aktivem  $n$ ) a  $R_{tn}$  je index výnosu aktiva. Stupeň nelinearity tedy říká, jakým číslem musíme přenásobit index výnosu aktiva  $R_{tn}$ , abychom získali skutečný výnos z nelineární strategie  $\phi_{tn}$ . Průměrný stupeň nelinearity ve strategii portfolia lze reprezentovat ukazatelem  $\zeta_t$ , kterým přenásobíme všechny indexy výnosů aktiv. Uvažovaný ukazatel se pak začlení do modelu změnou omezení na

$$\sum_{n=1}^N y_{tn} = (1 + \lambda_t)\zeta_t \quad \text{pro } \forall t.$$

Tedy jsme model upravili tak, že by se měl více přiblížit zajišťovacím fondům, lépe zachytit citlivost jejich výnosů na změny indexů výnosů aktiv a poodhalit míru využívání pákového efektu. Ale přidané ukazatele  $\lambda_t$  (poměrná část portfolia financována z dluhu) a  $\zeta_t$  (průměrný stupeň nelinearity) nejsou známé, je tedy třeba je odhadnout. Dále se také zkomplikovala interpretovatelnost výsledných hodnot  $y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tN}$ .

V článku McGuire et al. [10] se autorům podařilo s využitím rolované regrese odhadnout ukazatel pákového efektu proměnný v čase, ale v rámci lineárního Kalmanova filtru neznáme způsob jak odhadovat parametry proměnné v čase. Při rolované regrese vlastně řešíme větší počet klasických lineárních regresí, v kterých jsou parametry neměnné v čase, a jejich odhad je tím pádem snadnější. Dynamická analýza portfolia pomocí Kalmanova filtru je však blíže skutečnosti než rolovaná regrese. V dynamické analýze hodnoty  $y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tN}$  vysvětlují míru citlivost portfolia na dané indexy výnosů

právě pro čas  $t$ , kdežto pokud použijeme rolovanou regresy, jsou hodnoty  $y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tN}$  spočítány pro určité období od  $t - k$  do  $t$  (kde  $k + 1$  je délka rolovacího okna). Hledání možnosti, jak v případě Kalmanova filtru odhadnout parametry proměnné v čase, by jistě bylo zajímavé téma dalšího výzkumu.

# Kapitola 5

## Analýza vybraných českých fondů

V této kapitole použijeme model pro dynamickou analýzu portfolia navržený v předchozí kapitole pro analýzu dvou českých fondů. Budeme zkoumat KB Akciový fond a ING International Český fond obligací. V analýze využijeme informaci pouze o jejich výnosech. Ostatní informace o fondech, které jsou známe, si ponecháme a následně je porovnáme s výsledky modelu. Ověříme tak kvalitu modelu.

Model pro dynamickou analýzu portfolia byl v článku Pizzinga, Fernandes [12] testován na umělém portfoliu. Autoři zvolili rozložení portfolia v čase, podle rozložení spočítali celkové výnosy portfolia v jednotlivých obdobích a poté na tyto výnosy aplikovali dynamickou analýzu. Cílem byla kontrola navrženého modelu. Výsledek byl velmi dobrý, model rychle odhalil změny v alokaci a váhy u jednotlivých indexů přibližně odpovídaly zvolenému rozložení. V této práci tedy již nebudeme testovat model na umělém portfoliu, ale zaměříme se na skutečné fondy.

Jako indexy výnosů aktiv jsme pro analýzu zvolili následující indexy:

- *Sazba PRIBID (Prague Interbank Bid Rate)* - průměrná úroková sazba (p. a.), za kterou si české banky mohou ukládat peníze u jiných českých bank. My zde budeme pracovat s PRIBIDem na jeden den, což je průměrná úroková sazba pro jednodenní vklady.
- *Měnový kurz CZK/EUR*
- *Index PX* - oficiální index Burzy cenných papírů Praha. Index je počítán na základě výnosu nejvíce obchodovatelných akcií na této burze.
- *Index českých státních dluhopisů EFFAS*

Pro dynamickou analýzu je třeba indexy upravit na výnosy indexů. K tomu nám poslouží vzorec pro míru zisku  $R_t$  v čase  $t$

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}},$$

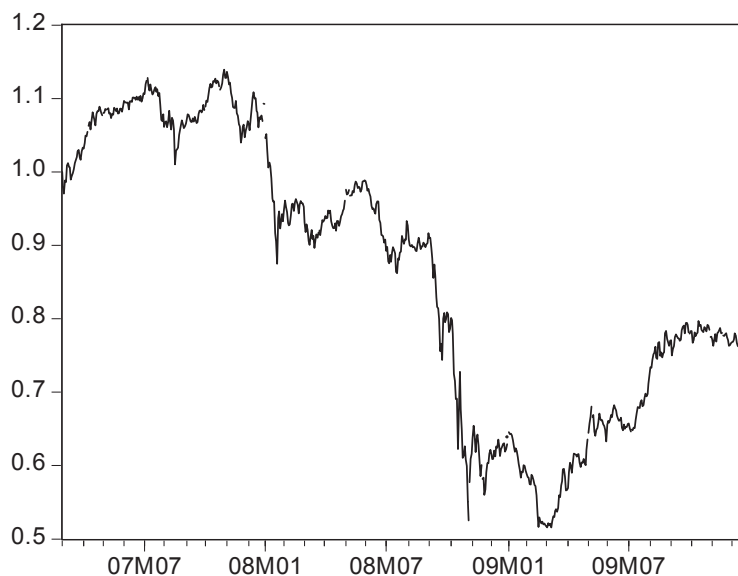
kde  $P_t$  představuje pro tento případ hodnotu indexu v čase  $t$ . (Sazbu PRIBID nepře-  
počítáváme podle tohoto vzorce, sazba již sama udává výnos.)

Při analýze budeme uvažovat denní data, časový krok se bude rovnat jednomu  
dni. Je tedy ještě třeba přepočítat sazbu PRIBID, která je roční úrokovou sazbou.  
To učiníme jednoduše tak, že hodnotu PRIBID vydělíme počtem dní v roce a získáme  
tak denní sazbu (konvence je 360 dní = 1 rok).

Váhy u jednotlivých výnosů indexů pak představují alokaci portfolia mezi různé fi-  
nanční tržní oblasti. Sazba PRIBID zastupuje nástroje peněžního trhu (uložení peněz).  
Měnový kurz CZK/EUR zas představuje oblast spekulací na měnové kurzy. Index PX  
reprezentuje český akciový trh. A index českých státních dluhopisů EFFAS zřejmě za-  
stupuje český dluhopisový trh.

## 5.1 Akciový fond

V této části budeme analyzovat výnosy akciového fondu. Konkrétně budeme pracovat  
s fondem *KB Akciový*. Jedná se o podílový fond Komerční banky. Investuje do akcií  
obchodovaných na pražské burze. Do portfolia fondu jsou zařazovány nejvíce obcho-  
dované tituly s růstovým potenciálem z hlavního akciového indexu burzy PX. Port-  
folio je z malé části doplněno také o akcie z polského a maďarského akciového trhu.  
K datu 31.3.2008 známe z internetových stránek Komerční banky strukturu portfolia  
tohoto fondu: 65% akcie obchodované na pražské burze a 35% nástroje peněžního trhu.



Obrázek 5.1: Vývoj výnosu fondu KB Akciový

Informace o konkrétních investicích fondu však do analýzy nezahrneme (neodstraníme z modelu měnový kurz CZK/EUR a index českých státních dluhopisů EFFAS), budeme k fondu přistupovat jako k neznámému a využívat pouze informaci o jeho celkových výnosech. Tedy pokud bude model dynamické analýzy portfolia správně fungovat, měly by váhy u indexu PX a PRIBID vyjít významné a u ostatních indexů nevýznamné.

Fond KB Akciový vznikl 1.3.2007. Fond budeme analyzovat od jeho vzniku až do konce roku 2009, tedy přesněji uvažujeme období od 1.3.2007 do 31.12.2009. Budeme pracovat s denními daty, kde uvažujeme pouze obchodní dny bez českých státních svátků, dále výnosy fondu neobsahují údaje ze dnů 29.12. - 6.1. a údaj ze dne 22.10.2007, tedy ani tyto dny nebudeme v analýze uvažovat. Celkem tedy máme 700 pozorování. Výnosy fondu byly získány z internetových stránek *www.iks-kb.cz* a zdrojem hodnot uvažovaných indexů je *Bloomberg*. Jak se v uvažovaném období vyvíjel výnos fondu ukazuje obrázek 5.1.

K řešení použijeme opět program EViews. Zápis stavového modelu bude tvaru:

```
@state sv1=sv1(-1)+[var=exp(C(1))]
@state sv2=sv2(-1)+[var=exp(C(2))]
@state sv3=sv3(-1)+[var=exp(C(3))]
@state sv4=sv4(-1)+[var=exp(C(4))]
@state sv5=sv5(-1)+[var=exp(C(5))]
@signal fa=sv1+pribid*sv2+czkeur*sv3+px*sv4+effas*sv5+[var=exp(C(6))]
@signal 1=sv2+sv3+sv4+sv5
```

Výsledek odhadu ukazuje obrázek 5.2. Pod parametry  $C(1)$ ,  $C(2)$ ,  $C(3)$ ,  $C(4)$ ,  $C(5)$  a  $C(6)$  se ukrývá odhad rozptylu náhodných složek u jednotlivých rovnic. Například odhad rozptylu pro první stavovou rovnici je  $\exp(-53,7428) = 4,5686 \cdot 10^{-24}$ . Dále nám tabulka ukazuje předpověď stavového vektoru o jeden krok dopředu v čase  $T$  (ve sloupci *Final State*). Na obrázku 5.3 naleznete graf ukazující vývoj odhadu stavového vektoru v rámci vyrovnávání ( $\hat{\mathbf{x}}_{1|T}$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_{2|T}$ , ...,  $\hat{\mathbf{x}}_{T|T}$ ). Stavový vektor nám zde představuje váhy u jednotlivých výnosů indexů, které se obvykle v čase mění. Ale v tomto případě, i když se stavový vektor může v čase měnit, jsou váhy odhadnuty v čase téměř konstantně. To nejspíš způsobují odhadnuté rozptyly náhodných složek, které byly odhadnuty na velmi nízké hodnoty (viz tabulka 5.1).

$\sigma_1^2$	$4,5686 \cdot 10^{-24}$
$\sigma_2^2$	$2,3172 \cdot 10^{-117}$
$\sigma_3^2$	$1,8773 \cdot 10^{-19}$
$\sigma_4^2$	$6,0435 \cdot 10^{-20}$
$\sigma_5^2$	$2,7175 \cdot 10^{-23}$
$\sigma_6^2$	$1,1132 \cdot 10^{-9}$

Tabulka 5.1: Odhad rozptylů náhodných složek

Method: Maximum likelihood (Marquardt)  
 Sample: 1 700  
 Included observations: 700  
 Convergence achieved after 1 iteration

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	-53.74283	NA	NA	NA
C(2)	-268.5621	NA	NA	NA
C(3)	-43.11927	NA	NA	NA
C(4)	-44.25272	NA	NA	NA
C(5)	-51.95976	NA	NA	NA
C(6)	-20.61605	NA	NA	NA

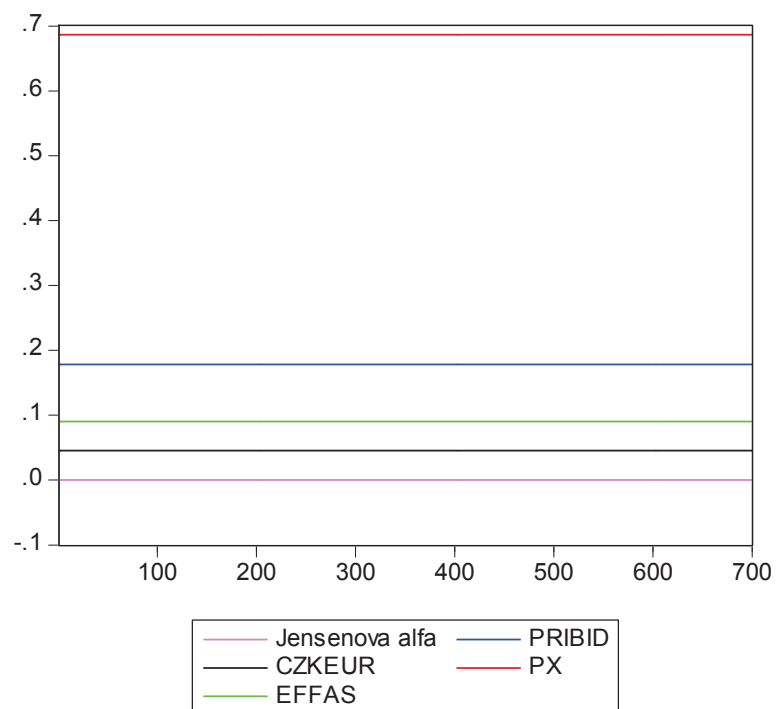
  

	Final State	Root MSE	z-Statistic	Prob.
SV1	-8.37E-05	1.26E-06	-66.26613	0.0000
SV2	0.178060	0.000590	301.7448	0.0000
SV3	0.045312	0.000199	228.1963	0.0000
SV4	0.686363	5.68E-05	12079.97	0.0000
SV5	0.090265	0.000558	161.6709	0.0000

Log likelihood	-4846936.	Akaike info criterion	13848.41
Parameters	6	Schwarz criterion	13848.45
Diffuse priors	5	Hannan-Quinn criter.	13848.42

Obrázek 5.2: Výsledná tabulka analýzy akciového fondu pomocí Kalmanova filtru



Obrázek 5.3: Odhad stavového vektoru v rámci vyrovnávání



Pokud zkusíme rozptyl náhodných složek u stavových rovnic zadat na pevnou hodnotu (u rovnice pozorování ponecháme rozptyl jako funkci neznámého parametru), získáme již mnohem realističtější výsledky. Stavový vektor již není v čase konstantní a zajímavé také je, že se výsledné odhady pro různé hodnoty rozptylů (pro hodnoty  $10^{-9}$ ,  $10^{-7}$ ,  $10^{-5}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-1}$ , 1, 10 a 100) skoro neliší. Zdá se tedy, že metoda je na zadanou hodnotu rozptylu vcelku robustní, jen nesmí být rozptyl menší jak  $10^{-10}$ , potom je proměnnost stavového vektoru v čase již příliš omezena. Proč metoda maximální věrohodnosti, dle které byly odhadnuty rozptyly, dala tak nízké hodnoty odhadů? Důvodem může kupříkladu být porušení předpokladu normality, metoda maximální věrohodnosti v tomto případě totiž požaduje splnění předpokladu normality.

Ukažme si výsledky pro pevnou hodnotu rozptylu  $10^{-1}$ . Zápis stavového modelu je následující:

```
@state sv1=sv1(-1)+[var=0.1]
@state sv2=sv2(-1)+[var=0.1]
@state sv3=sv3(-1)+[var=0.1]
@state sv4=sv4(-1)+[var=0.1]
@state sv5=sv5(-1)+[var=0.1]

@signal fa=sv1+pribid*sv2+czkeur*sv3+px*sv4+effas*sv5+[var=exp(C(1))]
@signal l=sv2+sv3+sv4+sv5
```

Výsledek odhadu je na obrázku 5.4. Čas výpočtu v programu EViews je zanedbatelně malý (méně než jedna sekunda). Docílili jsme toho, že již není vývoj vyrovnaných hodnot konstantní (viz graf na obrázku 5.5). Za lepší model tedy zvolíme model s pevně zadaným rozptylem a budeme jej dále podrobněji analyzovat.

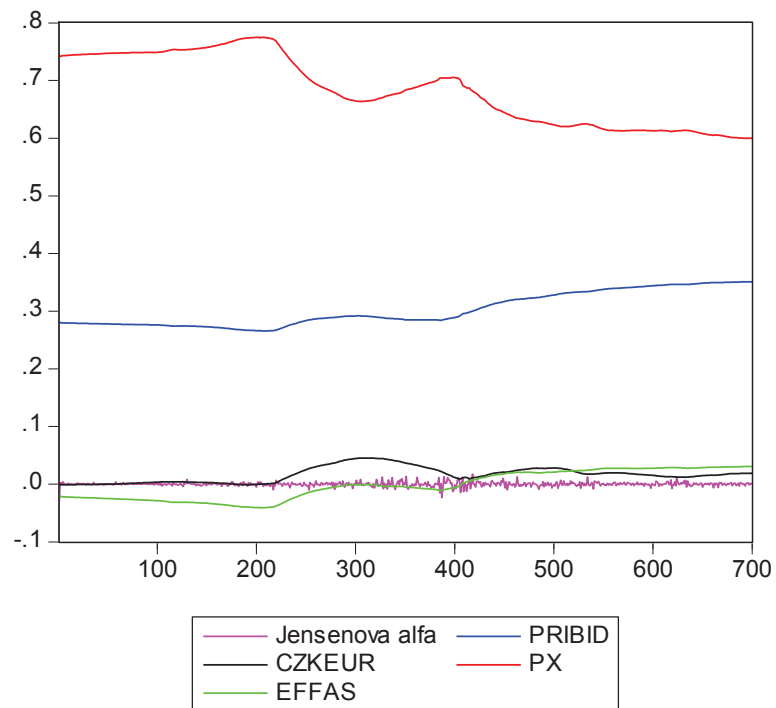
Na obrázku 5.6 jsou jednotlivě v grafech zaneseny odhady složek stavového vektoru v rámci vyrovnávání. U analyzovaného fondu neočekáváme krátké pozice. Na grafech vidíme, že i přes absenci omezení krátkých pozic vychází jednotlivé váhy z velké části kladné a záporných hodnot nabývají jen do hodnoty  $-0,04$ . Tedy model lze v tomto směru považovat za dobrý, neboť sám správně odhadl, že fond nevyužívá krátké pozice. Dále pak model odhadl váhy u indexů výnosů CZK/EUR a EFFAS vcelku nevýznamné, což velmi odpovídá našim očekáváním, neboť podle informace (nezahrnuté do analýzy) fond v těchto oblastech neinvestuje.

Naopak u indexů výnosů PRIBID a PX vyšly váhy významné. Kvalitu těchto odhadů můžeme zkontrolovat podle známého rozložení portfolia fondu ze dne 31.3.2008. K tomuto dni fond udává, že struktura jeho portfolia je: 65% akcie obchodované na pražské burze a 35% nástroje peněžního trhu. Model pro tento den odhadl váhu u PX 68,88% a u PRIBID 28,76%. Sice odhad není úplně přesný, ale je vcelku dobře odhadnut poměr mezi těmito složkami portfolia. Menší nepřesnost je nejspíš způsobena tím, že neuvažujeme polské a maďarské akcie, které jsou z malé části také obsaženy v portfoliu fondu.

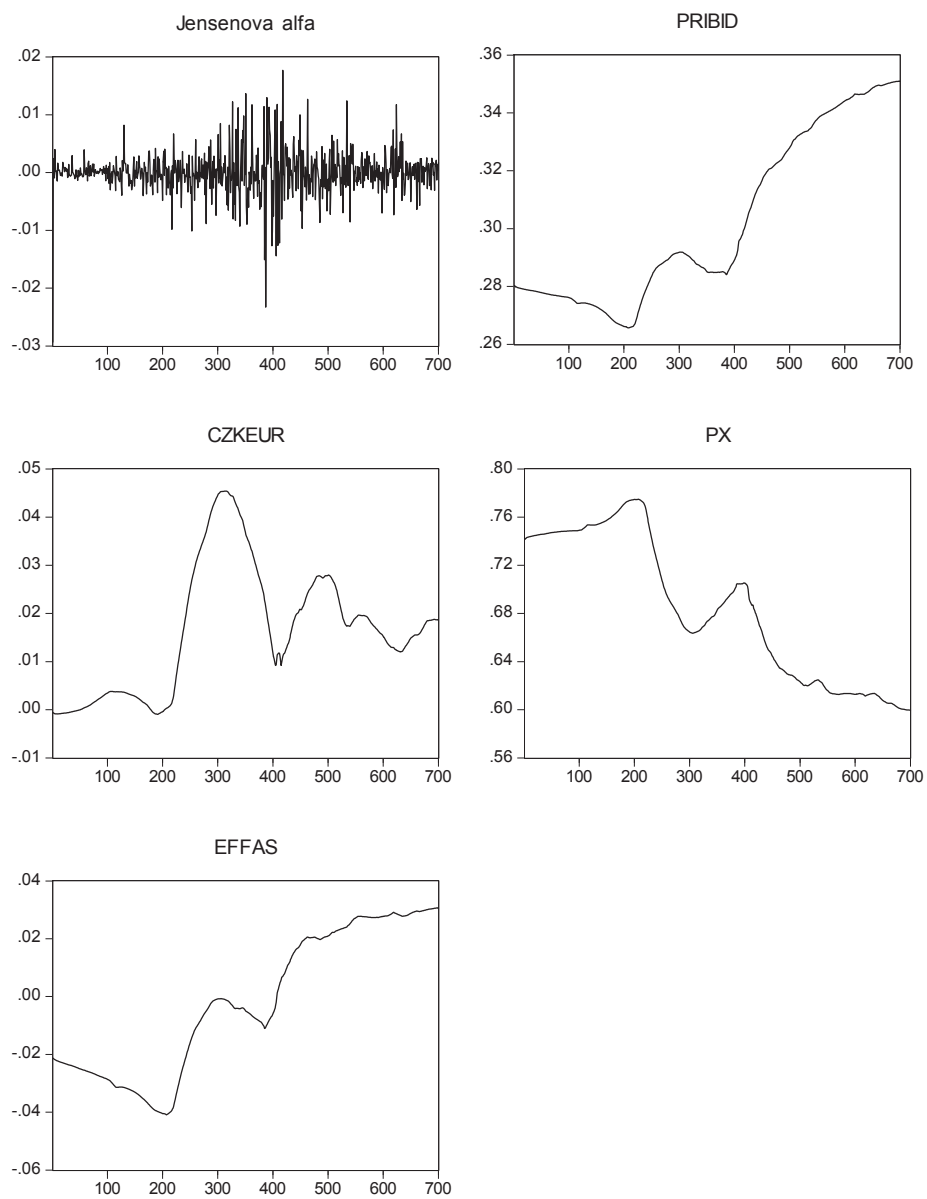
Method: Maximum likelihood (Marquardt)  
 Sample: 1 700  
 Included observations: 700  
 Convergence achieved after 1 iteration

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	-53.73636	NA	NA	NA
	Final State	Root MSE	z-Statistic	Prob.
SV1	0.001709	0.317060	0.005390	0.9957
SV2	0.350917	6.106872	0.057463	0.9542
SV3	0.018676	3.405295	0.005484	0.9956
SV4	0.599767	2.273258	0.263836	0.7919
SV5	0.030641	5.872971	0.005217	0.9958
Log likelihood	-202.2865	Akaike info criterion		0.580819
Parameters	1	Schwarz criterion		0.587320
Diffuse priors	5	Hannan-Quinn criter.		0.583332

Obrázek 5.4: Výsledná tabulka analýzy akciového fondu pomocí Kalmanova filtru (s pevně zadaným rozptylem 0,1)



Obrázek 5.5: Odhad stavového vektoru v rámci vyrovnávání (pro případ s pevně zadaným rozptylem 0,1)



Obrázek 5.6: Odhad stavového vektoru v rámci vyrovnávání - jednotlivě po složkách (pro případ s pevně zadaným rozptylem 0,1)

U modelu, kde jsme odhadovali všechny hodnoty rozptylu, je odhad rozložení pro ten samý den u PX 68,64% a u PRIBID 17,81%. Tedy srovnáme-li v tomto ohledu uvažované dva modely, podstatně lepší odhad dává model s pevně zvoleným rozptylem. To potvrzuje naše rozhodnutí pracovat právě s tímto modelem.

Koeficient determinace a korigovaný koeficient determinace jsou u rovnice pozorování rovny téměř hodnotě 1. Ale to je vcelku logické, neboť nevysvětlená část pozorování, která by obvykle připadla na náhodnou složku, je zahrnuta k hodnotě Jensenovy alfy (Jensenova alfa zde představuje jakýsi absolutní člen proměnný v čase). Pokud se podíváme na graf odhadu Jensenovy alfy, opravdu spíše připomíná bílý šum než ukazatel výkonnosti manažera fondu. Tedy můžeme říci, že Jensenova alfa se zdá být nulová. To znamená, že manažer fondu kopíruje indexy a nesnaží se příliš o aktivní správu, kterou by mohl docílit vyšších výnosů než indexy.

Kalmanův filtr předpokládá normalitu a neautokorelovanost náhodných procesů  $\{\mathbf{v}_t\}$  a  $\{\mathbf{w}_t\}$ . Pokud testujeme tyto předpoklady v našem modelu, je ve všech případech zamítnuta normalita (použit Jarque-Bera test) a také ve všech případech zamítnuta neautokorelovanost (použit Ljung-Box test). Autokorelovanost je nejspíš způsobena tím, že pokud se zvyšuje váha u určitého indexu, zvyšuje se po delší časové období. Nebo-li fond v určitém časovém období zvyšuje investice do dané oblasti, růst či pokles hodnoty dané váhy není tedy náhodný (po nárůstu obvykle následuje opět nárůst). Tudíž náhodné složky ve stavových rovnicích jsou pozitivně autokorelované.

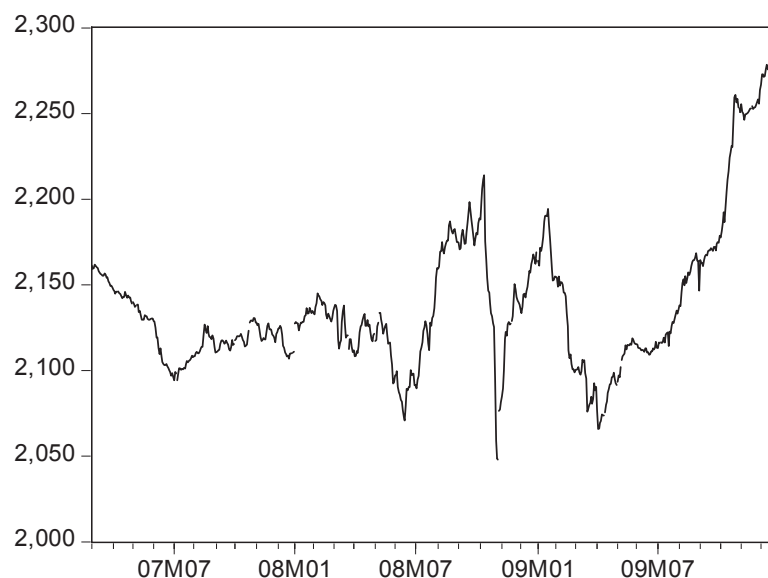
Ale i přestože jsou porušeny předpoklady normality a neautokorelovanosti, dává model dobré výsledky. Model správně odhalil omezení krátkých pozic, váhy u CZK/EUR a EFFAS odhadl nevýznamné, tak jak tomu je ve skutečnosti, a vcelku dobře rozpoznal i rozložení portfolia mezi akciový a peněžní trh.

**Poznámka:** Při této analýze jsme také zkusili zaměnit index výnosu reprezentující peněžní trh (v podobě PRIBIDu na jeden den) za PRIBOR na jeden den, PRIBOR na jeden měsíc, PRIBOR na jeden rok, PRIBID na jeden měsíc a PRIBID na jeden rok. Zjistili jsme, že nezáleží na tom, jaký z nich vybereme, pro všechny tyto indexy výnosů jsme získali totožné výsledky.

## 5.2 Dluhopisový fond

Nyní budeme zkoumat výnosy dluhopisového fondu - *ING International Český fond obligací*. Tento fond investuje do obligací denominovaných v českých korunách a zbytek prostředků ukládá. Portfolio fondu je rozloženo mezi dluhopisy vydané českou vládou, nejvýznamnějšími českými podniky a významnými zahraničními emitenty, většina kapitálu je investována do českých státních dluhopisů.

Opět informace o konkrétních investicích fondu do analýzy nezahrneme. Pokud model odhadne významné váhy u indexů výnosů PRIBID a EFFAS, potvrdí se kvalita modelu. Fond budeme analyzovat ve stejném časovém období a s vynecháním stejných dnů jako u akciového fondu. Výnosy dluhopisového fondu byly získány na internetových



Obrázek 5.7: Vývoj ceny podílových listů fondu International Český fond obligací

stránkách [www.ingfondy.cz](http://www.ingfondy.cz). Jak se v uvažovaném období vyvíjela cena podílových listů fondu ukazuje obrázek 5.7.

Postup při analýze je stejný jako v předešlé kapitole. Nejprve pracujeme s modelem, kde jsou hodnoty rozptylů odhadovány pomocí metody maximální věrohodnosti. Výsledek nám ukazuje tabulka na obrázku 5.8 a graf znázorňující odhad stavového vektoru v rámci vyrovnávání na obrázku 5.9. I zde je stavový vektor v čase téměř konstantní z důvodů velikosti rozptylů, které jsou odhadnuty na hodnoty blízké nule. Pokud hodnotu rozptylů u stavových rovnic nastavíme na pevnou hodnotu 0,1, již se stavový vektor v čase mění (viz tabulka na obrázku 5.10 a graf na obrázku 5.11). Stejný výsledek získáme i pro pevné hodnoty rozptylů  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$  a  $10^{-5}$ , pro rozptyl  $10^{-6}$  a menší je proměnnost stavového vektoru již příliš omezena.

Obrázek 5.12 ukazuje jednotlivě odhady složek stavového vektoru v rámci vyrovnávání. Nejsou zde patrné žádné významné krátké pozice, váhy nabývají záporných hodnot pouze do hodnoty  $-0,02$ . Model správně rozpoznal, že analyzovaný fond nevyužívá krátké pozice.

Významné dlouhé pozice jsou u indexů výnosů PRIBID a EFFAS, ostatní váhy u indexů výnosů jsou vcelku nevýznamné, tedy podle modelu fond investuje do nástrojů peněžního trhu a do dluhopisů. Model velmi dobře analyzoval dluhopisový fond, neboť právě v těchto finančních tržních oblastech fond investuje. Podle odhadu modelu fond během analyzovaného období výrazněji neměnil poměr mezi investicemi v těchto dvou oblastech, investice do dluhopisů se pohybují kolem 60% a investice do nástrojů peněžního trhu jsou stále blízké 39%.

U koeficientu determinace, Jensenovy alfy a testů na normalitu a autokorelovanost je zde stejná situace a stejné závěry jako u akciového fondu v podkapitole 5.1.

Method: Maximum likelihood (Marquardt)  
 Sample: 1 700  
 Included observations: 700  
 Convergence achieved after 3 iterations

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	-16.90823	NA	NA	NA
C(2)	-1552.839	NA	NA	NA
C(3)	-23.64106	NA	NA	NA
C(4)	-197.7140	NA	NA	NA
C(5)	-23.43410	NA	NA	NA
C(6)	-739.8778	NA	NA	NA

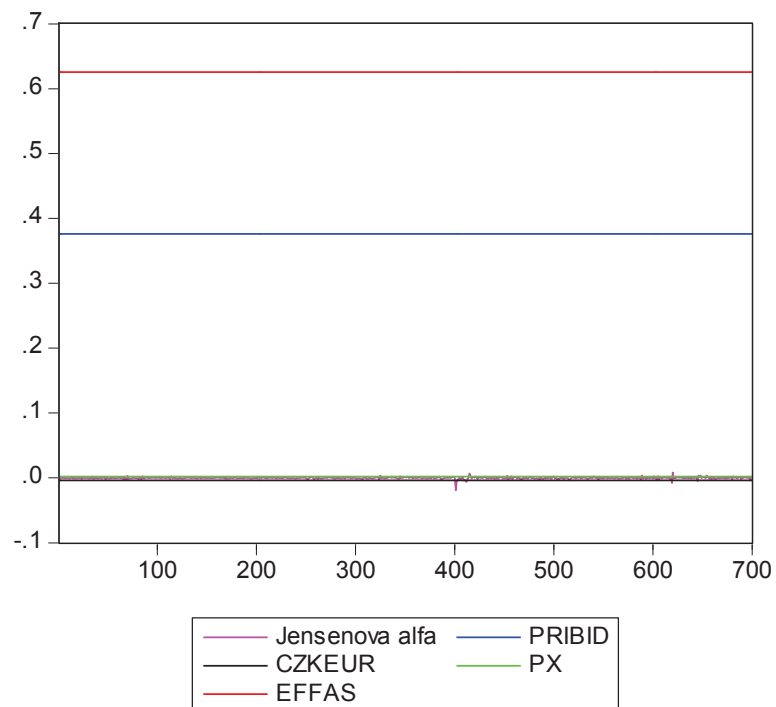
  

	Final State	Root MSE	z-Statistic	Prob.
SV1	0.001834	0.000213	8.611067	0.0000
SV2	0.375992	0.003197	117.6128	0.0000
SV3	-0.003613	0.000880	-4.105089	0.0000
SV4	0.002073	0.000268	7.729027	0.0000
SV5	0.625548	0.002968	210.7435	0.0000

Log likelihood	-20531.24	Akaike info criterion	58.67782
Parameters	6	Schwarz criterion	58.71682
Diffuse priors	5	Hannan-Quinn criter.	58.69289

Obrázek 5.8: Výsledná tabulka analýzy dluhopisového fondu pomocí Kalmanova filtru

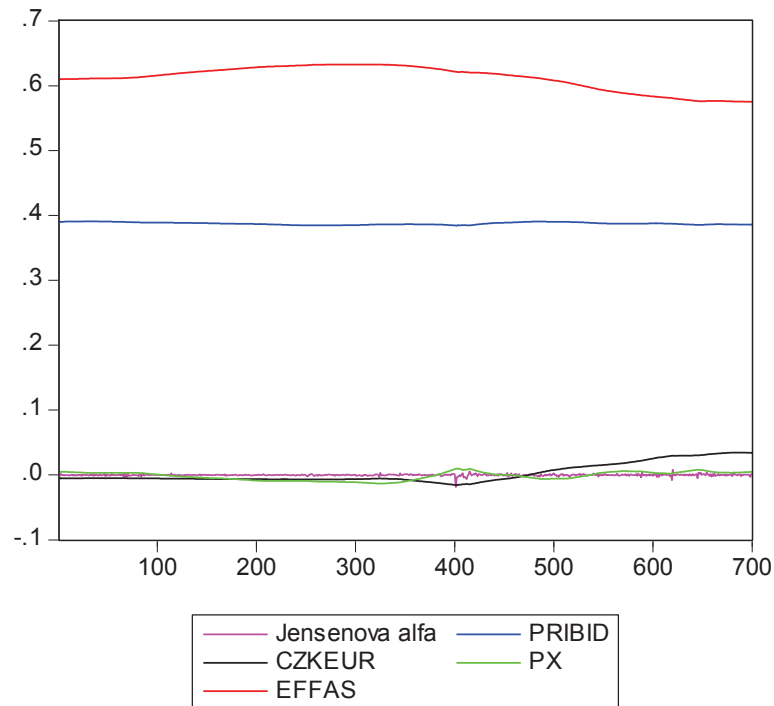


Obrázek 5.9: Odhad stavového vektoru v rámci vyrovnávání

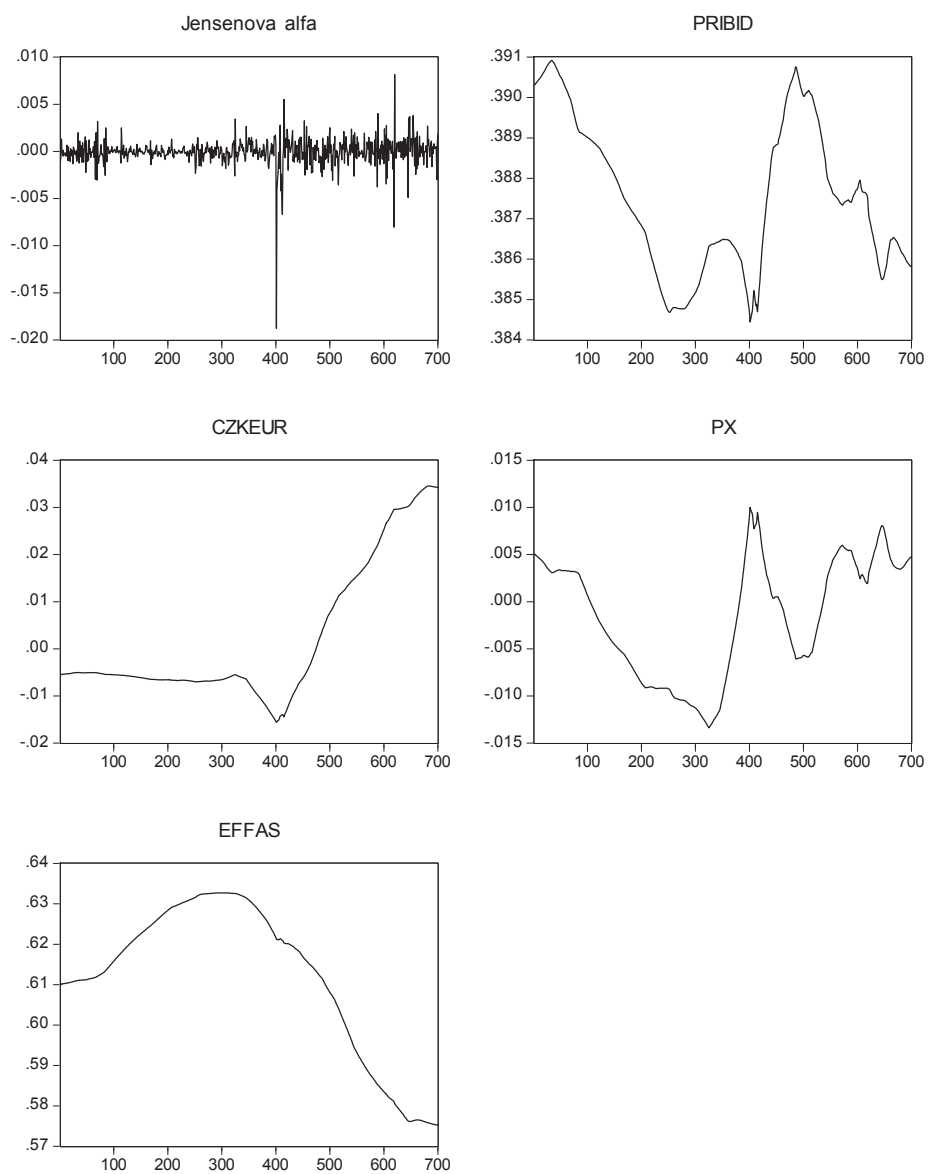
Method: Maximum likelihood (Marquardt)  
 Sample: 1 700  
 Included observations: 700  
 Convergence achieved after 3 iterations

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	-31.84212	NA	NA	NA
	Final State	Root MSE	z-Statistic	Prob.
SV1	0.001819	0.317060	0.005737	0.9954
SV2	0.385815	6.106872	0.063177	0.9496
SV3	0.034233	3.405295	0.010053	0.9920
SV4	0.004720	2.273258	0.002076	0.9983
SV5	0.575233	5.872971	0.097946	0.9220
Log likelihood	-202.2029	Akaike info criterion		0.580580
Parameters	1	Schwarz criterion		0.587081
Diffuse priors	5	Hannan-Quinn criter.		0.583093

Obrázek 5.10: Výsledná tabulka analýzy dluhopisového fondu pomocí Kalmanova filtru (s pevně zadaným rozptylem 0,1)



Obrázek 5.11: Odhad stavového vektoru v rámci vyrovnávání (pro případ s pevně zadaným rozptylem 0,1)



Obrázek 5.12: Odhad stavového vektoru v rámci vyrovnávání - jednotlivě po složkách (pro případ s pevně zadaným rozptylem 0,1)



Rovněž i při analýze výnosů dluhopisového fondu se potvrdilo, že navržený model pro dynamickou analýzu portfolia dobře rozpozná rozložení fondu mezi různé finanční tržní oblasti. A přestože do modelu není zahrnuto omezení krátkých pozic (i když víme, že fond nevyužívá krátké pozice), nenacházel se žádný odhad váhy ve významně záporné hodnotě.

# Závěr

V této práci jsme se nejprve věnovali popisu Kalmanova filtru a stavového modelování. Pro praktické výpočty jsme využili ekonometrický software EViews a podali čtenáři návod jak s tímto uživatelsky přátelským softwarem pracovat v oblasti stavového modelování.

Poté jsme představili poměrně novou metodu označovanou jako dynamická analýza portfolia, která umožňuje odhadnout na základě výnosů fondu vývoj složení jeho portfolia v čase. Tato metoda je založena právě na stavovém modelování a narozdíl od starších metod umožňuje proměnnost vah portfolia v čase. Dále jsme zde nastínili směr, jak by se prezentovaná metoda mohla modifikovat pro situaci zajišťovacích fondů. Modifikace však narazila na problém praktického výpočtu, neboť neznáme způsob, jak u Kalmanova filtru odhadnout parametry proměnné v čase. Tento problém by byl jistě zajímavé téma dalšího výzkumu.

Dynamickou analýzu portfolia jsme demonstrovali a zároveň otestovali na reálných datech českých podílových fondů. I když při aplikaci modelu nebyly splněny některé požadované předpoklady, tak jsme po určité úpravě získali velmi uspokojivé výsledky. Byly správně rozpoznány významné složky portfolia a odhad rozložení těchto složek v portfoliu odpovídal skutečné situaci. Model také dobře odhalil, že fondy nevyužívají krátké pozice. Praktická aplikace dynamické analýzy portfolia tedy potvrdila kvalitu této metody.

# Literatura

- [1] *Anděl, J.*: Základy matematické statistiky. Matfyzpress 2007.
- [2] *Anderson, B. D. O., Moore, J. B.*: Optimal filtering. Prentice-Hall 1979.
- [3] *Cipra, T.*: Matematika cenných papírů. HZ Praha 2000.
- [4] *Cipra, T.*: Finanční ekonometrie. Ekopress, Praha 2008.
- [5] *Durbin, J., Koopman, S. J.*: Time Series Analysis by State Space Methods. Oxford University Press 2003.
- [6] *Elton, E. J., Gruber M. J.*: Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. Wiley, New York 1991.
- [7] EViews 5 User's Guide. Quantitative Micro Software, LLC.
- [8] *Gardner, G., Harvey, A.C., Phillips, G.D.A.*: An algorithm for exact maximum likelihood estimation of autoregressive-moving average models by means of Kalman filtering. Applied Statistics 29 (1980), 311-322.
- [9] *Harvey, A.C.*: Forecasting, structural time series models and the Kalman filter. Cambridge University Press 1989.
- [10] *McGuire, P. et al.*: Time-varying exposures and leverage in hedge funds. Bank of International Settlements Quarterly Review, March (2005), 59-72.
- [11] *Pizzinga, A. et al.*: Semi-strong dynamic style analysis with time-varying selectivity measurement: applications to Brazilian exchange-rate funds. Applied Stochastic Models in Business and Industry 24 (2008), 3-12.
- [12] *Pizzinga, A., Fernandes, C.*: State Space Models for Dynamic Style Analysis of Portfolios. Brazilian Review of Econometrics 26(1) May (2006), 31-66.
- [13] *Sharpe, W.F.*: Determining a fund's effective assets mix. Investment Management Review, November/December 1998, 59-69.