Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Marek Cúth

Název práce: Separabilní redukce ve funkcionální analýze

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D.
Studijní program: Matematika, matematická analýza

2010

Děkuji vedoucímu mé práce, Doc. RNDr. Ondřeji Kalendovi, Ph.D. za velikou spoustu věnovaného času, za zájem o mou práci, ochotu kdykoliv poradit, za angažovanost v řešení problémů a za množství různých připomínek. Také za životní příklad toho, jak člověk dokáže velice mírným způsobem dělat veliké skutky.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 15.4.2010 Marek Cúth

Obsah

Název práce: Separabilní redukce ve funkcionální analýze
Autor: Marek Cúth
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D.
e-mail vedoucího: Ondrej.Kalenda@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci zkoumáme, zda se některé vlastnosti množin a funkcí dají separabilně redukovat. To jest, zda platí, že množina (funkce) má danou vlastnost právě tehdy, když ji má ve speciálním separabilním podprostoru, závislém na této množině (funkci). Zabýváme se vlastnostmi množin „býti hustá, řídká, první kategorie, reziduální a pórovitá" a vlastnostmi funkcí „býti spojitá, polospojitá a fréchetovsky diferencovatelná". Jednotlivé výsledky je možné díky vhodně zvolené metodě generování podprostorů kombinovat, a tak dostáváme i separabilní redukce vlastností funkcí typu „funkce je spojitá na husté podmnožině", „funkce je fréchetovsky diferencovatelná na reziduální podmnožině", atd. Nakonec ukazujeme některé aplikace, které rozšiřují platnost tvrzení dokázaných Zajíčkem, Lindenstraussem a Preissem.

Klíčová slova: separabilní redukce, fréchetovská diferencovatelnost, reziduální množina

Title: Separable reduction theorems in functional analysis
Author: Marek Cúth
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: Doc. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: Ondrej.Kalenda@mff.cuni.cz

Abstract: In the presented work we are studying, whether some properties of sets (functions) can be separably reduced. It means, whether it is true, that a set (function) has given property if and only if it has this property in a special separable subspace, dependent only on the given set (function). We are interested in properties of sets "be dense, nowhere dense, meager, residual and porous" and in properties of functions "be continuous, semicontinuous and Fréchet differentiable". Out method of creating separable subspaces enables us to combine our results, and so we easily get separable reductions of function properties such as "be continuous on a dense subset", "be Fréchet differentiable on a residual subset", etc. Finally, we show some applications of presented separable reduction theorems, which enable us to show, that some propositions proven by Zajíček, Lindenstrauss and Preiss hold under other assumptions as well.

Keywords: separable reduction, Fréchet differentiability, residual set

Kapitola 1

Úvod

W.Kubiś ve svém článku [6] předvádí zajímavou metodu vytváření speciálních separabilních podprostorů s předem danými vlastnostmi. Tato práce se zabývá tím, jestli se tato metoda dá použít k dokázání výsledků, které se nepodařilo dokázat běžnými metodami separabilních redukcí.

Za úspěch v tomto směru je snad možné považovat separabilní redukci Zajíčkova dosud nepublikovaného výsledku (viz. kapitola 6). Ukazuje se, že hlavní výhodou zvolené metody je především možnost jednotlivé výsledky kombinovat. Síla této metody se tedy projeví až tehdy, když máme dostatečný počet dokázaných vět o separabilně redukovatelných vlastnostech množin a funkcí, které potom můžeme kombinovat.

Struktura práce je tato: na začátku představujeme nezbytné výsledky z teorie množin. Pak se zabývám tím, jak se tyto výsledky dají obecně používat. V dalších kapitolách potom zkoumáme, které vlastnosti množin a funkcí lze separabilně redukovat. Nakonec ukazujeme tři zajímavé aplikace dokázaných výsledků.

V předložené práci používáme následující značení a úmluvy.

Místo „normovaný lineární prostor" někdy píšeme *NLP*, místo „metrický prostor" někdy píšeme *MP*. Symbolem $\mathbb{N}$ značíme množinu přirozených čísel bez nuly, $\mathbb{R}_+$ značí interval $(0, \infty)$ a $\mathbb{Q}_+$ nahrazuje $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$. Řekneme–li, že množina je spočetná, myslíme tím, že je nekonečná a spočetná. Pokud je f zobrazení, pak $\operatorname{Rng} f$ značí obor hodnot tohoto zobrazení a $\operatorname{Dom} f$ jeho definiční obor. Píšeme–li $f : X \to Y$ myslíme tím, že $\operatorname{Dom} f = X$ a $\operatorname{Rng} f \subset Y$. Symbolem $f \restriction_Z$ značíme restrikci zobrazení f na množinu Z. Uzávěr (resp. vnitřek) množiny A značíme $\overline{A}$ (resp. $\operatorname{Int}(A)$). Jedná–li se o relativní vnitřek množiny vzhledem k podprostoru Y, značíme $\operatorname{Int}_Y(A)$.

Je–li $\langle X, \rho \rangle$ MP, pak symbolem $U(x, r)$ značíme otevřenou kouli, tj. množinu $\{y \in X : \rho(x, y) < r\}$. Je–li X NLP, pak pod symbolem $\operatorname{conv} A$ rozumíme konvexní obal množiny A, pod $\mathrm{cl}_w(A)$ rozumíme její slabý uzávěr, pod $\operatorname{span} A$ lineární obal. S_X značí sféru v X, tj. množinu $\{x \in X : \|x\| = 1\}$. Symbolem $Y \subset\subset X$ značíme, že Y je lineárním podprostorem prostoru X. V následujícím textu platí úmluva, že všechny normované lineární prostory jsou nad $\mathbb{R}$. X^* značí duál k prostoru X. Konečně pro podmnožiny A, B v normovaném lineárním prostoru zavádíme značení $A + B$ pro množinu $\{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Kapitola 2

Nosný pilíř z teorie množin

Nosným pilířem celé práce je jedna věta z teorie množin. Jedná se o kombinaci Reflekční věty a Löwenheimovy–Skolemovy věty. V této práci jí budeme říkat *Věta o spočetném modelu*. Na jejím základě je možné se dobrat k zajímavým výsledkům ve funkcionální analýze. Tyto výsledky se týkají především redukce složitých problémů na problémy ve speciálních separabilních podprostorech.

Představme si například, že chceme dokázat větu tohoto typu:

V Banachově prostoru X existuje $x \in X$ mající určitou vlastnost právě tehdy, když existuje separabilní podprostor $X_M \subset\subset X$ a $x_M \in X_M$ tak, že x_M má tuto vlastnost relativně v X_M.

Takovou úlohu vyřešíme právě díky Větě o spočetném modelu takto:

- označme ϕ formuli *existuje $x \in X$ mající vlastnost ϕ'*

- Věta o spočetném modelu nám říká, že existuje spočetná množina M tak, že ϕ platí právě tehdy, když existuje $x_M \in X \cap M$ mající vlastnost ϕ' relativně v M

- za X_M zvolíme $\overline{X \cap M}$ a pokusíme se ukázat, že nalezené x_M splňuje ϕ' také relativně v X_M

Myšlenka použít tento postup k řešení některých problémů z funkcionální analýzy se již objevila například v článku [6]. Nápad jej použít k řešení problémů zkoumaných v této práci pochází od vedoucího mé práce, O. Kalendy.

Dříve než ale přistoupíme ke konkrétnímu použití této věty, měli bychom se nejdříve poučit o onom nosném pilíři, na kterém je vše vystavěno. Tomuto tématu se věnuje právě tato kapitola. Budeme v ní vycházet především z Kunenovy práce [1].

V první podkapitole si připomeneme potřebné základní poznatky týkající se formulí, axiomů, množin a tříd. Ve druhé přistoupíme k vyslovení a k důkazu Reflekční věty. Nakonec pak vyslovíme a dokážeme Větu o spočetném modelu, která je vlastně použitím myšlenky z Löwenheimovy–Skolemovy věty na konkrétní situaci, ve které se nacházíme po použití Reflekční věty.

2.1 Základní poznatky

Jak již bylo naznačeno, budeme se v této části textu věnovat poznatkům, které se týkají formulí, axiomů, množin a tříd. Předpokládám, že každý čtenář je již s touto problematikou alespoň zhruba obeznámen, a tak se nebudeme věnovat detailním popisům základních pojmů. Vyzvedneme jen ty části, které nepovažuji za součást základního matematického vzdělání, nebo ty, které budeme později potřebovat.

Celá tato podkapitola je pouze vytažením potřebných informací z textů [1] a [2], kde je možné dohledat veškeré další detaily. V případě hlubšího zájmu o partie z matematické logiky doporučuji ještě nahlédnout do [3].

Na začátku si připomeneme některé základní definice týkající se formulí. Půjde nám o to, jak se formule vytvářejí a o základní názvosloví okolo nich.

Definice 2.1. Slovem *výraz* označujeme konečnou posloupnost základních znaků $\in$, $\wedge$, $\neg$, (,) a v_i (kde i je libovolné přirozené číslo).
Formule je potom výraz zkonstruovaný podle následujících pravidel:

(i) $v_i \in v_j$, $v_i = v_j$ jsou formule (pro libovolná přirozená čísla i, j)

(ii) pokud ϕ a ψ jsou formule, pak jsou formule také

$$(\phi) \wedge (\psi), \quad \neg(\phi) \quad \text{a} \quad \exists v_i(\phi).$$

Formulím $v_i \in v_j$ a $v_i = v_j$ říkáme *atomické formule.*

Při zápisu formulí pro zjednodušení používáme následující zkratky:

Značení 2.2.

	Výraz	**Zapisujeme zkráceně jako**
(i)	$\neg(\exists v_i(\neg(\phi)))$	$\forall v_i(\phi)$
(ii)	$\neg((\neg(\phi)) \wedge (\neg(\psi)))$	$(\phi) \vee (\psi)$
(iii)	$(\neg(\phi)) \vee (\psi)$	$(\phi) \to (\psi)$
(iv)	$((\phi) \to (\psi)) \wedge ((\psi) \to (\phi))$	$(\phi) \leftrightarrow (\psi)$
(v)	$\neg(v_i \in v_j)$	$v_i \notin v_j$
(vi)	$\neg(v_i = v_j)$	$v_i \neq v_j$

Pro označení proměnných budeme používat písmena české a řecké abecedy. Pokud bude zřejmé z kontextu jak doplnit závorky, budeme je vynechávat.

Definice 2.3. *Podformule formule* ϕ je po sobě jdoucí nepřerušená posloupnost základních symbolů z ϕ, která tvoří formuli.

Úmluva 2.4. *V dalším textu budeme používat následující úmluvy:*

- *Říkáme, že* výskyt proměnné v_i *na nějakém místě ve formuli* ϕ je vázaný, *je–li součástí nějaké podformule tvaru* $\exists v_i(\psi)$ *formule* ϕ.

- *Není–li* výskyt proměnné *vázaný, říkáme, že* je volný.

- *Je–li* ϕ *formule a jsou–li* $v_0, \ldots, v_n$ *proměnné, jejichž volné výskyty nás ve* ϕ *zajímají, budeme psát* $\phi(v_0, \ldots, v_n)$ *místo* ϕ.

- *Říkáme, že* proměnná je vázaná (resp. volná) ve formuli ϕ, *má–li v ní vázaný (resp. volný) výskyt.*

- *Zápisem formule* ϕ *ve tvaru* $\phi[v_0, \ldots, v_n]$ *budeme rozumět, že* ϕ *je formule, jejíž všechny volné proměnné jsou mezi* $v_0, \ldots, v_n$.

- *Nechť* ϕ *a* ψ *jsou dvě formule takové, že lze logicky odvodit platnost formule* $\phi \leftrightarrow \psi$. *Potom řekneme, že* ϕ *a* ψ *jsou* logicky ekvivalentí.

- *Pracujeme–li s formulí*

$$\phi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \tag{2.1}$$

a u je nějaká proměnná, pak výraz $\phi(x_1, \ldots, u, \ldots, x_n)$ *bude označovat formuli, která vznikne z* (2.1) *následujícím způsobem: Každý volný výskyt proměnné* x_i *nahradíme proměnnou* u *a případné vázané výskyty proměnné* u *nahradíme jinou proměnnou, která se ve formuli* (2.1) *nevyskytuje.*

Příklad 2.5. Mějme formuli

$$(\exists v_0(v_1 \in v_2)) \wedge (\exists v_1(v_1 \in v_2))$$

Podformulemi této formule jsou například výrazy $\exists v_0(v_1 \in v_2)$, $v_1 \in v_2$. Výskyt v_1 ve formuli $\exists v_0(v_1 \in v_2)$ je volný, ve formuli $\exists v_1(v_1 \in v_2)$ je vázaný.

Nebudeme zde rozvádět, jak se ze souboru vět formálně odvozují další věty, ani nezavedeme pojem formálního důkazu. Tato problematika patří do matematické logiky a lze se s ní blíže seznámit ve výše zmiňovaných textech [1, kap. I] a [3].

V tomto textu budeme zacházet s pojmy množina, axiom a třída. Krátce si tedy připomeňme, co pod těmito pojmy myslíme a jaký je jejich význam.

Veškeré objekty, které v matematice existují, souhrnně nazýváme *množiny*. Pro svět množin platí určitá pravidla - *axiomy*.

V tomto textu budeme vycházet ze standardních axiomů Zermelovy–Frankelovy teorie množin s axiomem výběru (soubor formulí tvořící tyto axiomy značíme jako ZFC).

AXIOMY ZFC

1. *Axiom existence množiny:*

$$\exists x(x = x)$$

(Existuje alespoň jedna množina.)

2. *Axiom extenzionality:*

$$\forall x \forall y(\forall u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$$

(Množiny, které mají stejné prvky, se rovnají.)

3. *Schéma axiomů vydělení:*

   Je–li ϕ formule neobsahující volnou proměnnou y, pak

   $$\forall z \exists y \forall x (x \in y \;\leftrightarrow\; ((x \in z) \wedge \phi)) \quad \text{je axiom.}$$

   (Z každé množiny lze vydělit prvky splňující ϕ, takovou „vydělenou množinu” značíme jako $\{x \in z; \phi\}$.)

4. *Axiom dvojice:*

   $$\forall x \forall y \exists z (x \in z \;\wedge\; y \in z)$$

   (Pro libovolné dvě množiny x, y existuje množina obsahující x i y.)

5. *Axiom sjednocení:*

   $$\forall \mathscr{F}\, \exists A\, \forall Y\, \forall x ((x \in Y \;\wedge\; Y \in \mathscr{F}\,) \to (x \in A))$$

   (Ke každému systému množin $\mathscr{F} = \{Y, Z, \ldots\}$ existuje množina obsahující všechny prvky těchto množin.)

6. *Schéma axiomů nahrazení:*

   Je–li $\phi(u, v)$ formule, která neobsahuje volně proměnné w, Y, pak

   $$\begin{aligned}&(\forall u \forall v \forall w ((\phi(u,v) \wedge \phi(u,w)) \to v = w)) \to \\ &(\forall A\, \exists Y\, \forall v (v \in Y \leftrightarrow \exists u (u \in A \wedge \phi(u,v)))) \qquad \text{je axiom.}\end{aligned}$$

   (Je–li ϕ zobrazení, pak pro každou množinu A je $Y := \{y;\ \exists x \in A :\ \phi(x) = y\}$ také množina.)

Díky předešlým axiomům můžeme korektně definovat symboly $\subset$, $\cup$, $\cap$, $\emptyset$, a také pojmy *uspořádáná dvojice*, *kartézský součin*, *relace*, *uspořádání* a *dobré uspořádání*. Pak jsou definovány i následující axiomy:

7. *Axiom nekonečna:*

   $$\exists x ((\emptyset \in x) \wedge ((\forall y \in x)(y \cup \{y\} \in x)))$$

   (Existuje nekonečná množina.)

8. *Axiom potence:*
$$\forall x\ \exists y\ \forall z(z \subset x \rightarrow z \in y)$$
(Ke každé množině existuje množina obsahující všechny její podmnožiny.)

9. *Axiom fundovanosti:* (značíme AF)
$$\forall x(\exists y(y \in x)\ \rightarrow\ \exists u(u \in x\ \wedge\ \neg\exists z(z \in x \wedge z \in u)))$$
(V každé neprázdné množině existuje $\in$-minimání prvek.)

10. *Axiom výběru:*
$$\forall A\ \exists R(R \text{ je dobré uspořádání množiny} A)$$
(Každou množinu lze dobře uspořádat.)

Na základě těchto axiomů je možné definovat všechny známé objekty s kterými v matematice pracujeme, jako např. přirozená čísla, ordinální čísla, operace sčítání, zobrazení (funkce) z jedné množiny do druhé atd. Lze dokázat, že tyto objekty v matematickém světě existují (tj. jsou to množiny).

V následujícím textu budeme potenci množiny X značit $\mathscr{P}(X)$, její kardinalitu $|X|$. Uspořádanou dvojici množin x a y značíme $\langle x, y\rangle$. Pokud je F funkce definovaná na množině A, pak množinu $\{F(x); x \in A\}$ (tato množina existuje díky schématu axiomů nahrazení) značíme $F[A]$. Nekonečnou množinu přirozených čísel budeme značit ω.

Soubor množin, splňujících formuli ϕ značíme jako $\{x; \phi(x)\}$. Takový soubor ale nemusí být nutně množinou. Lze například dokázat, že soubor $\{x; x = x\}$ množina není (tj. takový soubor v matematickém světě neexistuje).

Abychom se ale na takové objekty mohli odkazovat, říkáme všem souborům tvaru $\{x; \phi(x)\}$ *třídy.* Takové soubory se obvykle označují velkými tučnými písmeny, jako např. $\mathbf{M}$, $\mathbf{V}$, atd.

Třídy si můžeme představit jako příliš velké soubory na to, aby mohly doopravdy existovat. Ze schématu axiomů vydělení se totiž lze lehko přesvědčit, že libovolná podtřída množiny je množinou, tj. (zapíšeme–li tento fakt schematicky)
$$\mathbf{M} \subset A \rightarrow \mathbf{M} \text{ je množina.}$$

V dalším textu budeme potřebovat následující dvě třídy:

$$\mathbf{V} := \{x; x = x\}$$

$$\mathbf{ON} := \{x; x \text{ je ordinální číslo}\}.$$

Zcela zásadním pojmem pro nás v pozdějším textu bude *relativizace* a *absolutnost*. Jedná se o pojmy, které nám umožní přenést náš objekt zájmu ze všech množin pouze na jejich část, kterou budeme lépe znát. Náš matematický svět se tak stane o trochu přehlednějším a lépe se nám v něm bude pracovat.

Definice 2.6. Budiž dána třída $\mathbf{M}$ a formule ϕ.
Pak definujeme $\phi^{\mathbf{M}}$ indukcí takto:

$$\begin{array}{llll}
\text{(i)} & (x = y)^{\mathbf{M}} & := & x = y \\
\text{(ii)} & (x \in y)^{\mathbf{M}} & := & x \in y \\
\text{(iii)} & (\phi \wedge \psi)^{\mathbf{M}} & := & \phi^{\mathbf{M}} \wedge \psi^{\mathbf{M}} \\
\text{(iv)} & (\neg(\phi))^{\mathbf{M}} & := & \neg(\phi^{\mathbf{M}}) \\
\text{(v)} & (\exists x(\phi))^{\mathbf{M}} & := & \exists x(x \in \mathbf{M} \wedge \phi^{\mathbf{M}}).
\end{array}$$

O $\phi^{\mathbf{M}}$ řekneme, že to je *relativizace ϕ na $\boldsymbol{M}$*.

Úmluva 2.7. *Nechť je dána třída $\boldsymbol{M}$ a formule ϕ. Pak budeme formuli $\exists x(x \in \boldsymbol{M} \wedge \phi)$, resp. $\forall x(x \in \boldsymbol{M} \to \phi)$ zkráceně zapisovat jako $(\exists x \in \boldsymbol{M})(\phi)$, resp. $(\forall x \in \boldsymbol{M})(\phi)$.*

Příklad 2.8. Nechť je dána třída $\mathbf{M}$. Podívejme se na to, jak by vypadala relativizace formule $\forall x(\phi)$ na $\mathbf{M}$:

$$(\forall x(\phi))^{\mathbf{M}} = (\neg(\exists x(\neg(\phi))))^{\mathbf{M}} = \neg(\exists x(x \in \mathbf{M} \wedge \neg(\phi^{\mathbf{M}}))),$$

což je logicky ekvivalentní s $(\forall x \in \mathbf{M})(\phi^{\mathbf{M}})$.

Trochu laicky řečeno: uvažujme, že máme formuli ϕ vytvořenou podle pravidel z definice 2.1, obsahující také symboly ze značení 2.2. Pak $\phi^{\mathbf{M}}$ dostaneme z ϕ tak, že všechny výrazy tvaru $\exists x(\psi)$, resp. $\forall x(\psi)$ nahradíme za $(\exists x \in \mathbf{M})(\psi)$, resp. $(\forall x \in \mathbf{M})(\psi)$.

Definice 2.9. Nechť je dána formule $\phi[x_1, \dots, x_n]$ a nechť $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$ jsou třídy takové, že $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$.

(i) Pokud platí

$$(\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbf{M})(\phi^{\mathbf{M}}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \phi^{\mathbf{N}}(x_1, \dots, x_n)),$$

řekneme, že ϕ *je absolutní pro* $\boldsymbol{M}$*,* $\boldsymbol{N}$

(ii) Řekneme, že ϕ *je absolutní pro* $\boldsymbol{M}$, pokud je ϕ absolutní pro $\mathbf{M}$, $\mathbf{V}$.

Na závěr této podkapitoly si připomeneme, co to je fundované jádro a z jakých množin se skládá. Přesně o těchto množinách totiž hovoří Reflekční věta.

Definice 2.10. Transfinitní rekurzí definujeme pro $\alpha \in \mathbf{ON}$ množiny $R(\alpha)$ takto:

(i) $R(0) = \emptyset$

(ii) $R(\alpha + 1) = \mathscr{P}(R(\alpha))$

(iii) $R(\alpha) = \bigcup_{\beta < \alpha} R(\beta) \quad$ pro α limitní

Třídu $\mathbf{WF} := \bigcup\{R(\alpha); \alpha \in \mathbf{ON}\}$ nazýváme *fundované jádro.*

Z axiomů ZFC bez AF je možné dokázat, že AF je ekvivalentní tvrzení $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$. O smysluplnosti takového pravidla v našem světě množin nás může například přesvědčit fakt, že ať už uvažujeme jeho platnost nebo ne, nedostaneme žádné nové topologické prostory ani grupy. Z axiomů ZFC bez AF lze totiž dokázat následující: Jakýkoliv topologický prostor je homeomorfní s nějakým topologickým prostorem ve $\mathbf{WF}$ a stejně tak jakákoliv grupa je izomorfní nějaké grupě ve $\mathbf{WF}$ (podrobněji viz. [1, kap. III]).

Do námi uvažovaného souboru axiomů ZFC axiom fundovanosti patří, a tak tedy každý objekt, který existuje (je množinou), musí být v nějakém $R(\alpha)$. Tento fakt je dobré mít na paměti, budeme jej později potřebovat.

O množinách $R(\alpha)$ budeme potřebovat vědět že jsou do sebe zařazené. Tuto podkapitolu tedy zakončíme důkazem tohoto jednoduchého postřehu.

Lemma 2.11. *Pro každé $\alpha \in \boldsymbol{ON}$ platí:*

(i) $x \in R(\alpha) \to x \subset R(\alpha)$

(ii) $\forall \beta \leq \alpha \quad R(\beta) \subset R(\alpha)$

Důkaz. Důkaz provedeme transfinitní indukcí podle α:
1) Pro $\alpha = 0$ je trvzení triviální.
2) Ať tvrzení platí pro všechna $\delta < \alpha$.

Pokud je α limitní, potom tvrzení plyne z indukčního předpokladu a z definice 2.10.

Pokud je $\alpha = \gamma + 1$ pro nějaké γ, pak $R(\alpha) = \mathscr{P}(R(\gamma))$. Pro důkaz (i) zvolme $x \in R(\alpha)$. Pak platí

$$z \in x \Rightarrow z \in R(\gamma) \Rightarrow z \subset R(\gamma) \Rightarrow z \in R(\alpha).$$

Pro důkaz (ii) mějme dáno libovolné $\beta < \alpha$. Pak (díky indukčnímu předpokladu) platí

$$x \in R(\beta) \Rightarrow x \in R(\gamma) \Rightarrow x \subset R(\gamma) \Rightarrow x \in R(\alpha).$$

□

2.2 Reflekční věta

Naším cílem v této podkapitole bude dokázat větu, která by tvrdila, že pokud máme dán konečný soubor formulí $\phi_1, \ldots, \phi_n$, pak existuje množina $R(\alpha)$ taková, že $\phi_1, \ldots, \phi_n$ jsou absolutní pro $R(\alpha)$. Tento výsledek lze považovat za jeden z pilířů celé práce, proto se jej pokusíme korektně vyslovit a dokázat. Převezmeme přitom myšlenky, které lze nalézt v [1].

Na začátku si uvědomme, že daný soubor formulí můžeme bez újmy na obecnosti pokládat za uzavřený na podformule. Co tento pojem přesně znamená objasňuje následující definice.

Definice 2.12. O seznamu formulí $\phi_1, \ldots, \phi_n$ řekneme, že je *uzavřený na podformule*, pokud každá podformule jakékoliv formule z tohoto seznamu je v seznamu též.

Pro začátek si nyní uveďme jednu ekvivalentní podmínku toho, že formule jsou absolutní. V hrubých rysech se jedná o to, že formule je absolutní pro $\mathbf{M}$ právě tehdy, když nevyděluje z $\mathbf{M}$ žádné nové množiny. Tuto podmínku později použijeme v důkazu Reflekční věty.

Lemma 2.13. *Ať $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ jsou třídy takové, že $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{N}$. Nechť $\phi_1, \ldots, \phi_n$ je seznam formulí uzavřený na podformule. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\phi_1, \ldots, \phi_n$ jsou absolutní pro $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$

(ii) Kdykoliv ϕ_i je tvaru $\exists x \phi_j[x, y_1, \ldots y_l]$, potom

$$\forall y_1, \ldots y_l \in \boldsymbol{M} \left[(\exists x \in \boldsymbol{N})(\phi_j^{\boldsymbol{N}}(x, y_1, \ldots y_l)) \to (\exists x \in \boldsymbol{M})(\phi_j^{\boldsymbol{N}}(x, y_1, \ldots y_l)) \right]$$

Důkaz.

„$(i) \Rightarrow (ii)$:" Ať jsou dány formule ϕ_i, ϕ_j a množiny $y_1, \ldots y_l \in \mathbf{M}$ z podmínky (ii). Pokud existuje $x \in \mathbf{N}$, že $\phi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \ldots, y_n)$, pak z absolutnosti formule ϕ_i dostáváme, že existuje $x \in \mathbf{M}$ splňující $\phi_j^{\mathbf{M}}(x, y_1, \ldots, y_n)$, tedy z absolutnosti ϕ_j dostáváme, že pro toto $x \in \mathbf{M}$ platí $\phi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \ldots, y_n)$.

„$(ii) \Rightarrow (i)$:" Zvolme formuli ϕ_i. Indukcí podle délky formule ukážeme, že ϕ_i je absolutní pro $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$.

Pokud je ϕ_i atomická, pak je zřejmě absolutní pro $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$.

Předpokládejme, že každá vlastní podformule formule ϕ_i je absolutní pro $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$. Pokud je ϕ_i tvaru $\psi_1 \wedge \psi_2$, nebo $\neg\psi$, pak je tvrzení zřejmé. Nechť je tedy ϕ_i rovna $\exists x \phi_j(x, y_1, \dots y_l)$ s volnými proměnnými ϕ_j mezi $x, y_1, \dots y_l$. Zvolme libovolná $y_1, \dots y_l \in \mathbf{M}$. Potom platí následující série ekvivalencí

$$\begin{aligned}\phi_i^{\mathbf{M}}(y_1, \dots y_l) \leftrightarrow (\exists x \in \mathbf{M})(\phi_j^{\mathbf{M}}(x, y_1, \dots y_l)) \leftrightarrow (\exists x \in \mathbf{M})(\phi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \dots y_l))\\ \leftrightarrow (\exists x \in \mathbf{N})(\phi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \dots y_l)) \leftrightarrow \phi_i^{\mathbf{N}}(y_1, \dots y_l),\end{aligned}$$

přičemž druhá plyne z indukčního předpokladu (tj. z toho, že ϕ_j je absolutní) a třetí z předpokladu (ii). □

Nyní již jsme dostatečně vybaveni pro to, abychom mohli přistoupit k vyslovení a dokázání Reflekční věty.

Věta 2.14 (Reflekční věta)**.** *Pro libovolné formule $\phi_1, \dots, \phi_n$ platí, že*

$$\forall \alpha \in \boldsymbol{ON} \quad \exists \beta > \alpha \quad (\phi_1, \dots, \phi_n \textit{ jsou absolutní pro } R(\beta))$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že seznam $\phi_1, \dots, \phi_n$ je uzavřený na podformule.

Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ definujme přiřazení $F_i : \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ takto:

- pokud je ϕ_i tvaru $\exists x \phi_j[x, y_1, \dots, y_{l_i}]$, pak

  $$F_i(\zeta) := \sup \{G_i(y_1, \dots, y_{l_i});\ y_1, \dots, y_{l_i} \in R(\zeta)\},$$

  kde $G_i : R(\zeta)^{l_i} \to \mathbf{ON}$ je definováno předpisem

  $$G_i(y_1, \dots, y_{l_i}) := \begin{cases} 0 & \text{pokud } \neg\exists x :\ \phi_j(x, y_1, \dots, y_{l_i}) \\ \eta & \text{pokud } \eta \in \mathbf{ON} \text{ je nejmenší takové,} \\ & \text{že } \exists x \in R(\eta) :\ \phi_j(x, y_1, \dots, y_{l_i}) \end{cases}$$

- pokud ϕ_i není tvaru $\exists x \phi_j(x, y_1, \dots, y_{l_i})$, potom $F_i(\zeta) := 0$

Všimněme si, že právě díky schématu axiomů nahrazení, můžeme říci, že $A := G_i[R(\zeta)^{l_i}] \subset \mathbf{ON}$ je množina, a tedy $F_i(\zeta) = \sup \{x \in A\}$ je ordinální číslo.

Zvolme nyní libovolné $\alpha \in \mathbf{ON}$. Uvědomme si, že podle lemmatu 2.13 nám stačí ukázat, že existuje limitní $\beta > \alpha$ takové, že pro všechna $\zeta < \beta$ a $i \in \{1, \dots, n\}$ je $F_i(\zeta) < \beta$.

Přesvědčme se, že to doopravdy stačí. Ověříme podmínku (ii) z lemmatu 2.13. Nechť ϕ_i je tvaru $\exists x \phi_j[x, y_1, \dots, y_{l_i}]$ a nechť $z_1, \dots, z_{l_i} \in R(\beta)$.

Protože β je limitní, existuje $\zeta < \beta$, že $z_1, \dots, z_{l_i} \in R(\zeta)$. Pokud existuje x' splňující $\phi_j(x', z_1, \dots, z_{l_i})$, pak také existuje $x \in R(G_i(z_1, \dots, z_{l_i}))$, že $\phi_j(x, z_1, \dots, z_{l_i})$. Zvolme tedy jedno takové x. Pokud budeme vědět, že $F_i(\zeta) < \beta$, pak podle lemmatu 2.11 je $x \in R(\beta)$ (protože platí nerovnost $G_i(z_1, \dots, z_{l_i}) \leq F_i(\zeta)$).

Zbývá nám tedy najít hledané $\beta > \alpha$. Sestrojme induktivně posloupnost $\{\beta_p\}_{p \in \omega}$ takto:

- $\beta_0 := \alpha$
- $\beta_{p+1} := \max\{\beta_p + 1, F_1(\beta_p), \dots, F_n(\beta_p)\}$

Potom $\beta := \sup\{\beta_p; p \in \omega\}$. Kdyby ordinální číslo β nebylo limitní, pak by existovalo $\alpha \in \mathbf{ON}$ takové, že $\alpha + 1 = \beta$. Pak by ale také existovalo $p \in \omega$ takové, že $\alpha \leq \beta_p \leq \beta$, což není možné, protože β_{p+2} by bylo větší než β. Všimněme si dále, že díky lemmatu 2.11 platí

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \ \zeta < \zeta' \ \rightarrow \ F_i(\zeta) \leq F_i(\zeta').$$

Zvolíme–li nyní $\zeta < \beta$ a $i \in \{1, \dots, n\}$, existuje $p \in \omega$ tak, že $\zeta < \beta_p$. Konečně tak tedy dostáváme, že $F_i(\zeta) \leq F_i(\beta_p) \leq \beta_{p+1} < \beta$. $\square$

2.3 Věta o spočetném modelu

V předchozí kapitole jsme se seznámili s Reflekční větou. Ta nám říká, že pokud si vybereme pouze konečný počet axiomů s kterými chceme pracovat, potom při dokazování vět z těchto axiomů nám stačí omezit svou pozornost na jakousi množinu $R(\alpha)$.

Dalším užitečným nástrojem v této fázi je Löwenheimova–Skolemova věta. Ta mimo jiné tvrdí, že pro každou množinu A existuje její spočetná podmnožina $M \subset A$ taková, že jakákoliv formule je absolutní pro M, A. Hlavním technickým problémem při důkazu této věty je to, že pracujeme s nekonečným systémem všech formulí. V naší situaci jsme ale po použití Reflekční věty beztak omezeni na jejich konečný počet, a tak nám stačí použít pouze nosnou myšlenku této věty bez jejích technických složitostí.

Kombinací této nosné myšlenky s Reflekční větou dostaneme právě náš nosný pilíř - Větu o spočetném modelu. Nejedná se o žádný nový výsledek, i když pod tímto jménem bychom větu asi nikde nenalezli. V této práci používáme větu, se kterou je možné se seznámit například v [1, kap. IV, Theorem 7.8].

Věta 2.15 (Věta o spočetném modelu)**.** *Nechť $\phi_1, \ldots, \phi_n$ je seznam formulí. Potom pro každou nejvýše spočetnou množinu X existuje její spočetná nadmnožina M tak, že platí*

$$(X \subset M) \wedge (\phi_1, \ldots, \phi_n \textit{ jsou absolutní pro } M)$$

Důkaz. Zvolme nejprve $\alpha \in \mathbf{ON}$, že $X \subset R(\alpha)$ a podle Reflekční věty potom zafixujme $\beta > \alpha$ takové, že $\phi_1, \ldots, \phi_n$ jsou absolutní pro $R(\beta)$. Na množině $R(\beta)$ zvolme dobré uspořádání $\lhd$.

Potom pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ označme l_i počet všech volných proměnných ve formuli ϕ_i a definujme funkci $H_i : R(\beta)^{l_i} \to R(\beta)$ takto:

- pokud $l_i = 0$, potom $R(\beta)^{l_i} = \{\emptyset\}$ a $H_i(\emptyset)$ je definováno jako $\lhd$–nejmenší prvek z $R(\beta)$.
- pokud $l_i > 0$, zvolme $(y_1, \ldots, y_{l_i}) \in R(\beta)^{l_i}$. Hodnotu $H_i(y_1, \ldots, y_{l_i})$ potom určíme takto:
  - pokud je ϕ_i tvaru $\exists x\ \phi_j[x, y_1, \ldots, y_{l_i}]$ a pokud
  $$(\exists x \in R(\beta))(\phi_j^{R(\beta)}(x, y_1, \ldots, y_{l_i})),$$
  potom $H_i(y_1, \ldots, y_{l_i})$ definujeme jako $\lhd$-nejmenší takové x.

- v ostatních případech je $H_i(y_1, \dots, y_{l_i})$ $\lhd$–nejmenší prvek z $R(\beta)$.

Nyní provedeme konstrukci hledané množiny M, kterážto bude uzávěrem X nad funkcemi $H_1, \dots, H_n$. Definujme tedy pro $k \in \omega$ rekurzivně množiny M_k takto:

- $M_0 := X$
- $M_{k+1} := M_k \cup \bigcup_{i \in \{1,\dots,n\}} \{H_i(s);\ s \in M_k^{l_i}\}$.

Pak tvrdím, že $M := \bigcup_{k\in\omega} M_k$ je hledaná spočetná množina.

Indukcí podle $k \in \omega$ se můžeme lehko přesvědčit, že každá množina M_k je nejvýše spočetná. Pak je zřejmé, že M je spočetná nadmnožina X. Pro ověření absolutnosti formulí $\phi_1, \dots, \phi_n$ pro M, $R(\beta)$ se ujistíme, že je splněna ekvivalentní podmínka z lemmatu 2.13.

Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že formule ϕ_i je tvaru $\exists x \phi_j[x, y_1, \dots, y_{l_i}]$. Nechť $y_1, \dots, y_{l_i}$ jsou pevně zvolené prvky množiny M. Potom nejprve nalezneme $k \in \omega$ takové, že $y_1, \dots, y_{l_i} \in M_k$. Pokud tedy existuje $x \in R(\beta)$ splňující $\phi_j^{R(\beta)}(x, y_1, \dots, y_{l_i})$, pak tuto formuli splňuje i $H_i(y_1, \dots, y_{l_i}) \in M_{k+1}$.

Díky lemmatu 2.13 tak dostáváme, že každá z formulí $\phi_1, \dots, \phi_n$ je absolutní pro M, $R(\beta)$ a tedy i pro M, $\mathbf{V}$. $\square$

Povšimněme si, jak probíhá důkaz této pro nás zcela stěžejní věty. Máme–li dány formule $\phi_1, \dots, \phi_n$, pak množinu X „uzavíráme na všechny operace $\phi_1, \dots, \phi_n$".

Představme si například, že máme dán vektorový prostor Y a prvky $a, b \in Y$. Pokud chceme množinu $\{a, b\} \subset Y$ uzavřít na sčítání, přidáváme postupně prvky $(a+a)$, $(a+b)$, $(b+b)$, $a+(a+a)$, ... Právě dokázaná Věta o spočetném modelu netvrdí nic jiného, než že tímto způsobem lze „uzavřít X na libovolnou operaci ϕ", přičemž jako výsledek tohoto uzávěru dostaneme spočetnou množinu.

Protože výsledek této věty budeme používat, označíme její hlavní přínos (množinu M) vhodným termínem.

Definice 2.16. Nechť jsou dány seznam formulí $\phi_1, ..., \phi_n$ a nejvýše spočetná množina X. Ať dále $M \supset X$ je spočetná množina taková, že $\phi_1, ..., \phi_n$ jsou absolutní pro M. Pak řekneme, že M *je spočetný elementární model pro formule* $\phi_1, ..., \phi_n$ *obsahující množinu* X, značíme $M \prec (\phi_1, ..., \phi_n;\ X)$.

Úmluva. *Vztahu mezi M, X a $\phi_1, ..., \phi_n$ budeme také někdy říkat* elementarita M.

Kapitola 3

První krůčky

V předešlé kapitole jsme se seznámili s Větou o spočetném modelu. Naším dalším krokem bude konkrétněji ukázat, jak nám tato věta může být užitečná při aplikacích ve funkcionální analýze.

Pro tento účel si představme, že chceme dokázat následující tvrzení.

Tvrzení 3.1. *Nechť X je Banachův prostor a V_0 jeho separabilní podprostor. Mějme dále dánu množinu $A \subset X$. Potom existuje uzavřený separabilní podprostor $V \subset\subset X$, $V_0 \subset\subset V$ takový, že pokud A není hustá v X, pak ani $A \cap V$ není hustá ve V.*

Toto tvrzení je samo o sobě triviální, nicméně nám dobře poslouží jako ilustrace používané metody vytváření separabilních podprostorů.

V první podkapitole si předvedeme, jak lze s elementárními modely zacházet. Jako motivační příklad si ukážeme, jakým způsobem lze dokázat tvrzení 3.1 v metrických prostorech.

Ve druhé podkapitole se potom budeme zabývat tím, jak lze na elementárních modelech zavést jakousi dodatečnou strukturu. Domluvíme se na méně formálním způsobu vyjadřování a nakonec dokážeme tvrzení 3.1.

3.1 Jak s elementárními modely zacházet

Používáme–li absolutnost formule $\phi[x_0, \ldots, x_n]$ pro elementární model M, musíme se nejprve přesvědčit o tom, že $x_0, \ldots, x_n \in M$. Pak je totiž ekvivalentní platnost formulí $\phi(x_0, \ldots, x_n)$ a $\phi^M(x_0, \ldots, x_n)$.

Při práci s elementárními modely je proto naším prvořadým úkolem zajistit, aby co nejvíce objektů bylo prvkem tohoto modelu.

Na začátku se tedy budeme zajímat o to, kdy model $M \prec (\phi_1, ..., \phi_n;\ X)$ obsahuje námi žádané objekty. Naším prvním krokem směrem k tomuto cíli je následující lemma.

Lemma 3.2. *Nechť jsou dány formule $\phi[y, x_1, \ldots, x_n]$ a nejvýše spočetná množina X. Ať dále $M \prec (\phi, \exists y \phi(y, x_1, \ldots, x_n);\ X)$. Předpokládejme, že pro prvky $a_1, \ldots, a_n \in M$ existuje jediná množina u splňující $\phi(u, a_1, \ldots, a_n)$. Pak $u \in M$.*

Důkaz. Z toho, že formule $\exists y \phi(y, x_1, \ldots, x_n)$ je absolutní pro M dostáváme, že existuje $y \in M$ splňující $\phi^M(y, a_1, \ldots, a_n)$. Formule ϕ je absolutní pro M, tedy pro toto $y \in M$ platí $\phi(y, a_1, \ldots, a_n)$. Protože ale takové y existuje právě jedno, je $y = u$. $\square$

Použitím tohoto výsledku můžeme zajistit, že spočetný elementární model M bude obsahovat všechny potřebné objekty jednoznačně definovatelné pomocí jeho prvků. Stačí pro žádanou sadu objektů přidat odpovídající dvojice formulí.

Jako vzorovou ukázku si uvědomme, jak lze zajistit, aby spočetný elementární model M obsahoval přirozená čísla a svoje konečné podmnožiny.

Tvrzení 3.3. *Označme následující formule:*

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall z(z \in x \leftrightarrow z \neq z) \\
\varphi_{1E} &:= \exists x \varphi_1(x) \\
\varphi_2 &:= \forall z(z \in x \leftrightarrow ((z \in u) \vee (z = v))) \\
\varphi_{2E} &:= \exists x \varphi_2(x, u, v)
\end{aligned}$$

Potom pro libovolnou neprázdnou, nejvýše spočetnou množinu X platí:

(i) $M \prec (\varphi_1, \varphi_{1E};\ X) \Rightarrow \emptyset \in M$

(ii) $M \prec (\varphi_2, \varphi_{2E};\ X) \Rightarrow (u, v \in M \rightarrow u \cup\ \{v\} \in M)$

(iii) $M \prec (\varphi_1, \varphi_{1E}, \varphi_2, \varphi_{2E};\ X) \Rightarrow \omega \subset M$

(iv) $M \prec (\varphi_1, \varphi_{1E}, \varphi_2, \varphi_{2E};\ X) \Rightarrow (\forall n \in \omega)(s \subset M, |s| = n\ \rightarrow\ s \in M)$

Důkaz. Tvrzení (i) a (ii) plynou přímo z lemmatu 3.2, (iii) a (iv) pak plynou z předchozích dvou indukcí podle $n \in \omega$.

$\square$

Poznámka 3.4. Podobně lze vhodným výběrem formulí zajistit, aby do spočetného elementárního modelu patřily i další jednoznačně definovatelné objekty, jako například množina všech přirozených čísel ω, množina celých čísel $\mathbb{Z}$, množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$, množina reálných čísel $\mathbb{R}$, běžné operace či relace na reálných číslech ($+$, $-$, $\cdot$, $:$, $<$), nebo podmnožiny racionálních a reálných čísel $\mathbb{Q}_+$ a $\mathbb{R}_+$.

Bylo by velmi pracné a přitom zbytečné používat vždy pouze základní jazyk teorie množin. Často například píšeme $x < y$ a přitom víme, že se ve skutečnosti jedná o zápis jakési formule $\varphi[x, y, <]$. V dalším textu tedy budeme při zápisu formulí používat tento rozšířený jazyk teorie množin tak, jak jsme obvykle zvyklí.

Když jsme se nyní poučili o základních vlastnostech spočetných elementárních modelů, přistupme konečně k důkazu tvrzení 3.1 v metrických prostorech.

Tvrzení 3.5. *Ať $\langle X, \rho\rangle$ je metrický prostor a nechť dále M je spočetný elementární model pro formule označené v důkazu níže symbolem $(*)$ obsahující množinu $\{\mathbb{R}_+, X, \rho, <_{\mathbb{R}}\}$. Pak pro každou množinu $A \subset X$ takovou, že $A \in M$ platí:*

pokud A není hustá v X, potom ani $A \cap \overline{X \cap M}$ není hustá v $\overline{X \cap M}$.

Důkaz. Předpokládejme, že A není hustá v X. Pak platí následující formule:

$$(*) \qquad (\exists x \in X)(\exists r \in \mathbb{R}_+)(\forall y \in U(x, r) :\ y \notin A).$$

Ve formuli výše používáme zkrácený zápis $y \in U(x, r)$, který nahrazuje delší $y \in X \wedge \rho(y, x) <_{\mathbb{R}} r$. Volné proměnné ve formuli výše tedy jsou $\mathbb{R}_+, X, \rho, A, <_{\mathbb{R}}$. Tyto jsou obsaženy v M, a proto můžeme použít elementaritu M. Dostáváme tak:

$$(\exists x \in X \cap M)(\exists r \in \mathbb{R}_+ \cap M)(\forall y \in U(x, r) :\ y \notin A)^M.$$

Zvolme $x \in X \cap M$ a $r \in \mathbb{R}_+ \cap M$ z formule výše. Pak platí

$$(*) \qquad (\forall y \in U(x, r) :\ y \notin A)^M,$$

a tedy z elementarity M dostáváme, že

$$(\forall y \in U(x, r) :\ y \notin A).$$

Protože nalezený prvek x je elementem $U(x, r) \cap M$, je $U(x, r) \cap \overline{X \cap M}$ neprázdná otevřená množina v $\overline{X \cap M}$, která neprotíná $A \cap \overline{X \cap M}$. □

Uvědomme si nyní, jak z právě dokázané věty plyne žádané tvrzení.

Důsledek 3.6. *Nechť X je metrický prostor a V_0 jeho separabilní podprostor. Mějme dále dánu množinu $A \subset X$. Potom existuje uzavřený separabilní podprostor $V \subset X$, $V_0 \subset V$ takový, že pokud A není hustá v X, pak ani $A \cap V$ není hustá ve V.*

Důkaz. Vezměme si $\{a_n\}_{n\in\omega} \subset V_0$ spočetnou hustou podmnožinu prostoru V_0. Potom podle Věty o spočetném modelu existuje spočetný elementární model M pro formule označené v důkazu tvrzení 3.5 symbolem $(*)$ obsahující spočetnou množinu $Y := \{\mathbb{R}_+, X, \rho, A, <_{\mathbb{R}}\} \cup \{a_n;\ n \in \omega\}$. Potom $\overline{X \cap M}$ je hledaný separabilní podprostor. □

Problémem s důkazem pro Banachovy prostory je fakt, že množina $\overline{X \cap M}$ nemusí být uzavřena na sčítání a násobení reálnými skaláry - tedy se nemusí jednat o podprostor.

Potřebovali bychom tedy elementární modely vybavit dodatečnou strukturou tak, aby množina $\overline{X \cap M}$ byla podprostorem normovaného lineárního prostoru X.

3.2 Dodatečná struktura elementárních modelů

V předešlé podkapitole jsme se seznámili s tím, jak se dá používat Věta o spočetném modelu pro důkazy zajímavých tvrzení. Abychom ale dostali ještě zajímavější výsledky, zjistili jsme, že by bylo hezké si jakýmsi způsobem na elementárních modelech zajistit dodatečnou strukturu navíc.

Již jsme se jednou přesvědčili o tom, že cesta k jakémusi rozšíření elementárního modelu vede přes zvětšení seznamu formulí, pro které je model elementární.

Před tím než přistoupíme k důkazům jednotlivých vět, domluvíme se na méně formálním vyjdařování.

Úmluva 3.7. *Ať jsou dány množiny $A_1, \ldots, A_n$ a věta ϕ. Tvrdíme–li*

pro vhodný elementární model M (obsahující $A_1, \ldots, A_n$) platí ϕ,

myslíme tím

existují formule $\phi_1, \dots, \phi_n$ a nejvýše spočetná množina Y tak, že pro libovolnou nejvýše spočetnou množinu $X \supset Y$ ($X \supset \{A_1, \dots, A_n\} \cup Y$) a $M \prec (\phi_1, \dots, \phi_n;\ X)$ platí ϕ.

Touto úmluvou se zbavujeme informace o konkrétní podobě seznamu formulí $\phi_1, \dots, \phi_n$. Nicméně to nám v aplikacích nebude vadit. Také ztrácíme informaci o tom, jaké množiny elementární model obsahuje. Domluvme se ale na tom, že budou–li některé prvky množiny Y z úmluvy výše záviset na množinách z předpokladů věty ϕ, pak tyto prvky vždy explicitně vypíšeme.

Uvědomme si, že seznam potřebných formulí pro důkazy vět je vidět až z důkazů samotných (viz. např. tvrzení 3.5). Při každém použití elementarity na některou formuli ψ musíme tuto formuli do seznamu přidat.

Podívejme se nyní na některé obecné vlastnosti spočetných elementárních modelů.

Tvrzení 3.8. *Pro vhodný elementární model M platí:*

Pokud je f zobrazení takové, že $f \in M$, pak

(i) $\operatorname{Dom} f \in M$

(ii) $\operatorname{Rng} f \in M$

(iii) $(\forall x \in M \cap \operatorname{Dom} f)\ (f(x) \in M)$

Důkaz. Nechť je dáno zobrazení $f \in M$. Pak $\operatorname{Dom} f$ je objekt jednoznačně určený pomocí následující formule (tato formule je stejná pro všechna zobrazení f, f je volnou proměnnou v této formuli)

$$x \in \operatorname{Dom} f \leftrightarrow (\exists y :\ f(x) = y),$$

a tedy podle lemmatu 3.2 je $\operatorname{Dom} f \in M$ pro vhodný elementární model M. Podobně $\operatorname{Rng} f$ je množina jednoznačně určená formulí

$$y \in \operatorname{Rng} f \leftrightarrow (\exists x :\ f(x) = y).$$

Relativizací formule $(\forall x \in \operatorname{Dom} f)$ $(\exists y : f(x) = y)$ dostáváme nakonec i (iii). □

Poznámka 3.9. Připomeňme, že díky poznámce 3.4 a tvrzení 3.3 víme, že pro vhodný elementární model M platí:

$$\omega \in M, \omega \subset M, \mathbb{Q} \in M, \mathbb{R} \in M, \mathbb{R}_+ \in M, \mathbb{Q}_+ \in M$$

základní operace a relace na $\mathbb{R}$ (tj. $+, -, \cdot, :, <$) jsou obsaženy v M.

Protože každé racionální číslo lze zapsat jako podíl celých čísel, můžeme díky tvrzení 3.8 zajistit, aby do spočetného elementárního modelu patřila také všechna racionální čísla (stačí vzít zobrazení $f_1(n) := -n, n \in \omega$ a $f_2(p, q) := \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}$).

Tvrzení 3.10. *Pro vhodný elementární model M platí:*

(i) Ať S je konečná množina. Pak

$$S \in M \leftrightarrow S \subset M.$$

(ii) Ať S je spočetná množina. Pak

$$S \in M \rightarrow S \subset M.$$

(iii) Pro každé přirozené číslo $n > 0$ a pro libovolných $(n+1)$ množin $a_0, \ldots, a_n$ platí

$$a_0, \ldots, a_n \in M \leftrightarrow \langle a_0, \ldots, a_n \rangle \in M.$$

Důkaz. Dokažme nejprve (ii). Pokud je $S \in M$ spočetná množina, pak existuje f tak, že f je prosté zobrazení z ω na S. Tedy z elementarity M existuje $f \in M$ tak, že

$$(f \text{ je prosté zobrazení z } \omega \text{ na } S)^M.$$

Zafixujeme–li nyní jedno takové zobrazení $f \in M$ a použijeme–li elementaritu M ještě jednou, dostáváme, že f je prosté zobrazení z ω na S. Protože f je zobrazení do S, platí následující formule:

$$(\forall n \in \omega)\ (\exists s \in S)\ (f(n) = s)$$

Použitím elementarity M dostáváme, že pro každé $n \in \omega$ existuje $s \in S \cap M$ takové, že $f(n) = s$, tedy $f(n) \in M$. Protože f je zobrazení na S, je $S \subset M$.

Přistupme nyní k důkazu (i). Pro $S \in M$ konečnou nalezneme $N \in \omega$ a f tak, že f je prosté zobrazení z N na S. Potom postupujeme stejně jako v při důkazu (ii). Pokud $S \subset M$ je konečná, pak $S \in M$ podle tvrzení 3.3.

Tvrzení (iii) snadno plyne z (i) indukcí podle $n \in \omega, n \geq 1$. Stačí si jen uvědomit, že $\langle a_0, a_1 \rangle = \{a_0, \{a_0, a_1\}\}$ a $\langle a_0, \ldots, a_n \rangle = \langle \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle, a_n \rangle$. □

Nyní jsme již dostatečně vybaveni na to, abychom přistoupili ke konkrétnějším výsledkům. Před prvním z nich zaveďme ještě jednu úmluvu.

Úmluva 3.11. *Ať $\langle X, \rho\rangle$ je MP (resp. $\langle X, +, \cdot, \|\cdot\|\rangle$ je NLP) a M elementární model. Pokud řekneme, že M obsahuje X, budeme tím rozumět, že M obsahuje $\langle X, \rho\rangle$ (resp. $\langle X, +, \cdot, \|\cdot\|\rangle$).*

Následující dvě jednoduchá lemmata nám poslouží k důkazu toho, že pro konvexní množinu (resp. podprostor) $A \subset X$ a vhodný elementární model M je $\overline{A \cap M}$ také konvexní množina (resp. podprostor).

Lemma 3.12. *Nechť X je NLP a $A \subset X$. Potom $\overline{\mathrm{conv}(A)}$ se rovná následující množině:*

$$K := \overline{\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i; \quad n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \forall i \in \{1, \dots, n\} : (\alpha_i \in \mathbb{Q}_+, a_i \in A)\}}$$

Důkaz. Je známo (a je lehké si rozmyslet - viz. např. [4]), že $\mathrm{conv}(A)$ se rovná množině

$$\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i; \quad n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \forall i \in \{1, \dots, n\} : (\alpha_i \in \mathbb{R}_+, a_i \in A)\}.$$

Odsud je tedy zřejmé, že $K \subset \overline{\mathrm{conv}(A)}$.

Pro důkaz opačné inkluze zvolme libovolné $a \in \overline{\mathrm{conv}\,(A)}$ a $\varepsilon > 0$. Pak existují $n \in \omega$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$ a $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ tak, že $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ a $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \in U(a, \frac{\varepsilon}{2})$. Označme nyní $S := \max_{i \in \{1,\dots,n\}} \|a_i\|$ a pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ nalezněme $\alpha_i' \in \mathbb{Q}_+$ tak, že $|\alpha_i - \alpha_i'| < \frac{\varepsilon}{2Sn}$ a navíc $\sum_{i=1}^n \alpha_i' = 1$.

Potom $\sum_{i=1}^n \alpha_i' a_i \in U(a, \varepsilon)$, jak dokládá následující výpočet:

$$\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i' a_i - a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i' - \alpha_i| \|a_i\| < \varepsilon.$$

□

Lemma 3.13. *Nechť X je NLP a $A \subset X$. Potom $\overline{\mathrm{span}(A)}$ se rovná následující množině:*

$$K := \overline{\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i; \quad n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \dots, n\} : (\alpha_i \in \mathbb{Q}, a_i \in A)\}}$$

Důkaz. Inkluze $K \subset \overline{\text{span}(A)}$ je zřejmá. Pro důkaz obrácené inkluze zvolme libovolné $a \in \overline{\text{span}(A)}$ a $\varepsilon > 0$. Pak existují $n \in \omega$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ a $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ tak, že $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \in U(a, \frac{\varepsilon}{2})$.

Označme $S := \max_{i \in \{1,\dots,n\}} \|a_i\|$ a pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ nalezněme $\alpha'_i \in \mathbb{Q}$ tak, že $|\alpha_i - \alpha'_i| < \frac{\varepsilon}{2Sn}$. Potom $\sum_{i=1}^n \alpha'_i a_i \in U(a, \varepsilon)$, jak dokládá následující výpočet:

$$\| \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i a_i - a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n} |\alpha'_i - \alpha_i| \|a_i\| < \varepsilon.$$

□

Nyní již přistoupíme k důkazu toho, že pro normovaný lineární prostor X můžeme zajistit, aby množina $\overline{X \cap M}$ byla jeho podprostorem.

Značení 3.14. Pokud X je topologický prostor a M spočetný elementární model, pak používáme značení $X_M := \overline{X \cap M}$.

Tvrzení 3.15. *Nechť X je NLP. Pak pro vhodný elementární model M obsahující X a pro libovolnou množinu $A \subset X$ takovou, že $A \in M$ platí:*

(i) $B := \overline{\text{span}(A) \cap M}$ *je separabilní podprostor prostoru X.*

(ii) $\overline{\text{conv}(A) \cap M}$ *je konvexní množina.*

(iii) Pokud je A konvexní, pak navíc $\overline{(A \cap M)} = \text{cl}_w (A \cap M)$.

Speciálně (pokud $A = X$), X_M je separabilní podprostor prostoru X a navíc $X_M = \text{cl}_w(X \cap M)$.

Důkaz. Podle poznámky 3.9 můžeme docílit toho, že $\mathbb{Q} \subset M$ a také toho, aby $\langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, :, < \rangle \in M$.

Protože elementární model M obsahuje zobrazení $+ : X \times X \to X$, je možné (podle tvrzení 3.8) zajistit, aby platilo:

$$x, y \in X \cap M \to x + y \in X \cap M.$$

Podobně je možné zařídit, aby pro každé $t \in \mathbb{R} \cap M$ a $x \in X \cap M$ bylo $tx \in X \cap M$.

Odsud vidíme, že $\text{span}\,(A) \cap M$ je $\mathbb{Q}$-lineární podprostor. Podle lemmatu 3.13 tak dostáváme, že $\overline{\text{span}\,(A) \cap M} = \overline{\text{span}\,(\text{span}\,(A) \cap M)}$. Množina B je tedy podprostorem prostoru X. Tento je separabilní, neboť M je spočetná množina.

Podobně se z lemmatu 3.12 můžeme přesvědčit o tom, že platí rovnost $\overline{\operatorname{conv}(A) \cap M} = \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{conv}(A) \cap M)}$. Tím je dokázáno (i) a (ii).

Pro důkaz (iii) si uvědomme, že pokud je A konvexní, pak podle (ii) je $\overline{A \cap M}$ uzavřená konvexní množina, a proto je slabě uzavřenou nadmnožinou množiny $A \cap M$. Proto $\operatorname{cl}_w(A \cap M) \subset \overline{A \cap M}$. Obrácená inkluze je zřejmá. $\square$

Z tohoto výsledku již snadno plyne důkaz našeho motivačního tvrzení.

Důkaz tvrzení 3.1. Podle právě dokázaného tvrzení a podle tvrzení 3.5 existuje seznam formulí $\phi_1, \ldots, \phi_n$ takový, že pokud M je spočetný elementární model pro tyto formule a pokud M obsahuje normovaný lineární prostor X a množinu A, pak X_M je separabilní podprostor X splňující, že pokud A není hustá v X, pak ani $A \cap X_M$ není hustá v X_M. Podle Věty o spočetném modelu takové M existuje a dokonce do něj můžeme přidat libovolnou spočetnou množinu. Přidáme–li tedy do M spočetnou hustou podmnožinu prostoru V_0, dostáváme potřebný výsledek. $\square$

V následujících kapitolách se budeme zabývat tím, kde všude lze náš postup použít k získání zajímavých výsledků ve funkcionální analýze. Bez jakéhokoliv dalšího varování budeme používat fakt, že je možné zajistit, aby vhodný elementární model obsahoval všechna racionální čísla, množiny $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, ω, $\mathbb{R}_+$ a $\mathbb{Q}_+$ a množinu $\mathbb{R}$ s operacemi $(+, -, \cdot, :)$ a s relací $<$.

Je–li dán metrický prostor X, je možné zařídit, aby byl elementární model uzavřen na některé operace, jako například na doplňky, nebo na sjednocení. Protože tento fakt vícekrát použijeme v důkazech níže, zaveďme následující značení.

Značení 3.16. Nechť $\langle X, \rho \rangle$ je MP. Pak symboly f_X^1, f_X^2, f_X^3 budeme značit následující zobrazení (podoba těchto zobrazení závisí pouze na metrickém prostoru X):´

$$
\begin{aligned}
f_X^1(A) &:= A^C, & A &\subset X \\
f_X^2(A, B) &:= A \cap B, & A, B &\subset X \\
f_X^3(x, r) &:= U(x, r), & x &\in X, r \in \mathbb{R}_+
\end{aligned}
$$

Podle tvrzení 3.8 pak například dostáváme, že pro vhodný elementární model M obsahující X, f_X^1 platí, že $A^C \in \mathscr{P}(X) \cap M$ kdykoliv $A \in \mathscr{P}(X) \cap M$.

Kapitola 4

Separabilně redukovatelné vlastnosti množin v metrických prostorech

V této kapitole se budeme zabývat tím, jaké vlastnosti množin jsou v metrických prostorech separabilně redukovatelné.

Představme si situaci, kdy v metrickém prostoru $\langle X, \rho \rangle$ zkoumáme, zda má množina A vlastnost (P). Naším cílem bude pro každý separabilní podprostor $V_0 \subset\subset X$ najít uzavřený separabilní podprostor $V \subset\subset X$, $V_0 \subset\subset V$ takový, že A má vlastnost (P) právě tehdy, když $A \cap V$ má vlastnost (P) v metrickém prostoru $\langle V, \rho \rangle$.

Jak jsme již ukázali v předešlé kapitole, stačí nám pro tento účel dokázat, že pro vhodný elementární model M (závislý pouze na metrickém prostoru X a případně na množině A) má množina A vlastnost (P) právě tehdy, když $A \cap X_M$ má vlastnost (P) v metrickém podprostoru $\langle X_M, \rho \rangle$.

Vlastnosti množin, které v této kapitole zkoumáme, jsou především „býti 1.kategorie" a „býti pórovitá".

V první podkapitole se zabýváme neprázdností vnitřků, hustotou, řídkostí množin a právě vlastností „býti 1.kategorie". Ve druhé pak zkoumáme pojem shora pórovitosti a zdola pórovitosti.

4.1 Množiny první kategorie

Stěžejním výsledkem této podkapitoly je, že vlastnost množin „býti první kategorie" je v metrických prostorech za určitých předpokladů separabilně redukovatelná. K tomuto výsledku ale vede celkem dlouhá cesta.

Na začátku si uvědomme, že „mít prázdný vnitřek” a „býti hustá” jsou separabilně redukovatelné vlastnosti, a to dokonce i v podprostorech.

Tvrzení 4.1. *Nechť $\langle X, \rho \rangle$ je MP. Pak pro vhodný elementární model M obsahující X, f_X^1 a pro libovolné podmnožiny $A, S \subset X$ takové, že $A, S \in M$ platí:*

$$\operatorname{Int}_S (A \cap S) \neq \emptyset \leftrightarrow \operatorname{Int}_{S \cap X_M} (A \cap S \cap X_M) \neq \emptyset,$$

$$A \cap S \textit{ je hustá v } S \leftrightarrow A \cap S \cap X_M \textit{ je hustá v } S \cap X_M.$$

Důkaz. Podle tvrzení 3.8 dostáváme, že pro vhodný elementární model M obsahující X, f_X^1 platí, že $A^C \in \mathscr{P}(X) \cap M$ kdykoliv $A \in \mathscr{P}(X) \cap M$. Připomeňme, že množina je hustá, právě tehdy, když její doplněk má prázdný vnitřek. Proto stačí dokázat první ekvivalenci.

Pokud má množina $A \cap S$ má neprázdný vnitřek v S, potom v S existuje koule s malým poloměrem, která je podmnožinou $A \cap S$, tj.

$$(\exists x \in S)(\exists r \in \mathbb{R}_+)(U(x,r) \cap S \subset A \cap S).$$

Použitím elementarity M nalezneme $x \in S \cap M$ a $r \in \mathbb{R}_+ \cap M$ tak, že $U(x,r) \cap S \subset A \cap S$, tedy $U(x,r) \cap S \cap X_M \subset A \cap S \cap X_M$. Přitom $x \in U(x,r) \cap S \cap X_M$. Dokázali jsme tedy, že $A \cap S \cap X_M$ obsahuje neprázdnou otevřenou množinu v $S \cap X_M$.

Naopak, nechť $\operatorname{Int}_{S \cap X_M} (A \cap S \cap X_M) \neq \emptyset$. Potom platí:

$$(\exists x \in S \cap X_M)(\exists r \in \mathbb{R}_+)(U(x,r) \cap S \cap X_M \subset A \cap S).$$

Zvolme nyní $q \in (0, \frac{1}{2}r) \cap \mathbb{Q}_+$ a $x_0 \in X \cap M$ tak, že $\rho(x, x_0) < q$. Pak

$$(U(x_0,q) \cap S \cap X_M) \subset (U(x,r) \cap S \cap X_M) \subset A \cap S.$$

Pro zvolené x_0 a q tedy platí $U(x_0,q) \cap S \cap M \subset A \cap S$. To můžeme zapsat také takto:

$$(\forall y \in X \cap S \cap M)\ (\rho(y, x_0) < q \rightarrow y \in A \cap S).$$

V této formuli jsou všechny volné proměnné v M. Proto můžeme použít elementaritu M a dostaneme, že $U(x_0,q) \cap S \subset A \cap S$. Zároveň ale $x \in U(x_0,q) \cap S$, a tedy $U(x_0,q) \cap S \neq \emptyset$. Proto $\operatorname{Int}_S (A \cap S) \neq \emptyset$. $\square$

Přistupme nyní k vlastnosti „býti řídká”. Tato vlastnost množin je také separabilně redukovatelná.

Tvrzení 4.2. *Nechť $\langle X, \rho \rangle$ je MP. Pak pro vhodný elementární model M obsahující X, f_X^2 platí:*

Jsou–li dány $G \subset X$ otevřená množina a $A \subset X$ takové, že $A, G \in M$, pak

$$A \cap G \text{ je řídká v } G \leftrightarrow A \cap G \cap X_M \text{ je řídká v } G \cap X_M.$$

Důkaz. Dokažme nejprve tvrzení pro $G = X$. Je známo, že množina A je řídká v metrickém prostoru $\langle X, \rho \rangle$ právě tehdy, když platí následující formule:

$$\forall x \in X \; \forall r \in \mathbb{R}_+ \; \exists y \in X \; \exists s \in \mathbb{R}_+ \; (U(y,s) \; \subset \; U(x,r) \setminus A).$$

Je snadné si uvědomit, že tato formule je ekvivalentní následující formuli:

$$\forall x \in X \; \forall r \in \mathbb{Q}_+ \; \exists y \in X \; \exists s \in \mathbb{Q}_+ \; (U(y,s) \; \subset \; U(x,r) \setminus A). \tag{4.1}$$

Volné proměnné ve formuli výše jsou pak všechny prvky elementárního modelu M.

Přistupme nyní k důkazu implikace zprava doleva. Pokud A není řídká v X, pak podle negace formule (4.1) existují $x \in X$ (díky elementaritě M můžeme předpokládat, že $x \in X \cap M$) a $r \in \mathbb{Q}_+$ taková, že platí:

$$\forall y \in X \; \forall s \in \mathbb{Q}_+ \; (U(y,s) \not\subseteq U(x,r) \setminus A). \tag{4.2}$$

Zvolme nyní libovolné $y \in X_M$, $s \in \mathbb{Q}_+$ a nalezněme pak $y_0 \in X \cap M$ takové, že $\rho(y, y_0) < \frac{1}{2}s$. Pak $U(y_0, \frac{1}{2}s) \subset U(y,s)$. Z platnosti formule (4.2) vyplývá, že existuje $z \in X$ splňující

$$z \in \; U(y_0, \tfrac{1}{2}s) \; \setminus (U(x,r) \setminus A).$$

Díky elementaritě M můžeme předpokládat, že $z \in X \cap M$. Pro zvolené $y \in X_M$ a $s \in \mathbb{Q}_+$ jsme tedy nalezli $z \in X \cap M$ tak, že

$$z \in \quad U(y_0, \tfrac{1}{2}s) \; \setminus (U(x,r) \setminus A) \quad \subset \quad U(y,s) \setminus (U(x,r) \cap X_M \setminus A).$$

Proto platí

$$U(y,s) \cap X_M \not\subseteq (U(x,r) \cap X_M) \setminus A.$$

Negace formule (4.1) tedy platí relativně v X_M, neboli $A \cap X_M$ není řídká v X_M.

Pro důkaz opačné implikace předpokládejme, že A je řídká v X. Zvolme libovolné $x \in X_M$ a $r \in \mathbb{Q}_+$. Nalezněme pak $x_0 \in M$ tak, že $\rho(x, x_0) < \frac{1}{2}r$.

Pak $U(x_0, \frac{1}{2}r) \subset U(x, r)$. K danému x_0 a k číslu $\frac{1}{2}r$ nalezneme příslušné $y \in X$ a $s \in \mathbb{Q}_+$ z formule (4.1). Díky elementaritě M můžeme předpokládat, že $y \in X \cap M$. Pak platí:

$$U(y, s) \;\subset\; U(x_0, \tfrac{1}{2}r) \setminus A \;\subset\; U(x, r) \setminus A.$$

Podmínka formule (4.1) je tedy splněna relativně v X_M.

Uvažujme nyní $G \subsetneq X$. Podle tvrzení 3.8 dostáváme, že pro vhodný elementární model M obsahující X, f_X^2 platí, že $C \cap B \in M$ kdykoliv $C, B \in \mathscr{P}(X) \cap M$. Dále je známo, že jakákoliv $E \subset G$ je řídká v G právě tehdy, když je řídká v X (viz. např. [5, str. 71]). Stačí tedy použít dokázané na množinu $A \cap G \in M$. $\square$

Přirozenou otázkou nyní je, jak je to s vlastností „býti první kategorie”. Jedna implikace je celkem snadná.

Tvrzení 4.3. *Nechť $\langle X, \rho \rangle$ je MP. Pak pro vhodný elementární model M obsahující X a pro libovolnou množinu $A \subset X$ takovou, že $A \in M$ platí:*

$$A \textit{ je 1.kategorie v } X \rightarrow A \cap X_M \textit{ je 1.kategorie v } X_M.$$

Důkaz. Předpokládejme, že $\{R_n\}_{n \in \omega}$ je soubor řídkých množin takový, že $A \subset \bigcup_{n \in \omega} R_n$.

Pak existuje φ splňující „φ je zobrazení z ω, $\varphi(n)$ jsou řídké pro každé $n \in \omega$, $A \subset \bigcup_{n \in \omega} \varphi(n)$”.

Z elementarity M můžeme předpokládat, že $\varphi \in M$, a tedy dle tvrzení 3.8 je pro vhodný elementární model $\varphi(n) \in M$ pro každé $n \in \omega$.

Z věty 4.2 tak dostáváme, že pro libovolné $n \in \omega$ je $\varphi(n) \cap X_M$ řídká v X_M pro vhodný elementární model M obsahující X. Zároveň ale také platí, že $A \cap X_M \subset \bigcup_{n \in \omega} (\varphi(n) \cap X_M)$. Proto je $A \cap X_M$ 1. kategorie v X_M. $\square$

Chceme–li ale dokázat platnost opačné implikace, musíme na věc jít oklikou. Nejprve si připomeňme pojem „býti někde první kategorie”.

Definice 4.4. Nechť $\langle X, \rho \rangle$ je MP a $A \subset X$. Pokud existují $x \in X$ a $r > 0$ tak, že $U(x, r) \cap A$ je 1.kategorie v X, pak řekneme, že A *je někde 1. kategorie v* X.

Nyní zformulujme lemma, které nám pomůže dokázat obrácenou implikaci v tvrzení 4.3.

Lemma 4.5. *Nechť je dán úplný metrický prostor $\langle X, \rho \rangle$ a množina $A \subset X$ s Bairovou vlastností. Pak platí:*

$$X \setminus A \textit{ není 1.kategorie } \leftrightarrow A \textit{ je někde 1.kategorie v } X.$$

Důkaz. Nechť $X \setminus A$ není 1.kategorie. Protože $X \setminus A$ má Bairovu vlastnost, existují otevřená množina G a množiny 1.kategorie P, Q takové, že platí $X \setminus A = (G \setminus P) \cup Q$. Protože $X \setminus A$ není 1.kategorie, není množina G prázdná. Existuje tedy $x \in X$ a $r \in \mathbb{R}_+$ tak, že

$$(U(x,r) \cap A) \ \subset \ (G \cap A) \ \subset \ P.$$

Množina $U(x,r) \cap A$ je tedy 1.kategorie v X.

Nechť $X \setminus A$ je 1.kategorie. Zvolíme–li nyní libovolnou neprázdnou otevřenou množinu $U \subset X$, pak

$$U = (U \cap A) \cup (U \cap A^C).$$

Protože v úplném MP podle Bairovy věty není žádná otevřená množina 1.kategorie, není ani $U \cap A$ první kategorie. Vzhledem k tomu, že U byla libovolná otevřená množina, není pravdou, že by A byla někde 1. kategorie v X. □

Chceme–li toto lemma použít, musíme nejprve zjistit, jak je to s vlastnostmi „býti první kategorie někde" a „mít Bairovu vlastnost". Protože oba pojmy jsou závislé na pojmu „býti první kategorie", není složité dokázat potřebná tvrzení.

Tvrzení 4.6. *Nechť $\langle X, \rho \rangle$ je MP. Pak pro vhodný elementární model M obsahující X, f_X^2, f_X^3 a pro libovolnou množinu $A \subset X$ takovou, že $A \in M$ platí:*

$$A \textit{ je někde 1.kategorie v } X \rightarrow A \cap X_M \textit{ je někde 1.kategorie v } X_M.$$

Důkaz. Podle tvrzení 3.8 dostáváme, že pro vhodný elementární model M obsahující X, f_X^2, f_X^3 platí, že $U(x,r) \in M$ kdykoliv $x \in X \cap M$ a $r \in \mathbb{R}_+ \cap M$, a také $C \cap B \in M$ kdykoliv $C, B \in \mathscr{P}(X) \cap M$.

Zvolme nyní $A \subset X$, $A \in M$ pro kterou existují $x \in X$ a $r \in \mathbb{R}_+$ tak, že $U(x,r)$ je 1.kategorie v X.

Z elementarity M můžeme předpokládat, že $x \in M$ a $r \in M$. Proto tedy $U(x,r) \cap A \in M$.

Z tvrzení 4.3 vyplývá, že potom $U(x,r) \cap A \cap X_M$ je 1.kategorie v X_M. □

Tvrzení 4.7. *Nechť* $\langle X, \rho\rangle$ *je MP. Pak pro vhodný elementární model* M *obsahující* X *a pro libovolnou množinu* $A \subset X$ *takovou, že* $A \in M$ *platí:*

$$A \text{ má Bairovu vlastnost v } X \to A \cap X_M \text{ má Bairovu vlastnost v } X_M.$$

Důkaz. Nechť $A \subset X$, $A \in M$ má Bairovu vlastnost. Potom existují množiny D a P tak, že „D je G_δ, P je 1.kategorie, $A = D \cup P$". Díky elementaritě M můžeme předpokládat, že $D \in M$, $P \in M$. Potom podle tvrzení 4.3 je pro vhodný elementární model také $P \cap X_M$ první kategorie v X_M. Celkem tedy můžeme množinu $A \cap X_M$ zapsat jako sjednocení G_δ množiny $D \cap X_M$ a množiny první kategorie $P \cap X_M$. □

Nyní můžeme konečně přistoupit k důkazu věty, jejímž důsledkem je například to, že v Banachových prostorech je vlastnost „býti první kategorie" separabilně redukovatelná pro jakoukoliv množinu s Bairovou vlastností.

Věta 4.8. *Nechť* $\langle X, \rho\rangle$ *je úplný MP. Pak pro vhodný elementární model* M *obsahující* X, f_X^1, f_X^2, f_X^3 *platí:*

Jsou–li dány $G \subset X$ *otevřená množina a* $A \subset X$ *s Bairovou vlastností takové, že* $A, G \in M$, *pak*

$$A \cap G \text{ je 1.kategorie v } G \leftrightarrow A \cap G \cap X_M \text{ je 1.kategorie v } G \cap X_M,$$

$$A \cap G \text{ je reziduální v } G \leftrightarrow A \cap G \cap X_M \text{ je reziduální v } G \cap X_M.$$

Důkaz. Podle tvrzení 3.8 dostáváme, že pro vhodný elementární model M obsahující X, f_X^1, f_X^2 platí, že $A^C \in \mathscr{P}(X) \cap M$ kdykoliv $A \in \mathscr{P}(X) \cap M$, a také $C \cap B \in M$ kdykoliv $C, B \in \mathscr{P}(X) \cap M$.

Uvažujme nejprve případ, kdy $G = X$. Vzhledem k tvrzení 4.3 stačí ukázat, že pokud A^C není první kategorie v X, pak ani $A^C \cap X_M$ není první kategorie v X_M. Zvolme tedy $A \subset X$ s Bairovou vlastností, $A \in M$ takovou, že A^C není první kategorie v X_M. Pak podle lemmatu 4.5 je množina A někde 1.kategorie v X. Potom podle tvrzení 4.6 je pro vhodný elementární model M obsahující f_1, f_2 pravdou, že $A \cap X_M$ je někde 1.kategorie v X_M. Podle tvrzení 4.7 a lemmatu 4.5 tedy konečně dostáváme, že $A^C \cap X_M$ není 1.kategorie v X_M.

Uvažujme nyní případ, kdy $G \subsetneq X$. Je známo, že jakákoliv $E \subset G$ je 1.kategorie v G právě tehdy, když je 1.kategorie v X (viz. např. [5, str. 83]). Stačí tedy použít dokázané na množinu $A \cap G \in M$. □

4.2 Pórovitost množin

V této podkapitole zkoumáme pojem shora pórovitosti a zdola pórovitosti. Ukazuje se, že jedna implikace je celkem snadná. Opačnou implikaci se nepodařilo dokázat, a tak tato otázka zůstává pro autora práce otevřená.

Pojem „pórovitostí" budeme používat tak, jak se s ním čtenář může setkat například v [7].

Definice 4.9. Nechť $\langle X, \rho \rangle$ je MP, $A \subset X$, $x \in X$ a $R > 0$. Pak definujeme $\gamma(x, R, A)$ jako supremum všech $r \geq 0$ pro která existuje $z \in X$ tak, že $U(z, r) \subset U(x, R) \setminus A$.

Řekneme, že množina A je *shora pórovitá*, resp. *zdola pórovitá* v bodě x, pokud

$$\limsup_{R \to 0^+} \frac{\gamma(x, R, A)}{R} > 0 \text{ , resp.} \qquad \liminf_{R \to 0^+} \frac{\gamma(x, R, A)}{R} > 0.$$

Řekneme, že množina A je *shora pórovitá*, resp. *zdola pórovitá*, pokud je shora pórovitá, resp. zdola pórovitá v každém bodě $y \in A$. Řekneme, že množina A je *σ-shora pórovitá*, resp. *σ-zdola pórovitá*, pokud je spočetným sjednocením shora pórovitých, resp. zdola pórovitých množin.

Zformulujme nyní a dokažme implikace, které se podařilo dokázat pro pojmy pórovitostí.

Tvrzení 4.10. *Nechť $\langle X, \rho \rangle$ je MP. Pak pro vhodný elementární model M obsahující X a pro libovolnou množinu $A \subset X$ takovou, že $A \in M$ platí:*

$$A \text{ není shora pórovitá v } X \to A \cap X_M \text{ není shora pórovitá v } X_M.$$

Důkaz. Z definice 4.9 vyplývá, že množina A je shora pórovitá v metrickém prostoru $\langle X, \rho \rangle$ právě tehdy, když platí následující formule:

$$\forall x \in A \, \exists m \in \mathbb{Q}_+ \, \forall R_0 > 0 \, \exists R \in (0, R_0) \, \gamma(x, R, A) > Rm.$$

Tuto formuli lze přepsat následujícím způsobem:

$$\forall x \in A \, \exists m \in \mathbb{Q}_+ \, \forall R_0 > 0 \, \exists R \in (0, R_0) \, \exists r > Rm \, \exists z \in X \quad U(z, r) \subset U(x, R) \setminus A.$$

Uvědomme si nyní, že tato formule je ekvivalentní formuli, ve které bychom čísla R_0, R a r brali pouze z množiny racionálních čísel. To, že můžeme uvažovat pouze racionální čísla R_0 je zřejmé. Zvolme tedy libovolné $x \in A$ a nalezněme $m \in \mathbb{Q}_+$ tak, že pro každé $R_0 \in \mathbb{Q}_+$ platí:

$$\exists R \in (0, R_0)\ \exists r > Rm\ \exists z \in X\ U(z,r) \subset U(x,R) \setminus A.$$

Pro dané $R_0 \in \mathbb{Q}_+$ nalezněme příslušná $R \in (0, R_0)$, $r > Rm$ a $z \in X$. Pokud zvolíme racionální číslo R_q z intervalu $(R, \min\{R_0, \frac{r}{m}\})$, pak platí, že $U(z,r) \subset U(x,R_q) \setminus A$. Číslo R lze tedy bez újmy na obecnosti považovat za racionální. Máme–li nyní pro dané R_0 vybrané racionální číslo $R \in (0, R_0)$, reálné číslo $r > Rm$ a prvek $z \in X$ tak, že $U(z,r) \subset U(x,R) \setminus A$, pak zvolme racionální číslo r_q z intervalu (Rm, r). Pak platí, že $U(z, r_q) \subset U(x,R) \setminus A$. Číslo r lze tedy také bez újmy na obecnosti považovat za racionální.

Přesvědčili jsme se o tom, že množina A není shora pórovitá v metrickém prostoru $\langle X, \rho \rangle$ právě tehdy, když platí následující formule:

$$\begin{aligned} \exists x \in A\ \forall m \in \mathbb{Q}_+\ \exists R_0 \in \mathbb{Q}_+\ \forall R \in (0, R_0) \cap \mathbb{Q}_+\ \forall r \in (Rm, \infty) \cap \mathbb{Q}_+ \\ \forall z \in X\ \ U(z,r) \not\subset U(x,R) \setminus A. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Přistupme nyní k vlastnímu důkazu. Zvolme množinu $A \subset X$, $A \in M$, která není shora pórovitá v metrickém prostoru $\langle X, \rho \rangle$. Pak podle (4.3) nalezneme příslušný bod $x \in A$, ve kterém není množina A shora pórovitá. Díky elementaritě M můžeme předpokládat, že $x \in M$. Zvolme libovolné $m \in \mathbb{Q}_+$ a k němu nalezněme $R_0 \in \mathbb{Q}_+$ z formule (4.3). Pokud jsou nyní dána $R \in (0, R_0) \cap \mathbb{Q}_+$, $r \in (Rm, \infty) \cap \mathbb{Q}_+$ a $z \in X_M$, zvolme $r' \in (Rm, r) \cap \mathbb{Q}$ a $z_0 \in X \cap M$ tak, že $\rho(z, z_0) < r - r'$. Pak $U(z_0, r') \subset U(z,r)$. Pro r' a z_0 nalezněme z formule (4.3) a z elementarity M bod $y \in X \cap M$ tak, že

$$y \in U(z_0, r')\ \setminus\ (U(x,R) \setminus A) \quad \subset \quad U(z,r)\ \setminus\ (U(x,R) \setminus A).$$

Formule (4.3) je tedy splněna relativně v X_M a množina $A \cap X_M$ proto není shora pórovitá v metrickém prostoru X_M. $\square$

Tvrzení 4.11. *Nechť $\langle X, \rho \rangle$ je MP. Pak pro vhodný elementární model M obsahující X a pro libovolnou množinu $A \subset X$ takovou, že $A \in M$ platí:*

$$A \text{ není zdola pórovitá v } X \to A \cap X_M \text{ není zdola pórovitá v } X_M.$$

Důkaz. Podobně jako v důkaze tvrzení 4.10 si nejprve uvědomme, že množina A není zdola pórovitá v metrickém prostoru $\langle X, \rho \rangle$ právě tehdy, když platí následující formule:

$$\begin{aligned} \exists x \in A\ \forall m \in \mathbb{Q}_+\ \forall R_0 \in \mathbb{Q}_+\ \exists R \in (0, R_0)\ \forall r \in (Rm, \infty) \cap \mathbb{Q}_+ \\ \forall z \in X\ \ U(z,r) \not\subset U(x,R) \setminus A. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Zvolme množinu $A \subset X$, $A \in M$, která není shora pórovitá v metrickém prostoru $\langle X, \rho \rangle$. Pak podle (4.4) nalezneme příslušný bod $x \in A$, ve kterém není množina A zdola pórovitá. Díky elementaritě M můžeme předpokládat, že $x \in M$. Zvolme libovolná $m, R_0 \in \mathbb{Q}_+$ a nalezněme pak $R \in (0, R_0)$ tak, že

$$\forall r \in (Rm, \infty) \cap \mathbb{Q}_+ \; \forall z \in X \;\; U(z, r) \nsubseteq U(x, R) \setminus A.$$

Z elementarity M můžeme předpokládat, že $R \in M$. Zvolíme–li nyní libovolné $r \in (Rm, \infty) \cap \mathbb{Q}_+$ a $z \in X_M$, pak nalezneme $r' \in (Rm, r) \cap \mathbb{Q}$ a $z_0 \in U(z, r - r') \cap M$. Platí, že $U(z_0, r') \subset U(z, r)$. Pro číslo r' a bod z_0 nyní nalezneme bod $y \in U(z_0, r') \setminus (U(x, R) \setminus A)$. Protože všechny prvky jsou v M, je možné díky elementaritě M zajistit, aby $y \in M$. Zjistili jsme tedy, že

$$U(z, r) \nsubseteq U(x, R) \setminus A.$$

Formule (4.4) je splněna relativně v X_M, a proto $A \cap X_M$ není zdola pórovitá v X_M. $\square$

Jak již bylo řečeno výše, opačné implikace se nepodařilo autorovi této práce dokázat. V případě, že by tyto implikace platily, bylo by snadné dostat tyto opačné implikace i pro tvrzení se sigma-pórovitostí (podobně jako v tvrzení 4.3).

Zda platí analogie tvrzení 4.8 pro sigma-pórovitosti by ještě zřejmé nebylo, protože chybí analogie lemmatu 4.5.

Kapitola 5

Separabilně redukovatelné vlastnosti zobrazení

Cílem této kapitoly je „separabilně redukovat" vlastnosti zobrazení. Konkrétněji: půjde nám o spojitost, polospojitost a fréchetovskou diferencovatelnost. Označíme–li si příslušnou vlastnost jako (P), pak budeme dokazovat tvrzení tohoto typu:

Nechť je dáno zobrazení f, definované v prostoru X. Pak existuje uzavřený separabilní podprostor X_M tak, že pro $x \in X_M$ platí:

$$f \text{ má vlastnost } (P) \text{ v bodě } x \leftrightarrow f\restriction_{X_M} \text{ má vlastnost } (P) \text{ v bodě } x.$$

V tomto momentě se ukáže veliká přednost našeho přístupu k separabilním redukcím. Díky námi zvolené metodě lze totiž jednotlivé výsledky kombinovat. Předpokládejme, že se nám podařilo dokázat tvrzení o zobrazení f. Pro množinu $A := \{x : f \text{ má vlastnost } (P) \text{ v bodě } x\}$ tedy platí

$$A \cap X_M = \{x : f\restriction_{X_M} \text{ má vlastnost } (P) \text{ v bodě } x\}.$$

Pak s použitím výsledků z minulé kapitoly dostáváme například existenci uzavřeného separabilního podprostoru X_M takového, že

$$\begin{aligned}&\{x : f \text{ má vlastnost } (P) \text{ v bodě } x\} \text{ je hustá v } X \leftrightarrow\\ &\{x : f\restriction_{X_M} \text{ má vlastnost } (P) \text{ v bodě } x\} \text{ je hustá v } X_M.\end{aligned}$$

V první podkapitole se budeme zabývat spojitostí a polospojitostí. Ve druhé se potom zaměříme na fréchetovskou diferencovatelnost. Použijeme přitom některé myšlenky ze Zajíčkova článku [8].

5.1 Spojitost a polospojitost

Na začátku této podkapitoly si uvědomme, že vlastnost zobrazení „býti spojité", je v metrických prostorech separabilně redukovatelná.

Věta 5.1. *Nechť $\langle X, \rho \rangle$ a $\langle Y, \sigma \rangle$ jsou MP, $G \subset X$ otevřená podmnožina a $f : G \longrightarrow Y$ zobrazení. Pak pro vhodný elementární model M obsahující X, Y, f a pro libovolné $x \in X_M \cap G$ platí:*

$$f \text{ je spojité v bodě } x \leftrightarrow f \restriction_{X_M} \text{ je spojité v bodě } x.$$

Důkaz. Implikace zleva doprava platí pro jakékoliv podprostory. Dokažme tedy obrácenou implikaci. Pokud je zobrazení f nespojité v bodě $x \in X_M \cap G$, pak nalezněme $k \in \omega$ tak, že platí následující formule

$$\forall n \in \omega\ \exists y, z \in G : \left(y, z \in U(x, \tfrac{1}{n}) \quad \wedge \quad \sigma(f(y), f(z)) > \tfrac{1}{k} \right). \tag{5.1}$$

Zvolme libovolné $n \in \omega$ a $x_0 \in U(x, \frac{1}{2n}) \cap M$. Pak $U(x_0, \frac{1}{2n})$ je otevřené okolí bodu x a existuje tedy $l \in \omega$ tak, že $U(x, \frac{1}{l})$ je podmnožinou $U(x_0, \frac{1}{2n})$. Dle formule (5.1) pak existují $y, z \in G$ splňující

$$y, z \in U(x, \tfrac{1}{l}) \quad \wedge \quad \sigma(f(y), f(z)) > \tfrac{1}{k}.$$

Dohromady tedy dostáváme platnost následující formule

$$\exists y, z \in G : \left(y, z \in U(x_0, \tfrac{1}{2n}) \cap G \quad \wedge \quad \sigma(f(y), f(z)) > \tfrac{1}{k} \right).$$

V této formuli jsou všechny volné proměnné v M (resp. z kapitoly 3 víme, že je možné to zařídit).

Použitím elementarity a toho, že $U(x_0, \frac{1}{2n}) \subset U(x, \frac{1}{n})$ tak dostáváme existenci bodů $y, z \in G \cap M$ takových, že platí

$$y, z \in U(x, \tfrac{1}{n}) \quad \wedge \quad \sigma(f(y), f(z)) > \tfrac{1}{k}. \tag{5.2}$$

Právě jsme ukázali, že ke každému $n \in \omega$ jsme schopni nalézt body $y, z \in G \cap M$ splňující (5.2). Zobrazení $f \restriction_{X_M}$ tedy nemůže být spojité v bodě x. □

Okamžitým důsledkem této věty a výsledků z předešlé kapitoly je, jak jsme již naznačili výše, tvrzení o separabilně redukovatelných vlastnostech množiny bodů spojitosti.

Důsledek 5.2. *Nechť $\langle X, \rho \rangle$ a $\langle Y, \sigma \rangle$ jsou MP, přičemž $\langle X, \rho \rangle$ je úplný. Nechť dále $G \subset X$ je otevřená podmnožina a $f : G \longrightarrow Y$ zobrazení. Označme potom množinu bodů spojitosti*

$$A := \{x \in G : f \text{ je spojité v bodě } x\}.$$

Pak pro vhodný elementární model M obsahující X, f_X^1, f_X^2, f_X^3, A, Y, f platí následující:

Označíme–li $B := \{x \in G \cap X_M : f \restriction_{X_M} \text{ je spojité v bodě } x\}$, potom platí:

$$A \text{ je hustá v } G \leftrightarrow B \text{ je hustá v } G \cap X_M,$$

$$A \text{ je řídká v } G \leftrightarrow B \text{ je řídká v } G \cap X_M,$$

$$A \text{ je 1.kategorie v } G \leftrightarrow B \text{ je 1.kategorie v } G \cap X_M,$$

$$A \text{ je reziduální v } G \leftrightarrow B \text{ je reziduální v } G \cap X_M,$$

$$A \text{ není shora pórovitá v } X \rightarrow B \text{ není shora pórovitá v } X_M,$$

$$A \text{ není zdola pórovitá v } X \rightarrow B \text{ není zdola pórovitá v } X_M.$$

Důkaz. Uvědomme si, že množina G patří do elementárního modelu M, neboť $\mathrm{Dom}(f) = G$. Je známým výsledkem, že máme–li zobrazení do metrického prostoru, pak množina bodů spojitosti tohoto zobrazení je G_δ (viz. například [5, str. 207-208]). Podle předešlé věty je $A \cap X_M = B$. Jedná se tedy o okamžitý důsledek tvrzení 4.1, 4.2, 4.10, 4.11 a vět 4.8, 5.1. $\square$

Podívejme se nyní na vlastnost „býti zdola polospojitá", resp. „býti shora polospojitá". Připomeňme si definici tohoto pojmu v metrických prostorech.

Definice 5.3. Nechť je dán metrický prostor $\langle X, \rho \rangle$, otevřená podmnožina $G \subset X$, zobrazení $f : G \longrightarrow (-\infty, \infty]$ a bod $x \in G$.

Pokud pro libovolnou posloupnost $\{x_n\}_{n \in \omega} \subset G$, $x_n \to x$ platí, že

$$\liminf_{n \to \infty} f(x_n) \geq f(x),$$

pak řekneme, že f je *zdola polospojité* (píšeme také *lsc*) v bodě x.

Pokud je zobrazení $(-f)$ zdola polospojité v bodě x, pak řekneme, že f je *shora polospojité* (píšeme také *usc*) v bodě x.

Při separabilní redukci této vlastnosti zobrazení budeme potřebovat jednu snadnou ekvivalentní podmínku. O té hovoří následující lemma.

Lemma 5.4. *Nechť je dán metrický prostor $\langle X, \rho \rangle$, otevřená podmnožina $G \subset X$, zobrazení $f : G \to (-\infty, \infty]$ a bod $x \in G$. Pak f je lsc v bodě x právě tehdy, když pro každé $c \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, f(x))$ existuje $n \in \omega$ tak, že $f\left[U(x, \frac{1}{n}) \cap G\right] \subset (c, \infty]$.*

Důkaz. Pro důkaz implikace zleva doprava předpokládejme, že existuje číslo $c \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, f(x))$ a posloupnost $\{x_n\}_{n \in \omega} \subset G$ tak, že $x_n \in U(x, \frac{1}{n})$, a přitom $f(x_n) \leq c$. Pak $x_n \to x$, ale zároveň $\liminf_{n \to \infty} f(x_n) \leq c < f(x)$. Zobrazení f tedy není *lsc* v bodě x.

Pro důkaz opačné implikace nejprve předpokládejme, že $f(x) < \infty$. Zvolme pak $\varepsilon > 0$, $c \in \mathbb{Q} \cap (f(x) - \varepsilon, f(x))$ a posloupnost $\{x_n\}_{n \in \omega} \subset G$, $x_n \to x$. Pak existuje $k \in \omega$ tak, že $f\left[U(x, \frac{1}{k}) \cap G\right] \subset (c, \infty]$. Dále existuje n_0 tak, že pro každé $n \geq n_0$ je $x_n \in U(x, \frac{1}{k})$. Pak tedy pro každé $n \geq n_0$ je $f(x_n) > c > f(x) - \varepsilon$. Proto platí, že $\liminf_{n \to \infty} f(x_n) \geq f(x) - \varepsilon$. Protože jsme zvolili libovolné $\varepsilon > 0$, platí také, že $\liminf_{n \to \infty} f(x_n) \geq f(x)$.

V případě, že $f(x) = \infty$, zvolíme libovolné $K \in \omega$, $c \in \mathbb{Q} \cap (K, \infty)$ a posloupnost $\{x_n\}_{n \in \omega} \subset G$, $x_n \to x$. Podobně jako výše pak ukážeme, že $\liminf_{n \to \infty} f(x_n) \geq K$. □

Přistupme nyní k tvrzení, které říká, že vlastnost „býti zdola polospojitá" je v metrických prostorech separabilně redukovatelná.

Tvrzení 5.5. *Nechť $\langle X, \rho \rangle$ je MP, $G \subset X$ otevřená množina a nechť je dáno zobrazení $f : G \longrightarrow (-\infty, \infty]$. Pak pro vhodný elementární model M obsahující X, f a pro libovolné $x \in X_M \cap G$ platí:*

$$f \text{ je lsc v bodě } x \leftrightarrow f \restriction_{X_M} \text{ je lsc v bodě } x$$

Důkaz. Přímo z definice je zřejmé, že implikace zleva doprava platí pro libovolný podprostor metrického prostoru $\langle X, \rho \rangle$.

Přistupme tedy k důkazu opačné implikace. Pokud f není *lsc* v bodě $x \in X_M \cap G$, pak podle lemmatu 5.4 existuje $c \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, f(x))$ tak, že pro každé $n \in \omega$ existuje $y \in U(x, \frac{1}{n}) \cap G$ takové, že $f(y) \leq c$. Zvolme nyní $n \in \omega$ a nalezněme $x_0 \in U(x, \frac{1}{2n}) \cap M$. Pak platí, že $U(x_0, \frac{1}{2n}) \subset U(x, \frac{1}{n})$ je otevřené okolí bodu x. Proto existuje $l \in \omega$ tak, že $U(x, \frac{1}{l}) \subset U(x_0, \frac{1}{2n})$. Pro nalezené $l \in \omega$ tedy platí

$$\exists y \in U(x, \tfrac{1}{l}) \cap G \subset U(x_0, \tfrac{1}{2n}) \cap G : \quad f(y) \leq c.$$

Z elementarity M nalezneme $y \in U(x_0, \frac{1}{2n}) \cap G \cap M \subset U(x, \frac{1}{n}) \cap G \cap M$ tak, že $f(y) \leq c$. Pro libovolné $n \in \omega$ jsme tedy nalezli $y \in U(x, \frac{1}{n}) \cap G \cap X_M$ tak, že $f(y) \leq c$. Podle lemmatu 5.4 tedy $f \restriction_{X_M}$ není *lsc* v bodě x. □

Jednoduchým důsledkem je obdobné tvrzení pro shora polospojitost.

Důsledek 5.6. *Nechť $\langle X, \rho \rangle$ je MP, $G \subset X$ otevřená množina a nechť je dáno zobrazení $f : G \longrightarrow [-\infty, \infty)$. Pak existuje zobrazení g (závislé pouze na metrickém prostoru X) tak, že pro vhodný elementární model M obsahující X, f, g a pro libovolné $x \in X_M \cap G$ platí:*

$$f \text{ je usc v bodě } x \leftrightarrow f\restriction_{X_M} \text{ je usc v bodě } x$$

Důkaz. Vezměme zobrazení g, které každému zobrazení f přiřadí zobrazení $-f$. Pak podle tvrzení 3.8 platí, že $-f \in M$ a stačí tedy použít dokázané tvrzení 5.5. □

5.2 Fréchetovská diferencovatelnost

Přistupme nyní k separabilní redukci fréchetovské diferencovatelnosti. V Zajíčkově článku [8] nacházíme zajímavou ekvivalentní podmínku pro vlastnost zobrazení „býti fréchetovsky diferencovatelné v bodě". Uveďme nejprve používané definice.

Definice 5.7. Nechť X a Y jsou NLP, $G \subset X$ otevřená podmnožina a nechť jsou dány bod $x \in G$ a zobrazení $f : G \to Y$.

(i) Pokud existuje spojité lineární zobrazení $A : X \to Y$ takové, že

$$\lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x) - A(u - x)}{\|u - x\|} = 0,$$

pak řekneme, že *zobrazení f je fréchetovsky diferencovatelné v bodě x*. Množinu bodů fréchetovské diferencovatelnosti zobrazení f budeme značit jako $D(f)$.

(ii) Pro $c > 0$, $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ definujeme množinu $D(f, c, \varepsilon, \delta)$ jako množinu všech bodů $x \in G$ splňujících, že

$$\left\| \frac{f(y + kv) - f(y)}{k} - \frac{f(y) - f(y - hv)}{h} \right\| \leq \varepsilon$$

kdykoliv

$v \in X, \quad \|v\| = 1, \quad k > 0, \quad h > 0, \quad y \in U(x, \delta), \quad y - hv \in U(x, \delta),$
$y + kv \in U(x, \delta) \quad \text{a} \quad \min(k, h) > c\|y - x\|.$

Vztah mezi množinami $D(f, c, \varepsilon, \delta)$ a fréchetovskou diferencovatelností ukazuje následující lemma, dokázané právě v [8].

Lemma 5.8. *Nechť X je NLP, $G \subset X$ otevřená podmnožina a nechť Y je Banachův prostor. Nechť $f : G \to Y$ je zobrazení. Pak zobrazení f je fréchetovsky diferencovatelné v bodě $x \in G$ právě tehdy, když je f spojité v bodě x a zároveň $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D(f, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{k})$.*

Pomocí tohoto lemmatu se v článku dokazuje, že vlastnost „býti fréchetovsky diferencovatelná" je separabilně redukovatelná. Pokusme se tedy o totéž pomocí našich prostředků.

Věta 5.9. *Nechť X je NLP, $G \subset X$ otevřená množina a Y Banachův prostor. Nechť $f : G \to Y$ je zobrazení. Pak pro vhodný elementární model M obsahující X, Y, f a pro libovolné $x \in X_M \cap G$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) f je fréchetovsky diferencovatelné v bodě x

(ii) $f \restriction_{X_M}$ je fréchetovsky diferencovatelné v bodě x

Důkaz. Z věty 5.1 již víme, že pro vhodný elementární model M obsahující X, Y, f a pro libovolné $x \in X_M \cap G$ platí, že f je spojité v bodě x právě tehdy, když $f \restriction_{X_M}$ je spojité v bodě x. Zvolme tedy jedno $x \in X_M \cap G$. Naším úkolem je potom ukázat, že pro vhodný elementární model M platí

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D(f, \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{k}) \leftrightarrow x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D(f \restriction_{X_M}, \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{k}).$$

Implikace zleva doprava je zřejmá (platí pro jakýkoliv podprostor). Nechť tedy platí, že $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D(f, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{k})$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $x \notin \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D(f, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{k})$. Zafixujme jedno takové $n \in \mathbb{N}$ a vyberme libovolné $k \in \mathbb{N}$. Pak platí následující formule:

$$\exists v \in X, \quad \|v\| = 1, \quad \exists k, h > 0, \quad \exists y \in X :$$

$$\begin{pmatrix} y \in U(x, \frac{1}{k}), \quad y - hv \in U(x, \frac{1}{k}), \quad y + kv \in U(x, \frac{1}{k}), \\ \min(k, h) > \dfrac{1}{n}\|y - x\|, \quad \left\| \dfrac{f(y + kv) - f(y)}{k} - \dfrac{f(y) - f(y - hv)}{h} \right\| > \dfrac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Zvolme nyní v, k, h a y z této formule a nalezněme $j \in \mathbb{N}$ tak, že pro $\eta := \frac{1}{j}$ platí:

$$\|y - x\| < \frac{1}{k} - 2\eta, \quad \|y - hv - x\| < \frac{1}{k} - 2\eta,$$
$$\|y + kv - x\| < \frac{1}{k} - 2\eta, \quad \min(k, h) > \frac{1}{n}(\|y - x\| + 2\eta).$$

Dále zvolme $x_0 \in U(x, \eta) \cap M$. Pak platí:

$$\|y - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| < \frac{1}{k} - \eta, \quad \|y - hv - x_0\| < \frac{1}{k} - \eta,$$
$$\|y + kv - x_0\| < \frac{1}{k} - \eta, \quad \frac{1}{n}(\|y - x_0\| + \eta) \leq \frac{1}{n}(\|y - x\| + 2\eta) < \min(k, h).$$

Použitím elementarity M dostáváme existenci $v \in X \cap M$, $\|v\| = 1$, $k, h \in \mathbb{R}_+ \cap M$ a $y \in X \cap M$ takových, že platí:

$$y \in U(x_0, \tfrac{1}{k} - \eta) \subset U(x, \tfrac{1}{k}), \quad y - hv \in U(x_0, \tfrac{1}{k} - \eta) \subset U(x, \tfrac{1}{k}),$$
$$y + kv \in U(x_0, \tfrac{1}{k} - \eta) \subset U(x, \tfrac{1}{k}), \ \min(k, h) > \frac{1}{n}(\|y - x_0\| + \eta) > \frac{1}{n}\|y - x\|,$$
$$\left\| \frac{f(y + kv) - f(y)}{k} - \frac{f(y) - f(y - hv)}{h} \right\| > \frac{1}{n}.$$

Dokázali jsme tedy, že $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D(f \restriction_{X_M}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{k})$. $\square$

Námi zvolený přístup nám dává nyní výhodu v tom, že bez obtíží dostáváme i výsledky o separabilně redukovatelných vlastnostech množiny, kde je zobrazení fréchetovsky diferencovatelné.

Abychom věděli, že vlastnost „býti první kategorie” je separabilně redukovatelná, musíme se nejprve přesvědčit o tom, že množina bodů fréchetovské diferencovatelnosti má Bairovu vlastnost. O tom hovoří následující věta, dokázaná v článku [8].

Věta 5.10. *Nechť X je NLP, $G \subset X$ otevřená množina a nechť Y je Banachův prostor. Nechť $f : G \to Y$ je zobrazení. Pak množina bodů, kde je zobrazení f fréchetovsky diferencovatelné je $F_{\sigma\delta}$ množina.*

Podobně jako v důsledku 5.2 tak dostáváme výsledek pro fréchetovskou diferencovatelnost. Uvedeme jen některé vlastnosti, je ale zřejmé, že kombinovat můžeme libovolný konečný počet vět, a tedy samozřejmě platí víc (podobně jako v případě spojitosti).

Důsledek 5.11. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, $G \subset X$ je otevřená podmnožina a $f : G \longrightarrow Y$ zobrazení. Pak pro vhodný elementární model M obsahující X, f^1_X, f^2_X, f^3_X, $D(f)$, Y, f platí následující:*

$$D(f) \text{ je hustá v } G \leftrightarrow D(f\restriction_{X_M}) \text{ je hustá v } G \cap X_M,$$

$$D(f) \text{ je reziduální v } G \leftrightarrow D(f\restriction_{X_M}) \text{ je reziduální v } G \cap X_M.$$

Důkaz. Jedná se o okamžitý důsledek tvrzení 4.1 a vět 4.8, 5.9 a 5.10. □

Kapitola 6

Aplikace

V této poslední kapitole předvedeme některé aplikace vět dokázaných v předešlých kapitolách. Na začátku si uvědomíme, že z toho, co jsme již dokázali, snadno plyne známé tvrzení o separabilní redukci Asplundovskosti. Dále předvedeme rozšíření platnosti Zajíčkova dosud nepublikovaného výsledku z prostorů se separabilním duálem na Asplundovy prostory. Nakonec potom předvedeme, jak lze rozšířit platnost Lindenstraussovy a Preissovy věty o fréchetovské diferencovatelnosti lipschitzovských funkcí z prostorů c_0 (resp. spojitých funkcí na spočetném kompaktu) na prostory $c_0(\Gamma)$ (resp. spojitých funkcí na řídce rozloženém kompaktu).

6.1 Asplundovskost

V této podkapitole předvedeme, jak snadno lze dostat v naší situaci jeden známý výsledek o Asplundových prostorech.

Na začátku si připomeňme, co to jsou Asplundovy prostory.

Definice 6.1. Banachův prostor X se nazývá *Asplundův*, pokud každá spojitá konvexní funkce je fréchetovsky diferencovatelná v každém bodě reziduální podmnožiny X.

Vyslovme nyní slibované tvrzení.

Tvrzení 6.2. *Nechť X je Banachův prostor, který není Asplundův. Potom existuje uzavřený separabilní podprostor Y prostoru X takový, že ani Y není Asplundův.*

Důkaz. Nechť existuje zobrazení $f : X \to \mathbb{R}$ takové, že f je spojité, konvexní a množina bodů fréchetovské diferencovatelnosti není reziduální v X. Pak podle Věty o spočetném modelu, důsledku 5.11 a tvrzení 3.15 platí, že existuje separabilní podprostor X_M tak, že množina bodů fréchetovské diferencovatelnosti $f \restriction_{X_M}$ není reziduální v X_M.

Je zřejmé, že $f \restriction_{X_M}$ je také spojité a konvexní. Proto tedy X_M je hledaný separabilní uzavřený podprostor, který není Asplundův. □

6.2 Zajíčkova věta o fréchetovské diferencovatelnosti

L.Zajíček na semináři z reálné a abstraktní analýzy předvedl důkaz věty, označené v tomto textu jako věta 6.8. Abychom jí mohli správně zformulovat, potřebujeme znát následující pojmy.

Definice 6.3. Nechť X je NLP a nechť existují spojité projekce $P_1, \ldots, P_n$ na podprostory $X_1, \ldots, X_n$ prostoru X tak, že

(i) $X = X_1 + \ldots + X_n$

(ii) $X_i \cap X_j = \{0\}, \quad i \neq j.$

Pak řekneme, že X je topologickým direktním součtem podprostorů $X_1, \ldots, X_n$ a tento fakt značíme

$$X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n.$$

Definice 6.4. Nechť X je NLP a nechť je dáno $v \in X$, $v \neq 0$. Pak pro $a \in X$ definujeme množinu $P_{a,v} := \{a + tv : \ t \in \mathbb{R}\}$. Říkáme, že $P_{a,v}$ je *přímka rovnoběžná s v.*

Definice 6.5. Nechť je dána funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pokud pro dané $t \in \mathbb{R}$ platí, že existuje limita

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(t,t) \\ x\neq y}} \frac{f(x) - f(y)}{x - y},$$

pak řekneme, že *funkce f je striktně diferencovatelná v bodě t.*

Definice 6.6. Nechť X je NLP a $f : X \to \mathbb{R}$ funkce. Nechť jsou dále dány body $a \in X$ a $v \in X$, $v \neq 0$. Pak řekneme, že funkce f *je esenciálně striktně hladká na přímce* $P_{a,v}$ (píšeme f je *esh* na $P_{a,v}$), pokud je funkce g definovaná předpisem

$$g(t) := f(a + tv), \quad t \in \mathbb{R}$$

striktně diferencovatelná všude, až na množinu Lebesgueovy míry nula.

Poznámka 6.7. Všimněme si, že přímo z definic výše vyplývá následující: Máme–li dán normovaný lineární prostor X, funkci $f : X \to \mathbb{R}$, podprostor $Y \subset\subset X$ a body $a, b, v \in Y$, pak platí:

(i) $P_{a,v} \cap Y = P_{a,v}$,

(ii) Pokud f je esenciálně striktně hladká na přímce $P_{a,v}$, pak $f \restriction_Y$ je esenciálně striktně hladká na přímce $P_{a,v}$.

(iii) Pokud $a \in P_{b,v}$, pak přímky $P_{a,v}$ a $P_{b,v}$ splývají, a navíc f je *esh* na $P_{a,v}$ právě tehdy, když f je *esh* na $P_{b,v}$.

Věta, kterou L.Zajíček dokázal, zní takto:

Věta 6.8. *Nechť X je Banachův prostor takový, že X^* je separabilní. Nechť X je topologickým direktním součtem podprostorů $X_1, \ldots, X_n$. Nechť dále $f : X \to \mathbb{R}$ je lokálně lipschitzovská funkce. Nechť pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ existuje D_i, hustá podmnožina S_{X_i}, taková, že pro každé $v \in D_i$ je množina $\{a \in X : \ f$ je esh na přímce $P_{a,v}\}$ reziduální v X. Potom zobrazení f je fréchetovsky diferencovatelné na reziduální podmnožině X.*

Připomeňme si nyní, že Banachův prostor je Asplundův právě tehdy, když pro každý jeho separabilní podprostor Y platí, že Y^* je separabilní. Naším cílem tedy bude rozšířit platnost věty výše z prostorů se separabilním duálem na Asplundovy prostory.

Prvním krokem k tomuto cíli jsou následující dvě lemmata.

Lemma 6.9. *Nechť X je NLP, $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$. Nechť $P_1, \ldots, P_n$ jsou projekce na podprostory $X_1, \ldots, X_n$. Pak pro vhodný elementární model M obsahující X, $P_1, \ldots, P_n$ platí, že*

$$X_M = P_1(X_M) \oplus \ldots \oplus P_n(X_M).$$

Důkaz. Dle tvrzení 3.8 je možné zajistit, aby pro $i \in \{1, \dots, n\}$ platilo, že $P_i(X \cap M) \subset X \cap M$. Ze spojitosti projekcí $P_1, \dots, P_n$ vyplývá, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je $P_i(X_M) \subset X_M$.

Přímo z definice 6.3 snadno dostáváme, že $X_M = P_1(X_M) \oplus \dots \oplus P_n(X_M)$. □

Lemma 6.10. *Nechť je dán seznam formulí $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, který je uzavřený na podformule. Nechť dále je dána nejvýše spočetná množina X a posloupnost množin $\{M_n\}_{n\in\omega}$ taková, že*

(i) $M_i \subset M_j, \quad i \le j,$

(ii) $\forall n \in \omega : \ M_n \prec (\varphi_1, ..., \varphi_n;\ X).$

Potom pro $M := \bigcup_{n\in\omega} M_n$ platí, že také $M \prec (\varphi_1, ..., \varphi_n;\ X)$.

Důkaz. Jedná se o triviální důsledek lemmatu 2.13. □

Dokažme nyní slibovanou větu.

Věta 6.11. *Nechť X je Asplundův prostor, $X = X_1 \oplus \dots \oplus X_n$. Nechť $f : X \to \mathbb{R}$ je lokálně lipschitzovská funkce. Nechť pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ existuje D_i, hustá podmnožina S_{X_i}, taková, že pro všechna $v \in D_i$ je množina $\{a \in X :\ f \text{ je esh na přímce } P_{a,v}\}$ reziduální v X. Potom zobrazení f je fréchetovsky diferencovatelné na reziduální podmnožině X.*

Důkaz. Nechť $P_1, \dots, P_n$ jsou projekce na podprostory $X_1, \dots, X_n$. Podle důsledku 5.11, tvrzení 4.1, 3.10, 3.15 a lemmatu 6.9 víme, že existuje seznam formulí $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ a nejvýše spočetná množina Y tak, že pro množinu

$$Z := \{X, f_X^1, f_X^2, f_X^3, f, D(f), P_1, \dots, P_n, D_1, \dots, D_n, S_{X_1}, \dots, S_{X_n}, Y\}$$

a pro každý elementární model M, $M \prec (\varphi_1, \dots, \varphi_n;\ Z)$ platí následující:

(P1) Pro každou nejvýše spočetnou množinu $S \in M$ platí, že $S \subset M$.

(P2) $X_M = P_1(X_M) \oplus \dots \oplus P_n(X_M)$.

(P3) Pro každé podmnožiny $A, S \subset X$, $A, S \in M$ platí:

$$A \cap S \text{ je hustá v } S \leftrightarrow A \cap S \cap X_M \text{ je hustá v } S \cap X_M.$$

(P4) $D(f)$ je reziduální v $X \leftrightarrow D(f \restriction_{X_M})$ je reziduální v X_M.

(P5) X_M je separabilní podprostor prostoru X

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že seznam formulí $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ je uzavřený na podformule. Nejprve si uvědomme, že pro každý podprostor N prostoru X splňující $N = P_1(N) \oplus \dots \oplus P_n(N)$ platí, že $S_{X_i} \cap N = S_{P_i(N)}$. Vskutku, tato rovnost totiž plyne z toho, že

$$S_{X_i} \cap N = S_X \cap X_i \cap N = S_X \cap X_i \cap P_i(N) = S_X \cap P_i(N) = S_{P_i(N)}.$$

Definujme nyní posloupnost elementárních modelů $\{M_n\}_{n\in\omega}$ takto:

- Pro $n = 0$ zvolme za M_0 libovolný spočetný elementární model takový, že $M_0 \prec (\varphi_1, ..., \varphi_n;\ Z)$.

- Je–li dán elementární model M_k, pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ nalezněme $C_{k,i}$ - spočetnou podmnožinu $D_i \cap X_{M_k}$ hustou v $S_{P_i(X_{M_k})} = S_{X_i} \cap X_{M_k}$. Pak pro každé $a \in C_{k,i}$ podle předpokladu platí, že množina $\{a \in X :\ f$ je esh na každé přímce rovnoběžné s v, protínající bod $a\}$ je reziduální v X. Existuje tedy hustá G_δ podmnožina $G_{k,v}$ taková, že f je esh na každé přímce rovnoběžné s v, protínající $G_{k,v}$.
  Za M_{k+1} položíme spočetný elementární model pro formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, obsahující množinu $\{Z, C_{k,1}, \dots, C_{k,n}, M_k, \{G_{k,v}\}_{v\in\bigcup_{i=1}^n C_{k,i}}\}$.

Nakonec definujme $M := \bigcup_{k\in\omega} M_k$. Pak podle lemmatu 6.10 je M spočetný elementární model pro formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Platí tedy pro něj všechna tvrzení $(P1) - (P5)$.

Ověřme nyní, že pro podprostor X_M a funkci $f\restriction_{X_M}$ jsou splněny předpoklady věty 6.8. Pak totiž dle $(P4)$ platí, že f je fréchetovsky diferencovatelná na reziduální podmnožině X.

Protože X je Asplundův, je $(X_M)^*$ separabilní. Protože f je lokálně lipschitzovská v X, je i $f\restriction_{X_M}$ lokálně lipschitzovská v X_M. Podle $(P2)$ platí, že $X_M = P_1(X_M) \oplus \dots \oplus P_n(X_M)$. Pro $i \in \{1, \dots, n\}$ definujme $C_i := \bigcup_{k\in\omega} C_{k,i}$. Ověřme, že tato množina je hustá v $S_{P_i(X_M)} = S_{X_i} \cap X_M$.

Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$ a $y \in S_{X_i} \cap X_M = S_{X_i} \cap \overline{\bigcup_{k\in\omega}(X \cap M_k)}$. Pak nalezněme $y_0 \in U(y, \frac{\varepsilon}{3}) \cap \bigcup_{k\in\omega}(X \cap M_k)$. Vezměme pak $k \in \omega$ splňující, že $y_0 \in X \cap M_k$. Pak $\frac{y_0}{\|y_0\|} \in X_{M_k} \cap S_{X_i}$. Navíc ale také platí

$$\begin{aligned}\|\tfrac{y_0}{\|y_0\|} - y\| &\le \|\tfrac{y_0}{\|y_0\|} - y_0\| + \|y_0 - y\| = |1 - \|y_0\|| + \|y_0 - y\| \\ &= |\|y\| - \|y_0\|| + \|y_0 - y\| \le 2\|y_0 - y\| < \tfrac{2\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Protože ale $C_{k,i}$ je hustá v $S_{X_i} \cap X_{M_k}$, existuje $c_{k,i} \in C_{k,i} \subset C_i$ tak, že $\|c_{k,i} - \frac{y_0}{\|y_0\|}\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pak tedy

$$\|c_{k,i} - y\| \leq \|c_{k,i} - \tfrac{y_0}{\|y_0\|}\| + \|\tfrac{y_0}{\|y_0\|} - y\| < \varepsilon.$$

Uvědomme si dále, že díky vlastnosti $(P1)$ je $C_i \subset M$ pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$. Zbývá tedy již jen ověřit, že pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ a $v \in C_i$ je množina

$$R_v := \{a \in X_M : \ f \restriction_{X_M} \ \text{je } esh \text{ na přímce } P_{a,v}\}$$

reziduální v X_M.

Nechť je tedy dáno $v \in C_i$. Pak zvolme $k \in \omega$ takové, že $v \in C_{k,i}$. Pak platí, že $R_v \supset G_{k,v} \cap X_M$. Zároveň ale $G_{k,v} \in M$, a tedy podle $(P2)$ je $G_{k,v} \cap X_M$ hustá G_δ množina v X_M. Proto je R_v reziduální v X_M.

Ověřili jsme předpoklady věty 6.8 pro podprostor X_M a funkci $f \restriction_{X_M}$. V kombinaci s $(P4)$ tak dostáváme, že f je fréchetovsky diferencovatelná na reziduální množině v X. □

6.3 Lindenstraussova a Preissova věta o fréchetovské diferencovatelnosti lipchitzovských funkcí

V článku [9] je zmíněn zajímavý výsledek, jehož platnost budeme rozšiřovat (s určitým omezením) z prostorů c_0 na $c_0(\Gamma)$ a z prostorů spojitých funkcí na spočetném kompaktu na prostory spojitých funkcí na řídce rozloženém kompaktu.

Nejprve zaveďme následující pojmy a značení.

Definice 6.12. Řekneme, že Banachův prostor X *má Radon-Nikodýmovu vlastnost* (značíme jako RNP), pokud pro libovolnou lipschitzovskou funkci $f : \mathbb{R} \to X$ existuje bod, ve kterém je funkce diferencovatelná.

Definice 6.13. Nechť X je Banachův prostor a $\gamma : [0,1]^{\mathbb{N}} \to X$ spojité zobrazení takové, že pro všechna $j \in \mathbb{N}$ je zobrazení

$$D_j\gamma(a) := \lim_{\substack{t \to 0 \\ a+te_j \in [0,1]^{\mathbb{N}}}} \frac{\gamma(a + te_j) - \gamma(a)}{t}, \quad a \in [0,1]^{\mathbb{N}}$$

dobře definované pro každé $a \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, a navíc spojité (e_j značí posloupnost samých nul s jedničkou na j-tém místě). Pak řekneme, že γ *je plocha v* X.

Označme $\Gamma(X) := \{\gamma : \gamma \text{ je plocha v } X\}$. Na této množině budeme uvažovat topologii generovanou spočetným systémem těchto pseudonorem:

$$\|\gamma\|_0 := \sup_{t\in[0,1]^{\mathbb{N}}} \|\gamma(t)\|, \qquad \|\gamma\|_k := \sup_{t\in[0,1]^{\mathbb{N}}} \|D_j\gamma(t)\|,\ k \in \mathbb{N}.$$

Označme dále $\mathscr{L}^{\mathbb{N}}$ součinovou Lebesgueovu míru na prostoru $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

Pokud je K kompakt, pak symbolem $\mathscr{C}(K)$ značíme prostor spojitých funkcí na K.

Poznámka 6.14. Definice 6.12 není původní, ale jedná se o její ekvivalentní znění (blíže viz. [9]). Dále je možné se v článku [9] dočíst, že $\Gamma(X)$ tvoří úplný metrizovatelný prostor, a tedy není první kategorie v sobě. Každá reziduální množina v $\Gamma(X)$ tedy obsahuje hustou G_δ množinu, a tedy je sama hustá.

Definice 6.15. Nechť X je Banachův prostor a nechť $E \subset X$ je borelovská množina. Pokud je množina $\{\gamma \in \Gamma(X) : \mathscr{L}^{\mathbb{N}}(\gamma^{-1}(E)) = 0\}$ reziduální v $\Gamma(X)$, pak řekneme, že množina E *je* Γ*-nulová.*

Neborelovská množina $A \subset X$ se nazývá Γ-nulová, pokud je obsažena v borelovské Γ-nulové množině.

Věta, kterou dokázali J.Lindenstrauss a D.Preiss v článku [9] zní následovně.

Věta 6.16. *Nechť $X = \mathscr{C}(K)$ pro spočetný kompakt K, nebo X je podprostor prostoru c_0. Nechť Y je Banachův prostor, který má RNP a $f : X \to Y$ je lipschitzovské zobrazení. Pak f je fréchetovsky diferencovatelné všude až na Γ-nulovou množinu.*

Naším cílem je nyní rozšířit platnost této věty pomocí separabilních redukcí. Abychom provedli úplné rozšíření tohoto tvrzení, museli bychom vědět, že vlastnost množin „býti Γ-nulová" je separabilně redukovatelná. Takové tvrzení pravděpodobně platí (k této domněnce autora této práce vede příspěvek J.Tišera na semináři z reálné a abstraktní analýzy, kde bylo dokázáno pomocí standardních metod, že tato vlastnost množin je separabilně redukovatelná - stačilo by tedy projít příslušný důkaz a sepsat jej tak, aby se v něm používala technika vyžívající Věty o spočetném modelu). Nicméně z časových důvodů se v této práci omezíme na důkaz fréchetovské diferencovatelnosti na husté podmnožině. Taková věta je o něco málo slabší, nicméně pro ni již potřebný aparát máme vybudovaný. Uvědomme si tedy nyní, jak souvisí Γ-nulovost množiny s hustotou jejího doplňku.

Lemma 6.17. *Nechť X je Banachův prostor a nechť $A \subset X$ je Γ-nulová množina. Pak A^C je hustá v X.*

Důkaz. Nechť množina A^C není hustá. Pak A má neprázdný vnitřek, a tedy existuje neprázdná otevřená množina $G \subset A$. Zvolme pak libovolné $x \in G$ a definujme funkci $\tilde{\gamma}$ předpisem

$$\tilde{\gamma}(t) := x, \quad t \in [0,1]^{\mathbb{N}}.$$

Pak $\tilde{\gamma}$ je plocha a navíc existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro $\gamma \in \Gamma(X)$, $\|\gamma - \tilde{\gamma}\|_0 < \varepsilon$ je $\operatorname{Rng} \gamma \subset G$. Dostáváme tak existenci otevřeného okolí $U(\tilde{\gamma})$ plochy $\tilde{\gamma}$ v $\Gamma(X)$ takové, že pro $\gamma \in U(\tilde{\gamma})$ je $\gamma^{-1}(A) = [0,1]^{\mathbb{N}}$.

Zvolíme–li ale libovolnou borelovskou nadmnožinu $E \supset A$, pak množina $\{\gamma \in \Gamma(X) : \mathscr{L}^{\mathbb{N}}(\gamma^{-1}(E)) = 0\}$ je disjunktní s $U(\tilde{\gamma})$, tedy není hustá, a tedy ani reziduální. Dostáváme tak, že A není Γ-nulová. $\square$

Před naším rozšířením věty 6.16 si uvědomme následující.

Lemma 6.18. *Nechť je dána nespočetná množina Γ. Pak pro libovolný separabilní podprostor X prostoru $c_0(\Gamma)$ platí, že X je podprostorem c_0.*

Důkaz. Zvolme X separabilní podprostor $c_0(\Gamma)$ a $\{x_n\}_{n\in\omega} \subset X$ spočetnou bázi v X. Pak definujme $\operatorname{spt}(x_n) := \{\gamma \in \Gamma : \ x_n(\gamma) \neq 0\}$. Protože pro $n \in \omega$ je $x_n \in c_0(\Gamma)$, je každá množina $\operatorname{spt}(x_n)$ spočetná. Pak tedy X je podprostorem prostoru $c_0(\bigcup_{n\in\omega} \operatorname{spt}(x_n))$. $\square$

W.Kubiś ve svém článku [6] ukazuje, jak vypadá prostor X_M v případě, že $X = \mathscr{C}(K)$. Před vyslovením jeho výsledku si ještě připomeňme následující běžně používané pojmy, značení a úmluvy.

Je–li dána ekvivalence E na množině X, pak pro každé $x \in X$ značíme $[x]_E := \{y \in X : \ xEy\}$, $X/_E := \{[x]_E : \ x \in X\}$. Dále definujeme *kvocientové zobrazení* $q : X \to X/_E$ předpisem $q(x) := [x]_E$. Pokud je X topologický prostor, pak na prostoru $X/_E$ definujeme topologii tak, že množina $U \subset X/_E$ je otevřená právě tehdy, když množina $q^{-1}(U)$ je otevřená v X. Potom q je zřejmě spojité zobrazení.

Přistupme nyní k popisu prostoru $\mathscr{C}(K)_M$. Je–li K kompakt a M nějaký spočetný elementární model, pak na množině K definujme následující ekvivalenci $\sim_M$:

$$x \sim_M y \quad \leftrightarrow \quad (\forall f \in \mathscr{C}(K) \cap M) : \ f(x) = f(y).$$

Místo $K/_{\sim_M}$ budeme zkráceně psát $K/_M$. Příslušné kvocientové zobrazení budeme značit jako q^M. Protože q^M je spojité, je $K/_M$, jakožto spojitý obraz kompaktu, kompaktní. Uvědomme si také, že pak $K/_M$ je dokonce Hausdorffův kompakt.

Vskutku, máme–li dva prvky $[x]_M \neq [y]_M$, pak zvolme funkci $f \in \mathscr{C}(K) \cap M$ tak, že $f(x) \neq f(y)$. Zvolíme–li $\varepsilon > 0$ tak, že množiny $U(f(x), \varepsilon)$ a $U(f(y), \varepsilon)$ jsou disjunktní, pak $q^M(f^{-1}(U(f(x), \varepsilon)))$ a $q^M(f^{-1}(U(f(y), \varepsilon)))$ jsou disjunktní otevřené množiny v $K/_M$, oddělující $[x]_M$ a $[y]_M$.

Uvědomme si dále, že můžeme ztotožnit prostory $\{\varphi \circ q^M : \varphi \in \mathscr{C}(K/_M)\}$ a $\mathscr{C}(K/_M)$. Definujeme–li totiž zobrazení

$$F(\varphi) := \varphi \circ q^M, \quad \varphi \in \mathscr{C}(K/_M),$$

pak je zřejmé, že se jedná o izometrii z $\mathscr{C}(K/_M)$ na $\{\varphi \circ q^M : \varphi \in \mathscr{C}(K/_M)\}$.

Lemma 6.19. *Nechť K je kompakt a $X = \mathscr{C}(K)$. Pak pro vhodný elementární model M obsahující X, K platí:*

$$X_M = \{\varphi \circ q^M : \varphi \in \mathscr{C}(K/_M)\}.$$

Speciálně, X_M můžeme ztotožnit s prostorem $\mathscr{C}(K/_M)$, kde $K/_M$ je metrizovatelný kompakt.

Důkaz. Označme množinu napravo jako Y. Zvolíme–li libovolnou funkci $f \in \mathscr{C}(K) \cap M$, pak definujeme

$$\varphi([x]_M) := f(x), \quad x \in K.$$

Je snadné se přesvědčit o tom, že φ je spojitá funkce, a tedy $f \in Y$.

Pro důkaz obrácené inkluze ztotožněme X_M s podprostorem v $\mathscr{C}(K/_M)$. Pak podle tvrzení 3.15 a 3.8 je možné zařídit, aby X_M byl uzavřený podprostor, který je uzavřený na operaci bodového násobení funkcí. Z definice ekvivalence $\sim_M$ vyplývá, že X_M odděluje body $K/_M$. Dále je možné zajistit, aby pro $c \in M \cap \mathbb{R}$ byla i konstantní funkce $f \equiv c$ v elementárním modelu M. Pak M obsahuje všechny racionální konstantní funkce, a tedy X_M obsahuje konstanty. Podle Stoneovy-Weierstrassovy věty tak dostáváme, že $X_M = \mathscr{C}(K/_M)$.

Protože $X_M = \mathscr{C}(K/_M)$ je separabilní prostor, je $K/_M$ metrizovatelný kompakt. $\square$

Pro dokončení námi slibovaného tvrzení si stačí uvědomit, že spojitý obraz řídce rozloženého kompaktu je řídce rozložený kompakt a že metrizovatelný řídce rozložený kompakt je spočetný. Jedná se o známé výsledky, nicméně autorovi práce se nepodařilo najít potřebné reference, a tak si je připomeňme. Začneme definicí a budeme pokračovat důkazem potřebných lemmat.

Definice 6.20. Nechť X je topologický prostor a $A \subset X$. Nechť každá neprázdná podmnožina A obsahuje izolovaný bod v sobě. Pak řekneme, že *A je řídce rozložená v X.*

Lemma 6.21. *Nechť K, L jsou kompaktní množiny, K je řídce rozložená a $f : K \to L$ spojité zobrazení na L. Pak $f(L)$ je řídce rozložená množina.*

Důkaz. Ukažme nejprve, že L obsahuje izolovaný bod. Označme systém množin

$$\mathscr{F} := \{J \subset K : \ J \text{ je kompaktní, } f(J) = L\}.$$

Pokud tento systém množin uspořádáme pomocí obrácené inkluze, pak každý neprázdný řetězec množin z $\mathscr{F}$ má horní závoru, a to sice průnik těchto množin (kompaktnost plyne z průnikové vlastnosti kompaktů, $f(J) = L$ ze spojitosti funkce f a z průnikové vlastnosti kompaktů). Podle Zornova lemmatu tak nalezněme minimální kompaktní množinu (vzhledem k inkluzi) splňující, že $f(K_0) = L$. Označíme–li nyní $a \in K_0$ izolovaný bod v K_0, pak $K_0 \setminus \{a\}$ je vlastní kompaktní podmnožina K_0, a tedy z minimality K_0 a ze spojitosti funkce f vyplývá, že $f(K_0 \setminus \{a\})$ je vlastní kompaktní podmnožina L. Je tedy rovna $L \setminus \{f(a)\}$, a proto $f(a)$ je izolovaný bod L.

Zvolíme–li nyní libovolnou neprázdnou podmnožinu $A \subset L$, pak $\overline{A}$ je kompaktní, a tedy dle předchozího lze v $\overline{A}$ nalézt izolovaný bod b. Pak ale b není limitní, a tedy $b \in A$ je hledaný izolovaný bod v A. □

Lemma 6.22. *Nechť K je metrizovatelný řídce rozložený kompakt. Pak K je spočetná množina.*

Důkaz. Uvažujme množinu $G := \bigcup\{U \subset K : \ U \text{ je spočetná otevřená v } K\}$. Protože K je metrizovatelný kompakt, jedná se o separabilní metrizovatelný prostor. Proto je tedy K dědičně Lindelöfův a G je spočetná množina.

Pokud je K nespočetný, pak množina $K \setminus G$ je lokálně nespočetná. Zvolíme–li nyní libovolný bod $p \in K \setminus G$, pak tento bod není izolovaný v $K \setminus G$, neboť pro otevřené okolí U_p bodu p platí, že U_p je nespočetná množina. Dostáváme tak spor s tím, že K je řídce rozložený. □

Nyní již můžeme konečně přistoupit k důkazu slibované věty.

Věta 6.23. *Nechť* $X = \mathscr{C}(K)$ *pro řídce rozložený kompakt* K*, nebo* X *je podprostor prostoru* $c_0(\Gamma)$ *pro libovolnou nespočetnou množinu* Γ*. Nechť* Y *je Banachův prostor, který má RNP a* $f : X \to Y$ *je lipschitzovské zobrazení. Pak* $D(f)$ *je hustá v* X*.*

Důkaz. Podle Věty o spočetném modelu, tvrzení 3.15 a důsledku 5.11 je možné nalézt separabilní podprostor X_M prostoru X tak, že $D(f)$ je hustá v X právě tehdy, když $D(f \restriction_{X_M})$ je hustá v X_M.

Pokud je X je podprostor prostoru $c_0(\Gamma)$, pak podle lemmatu 6.18 je X_M podprostor c_0, a tedy dle věty 6.16 a lemmatu 6.17 je $D(f \restriction_{X_M})$ je hustá v X_M.

Pokud $X = \mathscr{C}(K)$ pro řídce rozložený kompakt K, pak podle lemmat 6.19, 6.21 a 6.22 je možné zařídit, že $X_M = \mathscr{C}(L)$, kde L je spočetný kompakt. Podle věty 6.16 a lemmatu 6.17 je tedy $D(f \restriction_{X_M})$ je hustá v X_M i v tomto případě. $\square$

Literatura

[1] K.Kunen: *Set Theory*, Studies in logic and the foundations of mathematics, vol. 102, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1983.

[2] B.Balcar, P.Štepánek: *Teorie množin*, Academia, Praha, 2001.

[3] V. Švejnar: *Logika, neúplnost a složitost*, Academia, Praha, 2002

[4] W.Rudin: *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973

[5] K.Kuratowski: *Topology*, vol.1, Academic Press, New York, 1966.

[6] W.Kubiś: *Banach spaces with projectional skeletons*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 350 (2009), issue 2, 758-776.

[7] L.Zajíček: *On sigma-porous sets in abstract spaces*, Abstract and Applied Analysis 2005, 509-534.

[8] L.Zajíček: *Fréchet differentiability, strict differentiability and subdifferentiability*, Czechoslovak Mathematical Journal, vol. 41 (1991), issue 3, 471-489.

[9] J.Lindenstrauss, D.Preiss: *On Fréchet differentiability of Lipschitz maps between Banach spaces*, Annals of Mathematics, vol. 157 (2003), 257–288

[10] L.Zajíček: *Lipschitzovské funkce, které jsou genericky fréchetovsky diferencovatelné na Asplundových prostorech*, přenáška na semináři z reálné a abstraktní analýzy dne 3. 3. 2010.

[11] J.Tišer: *Gama-nulové množiny jsou separabilně determinované*, přenáška na semináři z reálné a abstraktní analýzy dne 31. 3. 2010