

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



František Dinnbier

### Hmotové přerozdělení – teorie a praxe

Astronomický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Ladislav Šubr, Ph.D.

Studijní program: Fyzika, Obecná fyzika

2010

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu RNDr. Ladislavu Šubrovi, Ph.D. za odborný a trpělivý dohled. Bez jeho vedení by tato práce vůbec nemohla vzniknout v této úrovni a rozsahu. Chtěl bych rovněž poděkovat svým rodičům za podporu, kterou mi prokazovali po celou dobu studia.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne: 27.5.2010

František Dinnbier

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Přehled důležitých vztahů</b>	<b>7</b>
2.1	Chandrasekharova rovnice dynamického tření . . . . .	7
2.2	Plummerův model . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Semianalytický odhad doby hmotového přerozdělení</b>	<b>13</b>
3.1	Radiální dráhy . . . . .	13
3.2	Kruhové dráhy . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Diskuse</b>	<b>23</b>
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>29</b>
<b>A</b>	<b>Odhad radiální závislosti disperze rychlostí</b>	<b>30</b>
<b>B</b>	<b>Odhad hmotového přerozdělení dle Mouri &amp; Taniguchi (2002)</b>	<b>32</b>
	<b>Literatura</b>	<b>37</b>

Název práce: Hmotové přerozdělení - teorie a praxe  
Autor: František Dinnbier  
Katedra (ústav): Astronomický ústav Univerzity Karlovy  
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Ladislav Šubr, Ph.D.  
e-mail vedoucího: subr@sirrah.troja.mff.cuni.cz

Abstrakt: Hmotové přerozdělení hraje důležitou roli ve vývoji self-gravitujících systémů. V důsledku jevu zvaného dynamické tření, tj. ztrát kinetické energie těžkých hvězd vlivem gravitační interakce s mnoha hvězdami lehčími, dochází ke koncentraci těžkých hvězd v jádrech hvězdokup. V této práci přinášíme analytický odhad rychlosti tohoto procesu. Vzhledem k jeho složitosti jsme se pokusili o odhad založený na studiu vybraných - radiálních a kruhových - drah. Naše výsledky byly porovnány s výstupy numerických modelů. S jejich pomocí jsme identifikovali dráhy, které lze označit za charakteristické pro podsystem těžkých hvězd, tj. takové, jejichž poloměr klesá přibližně stejně rychle, jako poloměr obsahující polovinu hmotnosti všech těžkých hvězd ve hvězdokupě.

Klíčová slova: dynamické tření – hmotové přerozdělení – hvězdokupa

Title: Mass segregation - theory and experience  
Author: František Dinnbier  
Department: Astronomical Institute of Charles University  
Supervisor: RNDr. Ladislav Šubr, Ph.D.  
Supervisor's e-mail address: subr@sirrah.troja.mff.cuni.cz  
Abstract: Mass segregation plays a key role in the evolution of self-gravitating systems. Due to a process of dynamical friction, i.e. a loss of the kinetic energy of heavier stars due to the interaction with many lighter stars, heavier stars concentrate in cores of star clusters. In this work we derive analytical estimate of the rate of this process. Because of its complexity we try to find our estimate by studying stars on radial and circular orbits. We compare our results with outputs of numerical models. With their help we identify trajectories radii of which decrease with approximately equal rate as a half-mass radius of heavier stars.

Keywords: dynamical friction – mass segregation – star cluster

# Kapitola 1

## Úvod

Dynamické tření je proces při kterém dochází vlivem gravitační interakce s větším počtem hvězd ke zpomalování zkoumaného objektu. Tento proces ovlivňuje vývoj velkého množství systémů. Značný vliv hraje například (viz [1]) při spirálování kulových hvězdokup do center galaxií. Podílí se na brždění Magellanových mračen v halu Galaxie, která potom padají k jejímu centru. U velkých eliptických galaxií, které pohlcují své menší souputníky nazýváme obdobný jev „galaktický kanibalismus“. Dynamické tření je však natolik univerzální, že se podstatně podílí i na vývoji hvězdokup, tj. objektů o několik řádů menších než výše uvedené příklady.

Počáteční stav hvězdokupy, který lze v některých případech popsat plumerovým modelem, vykazuje v průběhu času výrazné změny. Těžší hvězdy se soustředí v centru hvězdokupy kde vytvoří husté jádro, zatímco lehčí se vzdálí více od centra. Tento stav se nazývá hmotové přerozdělení. V pozdějších fázích vývoje dojde v centrálních částech hvězdokupy dle [2] k poklesu hustoty lehčích hvězd a rozpínání jádra těžších hvězd. Přitom některé hvězdy (i velmi hmotné) získávají energii potřebnou k opuštění hvězdokupy. Vývoj reálných hvězdokup je velmi složitý a nemáme k dispozici vzorec, kterým bychom jej mohli charakterizovat.

V této práci se pokusíme učinit analytický odhad času potřebného pro hmotové přerozdělení, který porovnáme s vývojem  $N$ -částicových numerických modelů poskytnutých vedoucím práce. Kvůli zjednodušení sestávají modelované hvězdokupy pouze ze dvou typů hvězd. Průběh procesu hmotového přerozdělení lze charakterizovat chováním poloměru  $r_h$ , pod kterým se nachází polovina hmotnosti těžších hvězd. Odtud určíme čas hmotového přerozdělení, který již bude možné porovnat s analytickými odhady. Analytické odhady provedeme podle

počátečního chování těžších hvězd na radiálních a kruhových drahách.

Kapitola 2 obsahuje základní fakta týkající se dynamického tření a plummerova modelu. V kapitole 3 odhadneme čas potřebný pro usazení hvězdy v centru hvězdokupy jak pro radiální, tak kruhové dráhy, v obou případech se pokusíme udělat odhad v případě konstantní i prostorově závislé disperze rychlostí v uvažované hvězdokupě. V kapitole 4 porovnáme tyto odhady s numerickými modely a odhadem učiněným jinými autory [3].

# Kapitola 2

## Přehled důležitých vztahů

### 2.1 Chandrasekharova rovnice dynamického tření

V tomto oddíle ukážeme odvození vztahu pro dynamické tření, které původně odvodil Chandrasekhar [4]. Většina kroků v této kapitole je převzata z práce [1], str.418-425.

U hvězd budeme po celou dobu odvození zanedbávat jejich prostorové rozměry, vždy je budeme považovat za hmotné body. Nejprve odvodíme vztah pro změnu rychlostí dvou různě hmotných hvězd po jejich vzájemném přiblížení. Tento výsledek dále uplatníme na změnu rychlosti jedné hvězdy, která zakouší řadu průchodů kolem hvězd, rozmístěných v prostoru s hustotou  $\rho$ .

Uvažujme nejprve hvězdu s hmotností  $M$ , která se přibližuje ke hvězdě hmotné  $m$  s náměrným parametrem  $b$  (viz obrázek 2.1). Nechť jsou  $(x_M, v_M)$  resp.  $(x_m, v_m)$  polohy a rychlosti hvězdy hmotné  $M$  resp.  $m$ . Zavedením vektorů  $\vec{r} = x_m - x_M$  a  $\vec{V} = \vec{v}$  získáme vztah

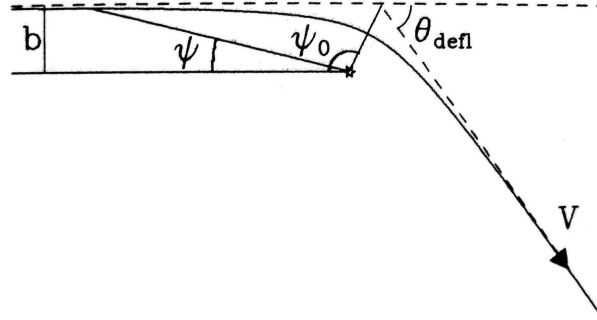
$$\left(\frac{mM}{m+M}\right)\ddot{\vec{r}} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r, \quad (2.1)$$

kteřý je ekvivalentní pohybové rovnici částice v Keplerovském potenciálu buzeném hmotností  $m+M$ . Pokud označíme  $\Delta v_m$  a  $\Delta v_M$  změnu rychlostí hvězdy hmotné  $m$  a  $M$  během přiblížení, získáme

$$\Delta v_m - \Delta v_M = \Delta \vec{V}. \quad (2.2)$$

Protože se během interakce nemění rychlost společného těžiště, platí

$$m\Delta v_m + M\Delta v_M = 0. \quad (2.3)$$



Obrázek 2.1: Geometrické uspořádání při odvození vztahu pro dvoučásticovou interakci. Převzato z [1].

Vyjádřením  $\Delta v_m^{\vec{}}$  ze vztahů (2.2) a (2.3) získáme

$$\Delta v_M^{\vec{}} = -\left(\frac{m}{m+M}\right)\Delta \vec{V}. \quad (2.4)$$

Ze zákona zachování momentu hybnosti plyne

$$L = bV_0, \quad (2.5)$$

kde  $L$  značí moment hybnosti na jednotkovou hmotnost a  $V_0$  je velikost počáteční rychlosti hvězdy  $M$  vůči hvězdě  $m$ , tj.  $\vec{V}_0 \equiv \vec{V}(t = -\infty)$ . Trajektorií částice pohybující se dle (2.1) je kuželosečka, která má v polárních souřadnicích tvar

$$\frac{1}{r} = C \cos(\psi - \psi_0) + \frac{G(m+M)}{b^2 V_0^2}, \quad (2.6)$$

kde  $r = |\vec{r}|$ , úhly  $\psi$  a  $\psi_0$  jsou vyznačeny na obrázku 2.1. Konstanty  $C$  a  $\psi_0$  jsou dány počátečními podmínkami. Časovou derivací rovnice (2.6) a ze zákona zachování momentu hybnosti získáme

$$\frac{dr}{dt} = Cr^2 \dot{\psi} \sin(\psi - \psi_0) = CbV_0 \sin(\psi - \psi_0). \quad (2.7)$$

Z asymptotického chování pro  $t \rightarrow -\infty$  kdy je  $\psi \rightarrow 0$ , získáme dosazením do (2.7)

$$-V_0 = CbV_0 \sin(-\psi_0). \quad (2.8)$$



Analogicky získáme dosazením  $t \rightarrow -\infty$  (potom jde  $r \rightarrow +\infty$ ) v (2.6) vztah

$$0 = C \cos \psi_0 + \frac{G(m+M)}{b^2 V_0^2}. \quad (2.9)$$

Vyjádřením konstanty  $C$  z (2.8) a jejím dosazením do (2.9) dostaneme

$$\operatorname{tg}(\psi_0) = -\frac{bV_0^2}{G(m+M)}. \quad (2.10)$$

Z (2.6) je zřejmé, že se obě hvězdy k sobě nejvíce přiblíží v okamžiku kdy je  $\psi = \psi_0$ . Protože dráha hvězdy  $M$  je vzhledem ke druhé hvězdě symetrická kolem úhlu  $\psi_0$ , nalétávající hvězda se od původního směru dráhy odkloní o úhel  $\theta_{defl} = 2\psi_0 - \pi$ , jak je patrné z obrázku 2.1. Ze zákona zachování energie plyne rovnost vzájemné rychlosti obou hvězd ve velmi dlouhém čase před průletem i po něm, tj.  $V(t = -\infty) = V(t = \infty)$ . Nyní můžeme vyjádřit složku vektoru  $\Delta\vec{V}$ ,  $\Delta\vec{V}_{\parallel}$  a  $\Delta\vec{V}_{\perp}$  rovnoběžnou a kolmou na směr vektoru  $\vec{V}_0$

$$|\Delta\vec{V}_{\perp}| = V_0 \sin \theta_{defl} = \frac{2V_0 |\operatorname{tg} \psi_0|}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_0} = \frac{2bV_0^3}{G(m+M)} \left[ 1 + \frac{b^2 V_0^4}{G^2(m+M)^2} \right]^{-1}, \quad (2.11)$$

$$|\Delta\vec{V}_{\parallel}| = V_0(1 - \cos \theta_{defl}) = \frac{2V_0}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_0} = 2V_0 \left[ 1 + \frac{b^2 V_0^4}{G^2(m+M)^2} \right]^{-1}. \quad (2.12)$$

Dosazením (2.11) a (2.12) do (2.4) získáme složky vektoru  $\Delta v_{\vec{M}}$  změny rychlosti během průletu hvězdy hmotné  $M$ ,

$$|\Delta v_{\vec{M}_{\perp}}| = \frac{2mbV_0^3}{G(m+M)^2} \left[ 1 + \frac{b^2 V_0^4}{G^2(m+M)^2} \right]^{-1}, \quad (2.13)$$

$$|\Delta v_{\vec{M}_{\parallel}}| = \frac{2mV_0}{m+M} \left[ 1 + \frac{b^2 V_0^4}{G^2(m+M)^2} \right]^{-1}. \quad (2.14)$$

Vektor  $\Delta\vec{V}_{\parallel}$  míří vždy v opačném směru než  $\vec{V}_0$ , proto podle (2.4) míří  $\Delta v_{\vec{M}_{\parallel}}$  ve stejném směru jako  $\vec{V}_0$ .

Dosud jsme uvažovali přiblížení dvou hvězd. Nyní uvažujeme hvězdu hmotnou  $M$ , která se pohybuje nekonečně rozlehlým a homogenním prostředím vyplněným hvězdami hmotnosti  $m$ . Zatímco součet změn rychlostí  $\Delta v_{\vec{M}_{\perp}}$  je po

větším počtu přiblížení nulový, změny rychlostí ve směru  $\Delta v_{M\parallel}$  se naopak sčítají a způsobují trvalé zpomalování hvězdy  $M$ , které se nazývá dynamické tření.

Pokud označíme rozdělovací funkci rychlostí hvězd  $f(\vec{v})$ , potom je míra kterou hvězda  $M$  potkává hvězdy v elementu rychlostí  $d^3v_m$  s náměrným parametrem mezi  $b$  a  $b + db$  dána  $2\pi b db V_0 f(\vec{v}_m) d^3v_m$ . Odtud lze určit zrychlení hvězdy  $M$  způsobené přiblíženími ke hvězdám pohybujících se rychlostmi  $v_m$

$$\left. \frac{dv_M}{dt} \right|_{v_m} = V_0 f(\vec{v}_m) d^3v_m \int_0^{b_{max}} \frac{2mV_0}{m+M} \left[ 1 + \frac{b^2V_0^4}{G^2(m+M)^2} \right]^{-1} 2\pi b db, \quad (2.15)$$

kde  $b_{max}$  je nejvyšší možný záměrný parametr. Integrací (2.15) přes  $b$  získáme

$$\left. \frac{dv_M}{dt} \right|_{v_m} = 2\pi \ln(1 + \Lambda^2) G^2 m (M + m) f(\vec{v}_m) d^3v_m \frac{(v_m - v_M)}{|v_m - v_M|^3}, \quad (2.16)$$

kde

$$\Lambda \equiv \frac{b_{max} V_0^2}{G(m+M)}. \quad (2.17)$$

Člen  $\ln \Lambda$  se nazývá Coulombův logaritmus. V typických případech je  $\Lambda$  velmi velké, proto přibližně platí  $\frac{1}{2} \ln(1 + \Lambda^2) \simeq \ln \Lambda$ . Dále tedy člen  $\frac{1}{2} \ln(1 + \Lambda^2)$  nahradíme členem  $\ln \Lambda$ . Za rychlost  $V_0$  v  $\Lambda$  budeme brát typickou rychlost  $v_{typ}$ . V (2.17) vystupující členy  $b_{max}$  a  $v_{typ}$  nejsou přesně definované. Vzhledem k tomu, že se logaritmují, jejich případná relativní chyba  $\delta$  se přenesení do Coulombova logaritmu jako relativní chyba  $\frac{\delta}{\ln \Lambda}$ , která je obecně mnohem menší než  $\delta$ .

V případě omezeného systému s celkovou hmotností  $M_0$  můžeme předpokládat, že mezi typickou rychlostí hvězd  $v_{typ}$  a největším uvažovaným náměrným parametrem  $b_{max}$  platí vztah  $v_{typ}^2 \simeq GM_0/b_{max} = GmN_0/b_{max}$ , kde  $N_0$  značí počet hvězd o hmotnosti  $m$ . Potom lze (2.17) vyjádřit jako

$$\Lambda \simeq \frac{mN_0}{m+M}. \quad (2.18)$$

Pokud v (2.16) aproximujeme  $\ln \Lambda$  konstantou, lze ve shodě s (2.16) tvrdit, že na hvězdu hmotnosti  $M$  působí ostatní hvězdy silami ve směrech  $v_m - v_M$ , které jsou nepřímou úměrou druhé mocniny velikosti těchto rychlostí. Je zde tedy patrná analogie ke gravitační síle, kdy roli polohového vektoru  $\vec{r}$  přebírá vektor rychlosti  $\vec{v}$ . V naší úloze potom hledáme obdobu intenzity gravitačního pole v bodě  $v_M$  buzeném hustotou  $\rho(v_m) \equiv 4\pi \ln \Lambda Gm(m+M)f(v_m)$ . Za předpokladu sféricky symetrického rozdělení hustoty rychlostí  $f(v_m)$ , máme analogii k intenzitě gravitačního pole sféricky symetrického objektu. V takovém případě přispívá

k intenzitě gravitačního pole pouze hmota uzavřená uvnitř poloměru, na kterém se testovací částice nachází, v našem případě  $v_M$ . Proto jen hvězdy pomalejší než  $v_M$  přispívají k třecí síle, což se projeví v mezích integrálu v (2.19). Celkové zrychlení hvězdy  $M$  je úměrné  $\frac{G}{v_M^2}$  krát „celková hmotnost“ uvnitř poloměru  $v_m$ , tedy

$$\frac{dv_M}{dt} = -16\pi^2 \ln \Lambda G^2 m(M+m) \frac{\int_0^{v_M} f(v_m) v_m^2 dv_m}{v_M^3} v_M. \quad (2.19)$$

Vztah (2.19) se nazývá Chandrasekharova rovnice dynamického tření. Důležitým důsledkem plynoucím z (2.19) je, že síla dynamického tření působí vždy proti směru pohybu hvězdy  $M$ .

Tvar rovnice (2.19) v konkrétním případě závisí na rozdělení rychlostí  $f(v_m)$ . Předpokládejme maxwellovské rozdělení rychlostí s disperzí  $\sigma$

$$f = \frac{n_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.20)$$

kde  $n_0$  značí počet hvězd v jednotkovém objemu. Dosazením (2.20) do (2.19) a následnou integrací získáme

$$\frac{dv_M}{dt} = -\frac{4\pi \ln \Lambda G^2 (M+m) n_0 m}{v_M^3} \left[ \operatorname{erf}(X) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}} e^{-X^2} \right] v_M, \quad (2.21)$$

kde

$$X \equiv \frac{v}{\sqrt{2}\sigma}. \quad (2.22)$$

Za předpokladu, že hmotnost hvězdy  $M$  je mnohem větší než hmotnost hvězd prostředí  $m$ , lze s označením  $\rho \equiv n_0 m$ , vztah (2.21) přepsat na

$$\frac{dv_M}{dt} = -\frac{4\pi \ln \Lambda G^2 \rho M}{v_M^3} \left[ \operatorname{erf}(X) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}} e^{-X^2} \right] v_M. \quad (2.23)$$

Tento vztah platí i v obecnějším případě pro prostředí tvořené hvězdami různých hmotností, ale s hustotou  $\rho$ . Ze vztahu (2.23) rovněž plyne, že zrychlení způsobené třecí silou je úměrné hmotnosti bržděné hvězdy  $M$ , proto je třecí síla úměrná  $M^2$ .

Vztah (2.19) poskytuje navzdory provedeným aproximacím poměrně přesné odhady i pro nehomogenní a konečná prostředí. V případě, kdy hmotnost  $M$  přesahuje o více než 20 % hmotnost celého systému nebo se těleso  $M$  pohybuje uvnitř centra systému nebo naopak za jeho vnějšími hranicemi obvykle nelze vztah (2.19) použít.

## 2.2 Plummerův model

Rozdělení hvězd v kulových hvězdokupách bývá často aproximováno plummerovým modelem [5], který má analytický profil hustoty

$$\rho(r) = \frac{3M_c}{4\pi a^3} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{5/2}}, \quad (2.24)$$

kde  $M_c$  značí hmotnost hvězdokupy,  $a$  charakteristický poloměr a  $r$  vzdálenost od středu hvězdokupy. Dosazením do Newtonova gravitačního zákona  $\nabla^2 U = 4\pi G\rho$  se lze přesvědčit že hustotě (2.24) odpovídá potenciál

$$U(r) = -\frac{GM_c}{\sqrt{a^2 + r^2}}, \quad (2.25)$$

kde  $G$  je gravitační konstanta. Dále budeme předpokládat, že je hvězdokupa jako celek ve viriálové rovnováze. Z tohoto požadavku vyjádříme kinetickou energii hvězdokupy na jednotku hmotnosti

$$\tilde{E}_{kin} = \frac{3\pi}{64} \frac{GM_c}{a}. \quad (2.26)$$

Integrací hustoty (2.24) přes celý prostorový úhel od centra až do poloměru  $r$  získáme vztah pro hmotnost hvězd  $M_c(r)$  uzavřených uvnitř koule o poloměru  $r$ , jejíž střed je totožný se středem plummerovy sféry

$$M_c(r) = \frac{M_c r^3}{\sqrt{(a^2 + r^2)^3}}. \quad (2.27)$$

Při studiu hmotového přerozdělení bude hrát velmi důležitou úlohu poloměr  $r_h$  pod kterým je obsažena polovina hmotnosti těžších hvězd ve hvězdokupě. Vypočtíme proto poloměr  $r_{h0}$ , pod kterým se nachází polovina hmotnosti hvězd v plummerově sféře. Ze vztahu (2.27) lze řešením rovnice

$$\frac{M_c r_{h0}^3}{\sqrt{(a^2 + r_{h0}^2)^3}} = \frac{M_c}{2} \quad (2.28)$$

získat velmi jednoduché vyjádření pro tento poloměr

$$r_{h0} = \frac{a}{\sqrt{\sqrt[3]{4} - 1}} \doteq 1,3a. \quad (2.29)$$

Plummerův model je díky své snadné implementaci velmi často používaný jako počáteční stav hvězdokup v numerických modelech.

# Kapitola 3

## Semianalytický odhad doby hmotového přerozdělení

V této kapitole se pokusíme odhadnout čas potřebný k veškeré ztrátě kinetické energie hvězdy procesem dynamického tření, v jehož důsledku se zastaví v centru hvězdokupy. Vzhledem k velmi komplikovaným podmínkám v reálných hvězdokupách bude třeba použít řadu aproximací. Předně uvažujeme, že se testovací částice v průběhu celého děje pohybuje v plummerově potenciálu. Připomeňme, že vztah (2.23), který použijeme pro odhad třecí síly byl odvozen pro homogenní prostředí, což plummerova sféra samozřejmě nesplňuje. Pro jednoduchost budeme detailně studovat dva typy drah, kruhové a radiální. Dále budeme předpokládat, že se charakter uvažovaných orbit nemění, t.j. že radiální dráhy zůstávají radiálními a kruhové kruhovými. Dle numerických modelů jsou pro další vývoj hvězdokupy podstatné interakce mezi těžšími hvězdami v centrální části hvězdokupy, oproti tomu zde necháme všechny těžší hvězdy „spadnout“ přímo do centra, což v reálných hvězdokupách nenastává (viz vývoj  $r_h$  poloměru těžších hvězd na obrázku 4.1). Čas potřebný pro usazení hvězdy v centru hvězdokupy odhadneme pro oba studované typy drah porovnáním rozdílu energie potřebné k usazení v centru a počátečnímu úbytku energie.

### 3.1 Radiální dráhy

Uvažujme hvězdu hmotnosti  $M_s$  na čistě radiální dráze s celkovou mechanickou energií  $E$ . Označme  $W$  ztrátu energie hvězdy za jednu periodu  $T_r$ . Pro další úvahy bude užitečné počítat se specifickou energií  $\bar{E}$  a ztrátou specifické energie

$\tilde{W}$ ,

$$\tilde{E} = \frac{E}{M_s}, \quad (3.1)$$

$$\tilde{W} = \frac{W}{M_s}. \quad (3.2)$$

Počáteční úbytek specifické energie za čas  $t$  odhadneme jako

$$\left. \frac{d\tilde{E}}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\tilde{W}}{T_r}. \quad (3.3)$$

Neuvažujeme tedy změnu rychlosti v důsledku dynamického tření, která by opětovně ovlivnila velikost třecí síly během jedné periody. Potom již můžeme odhadnout čas  $\tau_{rE}$  potřebný k usazení hvězdy v centru hvězdokupy jako poměr specifických energetických ztrát k celkové specifické energii  $\Delta\tilde{E}$ , kterou hvězda musí svému okolí odevzdat aby se mohla zastavit v centru hvězdokupy, tj.

$$\tau_{rE} = \frac{\Delta\tilde{E}}{\left| d\tilde{E}/dt \right|_{t=0}} = \frac{\Delta\tilde{E}}{\tilde{W}/T_r}. \quad (3.4)$$

Ze zákona zachování mechanické energie lze snadno získat rychlost  $v$  tělesa pohybujícího se po radiální dráze v potenciálu (2.25) ve vzdálenosti  $r$  od středu hvězdokupy

$$v(r) = \sqrt{2\tilde{E} + \frac{2GM_c}{\sqrt{a^2 + r^2}}}. \quad (3.5)$$

S uvážením, že v bodě obratu  $r_0$  se bude hvězda pohybovat nulovou rychlostí, lze opět ze zákona zachování energie získat

$$r_0 = \sqrt{\left( \frac{GM_c}{\tilde{E}} \right)^2 - a^2}. \quad (3.6)$$

Specifickou energii hvězdy lze potom zavedením

$$n \equiv \frac{r_0}{a} \quad \text{a} \quad k(n) \equiv \sqrt{1 + n^2}, \quad (3.7)$$

vyjádřit podle (2.25) jako funkci bodu obratu  $r_0$

$$\tilde{E} = -\frac{GM_c}{\sqrt{a^2 + r_0^2}} = -\frac{GM_c}{ak(n)}. \quad (3.8)$$

Protože mezi elementem dráhy  $dr$ , který hvězda urazí za element času  $dt$  a rychlostí  $v$  platí vztah

$$v(r(t)) = \frac{dr}{dt}, \quad (3.9)$$

můžeme periodu průchodu  $T_r$  přes střed hvězdokupy určit integrací

$$\int_0^{T_r} dt = 4 \int_0^{r_0} \frac{dr}{v(r)}. \quad (3.10)$$

Integrál na pravé straně rovnice (3.10) stačí vypočítat pouze přes čtvrtinu periody z důvodu sférické symetrie hvězdokupy (pokud vyloučíme změny celkové energie hvězdy a potenciálu hvězdokupy během jedné periody). Dosazením (3.5) do (3.10) získáme s využitím (3.8) vztah pro periodu hvězdy na radiální dráze

$$T_r = \frac{4a^{1/2}}{\sqrt{2GM_c}} \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{r}{a})^2}} - \frac{1}{k(n)}}}. \quad (3.11)$$

Substitucí  $u = \frac{r}{a}$  přejde (3.11) na

$$T_r = \frac{4a^{3/2}}{\sqrt{2GM_c}} L(n), \quad (3.12)$$

kde

$$L(n) \equiv \int_0^n \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{1}{k(n)}}}. \quad (3.13)$$

V (3.13) je zřejmé, že  $L(n)$  ( $n$  může být obecně reálné nezáporné číslo) nezávisí na parametrech hvězdokupy, ale pouze na maximální dosažitelné vzdálenosti hvězdy od středu hvězdokupy.

Abychom mohli vyjádřit  $\tau_{rE}$  dle (3.4), je třeba v dalším kroku vyjádřit ztrátu specifické energie hvězdy  $\tilde{W}$  během jedné periody. Na hvězdu  $M_s$  pohybující se v plummerově potenciálu působí gravitační a třecí síla. Působí-li na těleso síla  $\vec{F}$ , v jejímž důsledku urazí infitezimální vzdálenost  $\vec{ds}$ , vykoná tato síla infitezimální práci  $dW$  danou

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{ds}. \quad (3.14)$$

Protože uvažujeme hvězdu na radiální dráze, působí na ní jak gravitační, tak třecí síla buď ve směru jejího pohybu nebo ve směru přesně opačném, přejde skalární součin v (3.14) v obyčejný součin absolutní hodnoty vektorů  $\vec{F}$  a  $\vec{ds}$ . Práce vykonaná gravitační silou je během jedné periody nulová (síla působí jak

ve směru, tak proti směru pohybu hvězdy v symetrickém potenciálu). Naopak třecí síla působí vždy proti směru pohybu hvězdy. Úbytek energie hvězdy tedy ztotožníme s prací vykonanou třecí silou. Absolutní hodnotu třecí síly budeme dále značit  $F$ . Pokud nalezneme vyjádření absolutní hodnoty třecí síly (2.23) na vzdálenosti  $r$  od centra hvězdokupy, tj.  $F = F(r)$ , získáme dle (3.14) úbytek energie hvězdy během jedné periody integrací

$$W = 4 \int_0^{r_0} F(r) dr = 16\pi \ln \Lambda G^2 M_s^2 \times \int_0^{r_0} \frac{\rho(r)}{v^2(r)} \left[ \operatorname{erf}(X(r)) - \frac{2X(r)}{\sqrt{\pi}} e^{-X^2(r)} \right] dr. \quad (3.15)$$

Integrál (3.15) můžeme pořídit jen přes 1/4 periody z důvodu symetrie obdobně jako v případě výpočtu periody  $T_r$ .

K provedení integrace (3.15) je třeba znát rychlost  $v$  a člen  $X$  v místě  $r$ . Dosazením (3.7) do (3.5) získáme vyjádření rychlosti hvězdy na její vzdálenosti od centra hvězdokupy a počáteční energii vyjádřenou v násobcích charakteristického poloměru  $n$

$$v(r) = \sqrt{\frac{2GM_c}{a}} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{r}{a})^2}} - \frac{1}{k(n)}}. \quad (3.16)$$

Pro vyjádření členu  $X$  ve vztahu (3.15) je třeba znát disperzi rychlostí  $\sigma$  hvězd ve hvězdokupě. Pokusíme se vyjádřit odhad jak v případě aproximace, kdy považujeme disperzi v celé hvězdokupě za konstantní, tak pokud budeme uvažovat její prostorovou závislost dle (A.6). V druhém případě bude hvězda při pohybu po radiální dráze v různých vzdálenostech od centra hvězdokupy procházet prostředím s různou disperzí. Zde provedeme odvození pro  $\sigma$  konstantní, analogické odvození pro proměnné  $\sigma$  lze nalézt v příloze A.

Ze vztahu (2.26) můžeme určit střední kvadratickou rychlost všech hvězd ve hvězdokupě

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3\pi GM_c}{32a}. \quad (3.17)$$

Středné kvadratická rychlost  $\langle v^2 \rangle$  hvězd s maxwellovským rozdělením rychlostí (2.20) je dána vztahem

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty v^2 f(v) d^3 \vec{v}}{\int_0^\infty f(v) d^3 \vec{v}} = \frac{4\pi}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \int_0^\infty v^4 e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv. \quad (3.18)$$

Integrací (3.18) získáme vztah mezi střední kvadratickou rychlostí  $\langle v^2 \rangle$  hvězd s



rozdělením (2.20) a disperzí  $\sigma$ ,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\langle v^2 \rangle}{3}}. \quad (3.19)$$

Budeme-li předpokládat, že rozdělení rychlostí lehčí složky hvězd ve hvězdokupě lze aproximovat jako maxwellovské (2.20), získáme porovnáním (3.17) s (3.19) vyjádření disperze  $\sigma$  pomocí veličin  $M_c$  a  $a$  charakterizujících hvězdokupu

$$\sigma = \sqrt{\frac{\pi G M_c}{32a}}. \quad (3.20)$$

Funkční závislost  $X$  na poloměru  $r$  se liší pro případ konstantní a prostorově závislé disperze. Proto budeme dále veličiny týkající se konstantní disperze značit dolním indexem 0, prostorově závislé 1. Dosazením (3.16) a (3.20) do (2.22) vyjádříme člen  $X_0$ ,

$$X_0(r) = \sqrt{\frac{32}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{r}{a})^2}} - \frac{1}{k(n)}}, \quad (3.21)$$

a z rovnic (2.22), (3.16), (A.6) člen  $X_1$ ,

$$X_1(r) = \sqrt{6} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{1 + (\frac{r}{a})^2}}{k(n)}}. \quad (3.22)$$

Odhady členů  $X_0$  a  $X_1$  tedy nezávisí na celkové hmotnosti hvězdokupy  $M_c$ .

V následujících výpočtech se bude objevovat člen  $\operatorname{erf}(X) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}}e^{-X^2}$  ze vztahu (2.23). Označme proto

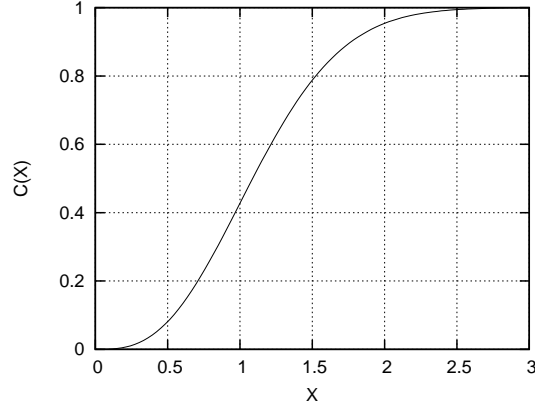
$$C(X) \equiv \operatorname{erf}(X) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}}e^{-X^2}. \quad (3.23)$$

Průběh funkce  $C(X)$  je vynesena v obrázku 3.1. Z (3.23) je zřejmé, že s rostoucím  $X$  se funkce  $C(X)$  blíží k jedné. Dosazením vztahů (2.24), (3.16), (3.21) resp. (3.22) do (3.15) a následnou substitucí  $u = \frac{r}{a}$  získáme

$$W = \frac{6 \ln \Lambda G M_s^2 K_j(n)}{a}, \quad (3.24)$$

kde

$$K_j(n) \equiv \int_0^n \frac{1}{\sqrt{(1+u^2)^5}} \frac{C(X_j(u))}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\right)} du, \quad (3.25)$$



Obrázek 3.1: Průběh funkce  $C(X)$  v intervalu  $\langle 0, 3 \rangle$ .

kde je třeba rozlišovat člen  $X_j$  ( $j = 0,1$ ) pro oba uvažované případy disperze,

$$X_j(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{32}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}} & \text{pro } j = 0 \\ \sqrt{6} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1+n^2}}} & \text{pro } j = 1. \end{cases} \quad (3.26)$$

Netriviální závislost integrálů  $K_j(n)$  a  $L(n)$  na parametru  $n$  je znázorněna na obrázku 3.2. Numerická integrace byla provedena v programu Wolfram Mathematica 6.0.

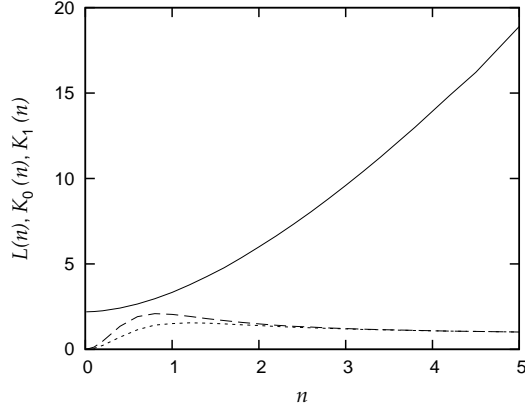
Ze vztahu (3.8) snadno určíme specifickou energii  $\Delta\tilde{E}$  vystupující v (3.4)

$$\Delta\tilde{E} = \tilde{E}(n) - \tilde{E}(0) = \frac{GM_c}{a} \left(1 - \frac{1}{k(n)}\right). \quad (3.27)$$

Nyní již můžeme dosadit (3.27), (3.12) a (3.24) (s využitím (3.2)) do (3.4), čímž nalezneme odhad času  $\tau_{rE}$ ,

$$\tau_{rE} = \frac{2L(n)}{3K_j(n)} \frac{1}{M_s \ln \Lambda} \sqrt{\frac{a^3 M_c}{2G}} \left(1 - \frac{1}{k(n)}\right). \quad (3.28)$$

Další způsob jak vyjádřit odhad doby potřebné pro usazení v centru hvězdokupy je podle úbytku maximální vzdálenosti od centra, tj. (3.29). Hvězda na radiální dráze s počáteční specifickou energií  $\tilde{E}$  se může vzdálit od středu hvězdokupy na maximální vzdálenost danou (3.6). Předpokládejme, že hvězda z této



Obrázek 3.2: Závislost integrálů  $L(n)$  (plná čára),  $K_0(n)$  (přerušovaná čára) a  $K_1(n)$  (tečkovaná čára) na parametru  $n$ .

vzdálenosti ztrácí energii výše popsaným způsobem. Potom můžeme čas  $\tau_{rr}$ , za který se usadí v centru hvězdokupy odhadnout

$$\tau_{rr} = \left. \frac{r_0}{|dr_0/dt|} \right|_{t=0}. \quad (3.29)$$

Podle (3.6) závisí změna maximální možné vzdálenosti hvězdy pouze na specifické energii, protože ostatní veličiny v tomto vztahu považujeme během procesu za konstanty. Potom lze psát

$$\frac{dr_0}{dt} = \frac{\partial r_0}{\partial \tilde{E}} \frac{d\tilde{E}}{dt}. \quad (3.30)$$

Parciální derivací (3.6) a dosazením společně s (3.3) do (3.30) získáme

$$\left. \frac{dr_0}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{\tilde{W}}{T_r} \frac{G^2 M_c^2}{\tilde{E}^3} \frac{1}{\sqrt{(\frac{GM_c}{\tilde{E}})^2 - a^2}}. \quad (3.31)$$

Nyní již můžeme z (3.12) a (3.24) (s pomocí (3.2)) dosadit do (3.31) a odtud dalším dosazením do (3.29) vyjádřit

$$\tau_{rr} = \frac{2L(n)}{3K_j(n)} \frac{1}{M_s \ln \Lambda} \sqrt{\frac{a^3 M_c}{2G} \left( \frac{k(n)^2 - 1}{k(n)^3} \right)}. \quad (3.32)$$

## 3.2 Kruhové dráhy

Uvažujme nyní hvězdu  $M_s$ , která se pohybuje po kruhové dráze o poloměru  $r$ . Z rovnosti odstředivé a gravitační síly získáme s použitím vztahu (2.27) vyjádření její rychlosti  $v$

$$v = \sqrt{\frac{GM_c(r)}{2r}} = \sqrt{\frac{GM_cr^2}{\sqrt{(a^2 + r^2)}}}, \quad (3.33)$$

kde  $M_c(r)$  značí hmotnost části hvězdokupy uzavřené uvnitř poloměru  $r$ , protože na hvězdu působí gravitační silou pouze ta část hvězdokupy, která se nachází uvnitř její dráhy a její působení je ekvivalentní působení hmotného bodu stejné hmotnosti (tj.  $M_c(r)$ ) umístěném ve středu hvězdokupy (první a druhý Newtonův teorém).

Ze vztahů (2.25) a (3.33) snadno získáme celkovou specifickou energii  $\tilde{E}$  této hvězdy,

$$\tilde{E} = -\frac{GM_c}{a\sqrt{(1 + (\frac{r}{a})^2)^3}} \left(1 + \frac{r^2}{2a^2}\right). \quad (3.34)$$

Specifickou sílu  $\tilde{F}$ , kterou na hvězdu působí dynamické tření určíme dosazením (2.24) a (3.33) do (2.23), tj.

$$\tilde{F} = -\frac{3G \ln \Lambda M_s C(X)}{r^2(1 + (\frac{r}{a})^2)}, \quad (3.35)$$

kde  $C(X)$  je dáno vztahem (3.23). Obdobně se jako v případě radiálních drah pokusíme o odhad času usazení hvězdy v centru hvězdokupy v případě konstantní a prostorově závislé disperze  $\sigma$ . Oproti výše uvažovanému pohybu hvězdy po radiálních drahách se zde oba uvažované typy disperze budou projevat obdobně. Podle (A.6) prochází celá trajektorie hvězdy v případě prostorově závislé disperze narozdíl od radiálních drah prostředím se stále stejnou disperzí a jen její hodnota se odlišuje od případu, kdy uvažujeme konstantní disperzi v celé hvězdokupě. Z důvodu sféricky symetrického rozložení hustoty je i třecí síla (3.35) konstantní v každém bodě trajektorie hvězdy (neuvažujeme změnu trajektorie vlivem ztrát energie způsobených dynamickým třením). Protože se hvězda pohybuje po kruhové dráze v místě  $r$  obecně jinou rychlostí než v případě radiální dráhy, mají členy  $X$  v (3.35) jinou závislost na  $r$  než v případě radiálních drah. Členy  $X$  označíme obdobně jako v případě radiálních drah dolními indexy 0 (konstantní disperze) a 1 (prostorově závislá disperze). V aproximaci, kdy je disperze  $\sigma$  v

celé hvězdokupě konstantní, získáme dosazením (3.33) a (3.20) do (2.22) vztah

$$X_0(r) = \frac{r}{a} \frac{4}{\sqrt{\pi \sqrt{(1 + (\frac{r^2}{a^2}))^3}}}. \quad (3.36)$$

Za předpokladu prostorově závislé disperze rychlostí máme přibližný vztah (A.6), jeho dosazením do (2.22) s použitím (3.33) získáme

$$X_1(r) = \frac{r}{a} \sqrt{\frac{3}{\sqrt{1 + (\frac{r}{a})^2}}}. \quad (3.37)$$

Perioda  $T_k$  oběhu hvězdy po kruhové dráze o poloměru  $r$  je dána

$$T_k = \frac{2\pi r}{v}. \quad (3.38)$$

Obdobně jako v případě radiálních drah odhadneme ztráty specifické energie podle  $d\tilde{E}/dt|_{t=0} = \tilde{W}/T_k$ , kde  $\tilde{W}$  je práce vykonaná třecí silou na jednotkovou hmotnost hvězdy během jedné periody  $T_k$ . Protože třecí síla působí v opačném směru než je směr pohybu hvězdy, podle (3.14) platí  $\tilde{W} = 2\pi r \tilde{F}$ . Odtud ze vztahů (3.35) a (3.38) získáme

$$\left. \frac{d\tilde{E}}{dt} \right|_{t=0} = - \frac{3G \ln \Lambda M_s C(X)}{r(1 + (\frac{r}{a})^2)} \sqrt{\frac{GM_c}{\sqrt{(a^2 + r^2)^3}}}. \quad (3.39)$$

Analogicky k případu pohybu hvězdy po radiální dráze budeme předpokládat, že hvězda během svého spirálování do centra hvězdokupy ztrácí energii stále stejným tempem jako na počátečním poloměru  $r$ , tj. podle (3.39). Podle (2.25) a (3.34) lze určit specifickou energii  $\Delta\tilde{E}$

$$\Delta\tilde{E} = \tilde{E} - \left( - \frac{GM_c}{a} \right) = \frac{GM_c}{a} \left( 1 - \frac{1 + \frac{r^2}{2a^2}}{\sqrt{(1 + (\frac{r}{a})^2)^3}} \right) = \alpha \frac{GM_c}{a}, \quad (3.40)$$

kteřou je třeba hvězdě odebrat, aby se mohla usadit uprostřed hvězdokupy. Za těchto předpokladů lze odhadnout čas  $\tau_k$  spirálování do centra z poloměru  $r$

$$\tau_k = \left. \frac{\Delta\tilde{E}}{\tilde{E}/dt} \right|_{t=0} = \alpha \frac{r}{a} \sqrt{\frac{a^3 M_c}{G}} \frac{(1 + (\frac{r}{a})^2)^{7/4}}{3 \ln \Lambda M_s C(X)}, \quad (3.41)$$

kde konstanta  $\alpha$  byla definována v (3.40). Ve vztahu (3.41) je třeba dosadit příslušný člen  $X$  v uvažované aproximaci disperze rychlostí.

Pokud bychom chtěli přinést odhad času usazení hvězdy v centru hvězdokupy z radiální dráhy vztahem analogickým k (3.29), narazili bychom na značné obtíže. K nalezení závislosti  $r = r(\tilde{E})$  je nutné vyřešit rovnici třetího řádu. Její následnou derivací (analogicky k (3.30)) podle  $\tilde{E}$  by se vyjádření rychlosti stalo velmi komplikované. Z toho důvodu je zde nebudeme odvozovat a spokojíme se s jednodušším vztahem (3.41).

# Kapitola 4

## Diskuse

V předchozí kapitole jsme odvodili odhady časů potřebných pro usazení hvězd na vybraných drahách ve středu hvězdokupy. Nyní můžeme porovnat časy usazení hvězd dle vztahů (3.41), (3.28) a (3.32) s numerickými modely a nezávislým odhadem (B.28) dle Mouri & Taniguchi [3].

V N-částicových modelech poskytnutých vedoucím práce byla hvězdokupa vystavěna pouze ze dvou typů hvězd a v počátečním čase neobsahovala dvojhvězdy. Oba modely měly na počátku plummerovo rozložení hustoty jak pro lehčí, tak těžší složku. Časový vývoj modelů byl sledován přímou numerickou integrací pohybových rovnic pomocí programu NBODY6 [7]. Během vývoje docházelo ve shodě s [1] k rozpínání poloměru  $r_{hl}$ , pod kterým se nachází polovina hmotnosti celé hvězdokupy, zatímco poloměr  $r_h$  těžších hvězd se smršťuje (viz obrázek 4.1). Tento jev souvisí se vzrůstem entropie hvězdokupy. V pozdějších fázích vývoje dojde v centrálních částech hvězdokupy dle [2] k poklesu hustoty lehčích hvězd a druhotnému rozpínání poloměru  $r_h$  těžších hvězd. Přitom některé hvězdy (i velmi hmotné) získávají energii potřebnou k opuštění hvězdokupy. Studium vývoje po stádiu hmotového přerozdělení však již není náplní této práce.

Oba numerické modely měly charakteristický poloměr  $a = 0,31\text{pc}$ , celkovou hmotnost  $M_c = 10^4 M_\odot$  a obsahovaly 8000 lehčích hvězd, z nichž každá měla hmotnost  $m_0 = 1M_\odot$ . Rozdílnost modelů byla ve hmotnosti těžších hvězd, model 019 obsahoval 200 těžších hvězd o hmotnosti  $m = 10M_\odot$ , model 024 obsahoval 100 těžších hvězd hmotných  $m = 20M_\odot$ .

Protože všechny vlastní odhady času pro usazení v centru hvězdokupy byly pořízeny podle počátečního chování vybrané hvězdy, nabízí se jej porovnat s počátečním vývojem  $r_h$  poloměru numerických modelů. Lineární extrapolací prvních dvou bodů závislosti  $r_h = r_h(t)$  v numerických modelech získáme odhad

času hmotového přerozdělení  $\tau_{num}$  (viz obrázek 4.1). Pro model 019 odtud plyne  $\tau_{num} = 4,9\text{Myr}$ , pro model 024 je  $\tau_{num} = 2,6\text{Myr}$ .

Poznamenejme, že se v případě radiálních drah výrazně neliší odhady pro  $n > 1$  v případě konstantní a prostorově závislé disperze, u kruhových drah obdobný průběh nepozorujeme (viz obrázky 4.2 a 4.3). U kruhových drah se nepodařilo poskytnout jednoduchý odhad času usazení v centru hvězdokupy dle časového úbytku poloměru (analogie k (3.30)). Protože se odhady časů  $\tau_{rr}$  a  $\tau_{rE}$  řádově neliší (viz tabulky 4.1 a 4.2) lze tím podpořit domněnku že se ani odhad tohoto času řádově neliší od  $\tau_k$ .

Nejprve se pokusíme porovnat odhad času usazení hvězdy na některé z charakteristických drah s časem hmotového přerozdělení numerických modelů. Jako možné charakteristické dráhy se nabízí následující:

- hvězda s bodem obratu na  $r_{h0}$  (daný vztahem (2.29),  $n = 1, 3$ ).
- hvězda na kruhové dráze s poloměrem  $r_{h0}$  ( $n = 1, 3$ ).
- Dále jsme vybrali hvězdu na radiální dráze se stejnou energií jakou má hvězda na kruhové dráze o poloměru  $r_{h0}$ , pro její bod obratu platí  $n = 1, 7$ .
- Uvažujme ještě takovou radiální dráhu na níž má hvězda specifickou energii shodnou se specifickou energií celé hvězdokupy. Protože je hvězdokupa ve viriálové rovnováze, platí z viriálového teorému pro specifickou energii takové hvězdy vztah  $\tilde{E} = -\tilde{E}_{kin}$ . Z tohoto vztahu s použitím (2.25) a (2.26) vyjádříme bod obratu této hvězdy,  $n = 6, 7$ .

Odhady časů usazení hvězd v centru hvězdokupy z výše popsaných charakteristických drah jsou uvedeny v tabulkách 4.1 a 4.2. Byly vypočteny ze vztahů (3.28), (3.32) a (3.41). Coulombův logaritmus byl pro všechny odhady vypočten podle vztahu (2.18). Odtud plynoucí  $\ln \Lambda = 6,6$  (mod 019) a  $\ln \Lambda = 6,0$  (mod 024) se řádově shodují s [1], kde je uvedena typická hodnota Coulombova logaritmu pro otevřené hvězdokupy 5,8 v centru a 6,5 na  $r_{h0}$ .

Z tabulek 4.1 a 4.2 a obrázků 4.2 a 4.3 je zřejmé že hvězda, která krouží na dráze, jejíž poloměr se shoduje s počátečním  $r_{h0}$  poloměrem hvězdokupy dosáhne centra v přibližně stejném čase jako  $\tau_{num}$  v případě obou modelů. Z týchž tabulek plyne, že žádná z námi vybraných radiálních drah necharakterizuje dobře podmnožinu těžších hvězd. Vzhledem ke značné citlivosti pádu z kruhových drah (viz obrázky 4.2 a 4.3) na počátečním poloměru lze vyslovit domněnku, že kruhové dráhy neslouží k odhadu hmotového přerozdělení nejlépe. Proto se pokusíme porovnáním s numerickými modely nalézt takovou radiální dráhu, ze které se



$n$	$\frac{r_0}{r_{h0}}$	$\frac{\tau_{rr0}}{\text{Myr}}$	$\frac{\tau_{rr1}}{\text{Myr}}$	$\frac{\tau_{rE0}}{\text{Myr}}$	$\frac{\tau_{rE1}}{\text{Myr}}$	$\frac{\tau_{k0}}{\text{Myr}}$	$\frac{\tau_{k1}}{\text{Myr}}$
1,3	1,0	1,5	1,8	1,5	1,8	7,6	6,2
1,7	1,3	2,1	2,3	2,7	3,0	22	16
2,2	1,7	2,9	3,0	5,0	5,3	72	49
3,6	2,8	4,8	4,8	14	14	810	420
6,7	5,1	7,4	7,4	44	44	20000	6200

Tabulka 4.1: Přehled odhadů časů usazení hvězd v centru hvězdokupy pro charakteristické radiální a kruhové dráhy v případě modelu 019. Dolní index 0 resp. 1 značí konstantní resp. proměnnou disperzi rychlostí  $\sigma$ . Připomeňme že  $\tau_{num} = 4,9\text{Myr}$ .

hvězda usadí v centru hvězdokupy za stejný čas jako  $\tau_{num}$ . V případě, že odhadujeme čas podle vztahu (3.28) má takováto dráha bod obratu  $n \doteq 2,2$ . V případě odhadu dle (3.32) získáme  $n \doteq 3,6$ . Čas odhadnutý podle radiálních drah s těmito parametry se dobře shoduje s  $\tau_{num}$  v případě obou modelů (viz tabulky 4.1 a 4.2).

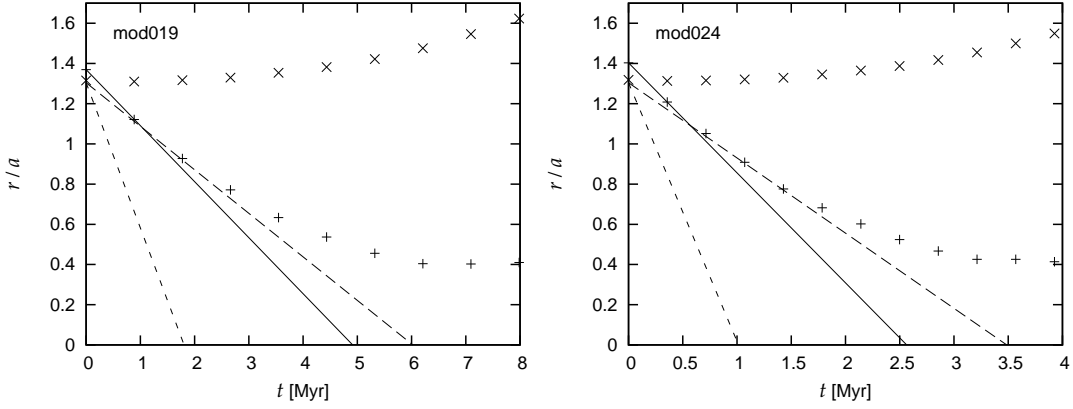
Vzhledem ke shodné závislosti vztahů (3.28), (3.32) a (3.41) na fyzikálních veličinách a stejný odhad času usazení z radiálních drah s bodem obratu  $n \doteq 2,2$  resp.  $n \doteq 3,6$  a kruhových drah s poloměrem  $r_{h0}$ , bude odhad času  $\tau_r$  usazení hvězdy z těchto drah popsán dle (3.28), (3.32) a (3.41) vztahem

$$\tau_r = \frac{K}{m \ln \Lambda} \sqrt{\frac{a^3 M_c}{2G}}, \quad (4.1)$$

kde  $K \doteq 1,7$ . Protože platnost vztahu (4.1) byla ověřena pouze v případě dvou numerických modelů, mohli bychom o obecnosti tohoto výsledku rozhodnout až na základě jeho srovnání s více numerickými modely s různými parametry.

Důležitým důsledkem (4.1) je závislost času hmotového přerozdělení na hmotnosti těžších hvězd jako  $m^{-1}$ , která byla potvrzena numerickými modely (viz vývoj  $r_h$  poloměru na obrázku 4.1). Tato závislost je rovněž zřetelná z tabulek 4.1 a 4.2, kde je však částečně zkrácena rozdílnou hodnotou Coulombova logaritmu v obou případech. Závislost  $\tau_r$  dle (4.1) na parametrech hvězdokupy  $a$ ,  $M_c$ ,  $m_0$  a  $m$  je obdobná jako v případě vzorce (B.28); v limitě  $m_0/m \rightarrow 0$  by závislost na těchto parametrech byla identická.

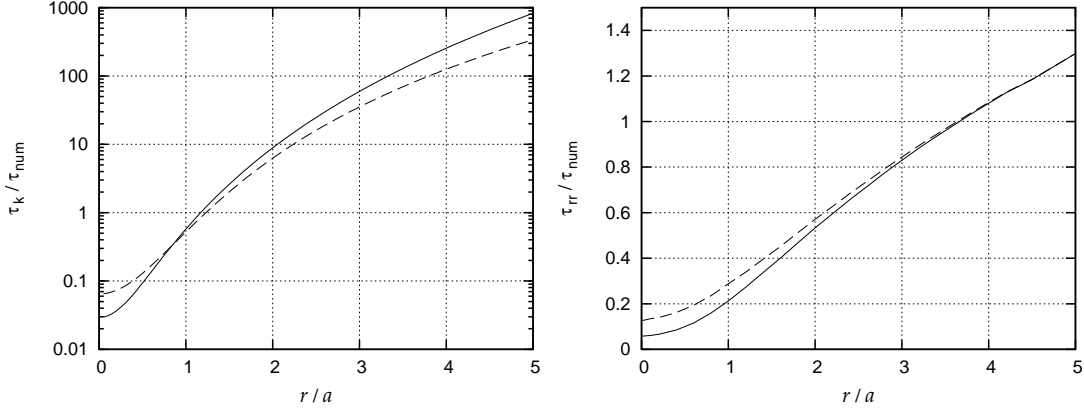
Na závěr porovnejme výsledky numerických modelů s nezávislým odhadem učiněným Mouri & Taniguchi [3]. Ze vztahu (B.28) získáme pro model 019



Obrázek 4.1: Porovnění vývoje  $r_h$  poloměru podle numerických modelů (plusy) s odhady časů usazení hvězd v centru hvězdokupy pro charakteristické radiální (kratší čárky) a kruhové dráhy (delší čárky). Plná čára znázorňuje extrapolování času  $\tau_{num}$ . Vývoj poloměru  $r_{hl}$  je označen křížky.

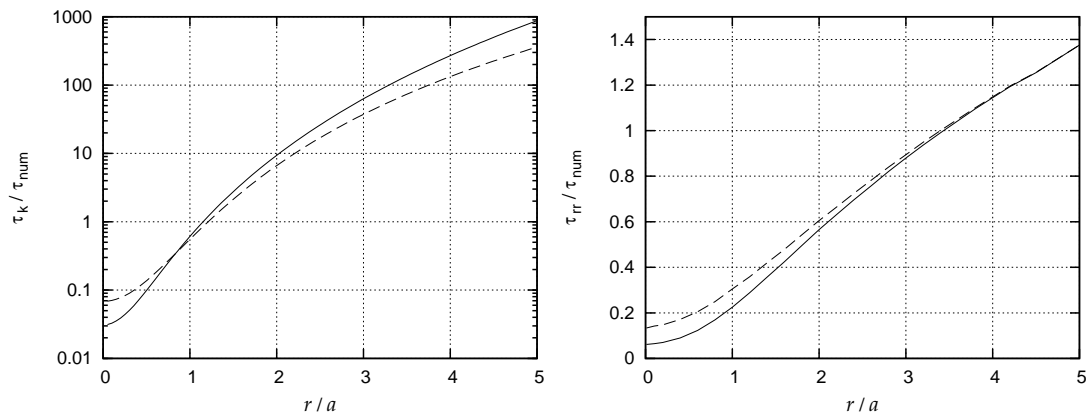
$n$	$\frac{r_0}{r_{h0}}$	$\frac{\tau_{rr0}}{\text{Myr}}$	$\frac{\tau_{rr1}}{\text{Myr}}$	$\frac{\tau_{rE0}}{\text{Myr}}$	$\frac{\tau_{rE1}}{\text{Myr}}$	$\frac{\tau_{k0}}{\text{Myr}}$	$\frac{\tau_{k1}}{\text{Myr}}$
1,3	1,0	0,8	1,0	0,9	1,0	4,2	3,4
1,7	1,3	1,2	1,3	1,5	1,7	12	9,1
2,2	1,7	1,6	1,7	2,8	2,9	40	27
3,6	2,8	2,6	2,6	7,9	7,9	450	240
6,7	5,1	4,1	4,1	24	24	11000	3500

Tabulka 4.2: Přehled odhadů časů usazení hvězd v centru hvězdokupy pro kruhové a radiální dráhy pro model 024. Veličiny byly vypočteny obdobně jako v tabulce 4.1. Numerický model v tomto případě dává  $\tau_{num} = 2,6\text{Myr}$ .



Obrázek 4.2: Poměr odhadu časů  $\tau_{rr0}$  (plná čára),  $\tau_{rr1}$  (přerušovaná čára),  $\tau_{k0}$  (plná čára) a  $\tau_{k1}$  (přerušovaná čára) k času  $\tau_{num}$  hmotového přerozdělení v závislosti na parametru  $n$  v případě modelu 019.

$\tau_{ms} = 2,5\text{Myr}$ , pro model 024  $\tau_{ms} = 1,3\text{Myr}$ , které poskytují přibližně poloviční dobu hmotového přerozdělení než oba numerické modely. Tento odhad se tedy řádově shoduje s numerickými modely, přestože nebyla splněna podmínka  $M_0 \gg M$  mezi celkovou hmotností podmožiny lehčích  $M_0$  a podmožiny těžších  $M$  hvězd ve hvězdokupě, což je jeden z předpokladů při odvození (B.28). Dále se při odvození vztahu (B.28) kvůli zachování předpisu rozdělovací funkce lehčích hvězd v čase předpokládá, že čas hmotového přerozdělení  $\tau_{ms}$  je kratší než relaxační čas  $\tau_{rlx}$ , což se opětovně potvrdí porovnáním (B.28) s (B.29). V našem případě hvězdokupa obsahuje o přibližně jeden řád méně hvězd než hvězdokupa předpokládaná v článku [3]. Ze vztahu (B.29) máme  $\tau_{rlx} \sim 4\text{Myr}$  pro obě hvězdokupy, protože  $\tau_{rlx}$  nezávisí na hmotnostech jednotlivých hvězd. Tento čas je tedy řádově srovnatelný s časem  $\tau_{ms}$ . Toto je druhý předpoklad v odvození vztahu (B.28), který v numerických modelech nebyl splněn.



Obrázek 4.3: Poměr odhadu časů  $\tau_{rr0}$  (plná čára),  $\tau_{rr1}$  (přerušovaná čára),  $\tau_{k0}$  (plná čára) a  $\tau_{k1}$  (přerušovaná čára) k času  $\tau_{num}$  hmotového přerozdělení v závislosti na parametru  $n$ . Označení čar je shodné s obrázkem 4.2 Pro model 024.

# Kapitola 5

## Závěr

V této práci jsme se pokusili aplikovat dynamické tření na odhad času hmotového přerozdělení. Podařilo se nalézt vztahy (3.28), (3.32) a (3.41), které odhadují čas usazení hvězdy v centru hvězdokupy z radiálních a kruhových drah. Porovnáním s numerickými modely odpovídá času  $\tau_{num}$  hmotového přerozdělení doba usazení hvězdy buď z kruhové dráhy o poloměru  $r = r_{h0}$  nebo z radiální dráhy s bodem obratu na  $r = 2,8r_{h0}$  (v případě odhadu dle (3.32)) nebo  $r = 1,7r_{h0}$  (odhad dle (3.28)). V těchto případech dostáváme pro odhad času hmotového přerozdělení vztah (4.1). Čas  $\tau_{num}$  se pro obě testované hvězdokupy řádově shodoval s časem  $\tau_{ms}$  učiněným autory [3].

Platnost našeho odhadu byla ověřena pouze v případě dvou numerických modelů, které se navíc lišily pouze hmotností těžších hvězd. Bylo by zajímavé, uskutečnit další N-částicové simulace s různými poměry hmotností  $m$ ,  $m_0$  a počtů hvězd  $N$ ,  $N_0$  na kterých bychom mohli otestovat platnost vztahu (4.1). Další modely by mohly prověřit jeho závislost na charakteristickém poloměru hvězdokupy  $a$  a její celkové hmotnosti  $M_c$ . Tvorba takových modelů by byla velmi náročná na výpočetní čas, a tedy přesahuje rámec této práce. Rovněž by bylo zajímavé určit, který ze vztahů (4.1) a (B.28) poskytuje lepší odhad. Porovnání těchto vztahů by vzhledem k předpokladům z nichž byl odvozen vztah (B.28) bylo vhodné hledat v modelech které splňují  $M_0 \gg M$  a  $\tau_{rlx} > \tau_{ms}$ .

# Příloha A

## Odhad radiální závislosti disperze rychlostí

Podle [6] je v plummerově modelu rozdělení rychlostí hvězd ve vzdálenosti  $r$  od centra hvězdokupy dáno předpisem

$$v(r) = q\sqrt{2|U(r)|}, \quad (\text{A.1})$$

kde  $q \in \langle 0, 1 \rangle$  je náhodná proměnná z rozdělení

$$n(q) = q^2(1 - q^2)^{\frac{7}{2}}. \quad (\text{A.2})$$

Vzhledem k nezávislosti rozdělení (A.2) na vzdálenosti  $r$  se zjednoduší výpočet střední kvadratické rychlosti hvězd v této vzdálenosti

$$\sqrt{\langle v^2(r) \rangle} = \sqrt{\langle q^2 \rangle} \sqrt{\frac{2GM_c}{\sqrt{a^2 + r^2}}}, \quad (\text{A.3})$$

protože  $\langle q^2 \rangle$  už nezávisí na poloměru  $r$ . Z podmínky viriálové rovnováhy hvězdokupy plynul vztah (2.26) pro kinetickou energii na jednotku hmotnosti. Porovnáním střední kvadratické rychlosti celé hvězdokupy

$$\langle v^2 \rangle = \frac{4\pi \int_0^\infty \langle v^2 \rangle \rho(r) r^2 dr}{4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr} = \langle q^2 \rangle \frac{6GM_c}{a^4} \int_0^\infty \frac{r^2}{(1 + (\frac{r}{a})^2)^3} dr = \frac{3\pi GM_c}{8a} \langle q^2 \rangle \quad (\text{A.4})$$

se vztahem (2.26), získáme vyjádření

$$\langle q^2 \rangle = \frac{1}{4}. \quad (\text{A.5})$$

Podmínka (A.5) je tedy velmi důležitá, protože její porušení by v případě plummerova modelu znamenalo, že se hvězdokupa nenachází ve viriálové rovnováze.

S výsledkem (A.5) získáme dosazením (A.3) do (3.19) hledanou závislost disperze na poloměru

$$\sigma(r) = \sqrt{\frac{GM_c}{6a\sqrt{1 + \left(\frac{r^2}{a^2}\right)}}}. \quad (\text{A.6})$$

Vztah (A.6) je další aproximací. Vzorec (2.23) byl odvozen za předpokladu maxwellovského rozdělení rychlostí, tj. podle (2.20), a pouze v takovém rozdělení jsme ukázali, že platí (3.19). Rozdělení rychlostí hvězd není v plummerově modelu popsáno (2.20), ale (A.1) a (A.2), kde disperze  $\sigma(r)$  vůbec nevystupuje, proto vztah (A.6) můžeme použít pouze za předpokladu, že se rozdělení rychlostí uvažované v každé slupce plummerovy sféry podobá maxwellovskému a z (3.19) odhadnout disperzi. Takto jsme odhadli  $\sigma(r)$  dané (A.6), které můžeme použít v důležitém vztahu (2.23).

## Příloha B

# Odhad hmotového přerozdělení dle Mouri & Taniguchi (2002)

V článku [3] byl odvozen vztah pro odhad času hmotového přerozdělení. Autoři uvažovali hvězdokupu, která sestává ze dvou typů hvězd. Obsahuje  $N_0$  lehčích hvězd o hmotnosti  $m_0$  a  $N$  těžších hvězd hmotných  $m$ . Pro hmotnost všech lehčích hvězd  $M_0$  (je zřejmé, že  $M_0 = N_0 m_0$ ) v porovnání s celkovou hmotností  $M$  těžších hvězd platí  $M_0 \gg M$ . Hvězdokupa je sféricky symetrická a izotropní, nedochází v ní ke srážkám hvězd. Odhad byl pořízen za předpokladu, že rozdělovací funkce na fázovém prostoru je pro skupinu lehčích hvězd popsána plummerovým modelem a je konstantní v čase. Rozdělovací funkce těžších hvězd se vyvíjí.

Rozdělovací funkce lehčích hvězd je popsána funkcí

$$f_0 = \frac{32\sqrt{2}}{7\pi^2} \frac{3M_0}{4\pi a^3} \left(\frac{GM_0}{a}\right)^{-5} \left(\Psi_0 - \frac{v^2}{2}\right)^{7/2} \quad (\text{B.1})$$

s  $f_0 = 0$  pro  $v \geq (2\Psi_0)^{1/2}$ , kde  $v$  značí rychlost lehčích hvězd. Vnitřní potenciál  $\Psi_0$  je definován

$$\Psi_0(r) \equiv -\Phi_0(r) = \frac{GM_0}{a} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{1/2}}. \quad (\text{B.2})$$

Z (B.1) lze snadno vyjádřit hustotu a střední kvadratickou rychlost lehčích hvězd:

$$\rho_0(r) = 4\pi \int_0^\infty v^2 f_0 dv = \frac{3M_0}{4\pi a^3} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{5/2}}, \quad (\text{B.3})$$

$$\sigma_0^2(r) = \frac{4\pi \int_0^\infty v^4 f_0 dv}{4\pi \int_0^\infty v^2 f_0 dv} = \frac{GM_0}{2a} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{1/2}}. \quad (\text{B.4})$$



Předpokládejme že těžší hvězdy nepřispívají k celkovému gravitačnímu poli hvězdokupy. Podle tzv. silného Jeansova teorému je ve sféricky symetrické hvězdokupě, kde nedochází ke srážkám hvězd, rozdělovací funkce pouze funkcí  $\Psi_0 - \frac{v^2}{2}$ . Předpokládejme proto, že jsou těžší hvězdy popsány třídou funkcí s parametrem  $\beta \geq 1$

$$f_\beta = \frac{32\sqrt{2}}{7\pi^2} F_1 F_2 \frac{3M}{4\pi a^3} \left(\frac{GM_0}{a}\right)^{-(7\beta+3)/2} \left(\Psi_0 - \frac{v^2}{2}\right)^{7\beta/2}, \quad (\text{B.5})$$

s  $f_\beta = 0$  pro  $v \geq (2\Psi_0)^{1/2}$ .  $F_1$  a  $F_2$  jsou normovací konstanty dané

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^{(7\beta+3)/4}} = \frac{1}{3} \frac{1}{F_1(\beta)}, \quad (\text{B.6})$$

$$\int_0^1 x^2 (1-x^2)^{7\beta/2} = \frac{7\pi}{512} \frac{1}{F_2(\beta)}. \quad (\text{B.7})$$

V textu bude při normalizacích třeba dalších čtyř integrálů závislých na parametru  $\beta$ . Všechny jsou voleny tak, aby splňovali pro  $\beta = 1$  podmínku  $F_m = 1$ ,  $m = 1, 2, \dots, 6$ . Rozdělovací funkci (B.5) odpovídá hustota a střední kvadratická rychlost těžších hvězd

$$\rho_\beta(r) = F_1 \frac{3M}{4\pi a^3} \frac{1}{(1 + (\frac{r}{a})^2)^{(7\beta+3)/4}}, \quad (\text{B.8})$$

$$\sigma_\beta^2(r) = \frac{12}{7\beta+5} \frac{GM_0}{2a} \frac{1}{(1 + (\frac{r}{a})^2)^{1/2}}. \quad (\text{B.9})$$

Celkovou energii těžších hvězd  $E_\beta$  získáme integrací  $\rho_\beta (\sigma_\beta^2 + \Phi_0)$  přes celý objem hvězdokupy

$$E_\beta = -\frac{3\pi}{32} \frac{2(7\beta-1)}{7\beta+5} F_1 F_3 \frac{GM_0 M}{a}. \quad (\text{B.10})$$

Normalizační člen  $F_3$  je definován vztahem

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^{(7\beta+5)/4}} = \frac{\pi}{16} F_3(\beta). \quad (\text{B.11})$$

U počátečního stavu předpokládáme plummerův profil i pro těžší složku, tj.  $\beta = 1$ . Časový vývoj těžších hvězd je popsán růstem parametru  $\beta$ . Hustota těžších hvězd v centru hvězdokupy se bude s rostoucím  $\beta$  podle (B.8) zvyšovat, zatímco její střední kvadratická rychlost (B.9) bude klesat. Tento jev je typický pro stav hmotového přerozdělení. Třída funkcí  $f_\beta$  představuje nejjednodušší vývojový model skupiny těžších hvězd od počátečního stavu do stavu hmotového přerozdělení.

Uvažujme těžší hvězdu, která ztrácí kinetickou energii interakcí s lehčími hvězdami. Pro takovou hvězdu pohybující se rychlostí  $v$  je ztráta kinetické energie dána

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right\rangle = 16\pi^2 G^2 \ln \Lambda \left( m_0 \int_v^\infty v_0 f_0 dv_0 - m \int_0^v \frac{v_0^2}{v} f_0 dv_0 \right), \quad (\text{B.12})$$

kde  $f_0 = f_0(\Psi_0 - v^2/2)$ . Zde  $\langle \cdot \rangle$  značí středování přes soubor těžších hvězd. První integrál na pravé straně rovnice (B.12) představuje zisk energie těžší hvězdy od lehčích hvězd, zatímco druhý integrál ztráty energie v důsledku dynamického tření. Coulombův logaritmus  $\ln \Lambda$  v (B.12) lze pro hvězdokupu odhadnout ze vztahu (2.18). Vynásobením rovnice (B.12) rozdělovací funkcí (B.5) a následnou integrací přes celý prostor rychlostí získáme změnu kinetické energie těžších hvězd v jednotkovém objemu ve vzdálenosti  $r$ , tj.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho \sigma^2}{2} \right) \right\rangle &= -\frac{2^{19} \sqrt{2} 16!!}{49\pi 19!!} \frac{F_1 F_2 F_4}{(1 + (\frac{r}{a})^2)^{(7\beta+12)/4}} \\ &\times G^2 \ln \Lambda \left( \frac{m}{7\beta+2} - \frac{m_0}{9} \right) \frac{3M_0}{4\pi a^3} \frac{3M}{4\pi a^3} \left( \frac{GM_0}{a} \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Integrací rovnice (B.13) přes celý prostor je možno pořídit vztah pro časovou derivaci celkové energie celé těžší složky hvězd

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\frac{2^{21} \sqrt{2\pi} 16!! \Gamma(13/4)}{3 \times 5 \times 7^2 19!! \Gamma(15/4)} F_1 F_2 F_4 F_5 \\ &\times a^3 G^2 \ln \Lambda \left( \frac{m}{7\beta+2} - \frac{m_0}{9} \right) \frac{3M_0}{4\pi a^3} \frac{3M}{4\pi a^3} \left( \frac{GM_0}{a} \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Členy  $F_4$  a  $F_5$  v předchozích dvou rovnicích závisí na parametru  $\beta$  podle

$$\int_0^1 x^2 (1-x^2)^{(7\beta+9)/2} dx = \frac{16!!}{19!!} F_4(\beta), \quad (\text{B.15})$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^{(7\beta+12)/4}} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(13/4)}{15 \Gamma(15/4)} F_5(\beta). \quad (\text{B.16})$$

Změna energie v (B.12) a (B.13) byla brána jako střední hodnota ze souboru těžších hvězd. Protože předpokládáme velké množství hvězd ve hvězdokupě, lze při výpočtu (B.14) položit  $\langle dE/dt \rangle = dE/dt$ .

Člen  $\left( \frac{m}{7\beta+2} - \frac{m_0}{9} \right)$  ve vztazích (B.13) a (B.14) má původ v získávání a ztrátě energie od lehčích hvězd vyjádřených dvěma integrály na pravé straně (B.12).

Pokud je tento člen nulový, zůstává celková energie těžších hvězd konstantní. Pro hodnotu parametru  $\beta$  odpovídající stavu hmotového přerozdělení tedy platí

$$\beta_{fin} = \frac{9m - 2m_0}{7m_0}. \quad (\text{B.17})$$

Čas hmotového přerozdělení  $\tau_{ms}$  odhadneme podle počátečního nárůstu hmotnosti těžších hvězd  $M_a$  v centru hvězdokupy, tj.

$$\tau_{ms} = \left. \frac{M_a}{dM_a/dt} \right|_{t=0}. \quad (\text{B.18})$$

Hmotnost  $M_a$  těžších hvězd v centru hvězdokupy lze vyjádřit

$$M_a = 4\pi \int_0^a r^2 \rho_\beta dr = \frac{F_1 F_6 M}{2\sqrt{2}}, \quad (\text{B.19})$$

kde

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^{(7\beta+3)/4}} = \frac{1}{6\sqrt{2}} F_6(\beta). \quad (\text{B.20})$$

Protože neznáme analytické vyjádření vývoje  $f_\beta$  v průběhu studovaného děje, budeme uvažovat dva krajní scénáře.

Nejprve uvažujme případ, kdy parametr  $\beta$  narůstá z počátečního stavu  $\beta = 1$  v čase  $t = 0$  do koncového stavu  $\beta_{fin}$ . Derivaci  $dM_a/dt$  v (B.18) lze vyjádřit jako

$$\frac{dM_a}{dt} = \frac{dM_a}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} = \frac{dM_a}{d\beta} \frac{dE}{dt} \left( \frac{dE}{d\beta} \right)^{-1}. \quad (\text{B.21})$$

Dosazením (B.6), (B.19) a (B.20) za  $(dM_a/d\beta)$  v (B.21), dosazením (B.6), (B.10) a (B.6) za  $(dE/d\beta)$  a dosazením (B.14) za  $(dE/dt)$ , získáme

$$\tau_{ms} = B_1 \frac{1}{G^2 \ln \Lambda} \frac{1}{m - m_0} \left( \frac{3M_0}{4\pi a^3} \right)^{-1} \left( \frac{GM_0}{2a} \right)^{3/2}, \quad (\text{B.22})$$

kde  $B_1 \doteq 0,3878$ .

Druhý krajní případ je vývoj stavu z  $\beta$  přímo do stavu  $\beta_{fin}$ . Rozdělovací funkce má potom tvar  $f = (1 - \gamma)f_{\beta=1} + \gamma f_{\beta=\beta_{fin}}$ , kde  $\gamma = 0$  ve stavu  $\beta = 1$ ,  $0 \leq \gamma \leq 1$  a  $\gamma = 1$  ve stavu  $\beta_{fin}$ . Za předpokladu že ve stavu  $\beta_{fin}$  jsou těžší hvězdy soustředěny v centru hvězdokupy a mají zanedbatelnou rychlost, lze vyjádřit hmotnost a energii těžších hvězd v centru hvězdokupy vztahy

$$M_a = (1 - \gamma) \frac{1}{2\sqrt{2}} M + \gamma M, \quad (\text{B.23})$$

$$E = -(1 - \gamma) \frac{3\pi GM_0 M}{32 a} - \gamma \frac{GM_0 M}{a}. \quad (\text{B.24})$$

Derivaci  $dM_a/dt$  pořídíme analogicky jako v předchozím případě

$$\tau_{ms} = B_2 \frac{1}{G^2 \ln \Lambda} \frac{1}{m - m_0} \left( \frac{3M_0}{4\pi a^3} \right)^{-1} \left( \frac{GM_0}{2a} \right)^{3/2}, \quad (\text{B.25})$$

kde  $B_2 \doteq 0,6331$ . Pro čas potřebný k nastolení hmotového přerozdělení jsme očekávaly, že leží mezi výsledky (B.22) a (B.25). Vztahy (B.22) a (B.25) vykazují stejnou závislost na fyzikálních veličinách a jejich numerické faktory  $B_1$  a  $B_2$  jsou blízké  $1/2$ . Proto odhadneme čas  $\tau_{ms}$  pomocí vztahu

$$\tau_{ms} = \frac{1}{2} \frac{1}{G^2 \ln \Lambda} \frac{1}{m - m_0} \left( \frac{3M_0}{4\pi a^3} \right)^{-1} \left( \frac{GM_0}{2a} \right)^{3/2}. \quad (\text{B.26})$$

Členy  $3M_0/4\pi a^3$  a  $(GM_0/2a)^{1/2}$  v (B.26) odpovídají dle (B.8) a (B.9) hustotě a střední kvadratické rychlosti v centru hvězdokupy.

Označme typický čas  $\tau_{cc}$  průchodu hvězdy centrální částí hvězdokupy

$$\tau_{cc} = \left( \frac{2a^3}{GM_0} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.27})$$

Potom lze vztah (B.26) zapsat jako

$$\tau_{ms} = \frac{\pi m_0 N_0 / (m - m_0)}{6 \ln [m_0 N_0 / (m + m_0)]} \tau_{cc}. \quad (\text{B.28})$$

Pro relaxační čas  $\tau_{rlx}$  hvězdokupy platí vztah

$$\tau_{rlx} \simeq \frac{N_0}{8 \ln N_0} \tau_{cc}. \quad (\text{B.29})$$

Pokud předpokládáme parametry hvězdokupy  $m_0/m \simeq 10^{-1} - 10^{-2}$  a  $N_0 \simeq 10^5 - 10^6$ , plyne ze vztahů (B.28) a (B.29) nerovnost  $\tau_{rlx} > \tau_{ms}$ . Hmotové přerozdělení tedy nastane v kratším čase než je relaxační čas podmnožiny lehčích hvězd. Tento výsledek potvrzuje oprávněnost předpokladu časově nezávislé rozdělovací funkce (B.1) pro lehčí hvězdy.

# Literatura

- [1] Binney J., & Tremaine S., Galactic Dynamics, Princeton Univ. Press, 1987
- [2] Šubr L., Kroupa P., & Baumgardt H., A new method to create initially mass segregated star clusters in virial equilibrium, 2008, MNRAS 385, 1673
- [3] Mouri M., Taniguchi Y., Mass segregation in star clusters: analytical estimation of the timescale, 2002, ApJ 580, 844
- [4] Chandrasekhar S., Dynamical friction. I. General considerations: the coefficient of dynamical friction, 1943, ApJ 97, 255
- [5] Plummer H. C., On the problem of distribution in globular star clusters, 1911, MNRAS 71, 460
- [6] Aarseth S. J., Hénon M., Wielen R., A comparison of numerical methods for the study of star clusters dynamics, 1974, A&A 37, 183
- [7] Aarseth S. J., Gravitational N-Body Simulations, Cambridge University Press, 2003