

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Michal Vaner

Částečné  $k$ -stromy na plochách

Katedra aplikované matematiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jan Kratochvíl, CSc.

Studijní program: obecná informatika

2009



Zde bych rád poděkoval prof. Janu Kratochvílovi za neocenitelné rady v průběhu celé práce, za otázky, které mě navedly správným směrem. Taktéž bych rád poděkoval svým rodičům, kteří mi při psaní tolerovali zanedbávání obvyklých činností, jako je uklízení a podobně. Poděkování také patří Haně Dusíkové za tipy ohledně sázecího systému L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze  
dne

Michal Vaner



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Použité značení a terminologie</b>	<b>9</b>
2.1	Klasifikace grafů . . . . .	9
2.2	Obvyklé proměnné a symboly . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Malá <math>k</math></b>	<b>11</b>
3.1	Stromy . . . . .	11
3.2	2-stromy . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Velká <math>k</math></b>	<b>13</b>
4.1	Konečně mnoho vnořitelných $k$ -stromů . . . . .	13
4.2	První krok . . . . .	14
4.3	Více kroků . . . . .	15
<b>5</b>	<b>3-stromy</b>	<b>17</b>
5.1	Obecná pozorování a Lemmata . . . . .	17
5.2	Rovina . . . . .	19
5.3	Projektivní rovina . . . . .	23
5.3.1	Nepodrozdělený $K_{3,3}$ . . . . .	23
5.3.2	Podrozdělený $K_{3,3}$ . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Projektivní rovina a 4-stromy</b>	<b>31</b>



Název práce:  $k$ -stromy na plochách

Autor: Michal Vaner

Katedra: Katedra Aplikované Matematiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jan Kratochvíl, CSc.

e-mail vedoucího: honza@kam.mff.cuni.cz

Abstrakt: V této práci je řešen následující problém: Je dán graf  $G$  neúplný  $k$ -strom vnořitelný do některé plochy. Je možné jej doplnit tak, aby vznikl úplný  $k$ -strom, který je do dané plochy stále vnořitelný? Jak je ukázáno, pro malá  $k$  ( $\leq 2$ ) to jde na libovolné ploše. Naopak, pro  $k \geq 4$  lze na každé ploše najít graf, který doplnit nelze a pro dostatečně velké  $k$  již nelze doplnit žádný. Případ, kdy  $k = 3$ , je hraniční, neboť existuje nekonečně mnoho vnořitelných úplných 3-stromů, ale nejsou vnořitelné všechny. Ví se, že takto rozšiřovat lze 3-stromy v rovině, zde je pro úplnost uveden prozatím nepublikovaný důkaz prof. Kratochvíla a prof. Thomase. V této práci je důkaz rozšířen na projektivní rovinu. Další plochy zatím prozkoumané nejsou.

Klíčová slova:  $k$ -strom, vnořitelnost, plocha

Title:  $k$ -trees on surfaces

Author: Michal Vaner

Department: Department of Applied Mathematics

Supervisor: prof. RNDr. Jan Kratochvíl, CSc.

Supervisor's e-mail address: honza@kam.mff.cuni.cz

Abstract: This work is solving the following problem: A graph  $G$ , a partial  $k$ -tree embeddable into some surface, is given. Is it possible to complete it to a  $k$ -tree in such a way that it is still embeddable? We show that this is always possible for small  $k$  ( $\leq 2$ ) on any surface. On the contrary, for  $k \geq 4$ , one can find a partial  $k$ -tree that is not possible to complete in this way, and for  $k$  large enough, there is no partial  $k$ -tree that could be completed. The case  $k = 3$  makes the border case, because there is an infinite list of complete 3-trees embeddable into any surface, but not every 3-tree is embeddable. It is known that every partial 3-tree can be completed in the plane. To keep the thesis self-contained we present here the so far unpublished proof of prof. Kratochvíl and prof. Thomas. We extend this result to the projective plane. Other surfaces are still unexplored.

Keywords:  $k$ -tree, embeddability, surface

# 1 Úvod

Tato práce se zabývá vnořitelností třídy grafů do ploch. Dostaneme neúplný  $k$ -strom, který je do plochy vnořitelný. Zajisté jde doplnit na úplný  $k$ -strom, otázkou je, jestli takovým způsobem, že se vnořitelnost zachová.

V kapitole 3 je vyřešen případ  $k \leq 2$ . Takto „úzké“ grafy (ve smyslu stromové šířky) lze doplnit na úplný  $k$ -strom triviálně na libovolné ploše. Naopak, pro  $k \geq 4$  a libovolnou plochu existuje neúplný vnořitelný  $k$ -strom, který nelze doplnit na žádný úplný  $k$ -strom vnořitelný na danou plochu. Pro některé plochy a  $k$  dokonce neexistuje žádný úplný vnořitelný  $k$ -strom. Toto je řešeno v kapitole 4.

Zbývající případ pro  $k = 3$  je řešen v kapitole 5. V ní je rozebrána rovina (5.2) a projektivní rovina (5.3). Pro obě lze najít pro každý vnořitelný neúplný 3-strom některý vnořitelný úplný 3-strom, na který lze doplnit. Další plochy zatím vyřešeny nejsou.

Lze si všimnout, že ve všech případech, kdy doplnění lze provést a počet vrcholů grafu je alespoň  $k$ , tak lze doplnění provést bez přidání dalších vrcholů.

V kapitole 6 je pro zajímavost uveden jeden neúplný 4-strom, který nelze doplnit na žádný úplný vnořitelný do projektivní roviny.

Pro úplnost jsou uváděny důkazy i u většiny tvrzení a vět, která jsou již známá.

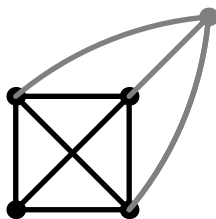


## 2 Použité značení a terminologie

V následujícím textu jsou používány některé termíny a značení, které buď nejsou zcela obvyklé nebo známé. Seznam těchto termínů je zde.

### 2.1 Klasifikace grafů

Zvolme si nějaké  $k \in \mathbb{N}^+$ . V nultém kroku si vezmeme úplný graf na  $k$  vrcholech  $G_0 := K_k$ . V každém následujícím ( $i$ -tém) kroku si zvolme úplný podgraf grafu  $G_{i-1}$  na  $k$  vrcholech a označme ho  $C_i$ . Graf  $G_i$  dostaneme tak, že ke grafu  $G_{i-1}$  přidáme nový vrchol a spojíme jej hranami se všemi vrcholy  $C_i$ .



Obrázek 1: Druhý krok stavby 3-stromu

Každý takový graf  $G_i$  nazveme  *$k$ -stromem* nebo úplným  *$k$ -stromem*. Každý podgraf některého  *$k$ -stromu* nazveme *neúplným  $k$ -stromem*.

Definici  *$k$ -stromu* lze nalézt např. v úvodu [1] od Arnborga, Proskurowského a Corneila.

Nechť  $G$  je graf a  $H$  vznikne z  $G$  nahrazením některých jeho hran za cesty. Potom se  $H$  nazývá *podrozdělení*  $G$ . Tyto cesty budou označovány jako *podrozdělené hrany* a vrcholy na nich jako *podrozdělítka*. Pokud budeme mluvit o velikosti podrozdělení, bude tím myšlen počet podrozdělítek.

Graf  $G$  je *vnořitelný* do plochy, pokud existuje nakreslení na danou plochu takové, že se žádné hrany nekříží. Graf je *rovinný*, pokud je vnořitelný do roviny, a *projektivně rovinný*, pokud je vnořitelný do projektivní roviny.

Přesnou definici nakreslení lze nalézt například v [2] od J. Matouška a J. Nešetřila, na straně 168.

Definici ploch lze nalézt v kapitole 3.1 v [3] od Mohara a Thomassena (strana 77 a dále).

*Projektivní rovina* je plocha s jedním křížátkem (bodem, ve kterém je křížení hran povolené, ale nesmí v něm „zahýbat“). Eulerův rod této plochy je 1.

## 2.2 Obvyklé proměnné a symboly

- $G$  – graf.
- $V(G)$  – vrcholy grafu  $G$
- $E(G)$  – hrany grafu  $G$

$$E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$$

- $n$  – počet vrcholů grafu  $n = |V(G)|$
- $m$  – počet hran grafu  $m = |E(G)|$
- $f$  – počet stěn nakreslení grafu
- $g$  – rod plochy
- $\deg_G(a)$  – stupeň vrcholu  $a$  v grafu  $G$
- $G \subseteq H$  – pro  $G, H$  grafy značí, že  $G$  je podgraf  $H$ , tj:

$$V(G) \subseteq V(H) \wedge E(G) \subseteq E(H) \cap \binom{V(G)}{2}$$

nebo že existuje graf  $G'$  isomorfní s  $G$ , pro který tato formule platí

### 3 Malá $k$

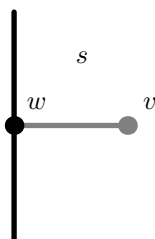
**Tvrzení 1.** Každý neúplný  $k$ -strom, pro  $k = 1, 2$ ,  $G$  lze doplnit na úplný  $k$ -strom vnořitelný do libovolné plochy. Pokud  $G$  má alespoň  $k$  vrcholů, lze doplnění provést bez přidávání vrcholů.

Pro takto malá  $k$  jsou všechny úplné  $k$ -stromy rovinné a tedy vnořitelné i do libovolné jiné plochy (veškeré „anomálie“ – uši, křížítka – lze obejít a nevyužít). Potom je každý neúplný  $k$ -strom podgrafem některého úplného a tedy vnořitelného.

#### 3.1 Stromy

Pokud je  $k = 1$ , jedná se o obyčejné stromy. Každý strom je rovinný. Každý neúplný 1-strom je les, který lze doplnit na strom spojením komponent (tedy jen doplněním hran).

Rovinnost stromu lze nahlédnout například z konstrukce. Jediný vrchol  $K_1$  je triviálně rovinný. Nechť máme nakreslený strom z předchozích kroků algoritmu a přidáváme nový vrchol. Vrchol  $w$ , ke kterému hodláme nový vrchol  $v$  připojit, sousedí s alespoň jednou stěnou nakresleného grafu, řekněme  $s$ . Umístíme  $v$  do stěny  $s$  a spojíme s  $w$ .



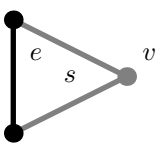
Obrázek 2: Připojení vrcholu ke stromu

Proto lze každý neúplný 1-strom doplnit na úplný, který je vnořitelný.

#### 3.2 2-stromy

Obdobně, všechny 2-stromy jsou také rovinné. Graf  $K_2$  je rovinný (je to jedna hrana s vrcholy). Opět, při připojování dalšího vrcholu  $v$  budeme předpokládat, že dosavadní graf  $G$  je už nakreslený.

Vybereme si některé již existující  $K_2$ . To je jedna hrana  $e$ . Ta musí sousedit s nějakou stěnou  $s$ . Umístíme tedy vrchol  $v$  do  $s$  a spojíme s konci  $e$ . Výsledek je opět rovinný, toto je nakreslení, při kterém se nekříží hrany.



Obrázek 3: Připojení vrcholu k hraně

K důkazu, že nemusíme přidat žádný vrchol, pokud vstupní graf  $G$  má alespoň dva vrcholy, použijeme Lemma 4, které dokážeme až v kapitole 5.1.

Tedy, každý neúplný 2-strom lze doplnit na úplný vnořitelný do roviny a tedy i do každé jiné plochy.

■

## 4 Velká $k$

**Tvrzení 2.** Pro  $k \geq 4$  a každou plochu  $\pi$  lze najít neúplný  $k$ -strom vnořitelný do této plochy, který nelze doplnit na žádný úplný  $k$ -strom vnořitelný do plochy  $\pi$ .

### 4.1 Konečně mnoho vnořitelných $k$ -stromů

**Lemma 1** (O konečné množině). Nechť množina  $k$ -stromů vnořitelných na plochu  $\pi$  je konečná. Poté pro dané  $k$  a  $\pi$  existuje neúplný  $k$ -strom vnořitelný do  $\pi$ , který nelze doplnit na úplný  $k$ -strom vnořitelný do  $\pi$ .

*Důkaz.* Označme si množinu těchto  $k$ -stromů jako  $\mathcal{G}$ . Dále si označme  $s$  maximální počet vrcholů přes tyto grafy:

$$s := \max_{G \in \mathcal{G}} |V(G)|$$

Veźměme si  $P_{s+1}$  cestu o  $s + 1$  vrcholech. Tato cesta zřejmě není podgrafem žádného grafu z  $\mathcal{G}$ , neboť má více vrcholů než libovolný z nich. Ovšem určitě existuje nějaký  $k$ -strom, jehož podgrafem tato cesta je. Lze jej zkonstruovat například takto:

1. Začneme s  $K_k$ .
2. Zvolíme jeden vrchol existujícího grafu jako jeden konec cesty a označíme ho  $p_0$ .
3. V  $i$ -tém kroku přidáme vrchol  $p_i$  a spojíme s  $k$  již existujícími vrcholy tvořícími  $K_k$ . Těchto  $k$  vrcholů zvolíme tak, aby jeden z nich byl  $p_{i-1}$ . Toto zajisté lze udělat, protože v minulém kroku po přidání  $p_{i-1}$  vznikl  $K_{k+1}$ , z něj stačí jeden některý vrchol nepoužít. Tento bod opakujeme celkem  $s \times$

Tedy cesta  $P_{s+1}$  je onen graf. □

**Lemma 2** (O konečném počtu kroků). Nechť je počet kroků na stavbu  $k$ -stromu pro dané  $k$  shora omezený nějakým  $s_{max}$ . Potom je množina takto sestrojitelých  $k$ -stromů konečná.

*Důkaz.* Při každém kroku je jen konečně mnoho možností, jak vybrat  $K_k$  v již existujícím grafu. Tento počet lze zajisté shora omezit počtem způsobů na výběr  $k$  vrcholů v existujícím grafu. V  $s$ -tém kroku má graf  $k + s$  vrcholů, počet různých  $K_k$  tedy není větší než:

$$\binom{k+s}{k}$$

Celkově lze tedy shora odhadnout počet různých  $k$ -stromů na  $s + k$  vrcholech výrazem:

$$\prod_{i=1}^s \binom{k+i}{k}$$

□

## 4.2 První krok

Již v prvním kroku algoritmu vznikne  $K_{k+1}$ . Pokud již tento nejde vnořit, vnořitelný  $k$ -strom je maximálně 1 a to z nultého kroku. V takovém případě je splněn předproklad Lemmatu 1 a existuje nedoplňitelný  $k$ -strom.

Dle zobecněné Euklidovy formule ([3], strana 85), pokud je graf  $G$  vnořený do plochy  $\pi$ , potom platí:

$$n + f \geq m + 2 - g$$

Pokud tuto nerovnost nelze splnit, graf do plochy nakreslit nelze.

U prvního kroku máme  $k + 1$  vrcholů a  $\frac{(k+1) \cdot k}{2}$  hran.

Nyní je třeba odhadnout počet stěn. Protože chceme horní odhad na  $k$ , kdy ještě graf lze vnořit, je třeba omezit  $f$  shora. Nejvíce stěn bude, pokud budou nejmenší možné. A každá stěna, pokud se nejedná o multigraf, musí sousedit s alespoň 3 vrcholy. Každý vrchol sousedí s maximálně  $k$  stěnami (neboť jeho stupeň je  $k$ ). Maximální počet stěn je tedy:

$$f_{max} = \frac{(k+1) \cdot k}{3}$$

Dosaďme tedy do nerovnosti a upravme:

$$k + 1 + \frac{(k+1) \cdot k}{3} \geq \frac{(k+1) \cdot k}{2} + 2 - g \quad (1)$$

$$6k + 6 + 2(k+1) \cdot k \geq 3(k+1) \cdot k + 12 - 6g \quad (2)$$

$$8k + 2k^2 \geq 3k^2 + 3k + 6 - 6g \quad (3)$$

$$5k + 2k^2 \geq 3k^2 + 6 - 6g \quad (4)$$

$$0 \geq k^2 - 5k + 6 - 6g \quad (5)$$

$k$  se tedy musí nacházet mezi hodnotami:

$$\frac{5 \pm \sqrt{1 + 24g}}{2}$$

Pokud bychom dosadili  $g = 0$ , dolní hranice by nám vyšla 2, tedy by nemělo vyhovovat  $k = 1$ . Ovšem kvůli předpokladu odhadu ( $k \geq 2$ , stromy mají jen jednu stěnu) je v tomto případě rovnice neplatná. Pro větší  $g$  je dolní hranice již pod zajímavými hodnotami (pro  $g = 1$  je to 0 a pro vyšší je již záporná).

Pokud je  $k$  větší než horní hranice, potom nelze do dané plochy rodu  $g$  vnořit ani  $k$ -strom po prvním kroku algoritmu a množina vnořitelných  $k$ -stromů je konečná, tedy existuje neúplný vnořitelný  $k$ -strom, který v této ploše nelze doplnit.

Pokud zvětšíme  $k$  ještě o 1 nad hranici, nepůjde již vnořit ani  $K_k$ , tedy neexistuje žádný  $k$ -strom vnořitelný do této plochy.

### 4.3 Více kroků

Nyní se podívejme, jaká je situace po  $s$  krocích. Spočítat vrcholy a hrany je jednoduché, v každém kroku přidáváme 1 vrchol a  $k$  hran, tedy:

$$\begin{aligned} n_s &= k + s \\ m_s &= \binom{k}{2} + k \cdot s \end{aligned}$$

Sice neznáme stupně jednotlivých vrcholů, ale pro spočítání maximálního počtu stěn potřebujeme pouze celkový stupeň grafu. Ten je vždy roven dvojnásobku počtu hran, tedy  $k \cdot (k - 1) + 2 \cdot k \cdot s$ . Maximální počet stěn je tedy:

$$f_s = \frac{k \cdot (k - 1) + 2 \cdot k \cdot s}{3}$$

Nyní dosadíme do nerovnice:

$$k + s + \frac{k \cdot (k - 1) + 2 \cdot k \cdot s}{3} \geq \binom{k}{2} + k \cdot s + 2 - g \quad (6)$$

$$k + \frac{k \cdot (k - 1)}{3} + s \cdot \frac{3 + 2 \cdot k}{3} \geq \binom{k}{2} + 2 - g + s \cdot k \quad (7)$$

Rozdělme si nerovnost na dvě, jednu, která se nemění s rostoucím  $s$ , a druhou, která se mění. První tedy bude:

$$k + \frac{k \cdot (k - 1)}{3} = \binom{k}{2} + 2 - g + \delta$$

kde  $\delta$  je jakási „rezerva“ vnořitelnosti. Pokud je rezerva záporná, je situace nezajímavá, protože toto  $k$  bylo vyloučeno již odhadem v 4.2. Předpokládejme tedy, že  $\delta \in \mathbb{Z}_0^+$ .

Nyní uvažme, jak rychle porostou strany nerovnosti s  $s$ . Obě strany rostou lineárně. Pokud bude koeficient levé strany  $l' \geq$  koeficient pravé strany  $r'$ , rezerva se bude po každém kroku zvyšovat nebo alespoň zůstat stejná. Pokud ovšem bude  $l' < r'$ , rezerva se v každém kroku stavění  $k$ -stromu sníží o  $l' - r'$  a nejdéle po  $\lfloor \frac{\delta}{r' - l'} \rfloor + 1$  krocích již  $k$ -strom nepůjde vnořit na danou plochu.

Spočítejme, pro která  $k$  k tomu dojde:

$$\frac{3 + 2 \cdot k}{3} < k \tag{8}$$

$$3 + 2 \cdot k < 3 \cdot k \tag{9}$$

$$3 < k \tag{10}$$

Každý  $k$ -strom pro  $k \geq 4$  přestane být vnořitelný na libovolnou plochu po konečně mnoha krocích (tedy, neuvažujeme-li plochy nekonečného rodu, ale na takové lze zase vnořit libovolný konečný graf). Dle Lemmat 2 a 1 tedy existuje neúplný  $k$ -strom, který nelze doplnit.





## 5 3-stromy

Zbývají nám tedy rozebrat 3-stromy. Protože existují jak nevnořitelné 3-stromy, tak libovolně velké vnořitelné, nějaké počítání hran a vrcholů nepomůže (všechny  $k$ -stromy pro dané  $k$  a pevný počet kroků mají stejný počet vrcholů i hran).

### 5.1 Obecná pozorování a Lemmata

Dokažme si několik Lemmat, která nám budou užitečná na libovolné ploše, případně i pro libovolné  $k$ . Napřed jedno, které pomůže dokázat, že nějaký graf  $G$  je 3-strom za předpokladu, že jsou 3-stromy některé jeho podgrafy.

**Lemma 3** (O začátku). *Konstrukci libovolného 3-stromu lze začít kterýmkoliv jeho trojúhelníkem.*

Toto je speciální případ tvrzení 1.3. z [4] od Proskurowského.

*Důkaz.* Samotný trojúhelník zřejmě můžeme vytvořit v nultém kroku. Problém by tedy mohl být s některým dalším vrcholem.

Vyjdeme z předpokladu, že graf je 3-strom, tedy existuje alespoň jedno pořadí, kterým lze vrcholy vytvářet. Nechť se v tomto postupu (říkejme mu původní) připojoval vrchol  $v$  na vrcholy  $x, y, z$ , které tvořily trojúhelník. Dohromady tedy ve výsledném grafu tvoří  $K_4$ . Pokud tedy již existují BÚNO vrcholy  $v, x, y$ , lze vytvořit i  $z$ .

Dále si všimněme, že pokud lze v daný okamžik vytvořit z výsledného grafu více vrcholů a jeden si vybereme, zbylé půjdou vytvořit i nadále. Tedy, jediný problém by mohl nastat, pokud by z ještě nevytvořených vrcholů žádný neměl alespoň 3 již vytvořené sousedy, které tvoří trojúhelník.

Označme tedy  $V$  množinu již vytvořených vrcholů a  $C$  množinu vrcholů, které na vytvoření teprve čekají. Vyberme takový trojúhelník z  $V$ , který byl v původním postupu vytvořený jako první (zřejmě nějaký existuje,  $V$  obsahuje alespoň ten trojúhelník, kterým jsme začali) a označme jeho vrcholy jako  $T$ . Toto je buď trojúhelník, kterým jsme v původním postupu začali, v tom případě již stačí projít původní postup a vytvářet ještě nevytvořené vrcholy, protože všechny, které byly v původním postupu v té době již vytvořené jsou vytvořené také.

Nechť to tedy není onen původní trojúhelník. Vyberme tedy jeho nejmladší vrchol a označme  $y$  (takový, který byl v původním postupu v  $T$  vytvořen jako poslední). Při vytváření v původním postupu byl připojován k dvěma vrcholům z  $V$  a jednomu z  $C$ . Protože zbývající dva vrcholy  $T$  jsou starší, musel být v původním postupu připojen k nim, tedy našli jsme dva vrcholy z  $V$ . Pokud by ale třetí vrchol, ke kterému byl připojen, byl také z  $V$ , nebyl by  $T$  nejstarší trojúhelník, protože tyto tři vrcholy musely existovat ještě před vznikem  $y$ . Označme tento vrchol z  $C$  jako  $x$ .

Celé  $T$  je ve  $V$  a tvoří trojúhelník. Stačí tedy nahlédnout, že  $x$  je spojeno se všemi jeho vrcholy. V době vzniku  $y$  muselo být  $x$  spojeno s oběma vrcholy  $T \setminus \{y\}$ . Vrchol  $y$  byl na  $x$  připojen, tedy tato hrana existuje také.  $\square$

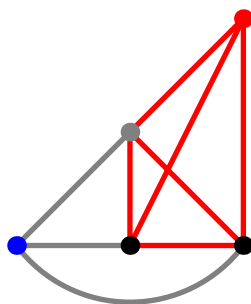
Dále něco pro zahazení nevyužitých vrcholů.

**Lemma 4** (O zbytečném vrcholu). *Mějme  $G$  neúplný  $k$ -strom o alespoň  $k$  vrcholech. Potom jej lze doplnit na úplný  $k$ -strom  $H$  bez přidávání vrcholů.*

*Důkaz.*  $G$  je neúplný  $k$ -strom, tedy musí existovat nějaký  $H'$  úplný  $k$ -strom takový, že obsahuje  $G$  jako podgraf. Dokažme indukcí podle rozdílu počtu vrcholů  $|V(H')| - |V(G)|$ . Pokud  $|V(G)| = |V(H')|$ , pak je splněno pro  $H := H'$ .

Předpokládejme tedy, že Lemma platí až do rozdílu počtu vrcholů  $\delta_n$  a chceme dokázat pro rozdíl  $\delta_n + 1$ . Protože  $\delta_n + 1$  je kladné, existuje nějaký vrchol  $z$ , který není v  $G$  obsažen – „zbytečný“ vrchol. Pokud na něj při tvorbě  $H'$  nebyl již žádný další napojen, lze jej jednoduše vynechat a získáme  $H''$ , který má o jeden vrchol méně, tedy dle indukčního předpokladu pro něj tvrzení platí.

Dále předpokládejme, že na něj bylo později něco připojeno, situace je znázorněna na obrázku 4.



Obrázek 4: Zbytečný vrchol

Tedy, nově připojený vrchol (červený) je připojen k  $z$  (šedý) a množině dalších vrcholů (na obrázku znázorněna dvěma černými).  $z$  a černé vrcholy musí tvořit úplný graf, jinými slovy,  $z$  je spojeno se všemi černými.

Pokud by bylo  $z$  při tvorbě vynecháno, vyskytl by se problém, kde vzít další vrchol, na který nový připojit (protože bez  $z$  máme k dispozici jen  $k - 1$  vrcholů). Ale při připojení  $z$  do původního  $H'$  musel být tento problém již vyřešen, musel být připojen ještě na některý další vrchol (na obrázku modrý). Tedy při připojení nového vrcholu lze situaci vyřešit stejným způsobem. Tímto postupem opět získáme nějaké  $H''$ , který má méně vrcholů a pro něj Lemma platí.  $\square$

Nakonec přidáme dvě Lemmata, která zaručují uzavřenost neúplných 3-stromů na minory a podrozdělení.

**Lemma 5** (O nevytvoritelném minoru). *Nechť  $G$  je 3-strom o alespoň 4 vrcholech. Potom i graf  $H$  vzniklý kontrakcí libovolné jeho hrany je neúplný 3-strom.*

Toto lze najít například v článku S. Arnborga, A. Proskurowského a D. G. Corneila [1], strana 2.

*Důkaz.* Podmínka na 4 vrcholy je zřejmá, zaručuje, že po kontrakci hrany zůstane alespoň trojúhelník.

Máme tedy hranu  $e$  mezi vrcholy  $u, v \in V(G)$ , kterou chceme kontrahovat. Konstrukci dle Lemmatu 3 lze začít od nějakého trojúhelníku, který neobsahuje  $e$ . BÚNO buď tedy  $u$  vytvořené dříve než  $v$ .

Graf  $H$  konstruujeme až do vzniku  $v$  stejně, jako předtím. Vznik  $v$  vynecháme a během dalšího postupu budeme místo k  $v$  připojovat k  $u$ . Mohlo by se stát, že některá hrana chyběla do počtu 3 (protože nějaký vrchol  $w$  byl v  $G$  připojován k  $u$  i k  $v$ ), ale každá existující hrana je součástí některého trojúhelníku, tedy nějaký vrchol „do počtu“ se vždy najde.

Je si třeba ještě všimnout, že nebude chybět žádná hrana, která by byla vytvořena společně s  $v$ . Taková hrana v  $G$  vede mezi  $v$  a nějakým vrcholem  $x$ . Ale v době vzniku  $v$  už musela nějaká hrana vést mezi  $x$  a  $u$ , tedy chybět nebude (protože  $v$  je připojené jak k  $u$ , tak k  $x$ ).  $\square$

**Lemma 6** (O podrozdělení). *Nechť  $G$  je graf a  $H$  je jeho libovolné podrozdělení a nechť  $H$  je neúplný  $k$ -strom. Potom i  $G$  je neúplný  $k$ -strom.*

*Důkaz.* Toto přímočaře plyne z Lemmatu 5 – podrozdělítka v  $H$  vkontrahujeme do vrcholů na koncích cest a dostaneme  $G$ .  $\square$

## 5.2 Rovina

**Tvrzení 3.** *Libovolný neúplný 3-strom  $G$  vnořitelný do roviny lze rozšířit na úplný 3-strom  $H$  vnořitelný do roviny. Pokud má  $G$  alespoň 3 vrcholy, lze najít takový graf  $H$ , který bude mít stejný počet vrcholů.*

*Pokud je zadáno nakreslení  $G$ , potom existuje  $H$ , které může nakreslení zachovat.*

Zde je uveden prozatím nepublikovaný důkaz prof. Kratochvíla a prof. Thomase.

**Lemma 7** (O triangulaci). *Každé nakreslení úplného 3-stromu je triangulace roviny.*

*Důkaz.* Počet vrcholů je po  $s$  krocích  $n_s = 3 + s$ , počet hran je  $m_s = 3 + 3 \cdot s$ . Dosadíme do Euklidovy formule a vyjádříme odhad pro počet stěn (víme, že graf je nakreslený).

$$n_s + f_s \geq m_s + 2 \quad (11)$$

$$3 + s + f_s \geq 3 + 3 \cdot s + 2 \quad (12)$$

$$f_s \geq 2 \cdot (s + 1) \quad (13)$$

Počet stěn lze odhadnout shora podobně, jako v 4.3 a po dosazení nám vyjde, že bude  $f_s \leq 2 \cdot (s + 1)$ . Tedy víme, kolik stěn přesně máme.

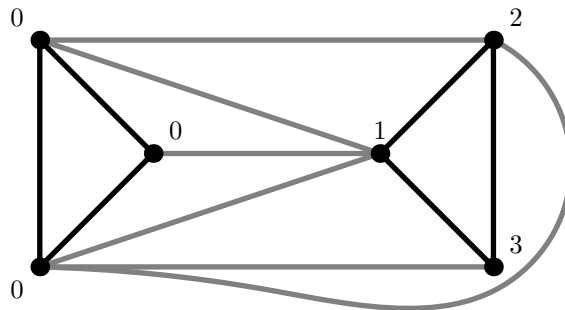
Pokud bychom měli některou stěnu delší, než 3, tak by z celkového stupně grafu „spotřebovala“ více a na některou jinou by již nezbylo. Stěna kratší než 3 ale existovat nemůže (tedy, s výjimkou grafů bez hran, s 1 hranou a podobně, což ovšem není náš případ).  $\square$

Předpokládejme, že  $G$  je neúplný rovinný 3-strom a máme nějaké jeho nakreslení.

Důkaz provedeme indukcí podle počtu vrcholů. V případě, že  $G$  má nejvýše 4 vrcholy, pak tvrzení platí triviálně –  $K_3$ , resp.  $K_4$  je vytvořeno v nultém, resp. prvním kroku tvorby a jsou rovinné.

Nechť tedy tvrzení platí pro všechny grafy na nejvýše  $n$  vrcholech a dostaneme graf  $G$  s  $n + 1$  vrcholy. Pokud je  $I$  neúplný rovinný 3-strom na nejvýše  $n$  vrcholech,  $\bar{I}$  bude značit úplný rovinný 3-strom, který  $I$  obsahuje jako podgraf.

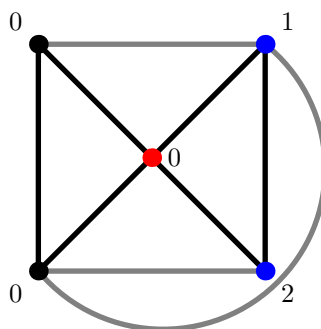
První možností je, že  $G$  je nesouvislý. Oddělme tedy jednu komponentu od zbytku, dostaneme grafy  $G_1$  a  $G_2$ ,  $G_1$  budiž ten s menším počtem vrcholů. Na chvíli ponechme stranou situaci, kdy  $G_1$  má méně než 3 vrcholy. Oba mají menší počet vrcholů, než  $n + 1$ , dle indukčního předpokladu pro ně lze najít rovinné 3-stromy, které je obsahují jako podgrafy. Protože tyto 3-stromy jsou triangulacemi roviny (dle Lemmatu 7), jejich vnější stěny jsou trojúhelníky. Napřed zkonstruujeme tyto dva trojúhelníky postupem naznačeným na obrázku 5, šedé hrany nejsou v  $G$  obsaženy, čísla udávají krok konstrukce, kdy vrchol vznikl. Podle Lemmatu 3 můžeme nakonec zkonstruovat zbytky  $\overline{G_1}$  a  $\overline{G_2}$  uvnitř těchto trojúhelníků.



Obrázek 5: Konstrukce dvou trojúhelníků

Pokud má  $G_1$  méně, než 3 vrcholy, pak vynecháme při konstrukci druhého trojúhelníku třetí, případně i druhý vrchol. Všechny potřebné hrany, které může  $G_1$  obsahovat budou k dispozici. V případě, že i  $G_2$  má méně než 3 vrcholy, pak celé  $G$  má nejvýše 4 vrcholy a tato situace je již ošetřena v případě pro malé grafy.

Další možností je, že graf obsahuje artikulaci  $v$ . Odebráním by se graf rozpadl na několik komponent. Vezmeme jednu komponentu společně s  $v$  (a hranami z  $v$  do této komponenty) a označme  $G_1$ . Obdobně vezmeme zbylé komponenty, opět přidáme  $v$  a označíme jako  $G_2$ . Jak  $G_1$ , tak  $G_2$  mají nejvýše  $n$  vrcholů, tedy pro ně tvrzení platí. Stěnu, se kterou sousedí  $v$  lze prohlásit za vnější. Vytvořme tedy vnější stěnu  $\overline{G}_1$  v nultém kroku. Stejně tak,  $\overline{G}_2$  bude mít  $v$  ve vnější stěně. Můžeme tedy po vytvoření vnějšího trojúhelníku  $\overline{G}_1$  vytvořit zbylé dva vrcholy vnější stěny  $\overline{G}_2$ , jak je naznačeno na obrázku 6, a zbytky  $\overline{G}_1$  a  $\overline{G}_2$  dokončit dovnitř takto vzniklých trojúhelníků (díky Lemmatu 3). Opět, hrany navíc jsou šedivé a čísla udávají pořadí vzniku vrcholů. Vrchol  $v$  je červený, vrcholy  $G_2$  jsou modré.

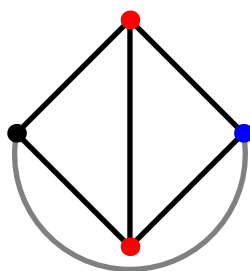


Obrázek 6: Konstrukce zbylých dvou vrcholů vnějšího trojúhelníku  $G_2$

Opět, v případě, že jeden z grafů bude mít méně, než 3 vrcholy (BÚNO je to  $G_2$ , jinak můžeme přeznačit), můžeme konstrukci posledního vrcholu vynechat (jeden z grafů musí mít alespoň 3 vrcholy, jeden alespoň 2).

Pokud je graf souvislý i vrcholově 2-souvislý, může obsahovat 2-řez. Nechť tedy jsou  $u, v$  vrcholy tohoto řezu. Rozdělme si komponenty, které by vznikly po odebrání  $u, v$  do dvou neprázdných množin  $C_1, C_2$ . Můžeme každou komponentu  $C_2$  zkontrahovat do jednoho vrcholu a ten poté vkontrahovat do  $v$ . Tím zajistíme vznikne hrana  $(u, v)$ . Takto vzniklý graf označme  $G_1$ . Díky tomu, že  $G$  je neúplný 3-strom, a díky Lemmatu 5, je i  $G_1$  neúplný 3-strom. Obdobně můžeme zkontrahovat i  $C_1$  a dostaneme  $G_2$ .

Protože jak  $G_1$ , tak  $G_2$ , mají nejvýše  $n$  vrcholů, tvrzení pro ně platí a nalezneme tedy nakreslení  $\overline{G}_1$  a  $\overline{G}_2$ . Prohlásíme některou stěnu každého z nich, která sousedí s hranou  $(u, v)$ , za vnější. Můžeme tedy vytvořit tento vnější trojúhelník jednoho grafu, doplnit třetí vrchol vnějšího trojúhelníku druhého grafu a oba poté dokončit uvnitř. Konstrukce těchto dvou trojúhelníků je znázorněna na obrázku 7, barvy jsou obdobné jako v minulém případě.



Obrázek 7: Vytvoření trojúhelníků spojených hranou

Již nemůže nastat případ, že by některý z menších grafů měl příliš málo vrcholů. Každá z  $C_1$  a  $C_2$  má alespoň jeden vrchol, přidáním  $(u, v)$  máme alespoň 3.

Poslední možnost, která může nastat je, že  $G$  obsahuje vrcholový 3-řez (4-souvislý už být nemůže, to by obsahoval  $K_5$  a nebyl rovinný). Necht' tedy jsou vrcholy  $u, v, w$  řez vybraný dle Lemmatu 8. Po jejich odebrání se graf rozpadne na 2 komponenty (kdyby se rozpadl na víc, pak  $u, v, w$  tvoří jednu partitu podrozdělení  $K_{3,3}$  a libovolný vrchol z každé komponenty druhou a graf  $G$  není rovinný).

**Lemma 8.** *Je dán  $G$  rovinný neúplný 3-souvislý 3-strom o alespoň 5 vrcholech a je dáno nějaké jeho nakreslení. Potom v něm lze nalézt takový 3-řez  $u, v, w$ , že po přidání trojúhelníku  $u, v, w$  vznikne  $G'$ , který je stále rovinný neúplný 3-strom a zachová nakreslení stávajících hran a vrcholů.*

*Důkaz.* Zřejmě musí obsahovat alespoň nějaký 3-řez, jinak by byl 4-souvislý, tedy obsahoval  $K_5$ , které jednak nelze vytvořit v 3-stromu a jednak není rovinné. Nyní potřebujeme přidat trojúhelník.

Vezměme nějaký postup konstrukce úplného 3-stromu obsahujícího  $G$  a vezměme vrchol  $x$ , který byl vytvořen jako poslední. Zřejmě  $\deg_G(x) \leq 3$ , protože dostal 3 hrany při vytvoření a po něm už se nic dalšího nevytvářelo. Ale protože je  $G$  3-souvislý, tak  $\deg_G(x) \geq 3$  (jinak by jeho sousedé tvořili 2-řez). Označme  $u, v, w$  jeho sousedy. Když  $x$  vznikl, tyto sousedé museli tvořit trojúhelník. Protože však jsou sousedé jen 3, musí každá dvojice mít společnou stěnu, tedy do této lze přikreslit hranu tuto dvojici spojující (pokud již neexistuje). Lze tedy do  $G$  tento trojúhelník doplnit tak, aby byl stále rovinný a stále to byl neúplný 3-strom.  $\square$

Můžeme tedy graf, stejně jako v minulých případech, rozdělit na dvě části,  $G_1, G_2$ . Protože  $G_1 \setminus \{u, v, w\}$  je souvislé, musí být nakreslené jen do jedné stěny trojúhelníku  $u, v, w$ . S  $G_2$  obdobně. Konstrukci grafu lze tedy začít od tohoto trojúhelníku a zbytky  $\overline{G_1}, \overline{G_2}$  nakreslit do vnější, resp. vnitřní stěny tohoto trojúhelníku. ■

## 5.3 Projektivní rovina

**Tvrzení 4.** *Mějme  $G$  neúplný 3-strom vnořitelný do projektivní roviny. Lze nalézt úplný 3-strom  $H$  vnořitelný do projektivní roviny obsahující  $G$  jako podgraf. Pokud má  $G$  alespoň 3 vrcholy, lze nalézt takové  $H$ , které bude mít stejný počet vrcholů.*

Pokud by byl  $G$  rovinný, potom je i  $H$  rovinný dle 5.2 a tedy vnořitelný do projektivní roviny. Dále nás tedy budou zajímat pouze taková  $G$ , která rovinná nejsou. Podle Kuratovského věty ([3], strana 30) obsahují buď podrozdělení  $K_{3,3}$  nebo  $K_5$  jako podgraf.

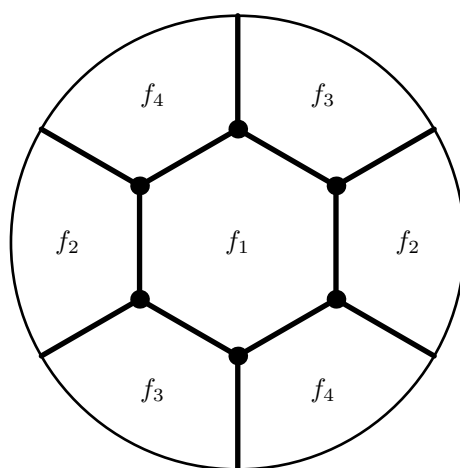
Protože ale podle [1], strana 3, je  $K_5$  zakázaný minor pro 3-stromy, dle Lemmatu 6 ani žádné podrozdělení  $K_5$  nelze vytvořit. Tedy,  $G$  obsahuje podrozdělení  $K_{3,3}$ .

### 5.3.1 Nepodrozdělený $K_{3,3}$

Na chvíli předpokládejme, že  $G$  obsahuje nepodrozdělené  $K_{3,3}$ , podrozdělení vyřešíme později.

Podívejme se na algoritmus nalezení nakreslení do projektivní roviny popsany W. Myrvoldovou a J. Rothem v [5] na stranách 8-10. Napřed najde podrozdělení  $K_5$  nebo  $K_{3,3}$ , ten umístí do projektivní roviny a poté rozmístí zbylé části do vzniklých „lokálně rovinných“ stěn za pomoci algoritmu pro rovinné nakreslení.

Náš graf  $G$  neobsahuje žádné podrozdělení  $K_5$  a protože algoritmus nalezne libovolné podrozdělení  $K_{3,3}$ , můžeme mu některé vybrat. Vezměme tedy ono nepodrozdělené  $K_{3,3}$  a nakresleme jej dle algoritmu. Toto rozdělí celou projektivní rovinu na 3 stěny velikosti 4 a jednu velikosti 6.



Obrázek 8: Nakreslení  $K_{3,3}$  do projektivní roviny

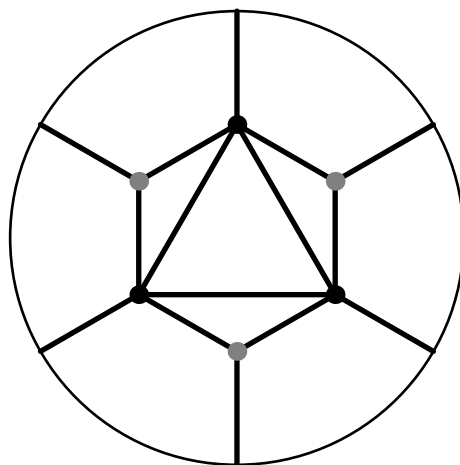
Mějme tedy takovéto nakreslení do projektivní roviny (z korektnosti tohoto programu

plyne, že pokud je graf projektivně rovinný, takové nakreslení nám nalezneme). Nyní se podíváme, co lze o takovém grafu předpokládat.

**Lemma 9** (O trojúhelníku). *Každý úplný 3-strom obsahující  $K_{3,3}$  jako podgraf má jednu jeho partitu spojenou do trojúhelníku.*

*Důkaz.* Označme vrcholy  $K_{3,3}$  jako  $a_1, a_2, a_3$  a  $b_1, b_2, b_3$  (tvořící partity  $A$ , resp.  $B$ ).

$K_{3,3}$  lze sestavit tak, že začneme s jednou partitou (například s  $a_1, a_2, a_3$ ). K tomuto trojúhelníku potom připojíme jednotlivé vrcholy druhé partity. Výsledek tohoto je na obrázku 9, vrcholy partity  $A$  jsou černé, vrcholy partity  $B$  šedé.



Obrázek 9: Úplný graf obsahující  $K_{3,3}$

Nyní, proč je tento trojúhelník nutný?  $K_{3,3}$  má příliš vrcholů na to, aby byl vytvořen najednou. Tedy, jeden vrchol musí být připojovaný jako poslední (v době, kdy již ostatních 5 existuje). Nechť je to třeba vrchol  $b_3$ .

Protože všechny vrcholy  $a_i$  už existují, musí být rovnou připojen ke všem třem v tomto kroku (nové hrany vznikají jen s novým vrcholem, pokud dva vrcholy už existují, není žádná možnost, jak je spojit později). Proto partita  $A$  musí tvořit trojúhelník, aby  $b_3$  mohl být připojený.  $\square$

**Lemma 10** (O rozpojené partitě). *Zatímco jedna partita tvoří trojúhelník (označme ji  $A$ ), mezi vrcholy druhé ( $B$ ) nevede žádná cesta, která by neobsahovala vrchol partity  $A$ .*

*Důkaz.* Napřed dokažme, že nevede žádná hrana „přímo“ mezi vrcholy partity  $B$ . 3-strom o 6 vrcholech má přesně 12 hran (v prvním kroku vzniknou 3 vrcholy a 3 hrany, v každém dalším kroku 1 vrchol a 3 hrany). A graf z obrázku 9 má přesně 12 hran. Kdyby vedla hrana mezi vrcholy  $B$ , měl by tento graf příliš mnoho hran.



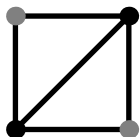
Ještě by mohla vést cesta přes nějaký další vrchol či vrcholy. Předpokládejme, že tato cesta vede mezi vrcholy  $b_1$  a  $b_2$  a na cestě mezi nimi se vyskytují vrcholy  $c_1, \dots, c_n$ , z nichž žádný není z partity  $A$ ,  $c_1$  připojený k  $b_1$ ,  $c_n$  k  $b_2$ . Vezměme nejkratší takovou cestu. Pokud konstrukci takového grafu začneme od trojúhelníku v partitě  $A$  (můžeme, dle Lemmatu 3), musí dříve vzniknout  $b_1$  než  $c_1$  (s  $b_2$  a  $c_n$  obdobně). Kdyby vznikl až poté, musel by při vytvoření mít stupeň alespoň 4 (musel by se připojit k celé partitě  $A$  a k  $c_1$ ).

Tedy, některý  $c_i$  vzniká jako poslední z celé cesty a připojuje se na dvě „polocesty“, jedna, která vede k  $b_1$  a jedna, která vede k  $b_2$  a spojuje je dohromady. Protože je ale k nim připojen, musí už tyto dva vrcholy (konce větví) být spojeny hranou, potom by ale cesta bez tohoto  $c_i$  byla kratší a to je spor s tím, že jsme vzali nejkratší takovou cestu.  $\square$

Když dostaneme graf  $G$ , vezměme nakreslení s  $K_{3,3}$  podle obrázku 8 a doplníme do něj trojúhelník z Lemmatu 9.

**Lemma 11.** *Pokud podle Lemmatu 9 doplníme  $G$  na  $G'$  přidáním trojúhelníku mezi vrcholy správné partity (k jedné to musí jít), tak  $G'$  bude stále vnořitelné do projektivní roviny.*

*Důkaz.* Podívejme se na stěny  $f_2, \dots, f_4$  dle obrázku 8. Dva z hraničních vrcholů jsou z partity  $A$ , dva z partity  $B$ , vrcholy ze stejné partity jsou proti sobě na úhlopříčkách (viz. obrázek 10). Mezi vrcholy z  $B$  nevede žádná cesta „vnitřkem“ stěny (podle Lemmatu 10). Proto je možné nakreslit hranu mezi vrcholy z  $A$  dovnitř této stěny.



Obrázek 10: Stěna se 4 vrcholy a hrana v partitě  $A$

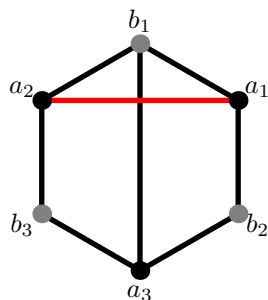
Pro každou hranu tohoto trojúhelníku se najde jedna z těchto tří stěn, do které ji lze nakreslit.  $\square$

Tyto dokreslené hrany nám rozdělí tři čtyřúhelníkové stěny na šest trojúhelníkových. Nyní každý takový trojúhelník vezměme, včetně jeho obsahu, a umístíme jej do roviny. Tento trojúhelník, včetně obsahu, je zřejmě rovinný (už jednotlivé stěny vzniklé umístěním  $K_{3,3}$  byly „lokálně“ rovinné). Pomocí 5.2 zkonstruujeme úplný rovinný 3-strom. Protože zachovává i nakreslení toho, co již existuje, žádný vrchol (a tedy ani žádná hrana) se nedostane ven z tohoto trojúhelníku. Proto je možné tyto „zúplněné“ trojúhelníky vrátit do původního  $G$  a při konstrukci 3-stromu postupovat od tohoto trojúhelníku a vyrobit vnitřek.

Ještě zbývá vyřešit, co s vnitřkem  $f_1$ .

**Lemma 12** (Dvě hrany). *Z trojúhelníku v partitě  $A$  lze alespoň dvě hrany nakreslit dovnitř šestiúhelníkové stěny  $f_1$ .*

*Důkaz.* Pokud jdou nakreslit všechny tři, je vše v pořádku. Dále tedy předpokládáme, že jednu nakreslit nelze. BÚNO to bude hrana  $(a_1, a_2)$ , viz obrázek 11.



Obrázek 11: Nenakreslitelná hrana v šestiúhelníku

To, že nelze nakreslit, může být způsobeno jen tím, že existuje cesta, která ji kříží. Taková musí být mezi vrcholy na jedné a druhé straně od  $(a_1, a_2)$ , na obrázku to jsou množiny vrcholů  $\{b_1\}$  a  $\{a_3, b_2, b_3\}$ . Protože podle Lemmatu 10 mezi vrcholy z partity  $B$  nevede cesta (mimo těch vedoucích přes  $A$ ), jediná taková možná cesta je mezi vrcholy  $b_1$  a  $a_3$ .

Nyní předpokládáme, že nelze nakreslit ještě nějakou další hranu, řekněme  $(a_1, a_3)$ . To musí být způsobeno tím, že již existuje cesta mezi  $a_2$  a  $b_2$ . Ta protíná cestu mezi  $b_1$  a  $a_3$ . Hranou ji protínat nemůže, protože by již nemohly být nakreslené. Mají tedy společný vrchol. Potom ale existuje cesta mezi vrcholy  $b_1$  a  $b_2$ , což je ve sporu s Lemmatem 10.  $\square$

Pokud lze všechny tři hrany trojúhelníku z partity  $A$  nakreslit dovnitř této stěny (to, že je použijeme dvakrát nijak nevede, při výsledném nakreslení prostě jen jeden z výskytů vynecháme), rozdělí tento šestiúhelník opět na trojúhelníky a můžeme použít stejný postup k nalezení vnořitelného nakreslení.

Druhou možností je, že lze nakreslit pouze dvě hrany z tohoto trojúhelníku. Potom je možné vzít jednu hranu, kterou jsme až dosud kreslili vnějškem mezi partitami  $A$  a  $B$  (v případě obrázku 11 to je hrana  $(a_3, b_1)$ ) a nakreslit ji dovnitř šestiúhelníku. Buď již to je ona cesta, která překáží třetí hraně trojúhelníku, a nebo ji lze umístit z jedné strany podél této cesty.

Kdyby tomu tak nebylo, pak je tato cesta spojená jak s  $a_1$ , tak s  $a_2$  (tedy, lze se z této cesty do toho vrcholu dostat, aniž by byl navštíven jiný vrchol šestiúhelníku). Do  $b_2$  ani  $b_3$  určitě nevede.

V takovém případě ale tento graf obsahuje minor isomorfní s  $K_5$  (jeho vrcholy budou  $a_1, a_2, a_3, b_1$  a některý  $c$  vzniklý kontrakcemi cesty). Ale dle [1] žádný 3-strom neobsahuje  $K_5$  jako minor. Můžeme tedy hranu  $(a_3, b_1)$  nakreslit dovnitř šestiúhelníku.

Nyní dvě hrany trojúhelníku a tato hrana „z vnějšku“ dělí šestiúhelníkovou  $f_1$  opět na trojúhelníky, lze tedy použít stejný postup s vytažením trojúhelníků ven, nalezením rovinného 3-stromu a vrácením zpět. Libovolný neúplný 3-strom  $G$  vnořitelný do projektivní roviny, který obsahuje nepodrozdělené  $K_{3,3}$  je podgrafem nějakého úplného 3-stromu vnořitelného do projektivní roviny.

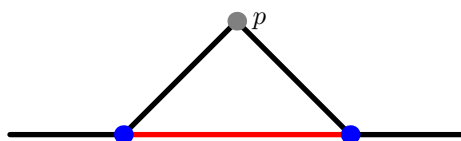
### 5.3.2 Podrozdělený $K_{3,3}$

Nyní máme nějaký  $G$ , který neobsahuje  $K_{3,3}$  jako svůj podgraf, ale obsahuje některé jeho podrozdělení. Dokažme si pro práci s podrozděleným  $K_{3,3}$  několik Lemmat.

**Lemma 13** (O spojení  $K_{3,3}$ ). *Nechť  $G$  je neúplný 3-strom a obsahuje podgraf isomorfní s nějakým podrozdělením  $K_{3,3}$ . Potom každý úplný 3-strom  $H$  obsahující  $G$  jako podgraf obsahuje i nepodrozdělené  $K_{3,3}$ .*

*Důkaz.* Dokážeme indukcí podle počtu podrozdělitek. Vezměme  $I$  nejmenší podgraf  $G$  isomorfní s nějakým podrozdělením  $K_{3,3}$ . Pokud je  $I$  nepodrozdělené  $K_{3,3}$ , Lemma triviálně platí.

Předpokládejme tedy, že Lemma platí pro  $n$  podrozdělitek a chceme jej dokázat pro  $n+1$ . Nechť tedy obsahuje alespoň jedno podrozdělítko. Při konstrukci mohly nastat dva případy. Pokud poslední vytvořený vrchol z  $I$  bylo některé podrozdělítko  $p$ , potom v době jeho vzniku musela existovat hrana, která spojovala jeho nejbližší dva sousedy na hraně, kterou  $p$  podrozděluje. Všechny grafy, které byly takto vytvořené tedy obsahují nějaké  $I'$ , které neobsahuje  $p$ , ale místo něj obsahuje hranu spojující jeho nejbližší sousedy.  $I'$  má jen  $n$  podrozdělitek.

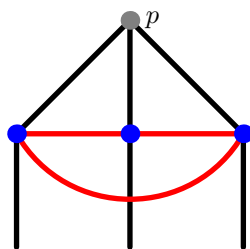


Obrázek 12: Doplnění hrany k podrozdělítku

Druhou možností je, že poslední vrchol není podrozdělítko, BÚNO to tedy je  $b_3$ . Jeho tři nejbližší sousedé v době jeho vzniku již museli existovat a tvořit trojúhelník.

Pokud je alespoň jeden z nich podrozdělítko, můžeme situaci opět převést na menší případ tím, že vynecháme  $b_3$  a jeho roli převeźme jedno z podrozdělitek. Tím se počet podrozdělitek opět sníží.

Zbývá tedy možnost, že  $b_3$  už má všechny hrany do sousední partity nepodrozdělené. V takovém případě tvoří partita  $A$  trojúhelník (ze stejného důvodu, jako je v důkazu Lemmatu 9) a konstrukci tohoto 3-stromu lze začít od tohoto trojúhelníku (Lemma 3). Potom si vybereme vrchol, který má alespoň jednu z hran podrozdělenou. Protože podrozdělené hrany jsou disjunktní, lze s jeho konstrukcí bez změny tohoto 3-stromu počkat až po konstrukci vrcholu  $b_3$  a tudíž stejný graf získáme z některého jiného postupu, který již situaci zmenší.



Obrázek 13: Doplnění trojúhelníku k  $b_3$

□

Můžeme tedy přidat hrany tak, aby  $G$  byl stále neúplný 3-strom, ale obsahoval nepodrozdělené  $K_{3,3}$ . Teď je tedy třeba dokázat, že existuje způsob, jak graf rozšířit tak, aby byla zachována vnořitelnost.

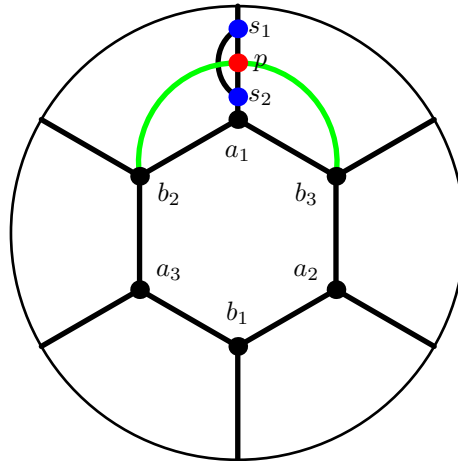
**Lemma 14.** *Hranu z prvního případu důkazu Lemmatu 13 lze vždy dokreslit (a nevynechat  $p$ ) bez porušení vnořitelnosti.*

*Důkaz.* Dokážeme sporem. Hranu nelze dokreslit, protože v každém nakreslení (před dokreslením hrany) vede z podrozdělitka  $p$  na obě strany nějaká cesta. Tato cesta musí končit někde ve zbytku podrozděleného  $K_{3,3}$  (pokud by představovala most, šel by celý „druhý konec“ nakreslit dovnitř trojúhelníku vzniklého po přidání nové hrany).

Pro přehlednost si udělejme obrázek 14. Vrchol  $p$  je červený, jeho sousedé modří (mohly by to být i vrcholy  $a_1$  a  $b_1$ ). Zelené jsou ony překážející cesty.

Žádná překážející cesta nevede do žádného vrcholu podrozdělené hrany  $(a_1, b_1)$  – v takovém případě bychom nepracovali s nejmenším podrozdělením. Tedy musí vést někde do podrozdělené hrany  $(a_2, b_2)$  (resp.  $(a_3, b_3)$  v případě druhé cesty) nebo hran  $(b_2, a_1)$  a  $(a_3, b_1)$  (resp.  $(b_3, a_1)$  a  $(a_3, b_1)$ ), ale bez krajních vrcholů  $a_1, b_1$ .

Nyní zkontrahujme úsek  $a_1, s_2$ , úsek  $b_1, s_1$ , oblast  $a_2, b_2$  a jednu (příslušnou) zelenou cestu tak, aby vzniklý vrchol od  $p$  dělila jediná hrana, s  $a_3, b_3$  a druhou cestou obdobně. Tímto jsme získali  $K_5$ .  $K_5$  ale není, jak jsme již dokázali, (ani neúplný) 3-strom, tedy, dle Lemmatu 5 ani graf na obrázku nemůže být 3-strom. Tedy alespoň jedna ze zelených cest neexistuje a hranu dokreslit lze. □

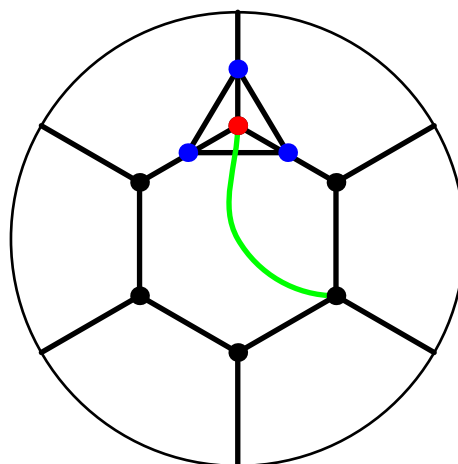


Obrázek 14: Dokreslení hrany

**Lemma 15.** *Trojúhelník z druhého případu důkazu Lemmatu 13 lze vždy dokreslit bez porušení vnořitelnosti.*

*Důkaz.* Obdobně, jako v minulém Lemmatu, předpokládejme opak, tedy některou hranu dokreslit nelze. To může nastat jen proto, že z  $b_3$  vede cesta někam „ven“ z tohoto trojúhelníku a některou z jeho hran kříží. Protože to, do čeho tato cesta vede, nejde překreslit dovnitř, musí to být spojené se zbytkem podrozděleného  $K_{3,3}$ .

Situace je znázorněna na obrázku 15. Červený je  $b_3$ , modří jsou jeho sousedé. Samozřejmě, někteří ze sousedů mohou být přímo vrcholy šestiúhelníku. Překážející cesta (zelená) vede z  $b_3$  do některého černého vrcholu (nebo podrozdělené hrany) a neobsahuje žádný modrý vrchol.



Obrázek 15: Dokreslení trojúhelníku

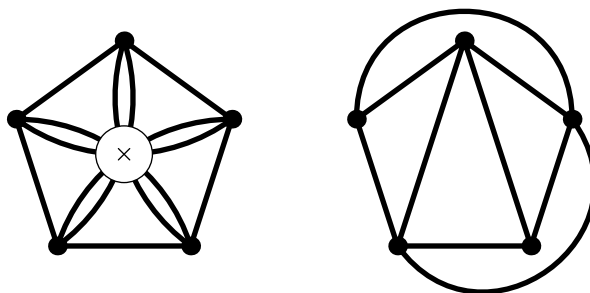
Pokud ale všechny černé vrcholy a vrcholy cesty zkontrahujeme, dostaneme  $K_5$ . Ten ale nelze vytvořit jako 3-strom, tedy ani tento graf není 3-strom (dle Lemmatu 5). Ale protože trojúhelník (dle Lemmatu 13) v tomto grafu existuje, daná cesta existovat nemůže.  $\square$

Lze tedy dokreslit hrany tak, aby vzniklý neúplný 3-strom byl stále ještě vnořitelný, ale obsahoval nepodrozdělené  $K_{3,3}$ . Tedy dle 5.3.1 lze libovolný neúplný projektivně rovinný 3-strom rozšířit na úplný projektivně rovinný.  $\blacksquare$

## 6 Projektivní rovina a 4-stromy

Dle 4.3 existuje nerozšiřitelný neúplný 4-strom. Zde je jen pro zajímavost jeden takový uveden s jiným důkazem jeho nerozšiřitelnosti.

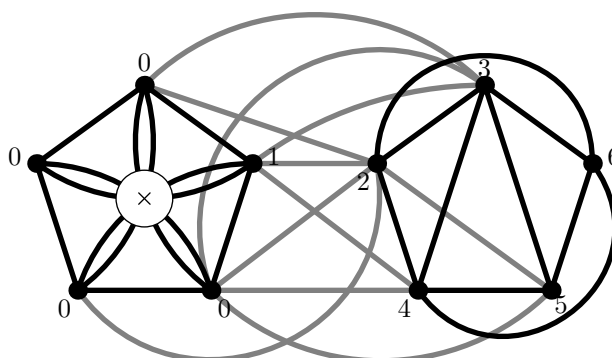
Bude jím nesouvislý graf o dvou komponentách. Jednu komponentu tvoří  $K_5$ , druhou  $K_5$  bez jedné hrany (nazvěme jej  $J_5$ ). Tento graf je vnořitelný do projektivní roviny, jak lze ověřit na obrázku 16.



Obrázek 16:  $G$  vnořený do projektivní roviny

Je třeba dokázat, že existuje nějaký úplný 4-strom, jehož je  $G$  podgrafem a dále, že žádný úplný 4-strom obsahující  $G$  není vnořitelný do projektivní roviny.

Existenci takového 4-stromu lze dokázat jeho konstrukcí, která je zobrazena na obrázku 17. Čísla udávají krok algoritmu, ve kterém byl vrchol přidán, hrany neobsažené v  $G$  jsou šedé.



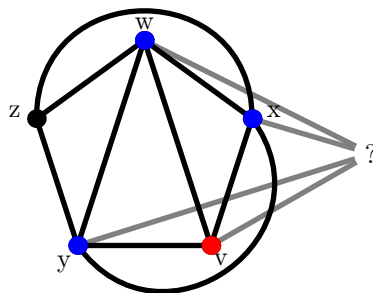
Obrázek 17: Konstrukce 4-stromu obsahujícího  $G$

**Lemma 16** (O chybějící hraně  $J_5$ ). *Každý úplný 4-strom obsahující jako svůj podgraf graf  $J_5$  obsahuje také jako svůj podgraf graf  $K_5$ . Tyto dva podgrafy mají alespoň 4 společné vrcholy.*

*Důkaz.* V nultém kroku generování vznikly maximálně 4 vrcholy  $J_5$ , tedy k vygenerování  $J_5$  je potřeba alespoň jeden opravdový krok. Tedy jeden z vrcholů je přidáván jako poslední. Označme si tento vrchol jako  $v$ , ostatní jako  $w, x, y, z$ .

Pokud  $\deg_{J_5}(v) = 4$ , pak je v tomto kroku algoritmu připojován ke všem čtyřem vrcholům  $w \dots z$  (ve výsledném  $J_5$  je s nimi spojen, později již nebude možnost tuto hranu vytvořit a dříve to také nešlo, neboť  $v$  neexistoval). Abychom si ale mohli vybrat tyto čtyři vrcholy, musí již v tuto chvíli tvořit  $K_4$ . Přidáním vrcholu  $v$  a spojením se všemi tedy vznikne  $K_5$  na vrcholech  $v \dots z$ , tedy mají společných všech 5 vrcholů.

Ve zbytku důkazu tedy můžeme předpokládat, že  $\deg_{J_5}(v) = 3$  (takové tam jsou dva, necht' ten druhý je  $z$ ). Když připojujeme  $v$  ke grafu, musíme mít vybrané 4 vrcholy, které tvoří  $K_4$ . Protože  $v$  je ve výsledném  $J_5$  spojeno s vrcholy  $w, x, y$  (ty mají všechny stupeň 4, tedy musí být spojeny se všemi ostatními v  $J_5$ ), toto  $K_4$  obsahuje vrcholy  $w, x, y$ . Tedy po přidání  $v$  vznikne  $K_5$  obsahující vrcholy  $v, w, x, y$  a nějaký další. Tento  $K_5$  má tedy s naším  $J_5$  společné alespoň 4 vrcholy (onen další může být  $z$ , ale nemusí).



Obrázek 18: Připojení vrcholu  $v$

□

Necht' je  $H$  libovolný úplný 4-strom obsahující  $G$  jako podgraf. Protože jedna z komponent  $G$  je  $K_5$ , musí být tento  $K_5$  obsažen jako podgraf v  $H$ . Dle Lemmatu 16 obsahuje ještě nějaké  $K_5$  které má alespoň 4 vrcholy společné s  $J_5$  z  $G$ . Tedy, tyto dva  $K_5$  se liší v alespoň 4 vrcholech – jsou to buď dva disjunktní  $K_5$ , nebo sdílejí právě jeden společný vrchol.

Dle B. Mohara a C. Thomassena, [3], strana 247, je každá tato možnost zakázaný podgraf pro projektivní rovinu.  $H$  tedy nelze vnořit do projektivní roviny.

Taktéž si lze všimnout, že  $J_5$  je protipříkladem v rovině.



## Reference

- [1] Stefan Arnborg, Andrzej Proskurowski, Derek G. Corneil (1990): Forbidden minors characterization of partial 3-trees, Discrete Mathematics 80, Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland)
- [2] Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil (2002): Kapitoly z diskrétní matematiky, Nakladatelství Karolinum, Praha 1
- [3] Bojan Mohar, Carste Thomassen (2001): Graphs on surfaces. The Johns Hopkins university press, Baltimore, Maryland.
- [4] Andrzej Proskurowski (1984): Separating subgraphs in  $k$ -trees: cables and caterpillars, Discrete Mathematics 49, Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland)
- [5] Wendy Marvold, Jianping Roth (2003): Simpler Projective Plane Embedding, dostupné z WWW (14.6.2009):

[http://webhome.cs.uvic.ca/~wendym/my\\_pubs/roth.ps.gz](http://webhome.cs.uvic.ca/~wendym/my_pubs/roth.ps.gz)