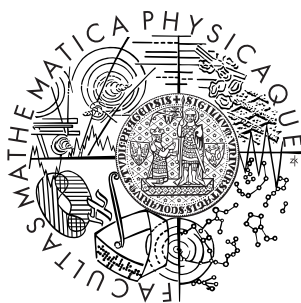


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jiří Daněk

Paradox dvojčat v OTR

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Žofka, Ph.D.

Studijní program: Fyzika, Obecná fyzika

2010

Na tomto místě bych chtěl velmi poděkovat vedoucímu práce panu RNDr. Martinu Žofkovi, Ph.D. za jeho nespočetné rady a kritické připomínky prvotních verzí tohoto díla, bez kterých by jen stěží mohlo vzniknout.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 25. května 2010

Jiří Daněk

Obsah

1 Úvod	8
1.1 Klasický paradox dvojčat	8
1.2 Přechod od STR k OTR	12
1.3 Teoretický úvod	13
2 Schwarzschild-de Sitterův prostoročas	15
2.1 Radiální pohyb	15
2.2 Kruhový pohyb	19
2.3 Geodetické a negeodetické pohyby	23
3 Schwarzschildův prostoročas	28
3.1 Radiální pohyb	28
3.2 Kruhový pohyb	34
4 Anti de Sitterův vesmír	36
4.1 Radiální pohyb	36
4.2 Kruhový pohyb	42
5 Kerrův prostoročas	44
5.1 Obě dvojčata vykonávající kruhové geodetické pohyby	45
5.2 Stojící a kruhově geodeticky se pohybující dvojče	50
6 de Sitterův vesmír	56
6.1 Statický a obíhající pozorovatel	56
6.2 Geodetické a negeodetické pohyby	57

7	FRW vesmír	59
7.1	Radiálně cestující pozorovatel	59
7.2	Kruhově cestující pozorovatel	60
7.3	Geodetické a negeodetické pohyby	61
8	Přehled výsledků	63
9	Diskuse výsledků a závěr	66
	Literatura	68

Název práce: Paradox dvojčat v OTR
Autor: Jiří Daněk
Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Žofka, Ph.D.
e-mail vedoucího: Martin.Zofka@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme možnost zobecnění známého paradoxu dvojčat z STR do OTR. Předmětem práce je analýza vlivu různých pohybů dvojčat, z nichž se vždy jedno pohybuje po geodetice, na rozdíl jejich vlastních časů při opětovném shledání pomocí nástrojů OTR v Schwarzschildově-de Sitterově, Schwarzschildově, anti de Sitterově, Kerrově, de Sitterově prostoročase a také v FRW modelu vesmíru. Na základě rozboru výsledků zjistíme, že není možné narozdíl od STR nalézt žádné jednoduché pravidlo jak určit, který pozorovatel bude při znovu-shledání starší. Nicméně formulujeme dvě pravidla pro dva konkrétní typy pohybů, která nám pomohou určit starší dvojče při opětovném setkání.

Klíčová slova: paradox dvojčat, OTR, vlastní čas, geodetika

Title: Twin paradox in GR
Author: Jiří Daněk
Department: Institute of Theoretical Physics
Supervisor: RNDr. Martin Žofka, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: Martin.Zofka@mff.cuni.cz

Abstract: In the present work, we study whether or not it is possible to generalize the classical twin paradox from SR to GR. Using GR tools, we analyze twins moving along different paths in Schwarzschild-de Sitter, Schwarzschild, anti de Sitter, Kerr, de Sitter spacetime and FRW universe models. One of the twins is always in geodesic motion. Analyzing our results, we find out that, unlike in SR, it is not possible to establish a simple rule determining which observer will be older at their reunion.

Nevertheless, we formulate two rules for two specific motions that will help us determine which twin will be older at the reunion.

Keywords: twin paradox, GR, proper time, geodesic

Kapitola 1

Úvod

1.1 Klasický paradox dvojčat

Klasický problém dvojčat (nebo též paradox hodin) spočívá v povrchní interpretaci důsledků STR, které se zdají býti paradoxní. V minulosti býval argumentem proti správnosti STR. Ačkoliv byl problém dávno vysvětlen i nadále se stával předmětem diskusí v literatuře. Zdánlivý paradox je natolik poučný, že se snad nenajde učebnice STR, ve které by nebyl alespoň zmíněn. Problém lze rozebrat (např. [5]) následovně:

Z počátku O inerciálního systému S startuje v čase $t = t_A = 0$ kosmonaut v kosmické lodi ve směru osy x (start \equiv bodová událost A). V krátké době nabude loď veliké rychlosti $v < c$ a s touto konstantní rychlostí se velmi dlouho pohybuje. Potom se bržděním rychle zastaví (obrat \equiv bodová událost B) a stejným způsobem se vrátí zpět do bodu O (přistání \equiv bodová událost D).

Kosmonaut veze sebou svoje hodiny $H_{(K)}$, které ukazují jeho vlastní čas τ a při startu ukazují $\tau_A = 0$. Otázkou je, jaký čas τ_D budou tyto hodiny ukazovat po návratu do O v době t_D udávané hodinami $H_{(O)}$ umístěnými v počátku, které při startu ukazovali $t_A = 0$.

Lze předpokládat, že hodiny jsou "prakticky" necitlivé na zrychlení vůči S vyvolané vnější mechanickou (negravitační) silou. Úlohu si tedy můžeme zjednodušit a předpokládat, že zrychlení je při startu a při obratu veliké a tyto operace tedy trvají zanedbatelně krátkou dobu oproti trvání

celé cesty. Jinými slovy předpokládáme, že je kosmická loď cestou tam i zpátky pohybuje konstantní rychlostí v .

Je-li na cestě tam pozorovatel dobu $t_B = T$, doletí do vzdálenosti $x_1(B) \doteq vT$ a vrátí se do O v době $t_D = 2T$. Za našich předpokladů bude platit, že prakticky stále $d\tau = \gamma^{-1}dt$ a tedy také

$$\tau_D = \gamma^{-1}t_D < t_D. \quad (1.1)$$

Tento výsledek, ačkoliv zajímavý, není nikterak paradoxní.

Zdánlivý paradox vzniká až při výpočtu "nesprávným způsobem" z hlediska klidového systému kosmické lodi. Kosmonaut může podle principu relativity uvažovat takto: Téměř po celou dobu (s výjimkou krátkého okamžiku startu a obrátu) je můj klidový systém prakticky stále inerciální a hodiny $H_{(O)}$ se vůči němu pohybují rychlostí v . Hodiny $H_{(O)}$ tedy naměří menší čas než hodiny $H_{(K)}$. Po návratu by tedy měly hodiny $H_{(O)}$ ukazovat čas

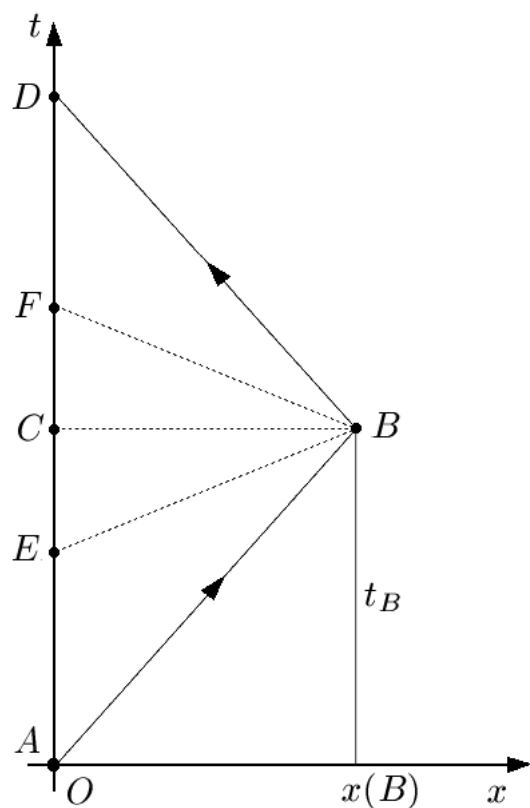
$$t_D = \gamma^{-1}\tau_D < \tau_D, \quad (1.2)$$

což je zcela ve sporu s rovnicí (1.1).

Vysvětlení spočívá v mylnosti kosmonauta výpočtu. Při výpočtu z hlediska "klidového" systému kosmické lodi se musí přihlížet k tomu, že systém S' , v němž je loď v klidu při cestě mezi startem A a obrátem B , a systém S'' , v němž je loď v klidu mezi obrátem B a přistáním D , jsou sice oba inerciální, ale různé systémy, takže pojmy současnosti v nich nesouhlasí ani navzájem ani s pojmem současnosti systému S . Například událost C v bodě O , která je určena údajem $t_c = T = \frac{1}{2}t_D = \frac{1}{2}\Delta t_{AD}$ hodin $H_{(O)}$ a je tedy v systému S současná s událostí B , není s B současná v S' ani S'' .

V systému S' (resp. S'') je událost C pozdější (resp. dřívější) než B . Obráceně událost E (resp. F), která je v systému S' (resp. S'') současná s B , je v systému S dřívější (resp. pozdější) než B , nebo s ní současná C (znázorněno na obrázku 1.1). Hodiny $H_{(O)}$ se vzhledem k S' i vzhledem k S'' pohybují rychlostí v (opačnými směry) a proto se vskutku i vzhledem k hodinám systému S' i vzhledem k hodinám systému S'' opožďují podle vztahu $dt(H_{(O)}) = \gamma_{-1}dt'$, popř. $dt(H_{(O)}) = \gamma_{-1}dt''$. Platí tedy vztah

$$\Delta t_{AE} = \gamma^{-1}\Delta t'_{AE} = \gamma^{-1}\Delta \tau_{AB}, \quad (1.3)$$



Obrázek 1.1: Grafické znázornění významných bodových událostí při cestě pozorovatele kosmickou lodí. Bod A značí start lodi, B obrát lodi a D přistání ve vztažné soustavě S . Událost C , kterou zaznamená necestující pozorovatel (tj. nehybný v soustavě S), je současná s obrátem B . Událost E je v soustavě S' současná s událostí obrátu lodi B , kdežto F je současná s obrátem lodi v soustavě S'' . Proměnná t_B označuje dobu, kterou naměří nehybný pozorovatel, než cestující pozorovatel urazí vzdálenost $x(B)$. Obrázek je převzat z [5].

jelikož mezi A a B jsou hodiny $H_{(K)}$ hodinami systému S' a události E a B jsou současné v S' . Obdobně získáme vztah

$$\Delta t_{FD} = \gamma^{-1} \Delta t''_{FD} = \gamma^{-1} \Delta \tau_{BD}. \quad (1.4)$$

Důsledkem vztahů výše je rovnost

$$\Delta t_{AE} + \Delta t_{FD} = \gamma^{-1} \Delta \tau_{AD} = \gamma^{-1} \tau_D. \quad (1.5)$$

Na levé straně máme již hledanou veličinu τ_D , ale pravá strana není rovna $\Delta t_{AD} = t_D$, neboť mezi událostmi E a F je časová "mezera" Δt_{EF} . Platí tedy

$$t_D = \gamma^{-1} \tau_D + \Delta t_{EF}. \quad (1.6)$$

Protože

$$\Delta t_{EF} = \Delta t_{EC} + \Delta t_{CF} = 2\Delta t_{EF} = 2\Delta t_{CF}. \quad (1.7)$$

zbývá vyjádřit Δt_{EF} pomocí τ_D . Vzhledem k tomu, že systém S souvisí se systémem S' Lorentzovou transformací, lze užít vztahu

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right). \quad (1.8)$$

Pro události E, B je však v systému S' $\Delta t' = 0$ a Δx je vzdálenost, do níž v systému S' vzdálil počátek O od hodin $H_{(K)}$ v okamžiku $t' = t'_B = \tau_B = \frac{1}{2} \tau_D$. Tato vzdálenost se rovná $v \cdot \frac{1}{2} \tau_D$. Dosazením do rovnice (1.8) získáme vztah $\Delta t_{EB} = \frac{1}{2} \gamma \frac{v^2}{c^2} \tau_D$, po jehož dosazení do (1.6) získáme vztah

$$t_D = \gamma^{-1} \tau_D + \gamma^{-1} \frac{v^2}{c^2} \tau_D = \gamma \tau_D, \quad (1.9)$$

shodný se vztahem (1.2). Když kosmonaut provede správný výpočet, získá stejnou závislost jako pozorovatel, jenž je po celou dobu cesty pozorovatele v klidu v inerciální vztažné soustavě S .

Závěr

Z rovnice (1.1) plyne, že cestující dvojče, které se pohybovalo vůči vzdáleným hvězdám, bude po opětovném shledání se svým stojícím sourozencem mladší.

1.2 Přechod od STR k OTR

Klasický paradox dvojčat se odehrává v prostoročasu s Minkowského metrikou (tzv. plochý prostoročas), ve kterém se kromě dvou pozorovatelů nenachází žádné další objekty, protože je zdánlivě obtížné určit, který pozorovatel bude po opětovném setkání starší. Obtížnost spočívá v mylnosti představy, že situace je pro oba pozorovatele zcela symetrická, což ,jak jsme si ukázali v podkapitole 1.1, není pravda.

Jak by se situace změnila, kdybychom přešli do prostoročasu s nějakými dalšími objekty? Pomohly by nám tyto objekty jednodušeji určit, čí pohled je ten správný, který pozorovatel má ve své úvaze pravdu a je privilegovaný?

Představme si situaci, kdy oba pozorovatele obíhají různě rychle kolem nějakého hmotného tělesa (např. slunce, černé díry apod.). Každý pozorovatel může sám sebe považovat za klidového pozorovatele a označit toho druhého za rychleji se pohybujícího a tedy i, v souladu s představami STR, za toho, jenž během své cesty naměří menší čas. Oba mít pravdu nemohou, jak tedy určit, který pozorovatel je privilegovaný, tedy čí úvaha je správná?

V této úloze máme privilegovanou soustavu určenou právě oním obíhaným tělesem. Není však jasné, který pozorovatel je při dané konfiguraci upřednostňován. Na rozdíl od klasického paradoxu už daná situace není symetrická, je ale zajímavé zjistit, zda rychlejší chod vlastního času souvisí s rychlostí vůči privilegované soustavě nebo například s 4-zrychlením. Potíž je, že při přítomnosti hmotných objektů již nelze hovořit o globálních inerciálních vztažných soustavách a STR nám přestává stačit. Naštěstí můžeme přejít do Obecné teorie relativity, která nám poskytuje matematický aparát, s jehož pomocí jsme schopni tento problém analyzovat. Analyticky se pokusíme rozřešit, který pozorovatel bude mladší a který starší při analogických pohybech v různých prostoročasech. Vždy necháme jednoho pozorovatele cestovat po geodetice, což lze z hlediska OTR považovat za privilegovaný pohyb, a budeme zkoumat, zda tato skutečnost předurčuje geodeticky cestujícího pozorovatele k pravdivosti tvrzení, že vůči němu se druhý pozorovatel pohybuje a že tedy bude

druhý pozorovatel po setkání mladší.

1.3 Teoretický úvod

V Obecné teorii relativity hraje metrický tenzor $\mathbf{g}_{\mu\nu}$ velmi důležitou roli, jelikož určuje zakřivení prostoročasu. Podle OTR je zakřivení prostoru způsobeno gravitačním působením hmotných objektů, nacházejících se v tomto prostoru, tudíž lze pomocí metrického tenzoru popisovat gravitační pole.

Délkový element ds lze pomocí metrického tenzoru vyjádřit rovnicí

$$ds^2 = \mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{dx}^\mu \mathbf{dx}^\nu, \quad (1.10)$$

kde \mathbf{dx}^μ pro $\mu = 0, 1, 2, 3$ jsou prvky báze tečného prostoru (tj. jednotkové vektory tečné k varietě, kterou jsme ztotožnili se zakřiveným prostorem). Je vidět, že když máme zadán kvadrát délkového elementu ds^2 , není obtížné zrekonstruovat zpět metrický tenzor $\mathbf{g}_{\mu\nu}$.

Diferenciál vlastního času $d\tau$ lze z definice vypočítat pomocí délkového elementu ds jako

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2}. \quad (1.11)$$

Ve vztahu vystupuje rychlost světla c , kterou pro přehlednost výpočtů pokládáme $c = 1$. Řečeno vznešenými slovy počítáme v geometrizovaných jednotkách.

Geodetika

Geodetika je křivka v prostoru, po níž se pohybují volné (testovací) částice. Volnou částicí rozumíme částici, která interaguje pouze gravitačně. Přízvisko testovací naznačuje předpoklad, že tato volná částice nikterak neovlivňuje gravitační pole ve svém okolí. Fyzikálnější pohled praví: Zakřivení prostoročasu vyvolané testovací částicí je v porovnání s vlivem okolních hmotných těles zanedbatelné.

Vektor 4-rychlosti \mathbf{u}^μ je definován rovností

$$\mathbf{u} = \left(\frac{dx^0}{d\tau}, \frac{dx^1}{d\tau}, \frac{dx^2}{d\tau}, \frac{dx^3}{d\tau} \right) \quad (1.12)$$

Pokud se volná testovací částice s 4-rychlostí \mathbf{u}^μ pohybuje po geodetice, splňuje rovnost

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = 0, \quad (1.13)$$

kde $\nabla_{\mathbf{u}}$ značí kovariantní derivaci ve směru vektoru \mathbf{u}^μ . Rovnost lze rozepsat pomocí tenzoru afinní konexe $\Gamma_{\rho\xi}^\sigma$ na vztah

$$\mathbf{u}^\rho \left(\mathbf{u}_{,\rho}^\sigma + \Gamma_{\rho\xi}^\sigma \mathbf{u}^\xi \right) = 0, \quad (1.14)$$

ve kterém $_{,\rho}$ označuje parciální derivaci podle souřadnice udané indexem ρ .

Afinní konexe

Afinní konexi $\Gamma_{\rho\xi}^\sigma$ je možné spočítat pomocí metrického tenzoru $\mathbf{g}_{\mu\nu}$ vztahem

$$\Gamma_{\rho\xi}^\sigma = \frac{1}{2} \mathbf{g}^{\sigma\chi} (\mathbf{g}_{\chi\rho,\xi} + \mathbf{g}_{\chi\xi,\rho} - \mathbf{g}_{\rho\xi,\chi}), \quad (1.15)$$

ve kterém vystupuje matice $\mathbf{g}^{\sigma\chi}$ inverzní k matici popisující metrický tenzor $\mathbf{g}_{\mu\nu}$. Jejich vzájemný vztah je dán rovností $\mathbf{g}^{\alpha\rho} \mathbf{g}_{\rho\beta} = \delta_\beta^\alpha$.

Lagrangeova mechanika

Klasickou langangeovskou mechaniku lze zobecnit i na OTR. Lagrangeovu funkci \mathcal{L} zavedeme vztahem

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{ds^2}{d\tau^2} + V(\mathbf{x}^\mu). \quad (1.16)$$

Ve vztahu vystupuje potenciál $V(\mathbf{x}^\mu)$ závislý na polohovém vektoru \mathbf{x}^μ , který je spojen se silovým působením negravitačního charakteru. Volné částice necítí žádné síly negravitační povahy, tudíž je pro ně $V(\mathbf{x}^\mu) = 0$, a rovnice přejde pro ně přejde na jednoduchý tvar $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{ds^2}{d\tau^2}$.

Bližší informace jsou k nalezení v běžných učebnicích OTR, jako je např. [2], ze které jsme čerpali.

Kapitola 2

Schwarzschild-de Sitterův prostorčas

Délkový element ds lze v Schwarzschild-(anti) de Sitterově prostoročase vyjádřit rovnicí

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.1)$$

ve které se pro jednoduchost uvažuje, že rychlost světla $c = 1$ a gravitační konstanta $G = 1$. Parametr M značí hmotnost centrálního tělesa a parametr Λ označuje kosmologickou konstantu, která je v Schwarzschild-de Sitterově prostoročase kladná a v Schwarzschild-anti de Sitterově prostoročase vesmíru záporná. V této kapitole se pokusíme zobecnit postup užitý v [3].

2.1 Radiální pohyb

Vezměme v úvahu dvě dvojčata, která si označíme dvojče A a dvojče B . Dvojče A setrvává na stále stejném místě, zatímco dvojče B necháme cestovat radiálním směrem. Na počátku se dvojčata nachází na stejném místě v prostoru (ve stejné výšce $r = R$), ale dvojče B má oproti svému sourozenci nenulovou radiální rychlost v_0 . To zapříčiní, že dvojče

B dosáhne nějaké maximální výšky $r = R + h$ a poté opět začne padat na místo, odkud vyrazilo na svou cestu.

Dvojčte B bude cestovat pouze v radiálním směru (jelikož je délkový element (2.1) rotačně invariantní, nebude se z něho odchylovat). Na cestující dvojčte B nebude působit žádná síla, ale pouze gravitační interakce, která je již obsažená v metrice, a my můžeme sestavit Lagrangeovu funkci

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{ds^2}{d\tau_B^2} = \frac{1}{2} \left[- \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1} \dot{r}^2 \right]. \quad (2.2)$$

Tečkou jsme označili derivaci podle vlastního času τ_B pozorovatele B . Lagrangeova funkce (2.2) nezávisí na čase, což znamená, že její parciální derivace podle \dot{t} se rovná nějaké konstantě. My dosadíme speciální konstantu ve tvaru $-p_t$, čímž získáme

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) \dot{t} = -p_t. \quad (2.3)$$

Konstanta p_t není až tak speciální, neboť je to časová složka kovariantní 4-rychlosti vztažená na jednotku hmotnosti. Díky rovnici (2.3) si můžeme vyjádřit časovou složku 4-rychlosti \mathbf{u}_B^μ dvojčete B

$$\dot{t} = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1} p_t. \quad (2.4)$$

Víme, že norma 4-rychlosti se musí rovnat $\mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{u}^\mu \mathbf{u}^\nu = -1$, kde $\mathbf{g}_{\mu\nu}$ označuje metrický tenzor. Ze známého vztahu mezi délkovým elementem a metrickým tenzorem lze vyjádřit identitu pro 4-rychlost cestujícího dvojčete B vztahem

$$-1 = - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1} \dot{r}^2. \quad (2.5)$$

Dosazením z rovnice (2.4) můžeme vyjádřit závislost radiální složky 4-rychlosti \mathbf{u}_B^r cestovatele B

$$\dot{r}^2 = p_t^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right). \quad (2.6)$$

V průběhu cesty dvojčete B dojde v nějaké výšce $r = R + h$ k jeho zastavení a změně jeho směru pohybu. Dvojče B začne volně padat zpátky na místo, kde započalo svou cestu. Ve výšce $r = R + h$ se nachází bod obratu a zde platí, že $\dot{r} = 0$. Díky tomu faktu se nám podařilo z (2.6) určit konstantu

$$p_t = \sqrt{1 - \frac{2M}{R+h} - \frac{\Lambda}{3}(R+h)^2}. \quad (2.7)$$

Když si uvědomíme, že \dot{r} znamená derivaci podle vlastního času cestujícího dvojčete B , získáme z rovnic (2.6) a (2.7) vztah mezi diferenciálem vlastního času $d\tau_B$ a diferenciálem radiální vzdálenosti dr daný rovností

$$d\tau_B = \frac{1}{\sqrt{\frac{2M}{r} + \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{2M}{R+h} - \frac{\Lambda}{3}(R+h)^2}} dr. \quad (2.8)$$

Dvojče B jsme nechali vykonávat cestu z výšky $r = R$ do $r = R + h$ a poté ho nechali spadnout z $r = R + h$ do $r = R$. Celkový čas je tedy dvojnásobek integrálu od $r = R$ do $r = R + h$, čímž získáme vztah

$$\tau_B = 2 \int_R^{R+h} \frac{1}{\sqrt{\frac{2M}{r} + \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{2M}{R+h} - \frac{\Lambda}{3}(R+h)^2}} dr. \quad (2.9)$$

Z délkového elementu (2.1) jsme schopni určit diferenciál vlastního času $d\tau_A$ dvojčete A , které se nachází po celou dobu ve výšce $r = R$, vzhledem k diferenciálu souřadnicového času dt vztahem

$$d\tau_A = \sqrt{1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda}{3}R^2} dt. \quad (2.10)$$

Rovnici (2.4) lze rozepsat pomocí identity $\dot{t} = \frac{dt}{d\tau_B}$, díky rovnici (2.10) eliminovat dt , zkombinovat s (2.8), dosadit za p_t z (2.7) a získat

$$d\tau_A = \frac{\sqrt{1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda}{3}R^2} \sqrt{1 - \frac{2M}{R+h} - \frac{\Lambda}{3}(R+h)^2}}{\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) \sqrt{\frac{2M}{r} + \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{2M}{R+h} - \frac{\Lambda}{3}(R+h)^2}} dr. \quad (2.11)$$

Celkový vlastní čas τ_A pozorovatele A získáme integrací rovnice (2.11) přes celou dráhu uraženou cestujícím dvojčetem B . Jelikož je jeho cesta

symetrická stačí nám opět spočítat pouze polovinu cesty (tj. od $r = R$ do $r = R + h$) a výsledek násobit dvěma. Výsledný vlastní čas

$$\tau_A = 2\sqrt{1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda}{3}R^2}\sqrt{1 - \frac{2M}{R+h} - \frac{\Lambda}{3}(R+h)^2} \cdot \int_R^{R+h} \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)\sqrt{\frac{2M}{r} + \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{2M}{R+h} - \frac{\Lambda}{3}(R+h)^2}} dr. \quad (2.12)$$

Závěr

Integrály (2.9) a (2.12) jsou analyticky obtížně řešitelné, pročež je výhodné zavést zjednodušení. Pro malé vzdálenosti r lze zanedbat člen $\frac{\Lambda}{3}r^2$ oproti členu $\frac{2M}{r}$, čímž přejdeme do Schwarzschildova prostoročasu, pro nějž se pokusíme nalézt analytické řešení v kapitole 3.1.

Pro velké r lze zanedbat naopak člen $\frac{2M}{r}$ oproti členu $\frac{\Lambda}{3}r^2$ a přejít tak do (anti) de Sitterova vesmíru. Pro zápornou hodnotu konstanty Λ budeme hledat analytické řešení v kapitole 4.1.

Omezení kladená na proměnnou r

Pokud je kosmologická konstanta $\Lambda \leq 0$ menší než nula, jsme při radiálním pohybu popsaném v této podkapitole omezení pouze horizontem černé díry, který je dán plochou $r = r_{BH}$. Nad tímto horizontem je naše modelová situace bez problémů realizovatelná. Hodnotu r_{BH} bychom mohli získat jako největší kladné řešení rovnice

$$1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 = 0. \quad (2.13)$$

Při $\Lambda > 0$ se dostáváme do potíží. Je potřeba zařídit, aby existoval nějaký interval kladných hodnot I takový, že pro $\forall r \in I$ je $1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \geq 0$. Takový interval nemusí vždy existovat, záleží totiž na hodnotách proměnných M a Λ . Pokud takovýto interval neexistuje, nemůže se realizovat ani náš uvažovaný radiální pohyb ani námi uvažovaný případ statického pozorovatele. Při vhodné volbě konstant M a Λ lze však zajistit,

aby interval I existoval. Poté také jsme schopni analyticky najít krajní hodnoty intervalu I . Hledali bychom je opět jako řešení kubické rovnice (2.13). Získali bychom tři řešení: dvě kladná a jedno záporné. Nejmenší kladné řešení bychom označili r_{BH} a největší kladné r_{CO} . Plocha $r = r_{BH}$ se v tomto případě nazývá horizont černé díry a plocha $r = r_{CO}$ je kosmologický horizont. Uvnitř intervalu $I = \langle r_{BH}, r_{CO} \rangle$ se mohou pohybovat pozorovatelé a v krajních bodech se mohou pohybovat fotony.

Statický pozorovatel se tedy může nacházet ve výšce R , kde R je z vnitřku I . Radiálně vystřelený pozorovatel se ale nemůže pohybovat v libovolné výšce $r \in I$. Kladná kosmologická konstanta Λ nám charakterizuje odpudivou interakci, takže je možné, že pokud se pozorovatel dostatečně vzdálí od černé díry, začne převládat odpudivá interakce a pozorovatel se již nevrátí na místo startu. Tedy určitě ne po geodetice.

Maximální přípustnou hodnotu $r_m \in I$ určíme jako maximum funkce $f(r) := 1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda}{3}r^2$ na kladné části reálné osy. Jednoduchým výpočtem získáme hodnotu $r_m = \sqrt[3]{\frac{3M}{\Lambda}}$. Vystřelený pozorovatel se tedy může pohybovat pouze v rozmezí výšek $r \in (r_{BH}, r_m)$.

Díky znalosti maxima funkce $f(x)$ je možné určit pro jaké hodnoty M a Λ horizonty splynou a interval I se smrskne na jediný bod $\{r_{BH}\} = \{r_{CO}\} = \{r_m\} = I$. Z rovnice $f(r_m) = 0$ plyne, že horizonty splynou právě tehdy, když $1 = 9\Lambda M^2$. Když bude navíc $\Lambda > \frac{1}{9M^2}$ nebude žádný horizont a interval I bude nulový.

2.2 Kruhový pohyb

Zaměříme se nyní na kruhový pohyb v (Anti) de Sitter-Schwarzschildově vesmíru, ve kterém má délkový element ds tvar daný rovnicí (2.1).

Nechme dvojčata obíhat v konstantní výšce $r = R$ kolem centrálního tělesa v ekvatoriální rovině (tj. $\theta = \frac{\pi}{2}$). Nejprve uvažujme, že obě obíhají, a pokusme se určit obecnou formulkou pro poměr jejich vlastních časů v závislosti na směru a rychlosti obíhání.

Proveďme transformaci do vztažné soustavy S' , ve které bude jedno dvojčete nehybné. To znamená, že nová vztažná soustava bude rotovat kolem středu původní soustavy S s konstantní rychlostí ω , stejně jako

dvojče. Transformační rovnice budou mít tvar:

$$\begin{aligned}
t' &= t \\
r' &= r \\
\theta' &= \theta \\
\phi' &= \phi - \omega t.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Nyní si spočtěme jak bude vypadat délkový element vyjádřený pomocí našich nových čárkovaných proměnných. Využijme transformačních rovnic (2.14) a rovnice délkového elementu v nečárkovaných souřadnicích (2.1) a dosazením získáme

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \left[- \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) + r^2 \omega^2 \sin^2 \theta' \right] dt'^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1} dr'^2 + \\
&\quad + r^2 (d\theta'^2 + \sin^2 \theta' d\phi'^2) + 2r^2 \omega \sin^2 \theta' dt' d\phi'.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Jelikož uvažujeme kruhový pohyb s konstantní výškou $r = R$ v ekvatoriální rovině je $dr' = 0$ a $d\theta' = 0$. Zavedme ještě novou proměnnou Ω , kterou definujeme jako $\Omega = \frac{d\phi'}{dt'}$. Proměnná Ω tedy určuje hodnotu úhlové rychlosti obíhání v rotující soustavě S' . Diferenciál $d\phi'$ přejde na tvar $d\phi' = \Omega dt'$. Rovnice (2.15) lze upravit na

$$ds^2 = \left[- \left(1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda}{3} R^2 \right) + R^2 \omega^2 + R^2 \Omega^2 + 2R^2 \omega \Omega \right] dt'^2. \tag{2.16}$$

Díky rovnici (2.16) si můžeme vyjádřit diferenciály vlastních časů obou dvojčat. Musíme si uvědomit, že původně cestující dvojče B je v našich nových čárkovaných souřadnicích v klidu a proto pro něj bude $\Omega = 0$. Díky známému vztahu $d\tau^2 = -ds^2$ platí

$$d\tau_B^2 = \left[1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda}{3} R^2 - R^2 \omega^2 \right] dt'^2. \tag{2.17}$$

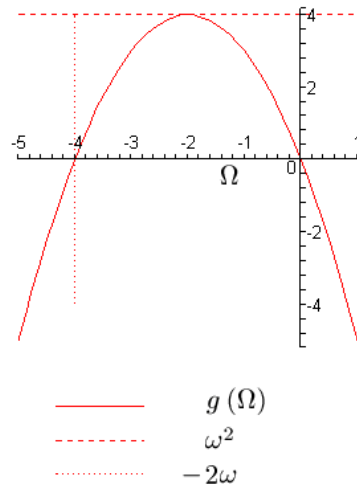
Dvojče A necháme cestovat po kruhové dráze s konstantní úhlovou rychlostí Ω vzhledem k soustavě S' . Obdobně jsme schopni určit diferenciál vlastního času $d\tau_A$ dvojčete A vztahem

$$d\tau_A^2 = \left[1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda}{3} R^2 - R^2 \omega^2 - R^2 \Omega^2 - 2R^2 \omega \Omega \right] dt'^2, \tag{2.18}$$

který si zjednodušíme zavedením nové funkce

$$g(\Omega) := -(\Omega^2 + 2\omega\Omega). \quad (2.19)$$

Když z rovnic (2.17) a (2.18) s pomocí funkce $g(\Omega)$ vyjádříme poměr



Obrázek 2.1: Graf průběhu funkce $g(\Omega)$ v závislosti na hodnotě Ω pro pevně zvolenou hodnotu konstanty $\omega = 2$.

vlastních časů dvojčat

$$\frac{d\tau_B}{d\tau_A} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda}{3}R^2 - R^2\omega^2}{1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda}{3}R^2 - R^2\omega^2 + R^2g(\Omega)}}, \quad (2.20)$$

zjistíme, že se nám problém redukuje pouze na zjišťování průběhu funkce $g(\Omega)$.

Funkce $g(\Omega)$ je nulová v bodech $\Omega_1 = 0$ a $\Omega_2 = -2\omega$. Maxima nabývá v bodě $\Omega_{max} = -\omega$. Průběh funkce je znázorněn na obrázku 2.1.

Pokud úhlová rychlost $\Omega \in (-2\omega, 0)$, je pravá strana v rovnici (2.20)

menší než jedna a to znamená, že dvojče B bude po opětovném shledání s dvojčetem A mladší (tj. $d\tau_B < d\tau_A$).

Když úhlová rychlost $\Omega = \Omega_1 \vee \Omega = \Omega_2$, nedochází k rozdílu mezi vlastními časy pozorovatelů a obě dvojčata budou po opětovném shledání stejně stará (tj. $d\tau_A = d\tau_B$). Speciální je případ $\Omega = \Omega_2$, ve kterém je celá situace zcela symetrická a výsledek je zcela očekávatelný, navíc lze zařídit aby obě dvojčata obíhala po geodetikách se stejnou velikostí úhlové rychlosti, což vyplývá z výpočtů v další podkapitole. Oproti tomu v kapitole 5.1 si ukážeme, že v Kerrově prostoročase není situace takto jednoduše symetrická.

Pokud bude úhlová rychlost $\Omega \in (-K, -2\omega) \cup (0, K)$, bude po opětovném shledání dvojče A naopak mladší než dvojče B (tj. $d\tau_A < d\tau_B$). Uvedme, že K je konstanta odpovídající maximální možné úhlové rychlosti ω , jejíž hodnotu budeme hledat v následující podkapitole.

Uvažujme, že necháme dvojče B pohybovat se s úhlovou rychlostí $\omega_0 \in (0, K)$ a dvojče A necháme obíhat s úhlovou rychlostí $\Omega = -\omega_0 - \sigma$, kde $\sigma \in (0, K)$, potom lze vztah (2.20) upravit na

$$\frac{d\tau_B}{d\tau_A} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda}{3}R^2 - R^2\omega_0^2}{1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda}{3}R^2 - R^2\sigma^2}}. \quad (2.21)$$

V tomto okamžiku je nutno předeslat, že pokud $\omega_0 \rightarrow K$, potom $1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda}{3}R^2 - R^2\omega_0^2 \rightarrow 0$. Analogicky pro σ a jmenovatel ve výrazu (2.21). To znamená, že lze vhodnou volbou úhlových rychlostí ω a σ "nastavit", který pozorovatel má být mladší. To nás ale dál nebude zajímat, jelikož se zaměříme na jednoho geodeticky se pohybujícího a na jednoho statického pozorovatele.

Závěr - kruhový pohyb

Dvojče A , které se vůči stálícím nepohybuje, má nenulové 4-zrychlení a nulovou 3-rychlost a je při opětovném setkání starší než dvojče B , které se pohybuje po kruhové dráze. V následující podkapitole si ukážeme, že existuje taková hodnota úhlové rychlosti ω , při které se dvojče B pohybuje po geodetice a má nulové 4-zrychlení.

2.3 Geodetické a negeodetické pohyby

Pokusme se zjistit, jaká musí být úhlová rychlost ω pozorovatele B , aby jeho pohyb byl geodetický. V souvislosti s řešením výše, pojďme určit přesnou hodnotu ω tak, aby se pozorovatel, nehybný v rotující soustavě S' , pohyboval po geodetice v soustavě S .

Nejprve musíme určit 4-rychlost \mathbf{u}_B^μ dvojčete B v soustavě S . Tu z definice učíme jako

$$\mathbf{u}_B = \left(\frac{dt}{d\tau_B}, \frac{dr}{d\tau_B}, \frac{d\theta}{d\tau_B}, \frac{d\phi}{d\tau_B} \right). \quad (2.22)$$

Žádné z našich dvojčat se nepohybuje v radiálním směru a obě se na počátku pohybu nachází v ekvatoriální rovině. Dvojčeti B udělíme na počátku úhlovou rychlost ve směru souřadnice ϕ , díky čemuž je první a druhá složka 4-rychlosti \mathbf{u}_B^μ nulová. Poslední složku si můžeme rozepsat jako $\frac{d\phi}{d\tau_B} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{d\tau_B} = \omega \frac{dt}{d\tau_B}$.

Zaveďme nějakou neznámou funkci $f(t, \phi, \omega) = \frac{dt}{d\tau_B}$, načež lze 4-rychlost z rovnice (2.22) přepsat na tvar

$$\mathbf{u}_B = \left(f(t, \phi, \omega), 0, 0, \omega \cdot f(t, \phi, \omega) \right). \quad (2.23)$$

Neznámou funkci $f(t, \phi, \omega)$ lze nyní dopočítat z identity pro 4-rychlost $-1 = \mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{u}_B^\mu \mathbf{u}_B^\nu$. Po dosazení získáme přesný vztah

$$f(t, \phi, \omega) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda}{3}R^2 - R^2\omega^2}}, \quad (2.24)$$

ze kterého je vidět, že funkce $f(t, \phi, \omega)$ je konstantní, pokud je konstantní i hodnota ω .

Požadujeme navíc, aby byla funkce $f(t, \phi, \omega)$ reálná, což nás vede na podmínku

$$\omega^2 \leq \frac{R - 2M}{R^3} - \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.25)$$

což lze upravit na $\omega \in \langle -K, K \rangle$, kde

$$K = \sqrt{\frac{R - 2M}{R^3} - \frac{\Lambda}{3}}. \quad (2.26)$$

Pojďme spočítat kovariantní derivaci 4-rychlosti \mathbf{u}_B ve směru 4-rychlosti \mathbf{u}_B zapsanou jako $\nabla_{\mathbf{u}_B} \mathbf{u}_B$. Abychom mohli považovat pohyb za geodetický je potřeba, aby platila podmínka

$$\nabla_{\mathbf{u}_B} \mathbf{u}_B = 0. \quad (2.27)$$

Rovnici (2.27) si rozepíšeme ve složkách pomocí parciálních derivací ve směru nečárkovaných souřadnic a afinní konexe Γ jako

$$\mathbf{u}_B^\rho \left(\mathbf{u}_{B,\rho}^\sigma + \Gamma_{\rho\xi}^\sigma \mathbf{u}_B^\xi \right) = 0. \quad (2.28)$$

Tenzorová rovnost (2.28) musí platit pro všechny možné hodnoty indexu σ , čímž získáváme čtyři rovnice. Nejprve zkusme jak bude vypadat podmínka na geodetiku, když za index σ dosadíme první prostorovou souřadnici r . Rovnice přejde pro složky 4-rychlosti u_B^μ a složky afinní konexe $\Gamma_{\rho\xi}^\sigma$ na tvar

$$u_B^\rho \left(u_{B,\rho}^r + \Gamma_{\rho t}^r u_B^t + \Gamma_{\rho\phi}^r u_B^\phi \right) = 0, \quad (2.29)$$

který, po uvážení všech nenulových složek vektoru 4-rychlosti u_B^μ a nenulových složek afinní konexe $\Gamma_{\rho\xi}^\sigma$, přejde na jednoduchou rovnost:

$$\Gamma_{tt}^r u_B^t u_B^t + \Gamma_{\phi\phi}^r u_B^\phi u_B^\phi = 0. \quad (2.30)$$

Dosazením za hodnoty složek u_B vektoru 4-rychlosti a za složky afinní konexe získáme jednoduchý výraz

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda}{3} R^2 - R^2 \omega^2 \right)^{-1} \cdot \\ & \cdot \left[\left(\frac{M}{R^2} - \frac{\Lambda}{3} R \right) \left(1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda}{3} R^2 \right) - R \omega^2 \left(1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda}{3} R^2 \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.31)$$

jehož řešením je úhlová rychlost

$$\omega_G = \pm \sqrt{\frac{M}{R^3} - \frac{\Lambda}{3}}. \quad (2.32)$$

Tím jsme určili přesnou hodnotu ω_G , pro kterou by se mělo dvojčte B pohybovat po geodetice. Pokud chceme, aby byla daná geodetika realizovatelná, měly bychom (viz. omezení dané vztahem (2.26)) zajistit, aby $R \geq 3M$, což znamená, že geodetická rychlost ω_G bude ležet uvnitř intervalu přípustných úhlových rychlostí. Rychlost ω_G by také měla být reálná, to nám vede pro $\Lambda \geq 0$ na podmínku $R \leq \sqrt[3]{\frac{3M}{\Lambda}}$ a možnost $\Lambda \leq 0$ nevede na žádné omezení hodnoty R , v tomto případě nás omezuje pouze zdola největší kořen rovnice $\frac{\Lambda}{3}R^3 - R + 2M = 0$.

Je tedy nutno poznamenat, že ne pro každou hodnotu konstant Λ a M je geodetický pohyb realizovatelný a je potřeba se vždy ujistit pomocí podmínek výše. Nicméně z podmínek je vidět, že pro případ $\Lambda < 0$ i $\Lambda > 0$ mohou pro speciální hodnoty $|\Lambda|$ a M existovat kruhové geodetiky. Nadále předpokládejme, že nám konstanty určující Schwarzschildův-de Sitterův prostoročas, umožňují realizaci kruhových geodetik.

Zbývá ověřit, že pro tuto hodnotu ω_G platí i zbývající tři podmínky. Dejme se tedy do toho. Pro $\sigma = t$ nabývá tenzorová rovnice (2.28) pro složky u_B^μ vektoru 4-rychlosti a složky $\Gamma_{\rho\xi}^\sigma$ afinní konexe jednoduchého tvaru

$$u_B^\theta \left(u_{B,\theta}^t + \Gamma_{\theta t}^t u_B^t + \Gamma_{\theta\phi}^t u_B^\phi \right) = 0, \quad (2.33)$$

pro $\sigma = \theta$

$$u_B^\phi \left(u_{B,\phi}^\theta + \Gamma_{\phi t}^\theta u_B^t + \Gamma_{\phi\phi}^\theta u_B^\phi \right) = 0, \quad (2.34)$$

pro $\sigma = \phi$

$$u_B^\phi \left(u_{B,\phi}^\phi + \Gamma_{\phi t}^\phi u_B^t + \Gamma_{\phi\phi}^\phi u_B^\phi \right) = 0. \quad (2.35)$$

Po uvážení skutečnosti, že vektor 4-rychlosti \mathbf{u}_B je konstantní, a po započítání všech nenulových složek vektoru 4-rychlosti \mathbf{u}_B a afinní konexe Γ , zjistíme, že podmínky udané rovnicemi (2.33-2.35) jsou triviálně splněny pro všechny hodnoty ω . Navíc je vidět, že pro libovolné ω jsou triviálně nulové všechny prostorové složky kovariantní derivace a tedy i 4-zrychlení, což znamená, že dvojčte B při svém pohybu nedostane mimo ekvatoriální rovinu.

S uvážením výsledků výše je možné poslat obě dvojčata po kruhových geodetikách opačnými směry, které udává znaménko ω_G . Nechme dvojče B a tedy i soustavu S' rotovat kolem středu s úhlovou rychlostí $\omega_B = \sqrt{\frac{M}{R^3} - \frac{\Lambda}{3}}$ a dvojče A nechme obíhat s úhlovou rychlostí $\omega_A = -\sqrt{\frac{M}{R^3} - \frac{\Lambda}{3}}$ vzhledem k soustavě S . Úhlová rychlost ω_A dvojčete A je vůči rotující soustavě S' rovna $-\omega_B$. To znamená, že po opětovném setkání by byla obě dvojčata stejně stará.

Pojďme ještě zvažít, zda pozorovatel A , setrvávající ve na stejném místě v prostoru ve výšce $r = R$, vykonává geodetický pohyb. Diferenciál vlastního času $d\tau_A$ pozorovatele A lze spočítat z rovnice (2.18), s uvážením, že stojící pozorovatel se vůči rotující soustavě S' pohybuje s úhlovou rychlostí $\Omega = -\omega$ a že $dt' = dt$, jako

$$d\tau_A = \sqrt{1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda}{3}R^2} dt \quad (2.36)$$

Z rovnice (2.36) jsme schopni získat jedinou nenulovou složku vektoru 4-rychlosti \mathbf{u}_A^μ pozorovatele A . Tou je časová složka $\frac{dt}{d\tau_A}$. Vektor 4-rychlosti \mathbf{u}_A^μ má tvar:

$$\mathbf{u}_A = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda}{3}R^2}}, 0, 0, 0 \right). \quad (2.37)$$

Spočítejme tenzor \mathbf{a}_A^σ jako kovariantní derivaci vektoru \mathbf{u}_A ve směru \mathbf{u}_A s pomocí rovnice (1.14). Uvažme ještě, že vektor \mathbf{u}_A je konstantní a má jedinou nenulovou složku, a kovariantní derivace $\nabla_{\mathbf{u}_A} \mathbf{u}_A$ přejde na tvar

$$\mathbf{a}_A^\sigma = \mathbf{u}_A^\rho \nabla_\rho \mathbf{u}_A^\sigma = \Gamma_{tt}^\sigma \mathbf{u}_A^t \mathbf{u}_A^t. \quad (2.38)$$

Když vezmeme v úvahu pouze nenulové složky tenzoru afinní konexe Γ , dokážeme, že nenulová je pouze první prostorová složka kovariantní derivace, tedy

$$\mathbf{a}_A = \left(0, \frac{M}{R^2} - \frac{\Lambda}{3}R, 0, 0 \right). \quad (2.39)$$

Pokud se pozorovatel nepohybuje vůči vztažné soustavě S , nevykonává geodetický pohyb a má nenulové 4-zrychlení. Výjimkou je případ, kdy

$R = \left(\frac{3M}{\Lambda}\right)^{1/3}$. V této výšce bude pozorovatel A na geodetice a přitom se nebude pohybovat v prostoru. Z výrazu (2.32) je ale vidět, že pro tuto speciální hodnotu R obě geodetiky splývají a obě dvojčata budou setrvávat na místě. To pro nás není zajímavé a nebudeme se tímto případem dále zabývat.

Kapitola 3

Schwarzschildův prostoročas

Délkový element ds lze ve Schwarzschildově prostoročase vyjádřit pomocí vzorce

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)(cdt)^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.1)$$

Při bližším pohledu na délkový element ds^2 zjistíme, že je velice podobný délkovému elementu v Schwarzschild-(anti) de Sitterově vesmíru (2.1) po dosazení $\Lambda = 0$ a zavedení označení $R_S = 2M$, proto můžeme využít výsledků z kapitoly 2. Plocha $r = R_S$ se nazývá horizont černé díry. Tento případ je již vyřešen v [3]. Pokud získáme shodné výsledky, zkontrolujeme si tak i výpočty v kapitole 2.

3.1 Radiální pohyb

Abychom postupovali v souladu s označením v podkapitole 2.1, ponecháme opět dvojčce A na konstantních prostorových souřadnicích ve výšce $r = R$ a jeho sourozence B necháme volně cestovat v radiálním směru. (tj. počátku v $r = R$ mu udělíme nějakou nenulovou rychlost v_0 v kladném smyslu radiální souřadnicové osy). Opět očekáváme, že se vlivem přitažlivé síly centrálního tělesa zastaví v nějaké maximální výšce $r = R+h$, otočí a začne volně padat zpátky.

Vlastní čas τ_B , který naměřil během své cesty pozorovatel B , určíme po úpravě z rovnice (2.9), přičemž dosadíme za $\Lambda = 0$ a za $2M = R_S$, díky čemuž dostaneme vztah

$$\tau_B = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{R+h}{R_S}} \int_R^{R+h} \sqrt{\frac{r}{R+h-r}} dr. \quad (3.2)$$

Přímou integrací získáme

$$\begin{aligned} \tau_B &= \frac{2}{c} \sqrt{\frac{R+h}{R_S}} \int_R^{R+h} \sqrt{\frac{R+h}{R+h-r} - 1} dr = \left| S : \begin{array}{l} y = \frac{R+h}{R+h-r} - 1 \\ dy = -\frac{R+h}{(R+h-r)^2} dr \end{array} \right| = \\ &= \frac{2}{c} \sqrt{\frac{(R+h)^3}{R_S}} \int_{R/h}^{\infty} \frac{y^{1/2}}{(y+1)^2} dy = \left| PP : \begin{array}{ll} u = y^{1/2} & v' = (y+1)^{-2} \\ u' = \frac{1}{2}y^{-1/2} & v = -(y+1)^{-1} \end{array} \right| = \\ &= \frac{2}{c} \sqrt{\frac{(R+h)^3}{R_S}} \left[\left[-\frac{y^{1/2}}{y+1} \right]_{\frac{R}{h}}^{\infty} + \frac{1}{2} \int_{R/h}^{\infty} \frac{y^{1/2}}{y+1} dy \right] = \left| S : \begin{array}{l} z = \sqrt{y} \\ dz = \frac{dy}{2\sqrt{y}} \end{array} \right| \end{aligned}$$

Poslední substituce vede na integrál s primitivní funkcí arkus tangens. Výsledek je tedy roven

$$\tau_B = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{R+h}{R_S}} \left[\sqrt{hR} + (R+h) \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{\frac{R}{h}} \right) \right]. \quad (3.3)$$

Goniometrickou úpravou získáme

$$\tau_B = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{R+h}{R_S}} \left[\sqrt{hR} + (R+h) \left(\arctan \sqrt{\frac{h}{R}} \right) \right]. \quad (3.4)$$

Vlastní čas τ_A , který naměří pozorovatel A během cesty svého sourozence, než se opět setkají, lze určit z rovnice (2.12) po dosazení za $\Lambda = 0$, $2M = R_S$ a drobnou úpravou vzorcem

$$\tau_A = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{(R-R_S)(R+h-R_S)}{RR_S}} \int_R^{R+h} \frac{r^{\frac{3}{2}}}{(r-R_S)\sqrt{R+h-r}} dr. \quad (3.5)$$

Řešme integrál v rovnici (3.5) následovně:

$$\begin{aligned}
& \int_R^{R+h} \frac{r^{\frac{3}{2}}}{(r - R_S) \sqrt{R+h-r}} dr = \left| \begin{array}{l} R+h-r = \alpha^2 \\ dr = -2\alpha d\alpha \end{array} \right| = \\
& = -2\sqrt{R+h} \int_{\sqrt{h}}^0 \frac{R+h-\alpha^2}{R+h-\alpha^2+R_S} \sqrt{1-\frac{\alpha^2}{R+h}} d\alpha = \\
& = \left| \begin{array}{l} \sin x = \frac{\alpha}{\sqrt{R+h}} \\ \cos x dx = \frac{d\alpha}{\sqrt{R+h}} \end{array} \right| = -2(R+h) \cdot \\
& \quad \cdot \int_{\arcsin \sqrt{\frac{h}{R+h}}}^0 \frac{(R+h)\cos^2 x}{(R+h)\cos^2 x - R_S} \cos^2 x dx = \\
& = -2(R+h) \int_{\arcsin \sqrt{\frac{h}{R+h}}}^0 \left(\cos^2 x + \frac{R_S}{R+h} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x - \frac{R_S}{R+h}} \right) dx = \\
& = -2(R+h) \int_{\arcsin \sqrt{\frac{h}{R+h}}}^0 \left(\cos^2 x + \frac{R_S}{R+h} + \left(\frac{R_S}{R+h} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 x - \frac{R_S}{R+h}} \right) dx = \\
& = -2(R+h) \left[\frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} x + \frac{R_S}{R+h} x + \right]_{\arcsin \sqrt{\frac{h}{R+h}}}^0 - \\
& \quad -2(R+h) \left[\frac{R_S^2}{R+h} \frac{\operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{R_S}{R+h-R_S}} \tan x \right)}{\sqrt{R_S(R+h-R_S)}} \right]_{\arcsin \sqrt{\frac{h}{R+h}}}^0.
\end{aligned}$$

S užitím obecných vztahů

$$\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \quad (3.6)$$

a

$$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.7)$$

dále rovnici upravíme na tvar

$$\int_R^{R+h} \frac{r^{\frac{3}{2}}}{(r - R_S) \sqrt{R+h-r}} dr = 2(R+h) \left[\frac{1}{2} \frac{\sqrt{hR}}{R+h} + \frac{R+h+2R_S}{2(R+h)} \arcsin \sqrt{\frac{h}{R+h}} + \frac{R_S^2}{(R+h)\sqrt{R_S(R+h-R_S)}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{R_S h}{R(R+h-R_S)}} \right].$$

Dosazením posledního vzorce do (3.5) získáme, že

$$\begin{aligned} \tau_A = & \frac{2}{c} \sqrt{\frac{h(R-R_S)(R+h-R_S)}{R_S}} + \\ & + \frac{2(R+h+2R_S)}{c} \sqrt{\frac{(R-R_S)(R+h-R_S)}{RR_S}} \arcsin \sqrt{\frac{h}{R+h}} + \\ & + \frac{4R_S}{c} \sqrt{\frac{R-R_S}{R}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{hR_S}{R(R+h-R_S)}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

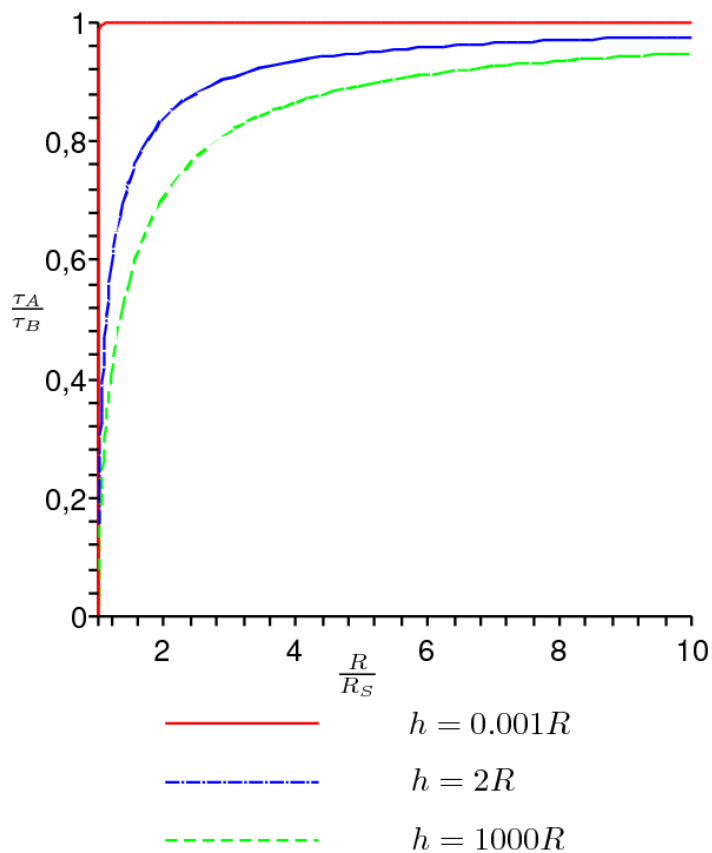
Závěr

Zjistili jsme jaký vlastní čas τ_A naměří pozorovatel A, který čeká na návrat cestujícího pozorovatele B. Graficky je poměr $\frac{\tau_A}{\tau_B}$ znázorněn v grafu na obrázku 3.1. Z obrázku 3.1 je vidět, že pozorovatel B vždy naměří větší čas než pozorovatel A. Pouze pokud se počáteční poloha pozorovatelů R blíží nekonečnu je poměr stejný a oba pozorovatelé naměří stejný čas.

Starší dvojče A se vůči stálícím nepohybuje, a má proto nulové 3-zrychlení a nenulové 4-zrychlení. Toto ale není ve Schwarzschildově vesmíru geodetický pohyb a má tedy v souladu s výsledky podkapitoly 2.3 nenulové 4-zrychlení.

Oproti tomu mladší, po geodetice cestující, dvojče B má nenulovou 3-rychlost, nenulové 3-zrychlení a nulové 4-zrychlení.

Naše výsledky jsou včetně grafu na obrázku 3.1 shodné s výsledky v [3].



Obrázek 3.1: Grafické znázornění poměru vlastních časů pozorovatelů $\frac{\tau_A}{\tau_B}$ v závislosti na poměru $\frac{R}{R_S}$, tedy v závislosti na společné počáteční výšce R pozorovatelů A i B. V grafu jsou vykresleny tři závislosti pro tři různé výšky h , do kterých vyletí pozorovatel B. Obrázek se shoduje s obrázkem uvedeným v [3].

Limita pro $R \rightarrow \infty$

V grafu na obrázku 3.1 jsme vynášeli poměr τ_A/τ_B pro různé výšky $h = AR$, kde A je libovolná nezáporná reálná konstanta. Z grafu je vidět, že by mělo platit následující tvrzení: $\lim_{R \rightarrow \infty} \tau_A/\tau_B = 1$ pro $\forall A$. Pojdme se o tom přesvědčit dosazením za τ_A a τ_B dosazením z rovnic (3.8) a (3.4), přičemž díky tvaru τ_A lze námi zkoumanou limitu rozložit na součet tří limit (tj. $\lim_{R \rightarrow \infty} \tau_A/\tau_B = L_I + L_{II} + L_{III}$), které si zde jednotlivě rozepíšeme. Než začneme provádět limity, musíme nejprve dosadit za výšku $h = AR$, abychom řešili stejný případ, který vynášíme graficky. První limita

$$\begin{aligned} L_I &= \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{A(R - R_S)(R + AR - R_S)}{(1 + A)R^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{A} + (1 + A) \arctan \sqrt{A}} = \\ &= \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A} + (1 + A) \arctan \sqrt{A}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Druhá limita

$$\begin{aligned} L_{II} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[(R + AR + 2R_S) \sqrt{\frac{(R - R_S)(R + AR - R_S)}{R + AR}} R \cdot \right. \\ &\quad \left. \frac{\arcsin \sqrt{\frac{AR}{R + AR}}}{\sqrt{AR^2} + (R + AR) \arctan \sqrt{A}} \right] = \\ &= (1 + A) \frac{\arcsin \sqrt{\frac{A}{1 + A}}}{\sqrt{A} + (1 + A) \arctan \sqrt{A}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

S využitím vztahu (3.7) lze dále upravit na tvar

$$L_{II} = \frac{(1 + A) \arctan \sqrt{A}}{\sqrt{A} + (1 + A) \arctan \sqrt{A}}. \quad (3.11)$$

A konečně třetí limita

$$L_{III} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2R_S^{3/2} \sqrt{R - R_S}}{\sqrt{R(R + RA)}} \cdot \frac{\arctan \sqrt{\frac{ARR_S}{R(R + AR - R_S)}}}{\sqrt{AR^2} + (R + AR) \arctan \sqrt{A}} = 0. \quad (3.12)$$

Po sečtení výrazů L_I , L_{II} a L_{III} získáme hledanou limitu

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\tau_A}{\tau_B} = L_I + L_{II} + L_{III} = 1. \quad (3.13)$$

Čím vyšší bude počáteční výška R a s ní i uražená výška $h = AR$, tím více se bude, po opětovném setkání, poměr vlastních času τ_A/τ_B blížit jedné.

3.2 Kruhový pohyb

Výsledek pro případ, kdy se dvojčce A nepohybuje vůči stálícím, díky čemuž se nachází v konstantní výšce $r = R$, a kdy dvojčce B cestuje po kruhové trajektorii s konstantní výškou $r = R$ a konstantní úhlovou rychlostí ω , lze opět získat z výsledků podkapitoly 2.1. Opět pro jednoduchost uvažujme rovníkovou rovinu (tj. $\theta = \frac{\pi}{2}$).

Z rovnice (2.20) získáme dosazením za $\Lambda = 0$ a za $2M = R_S$ výsledný poměr pro diferenciály vlastních časů

$$\frac{d\tau_B}{d\tau_A} = \sqrt{\frac{1 - \frac{R_S}{R} - R^2\omega^2}{1 - \frac{R_S}{R} - R^2\omega^2 + R^2g(\Omega)}}. \quad (3.14)$$

V rovnici (3.14) je funkce $g(\Omega)$ definovaná vzorcem (2.19). Průběh funkce $g(\Omega)$ je již vyřešen v podkapitole (2.1).

Pojďme se ještě podívat, jak bude vypadat 4-rychlost \mathbf{u}_B^μ cestovatele B , pokud upravíme obecnější výsledek daný rovnicí (2.22) pro Schwarzschildovu metriku. V tomto případě nabude 4-rychlost \mathbf{u}_B^μ následujícího tvaru:

$$\mathbf{u}_B = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{R} - R^2\omega^2}}, 0, 0, \frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{R} - R^2\omega^2}} \right). \quad (3.15)$$

Opět požadujeme, aby dvojčce B vykonávalo geodetický pohyb, což nám přesně určuje hodnotu

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{M}{R^3}}. \quad (3.16)$$

Závěr

Dvojče A , které se vůči stálícím nepohybuje, má nulovou 3-rychlost, nulové 3-zrychlení a nenulovou 4-rychlost, je po opětovném shledání se svým sourozencem starší než toto cestující dvojče B , které má nenulovou 3-rychlost a nulové 4-zrychlení.

Opět dosahujeme shody s výsledky z [3], což znamená, že zobecnění v kapitole 2 by mohlo být dobře.

Kapitola 4

Anti de Sitterův vesmír

Délkový element lze v Anti de Sitterově vesmíru vyjádřit ve schwarzschildovských souřadnicích pomocí vzorce

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dt^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.1)$$

Anti de Sitterův model vesmíru se vyznačuje tím, že je v něm kosmologická konstanta Λ menší než nula a nemá tedy kosmologický horizont.

4.1 Radiální pohyb

Uvažujme dvě dvojčata. Jedno dvojče, označme si jej ze zvyku A , ponechme v klidu ve výšce $r = R$ vůči souřadnicím v nichž máme vyjádřen délkový element ds . Dvojče B nechme cestovat v radiálním směru z místa, kde se nachází dvojče A . Dvojčeti B udělíme na počátku v $r = R$ nějakou rychlost v_0 v kladném radiálním směru a necháme ho volně se pohybovat. Očekáváme, že se díky působení záporné kosmologické konstanty zastaví v nějaké maximální výšce $r = R + h$, kde se posléze obrátí, a začne opět padat zpátky do místa počátku své cesty.

Při bližším pohledu je vidět, že délkový element v Anti de Sitterově vesmíru ds udaný rovnicí (4.1) je shodný s délkovým elementem ds v (Anti) de Sitter-Schwarzschildově vesmíru daného rovnicí (2.1), ve kterém je dosazeno za $M = 0$.

Lze tedy využít již výsledků z kapitoly 2.

Vlastní čas cestujícího pozorovatele B určíme z rovnice (2.9) dosazením za $M=0$ získáme

$$\tau_B = 2 \int_R^{R+h} \frac{1}{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{\Lambda}{3}(R+h)^2}} dr. \quad (4.2)$$

Spočítejme integrál zadaný rovnicí (4.2) jako

$$\begin{aligned} \tau_B &= \frac{2}{\sqrt{-\frac{\Lambda}{3}(R+h)^2}} \int_R^{R+h} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{(R+h)^2}}} dr = \\ &= \left| S : \begin{array}{l} \sin t = \frac{r}{R+h} \\ dr = (R+h) \cos t dt \end{array} \right| = \\ &= 2\sqrt{-\frac{3}{\Lambda}} \int_{\arcsin \frac{R}{R+h}}^{\frac{\pi}{2}} dt = 2\sqrt{-\frac{3}{\Lambda}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{R}{R+h} \right) = \\ &= 2\sqrt{-\frac{3}{\Lambda}} \arccos \frac{R}{R+h}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Pro vlastní čas stojícího pozorovatele A máme vztah daný vzorcem (2.12), kde opět dosadíme za $M=0$. Získáme tak vztah, který řešíme následovně:

$$\begin{aligned} \tau_A &= 2 \frac{\sqrt{1 - \frac{\Lambda}{3}R^2} \sqrt{1 - \frac{\Lambda}{3}(R+h)^2}}{\sqrt{-\frac{\Lambda}{3}(R+h)^2}} \int_R^{R+h} \frac{1}{\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) \sqrt{1 - \frac{r^2}{(R+h)^2}}} dr = \\ &= \left| S : \begin{array}{l} \sin t = \frac{r}{R+h} \\ dr = (R+h) \cos t dt \\ r = (R+h) \sin t \end{array} \right| = \\ &= 2 \frac{\sqrt{1 - \frac{\Lambda}{3}R^2} \sqrt{1 - \frac{\Lambda}{3}(R+h)^2}}{\sqrt{-\frac{\Lambda}{3}}} \int_{\arcsin \frac{R}{R+h}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \frac{-\Lambda}{3}(R+h)^2 \sin^2 t} dt. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Jmenovatel u integrálu ve vzorci (4.4) jsme si upravili záměrně do takového tvaru, jelikož uvažujeme, že $\Lambda < 0$. Pojdme obecně spočítat integrál ve vzorci (4.4) pro nějakou libovolnou konstantu D .

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{1}{1 + D^2 \sin^2 t} dt &= \left| \begin{array}{l} S : \quad y = \tan t \\ \quad \quad dt = \cos^2 t dy \\ \sin^2 t = \frac{y^2}{1+y^2} \\ \cos^2 t = \frac{1}{1+y^2} \end{array} \right| = \\
&= \int_{\tan a}^{\tan b} \frac{1}{1 + y^2 (1 + D^2)} dy = \left| \begin{array}{l} S : \quad u = y\sqrt{1 + D^2} \\ \quad \quad dy = \frac{du}{\sqrt{1+D^2}} \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + D^2}} \int_{\sqrt{1+D^2} \tan a}^{\sqrt{1+D^2} \tan b} \frac{1}{1 + u^2} du = \frac{1}{\sqrt{1 + D^2}} \cdot \\
&\cdot \left\{ \lim_{x_1 \rightarrow b} \left[\arctan \left(\sqrt{1 + D^2} \tan x_1 \right) \right] - \lim_{x_2 \rightarrow a} \left[\arctan \left(\sqrt{1 + D^2} \tan x_2 \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

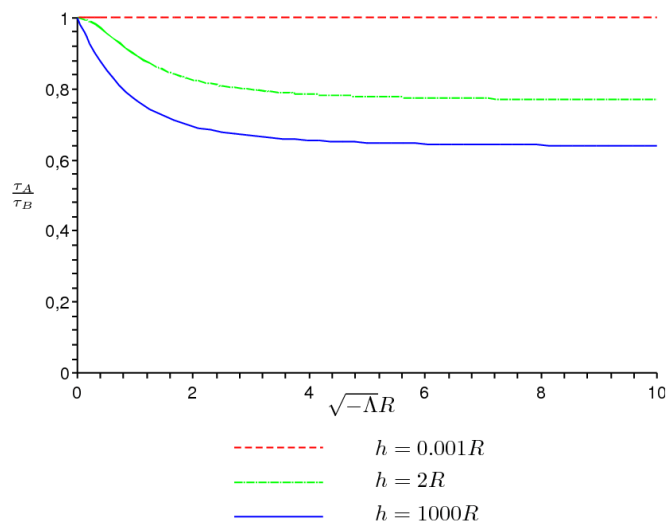
Když dosadíme výsledek do rovnice (4.4) získáme výsledný vzorec

$$\begin{aligned}
\tau_A &= 2 \frac{\sqrt{1 - \frac{\Lambda}{3} R^2} \sqrt{1 - \frac{\Lambda}{3} (R + h)^2}}{\sqrt{-\frac{\Lambda}{3}} \sqrt{1 - \frac{\Lambda}{3} (R + h)^2}} \cdot \\
&\cdot \left\{ \lim_{x_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\arctan \left(\sqrt{1 - \frac{\Lambda}{3} (R + h)^2} \tan x_1 \right) \right] - \right. \\
&\quad \left. - \arctan \left[\sqrt{1 - \frac{\Lambda}{3} (R + h)^2} \tan \left(\arcsin \frac{R}{R + h} \right) \right] \right\} = \\
&= 2 \frac{\sqrt{1 - \frac{\Lambda}{3} R^2}}{\sqrt{-\frac{\Lambda}{3}}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctan \left(R \sqrt{\frac{1 - \frac{\Lambda}{3} (R + h)^2}{2Rh + h^2}} \right) \right\} = \\
&= 2 \frac{\sqrt{1 - \frac{\Lambda}{3} R^2}}{\sqrt{-\frac{\Lambda}{3}}} \operatorname{arccot} \left(R \sqrt{\frac{1 - \frac{\Lambda}{3} (R + h)^2}{2Rh + h^2}} \right). \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Ve výpočtu jsme užili $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
 Uvedme si jak vypadá poměr vlastních časů dvojčat

$$\frac{\tau_A}{\tau_B} = \sqrt{1 - \frac{\Lambda}{3}R^2} \cdot \frac{\operatorname{arccot} \left(R \sqrt{\frac{1 - \frac{\Lambda}{3}(R+h)^2}{2Rh+h^2}} \right)}{\arccos \frac{R}{R+h}}. \quad (4.6)$$

Graficky je poměr vlastních časů daný rovnicí (4.6) znázorněn na obrázku 4.1. Abychom se zbavili závislosti na neznámé kosmologické konstantě Λ , dosazujeme $R = \sqrt{-\frac{1}{\Lambda}}x$. V grafu je na vodorovné ose vynášena hodnota x . Za hodnotu h dosazujeme tři různé násobky R . Konkrétně $h = 0.001R$, $h = 2R$ a $h = 1000R$.



Obrázek 4.1: Grafické znázornění poměru vlastních časů pozorovatelů $\frac{\tau_A}{\tau_B}$. Na vodorovné ose vynášíme $\sqrt{-\Lambda}R$, kde R je společná počáteční výška pozorovatelů A i B. V grafu jsou vykresleny tři závislosti pro tři různé výšky h , do kterých vyletí pozorovatel B.

Závěr

Z grafu na obrázku 4.1 je vidět, že poměr je vždy menší než jedna. To znamená, že stojící dvojče A bude mladší než po geodetice cestující dvojče B (tj. $\tau_A \leq \tau_B$). Pokud bude výška h velmi malá, nedojde k výraznému posunu času a v limitě $h \rightarrow 0$ budou vlastní časy stejné pro všechny počáteční výšky R . To odpovídá tomu, že když dvojče B stojí na stejném místě jako dvojče A , budou jejich vlastní časy shodné, což je ve shodě s očekáváním.

Mladší dvojče A má nulovou 3-rychlost, nulové 3-zrychlení a nenulové 4-zrychlení, oproti němu geodeticky se pohybující mladší dvojče má nenulovou 3-rychlost, nenulové 3-zrychlení a nulovou 4-zrychlení.

Rozdíl vlastních časů bude tím větší, čím větší je vzdálenost h , do které vyletí dvojče B . Z grafu na obrázku 4.1 je možné usuzovat, že pro konkrétní hodnotu h má poměr daný rovnicí (4.6) asymptotické chování a limita by mohla být v rozmezí $< 0, 1 >$ pro $R \rightarrow \infty$ (tj. pro $\forall h \exists \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\tau_A}{\tau_B} = D$, kde $D \in < 0, 1 >$). Touto domněnkou se budeme zabývat v následujícím odstavci.

Limita pro $R \rightarrow \infty$

V grafu na obrázku 4.1 je vidět, že pokud cestující dvojče cestuje do výšky $h = AR$, kde A je libovolná kladná reálná konstanta, jsou grafy odlišné pro různé volby konstanty A . Nejnapadnější je, že limita poměrů vlastních časů τ_A/τ_B pro $R \rightarrow \infty$ je jiná pro každou hodnotu konstanty A . Pojdme se o tom přesvědčit analyticky dosazením do $\lim_{R \rightarrow \infty} \tau_A/\tau_B$ z (4.6) a dosazením za $h = AR$. Získáme

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\tau_A}{\tau_B} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{\Lambda}{3} R^2} \cdot \frac{\operatorname{arccot} \left(R \sqrt{\frac{1 - \frac{\Lambda}{3} (R+AR)^2}{2AR^2 + A^2 R^2}} \right)}{\arccos \frac{R}{R+AR}} = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{R^2} - \frac{\Lambda}{3}} \cdot \frac{R \arctan \sqrt{\frac{2A+A^2}{1 - \frac{\Lambda}{3} R^2 (1+A)^2}}}{\arccos \frac{1}{1+A}} = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{-\frac{\Lambda}{3}} \cdot \frac{1}{\arccos \frac{1}{1+A}} \cdot \left[\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\arctan \sqrt{\frac{2A+A^2}{1-\frac{\Lambda}{3}R^2(1+A)^2}}}{\frac{1}{R}} \right]. \quad (4.7)$$

Na limitu v (4.7) bude výhodné použít l'Hospitalova pravidla, čímž získáme

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\arctan \sqrt{\frac{2A+A^2}{1-\frac{\Lambda}{3}R^2(1+A)^2}}}{\frac{1}{R}} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\frac{\partial}{\partial R} \left(\arctan \sqrt{\frac{2A+A^2}{1-\frac{\Lambda}{3}R^2(1+A)^2}} \right)}{\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \right)} = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\frac{R \frac{\Lambda}{3} \sqrt{2A+A^2} (1+A)^2}{\left[1-\frac{\Lambda}{3}R^2(1+A)^2+2A+A^2 \right] \sqrt{1-\frac{\Lambda}{3}R^2(1+A)^2}}}{-\frac{1}{R^2}} = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2A+A^2} \frac{\Lambda}{3}}{\sqrt{-\frac{\Lambda}{3}(1+A)^2 + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\Lambda}{3} - \frac{1}{R^2} \right]}} = \\ &= \sqrt{\frac{2A+A^2}{-\frac{\Lambda}{3}(1+A)^2}}. \quad (4.8) \end{aligned}$$

Po zpětném dosazení z (4.8) do (4.7) získáme výslednou limitu

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\tau_A}{\tau_B} = \frac{\sqrt{A^2+2A}}{(A+1) \arccos \left(\frac{1}{1+A} \right)} = \frac{\sqrt{A^2+2A}}{(A+1) \arcsin \frac{\sqrt{A^2+2A}}{A+1}}, \quad (4.9)$$

kde jsme užili známý vztah $\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2}$.

Limita poměru vlastních časů $\frac{\tau_A}{\tau_B}$ je dána funkcí $f(x) = \frac{x}{\arcsin x}$, kde

$x = \frac{\sqrt{A^2+2A}}{A+1}$. Analýzou výrazu x získáme, že $\lim_{A \rightarrow 0} x = 0$ a

$\lim_{A \rightarrow \infty} x = 1$. Přičemž derivace $\frac{\partial}{\partial A} x = \frac{1}{\sqrt{A^2+2A(A+1)^2}}$. Je vidět, že výraz x je monotónně rostoucí na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$ a tudíž $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

Nyní je potřeba vyšetřit průběh funkce $f(x)$ na intervalu $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

Není obtížné se přesvědčit, že $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{\pi}$ a že $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

Derivace $\frac{\partial}{\partial x} f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} \arcsin x - x}{\sqrt{1-x^2} \arcsin^2 x}$ je v bodě $x = 0$ nulová a neexistuje v bodě $x = 1$, jinak je na intervalu $x \in (0, 1)$ záporná, tedy funkce $f(x)$ je monotónně klesající na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a $f(x) \in \langle \frac{2}{\pi}, 1 \rangle$.

Čím vyšší bude počáteční výška R a s ní i uražená výška h , tím více se bude, po opětovném setkání, poměr vlastních času τ_A/τ_B blížit jedné. Pokud půjde za konstantní hodnoty A počáteční výška R limitně do nekonečna, půjde i uražená dráha $h = AR$ do nekonečna a poměr vlastních časů τ_A/τ_B půjde k nějaké limitní hodnotě udané vztahem (4.9), která závisí na konstantě A .

4.2 Kruhový pohyb

Analýza situace, kdy dvojčce A stojí (tj. jeho prostorové souřadnice, vztažené ke stálícím, se nemění) a druhé dvojčce B obíhá po geodetice v konstantní výšce $r = R$ s konstantní úhlovou rychlostí ω v ekvatoriální rovině $\theta = \frac{\pi}{2}$, je velmi jednoduchá. Jelikož jsme už veškerou práci udělali v podkapitole 2.1. Vezměme si vzorec (2.20) a dosadíme do něj za $M = 0$, čímž přejde Schwarzschildova-(Anti) de Sitterova metrika na (Anti) de Sitterovu, pokud navíc uvažujeme $\Lambda < 0$, dostaneme přímo model Anti de Sitterova vesmíru, v němž platí, že

$$\frac{d\tau_B}{d\tau_A} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\Lambda}{3}R^2 - R^2\omega^2}{1 - \frac{\Lambda}{3}R^2 - R^2\omega^2 + R^2g(\Omega)}}, \quad (4.10)$$

ve kterém je funkce $g(\Omega)$ opět udána rovnicí (2.19).

Uvedme, že 4-rychlost \mathbf{u}_B^μ cestujícího pozorovatele B bude mít tvar

$$\mathbf{u}_B = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Lambda}{3}R^2 - R^2\omega^2}}, 0, 0, \frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{\Lambda}{3}R^2 - R^2\omega^2}} \right). \quad (4.11)$$

Aby byl pohyb geodetický, musí dle rovnice (2.32) být

$$\omega = \pm \sqrt{-\frac{\Lambda}{3}}. \quad (4.12)$$

Z rovnice (4.12) je vidět, že pokud má mít rychlost ω smysl, musí být $\Lambda < 0$. Pouze za této podmínky je geodetický kruhový pohyb s úhlovou

rychlostí ω realizovatelný.

Z vyšetřování kruhového pohybu v podkapitole 2.1 je vidět, že pokud bude pozorovatel A stát vůči stálícím, bude po opětovném shledání starší než jeho geodeticky cestující dvojče B .

Mladší dvojče B se pohybuje po geodetice a má tudíž nulové 4-zrychlení a nenulovou 3-rychlost, oproti tomu starší dvojče A má 4-zrychlení nenulové a 3-zrychlení nulové.

Kapitola 5

Kerrův prostoročas

Pro délkový element ds v Kerrově prostoročase v geometrizovaných jednotkách platí

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} ((r^2 + a^2)d\phi - a dt)^2 + \frac{\Delta}{\rho^2} dr^2 + \rho^2 d\theta^2. \quad (5.1)$$

Ve vzorci (5.1) a reprezentuje úhlový moment rotujícího tělesa vztažený na jednotku jeho hmotnosti. Určuje tedy, zda centrální těleso rotuje či nikoliv (tj. pokud $a = 0$ přejde Kerrova metrika na Schwarzschildovu). Neznámé ρ a Δ jsou zadány vztahy:

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (5.2)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2. \quad (5.3)$$

Proměnná M označuje hmotnost centrálního tělesa. V této kapitole se seznámíme s postupem z [4] a pokusíme se tyto výsledky aplikovat na další případy.

5.1 Obě dvojčata vykonávající kruhové geodetické pohyby

Variační princip pro geodetiky lze zapsat ve tvaru

$$0 = \delta \int d\tau = \delta \int \dot{\tau} dt, \quad (5.4)$$

kde tečka značí derivaci podle souřadnicového času. Při variaci uvažujeme pevné konce. Tímto postupem jsme získali analogii Hamiltonova variačního principu v klasické mechanice s lagrangiánem $\mathcal{L} = \dot{\tau}$. Pokud budeme uvažovat kruhový pohyb libovolného pozorovatele kolem centrálního tělesa v ekvatoriální rovině (tj. $\theta = \frac{\pi}{2}$) a konstantní výšce r , můžeme díky rovnosti $d\tau^2 = -ds^2$ a tvaru ds z (5.1) sestavit Lagrangeovu funkci

$$\mathcal{L} = \frac{d\tau}{dt} = \left[\frac{\Delta}{\rho^2} (1 - a\dot{\phi})^2 - \frac{1}{\rho^2} ((r^2 + a^2)\dot{\phi} - a)^2 \right]^{1/2}. \quad (5.5)$$

Tečka značí časovou derivaci podle souřadnicového času t . Upravme si rovnici (5.5) dosazením za Δ a ρ^2 , pro snadnější počítání, na tvar

$$\mathcal{L} = \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \left(\frac{4aM}{r}\right) \dot{\phi} - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) \dot{\phi}^2 \right]^{1/2}. \quad (5.6)$$

Z teorie Lagrangeovy formulace teoretické mechaniky víme, že pokud Lagrangeova funkce \mathcal{L} nezávisí na časové derivaci nějaké konkrétní proměnné, je derivace Lagrangeovy funkce podle této proměnné nulová. Lagrangeova funkce \mathcal{L} daná rovnicí (5.6) nezávisí na \dot{r} , tudíž podle teorie musí být derivace $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0$. Dosazením získáme podmínku

$$-\frac{2M}{r^2} + \frac{4aM}{r^2} \dot{\phi} + \left(2r - \frac{2Ma^2}{r^2}\right) \dot{\phi}^2 = 0. \quad (5.7)$$

Podmínka vede na kvadratickou rovnici pro $\dot{\phi}$

$$(r^3 - Ma^2) \dot{\phi}^2 + 2aM\dot{\phi} - M = 0, \quad (5.8)$$

která má dva kořeny

$$\dot{\phi}_{1/2} = \frac{-a \pm \sqrt{\frac{r^3}{M}}}{\frac{r^3}{M} - a^2}. \quad (5.9)$$

Po zavedení nové proměnné

$$\Omega = \sqrt{\frac{r^3}{M}}, \quad (5.10)$$

přejde řešení (5.9) na tvar

$$\dot{\phi}_{1/2} = \frac{-a \pm \Omega}{\Omega^2 - a^2} \quad (5.11)$$

Nyní je následující zjednodušení již zřejmé. Výsledné řešení kvadratické rovnice (5.8) lze stručněji zapsat jako

$$\dot{\phi}_{1/2} = \frac{1}{a \pm \Omega}. \quad (5.12)$$

Našli jsme tedy dvě úhlové rychlosti $\dot{\phi}_1$ a $\dot{\phi}_2$, pro které bude kruhově obíhající pozorovatel vykonávat geodetický pohyb. Carter ukázal [4], že při $M < a$ dochází k problémům z hlediska kauzality. Proto se my zabýváme pouze případem $0 \leq a \leq M$.

Při této podmínce nám vychází rychlost $\dot{\phi}_1 \geq 0$ a $\dot{\phi}_2 \leq 0$. To znamená, že naše dvě kruhové geodetiky jsou obíhány v opačném směru.

Pojďme využít výsledku (5.12) a vezměme v úvahu dvě dvojčata, která se na počátku měření nachází na stejném místě v prostoru s nenulovými úhlovými rychlostmi $\dot{\phi}_{1/2}$. Dvojče A nechme obíhat v kladném smyslu s úhlovou rychlostí $\dot{\phi}_1 = (a + \Omega)^{-1}$ a jeho sourozenec B nechme obíhat v záporném smyslu s úhlovou rychlostí $\dot{\phi}_2 = (a - \Omega)^{-1}$.

Pojďme zjistit, jaký bude rozdíl ve vlastních časech naměřených při opětovném shledání. Z hlediska souřadnic vztažených ke stálícím musí oba pozorovatelé dohromady oběhnout celou kružnici (tj. úhel 2π). Z hlediska souřadnicového času t jim bude cesta trvat stejně dlouho, než se

znova setkají, označme si souřadnicový čas cesty jako t_1 . Nyní je zřejmá opodstatněnost podmínky

$$|\dot{\phi}_1| t_1 + |\dot{\phi}_2| t_1 = 2\pi. \quad (5.13)$$

Po dosazení a drobném rozmyšlení, že za podmínky $r > M$ je $\Omega \geq a$, získáme rovnici

$$\left(\frac{1}{a + \Omega} - \frac{1}{a - \Omega} \right) t_1 = 2\pi, \quad (5.14)$$

pro kterou jednoduše nalezneme řešení

$$t_1 = \pi\Omega \left(1 - \frac{a^2}{\Omega^2} \right). \quad (5.15)$$

Diferenciál vlastního času $d\tau$ libovolného pozorovatele lze získat z rovnosti (5.6), tedy jako

$$\frac{d\tau}{dt} = \mathcal{L} = \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) + \left(\frac{4aM}{r} \right) \dot{\phi} - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \right) \dot{\phi}^2 \right]^{1/2}. \quad (5.16)$$

Konkrétně pro pozorovatele A nabude rovnice (5.16) tvaru

$$\frac{d\tau_A}{dt} = \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) + \left(\frac{4aM}{r} \right) \dot{\phi}_1 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \right) \dot{\phi}_1^2 \right]^{1/2}, \quad (5.17)$$

který po dosazení za $\dot{\phi}_1$ přejde na

$$\frac{d\tau_A}{dt} = \frac{\left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) (a + \Omega)^2 + \left(\frac{4aM}{r} \right) (a + \Omega) - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \right) \right]^{1/2}}{(a + \Omega)}, \quad (5.18)$$

jež upravíme na hezký tvar

$$\frac{d\tau_A}{dt} = \frac{1}{(a + \Omega)} \sqrt{\Omega^2 - 3r^2 + 2a\Omega}. \quad (5.19)$$

Pro pozorovatele B dosadíme do rovnice (5.16) ze vztahu $\dot{\phi} = \dot{\phi}_2$ a získáme vztah

$$\frac{d\tau_B}{dt} = \frac{1}{(a - \Omega)} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) (a - \Omega)^2 + \left(\frac{4aM}{r}\right) (a - \Omega) - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) \right]^{1/2}. \quad (5.20)$$

který lze upravit na

$$\frac{d\tau_B}{dt} = \frac{1}{(\Omega - a)} \sqrt{\Omega^2 - 3r^2 - 2a\Omega}. \quad (5.21)$$

Znaménko jsme ve jmenovateli zaměnili proto, aby byl celý diferenciál kladný. Z rovnic (5.19) a (5.21) lze již dopočítat vlastní časy τ_A a τ_B , které naměří pozorovatelé, než se znovu střetnou, integrací od $t = 0$ do $t = t_1$ jako

$$\tau_A = \int_0^{t_1} \frac{1}{(\Omega + a)} \sqrt{\Omega^2 - 3r^2 + 2a\Omega} dt, \quad (5.22)$$

$$\tau_B = \int_0^{t_1} \frac{1}{(\Omega - a)} \sqrt{\Omega^2 - 3r^2 - 2a\Omega} dt. \quad (5.23)$$

Funkce uvnitř integrálů nezávisí na t , pročež získáme po jednoduché úpravě

$$\tau_A = \frac{\pi}{\Omega} (\Omega - a) \sqrt{\Omega^2 - 3r^2 + 2a\Omega}, \quad (5.24)$$

$$\tau_B = \frac{\pi}{\Omega} (\Omega + a) \sqrt{\Omega^2 - 3r^2 - 2a\Omega}. \quad (5.25)$$

Z rovnic (5.24) a (5.25) je vidět, že při opětovném shledání naměří dvojče A větší vlastní čas než dvojče B .

Toto tvrzení je netriviální, pročež si zkusme ukázat, že tomu tak opravdu je. Zavedeme si funkci $h(x)$ danou

$$h(x) := (\Omega - x) \sqrt{\Omega^2 - 3r^2 + 2x\Omega}. \quad (5.26)$$

Nyní se pokusme ukázat, že funkce $h(x)$ je rostoucí na intervalu $x \in \langle -M, M \rangle$ pro každou hodnotu parametru r . Spočítejme první derivaci funkce $h(x)$

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{3r^2 - 3\Omega x}{\sqrt{\Omega^2 - 3r^2 + 2x\Omega}}. \quad (5.27)$$

Odmocnina ve jmenovateli je vždy kladná, proto se zajímáme pouze o znaménko v čitateli. Dosazením z (5.10) do (5.27) a omezením se pouze na číselný zlomek získáme vztah pro znaménko derivace funkce $\text{sign}(h'(x))$ jako

$$\text{sign}(h'(x)) = \text{sign}\left(3r^2 - 3\sqrt{\frac{r^3}{M}}x\right) = \text{sign}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{Mr}}x\right). \quad (5.28)$$

S uvážením vlastnosti $r > 0$ je zřejmé, že derivace $h'(x)$ je kladná pro $x \in \langle -M, 0 \rangle$. Pro $x \in (0, M)$ je potřeba přidat dodatečnou podmínku $r > M$. Tento požadavek je více než rozumný a musí být splněn, jinak by ani jeden z našich pozorovatelů nemohl vykonávat požadovaný pohyb. Funkce $h(x)$ je rostoucí na definičním oboru $x \in \langle -M, M \rangle$ pro každé $r > M$. Podíl vlastních časů pozorovatelů lze zapsat ve tvaru

$$\frac{\tau_A}{\tau_B} = \frac{h(a)}{h(-a)} > 1. \quad (5.29)$$

z čehož jasně plyne pravdivost tvrzení o starším pozorovateli A . Nutno říci, že jsme se doposud nezabývali podmínkou na hodnotu proměnné r , která zjevně díky rovnicím (5.23) a (5.24) nemůže být zcela libovolná, ale musí nabývat takových hodnot, aby výrazy uvnitř odmocnin byly kladná a reálná čísla. Přesnými omezeními hodnoty r se budeme zabývat v následující podkapitole.

Závěr

Oba pozorovatelé mají nulové 4-zrychlení a nenulovou 3-rychlost, ale dvojčce A , které cestuje vyšší úhlovou rychlostí, je při shledání starší než jeho sourozenec B , který cestuje menší úhlovou rychlostí.

5.2 Stojící a kruhově geodeticky se pohybující dvojče

V této podkapitole využijeme výsledků z [4] pro novou situaci. Nejprve začněme s myšlenkou, že se dvojče A nachází na konstantních prostorových souřadnicích a dvojče B se pohybuje po kruhové geodetice v konstantní výšce r v rovníkové rovině. Ve shodě s označením v minulé podkapitole to znamená, že úhlová rychlost $\dot{\phi}_1$ dvojčete A je nulová a úhlová rychlost $\dot{\phi}_2$ dvojčete B může nabývat dvou hodnot, aby cestovalo po geodetice. Využijme výsledků minulé podkapitoly, přičemž z rovnice (5.13) opět plyne vztah pro celkový souřadnicový čas, který uplyne, než se dvojčata opět střetnou,

$$|\dot{\phi}_2| t_1 = 2\pi. \quad (5.30)$$

Dosazením za $\dot{\phi}_2 = (a \pm \Omega)^{-1}$ a přeznačením $t_1 \rightarrow T$ určíme hodnotu jako

$$T_{\pm} = 2\pi(\Omega \pm a). \quad (5.31)$$

Získali jsme tedy dva časy. Pokud bude dvojče B obíhat s rychlostí $\dot{\phi}_2 = (a + \Omega)^{-1}$ uplyne do opětovného střetnutí se sourozencem souřadnicový čas T_+ , pokud s rychlostí $\dot{\phi}_2 = (a - \Omega)^{-1}$ uplyne čas T_- .

Kombinací rovnic (5.22) a (5.23) lze výsledný vlastní čas τ_B , naměřený dvojčetem B , zapsat kompaktně pro oba směry obíhání ve tvaru

$$\tau_{B\pm} = \int_0^{T_{\pm}} \frac{1}{(\Omega \pm a)} \sqrt{\Omega^2 - 3r^2 \pm 2a\Omega} dt. \quad (5.32)$$

Integrál v rovnici (5.32) nezávisí na souřadnicovém čase t a tudíž jednoduchou integrací získáme výsledný vztah

$$\tau_{B\pm} = 2\pi \sqrt{\Omega^2 - 3r^2 \pm 2a\Omega}. \quad (5.33)$$

Vlastní čas τ_A , naměřený pozorovatelem A , získáme s pomocí rovnice (5.17), kde dosadíme za $\dot{\phi}_1 = 0$, čímž získáme vztah

$$d\tau_A = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} dt. \quad (5.34)$$

Výsledný vlastní čas τ_A získáme pro obě úhlové rychlosti pozorovatele B integrací vztahu (5.34) od $t = 0$ do $t = T_{\pm}$ jako

$$\tau_A = \int_0^{T_{\pm}} \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} dt = 2\pi (\Omega \pm a) \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}. \quad (5.35)$$

Nyní nám nezbyvá nic jiného než vyšetřit poměr vlastních časů

$$\left(\frac{\tau_A}{\tau_B}\right)_{\pm} = \frac{(\Omega \pm a) \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}{\sqrt{\Omega^2 - 3r^2 \pm 2a\Omega}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}{\sqrt{1 - \frac{3r^2 + a^2}{(\Omega \pm a)^2}}}. \quad (5.36)$$

Zavedeme si funkce $f(r)$ a $g(r)$ následujícími vztahy:

$$f(r) := -\frac{2M}{r}, \quad (5.37)$$

$$g_{\pm}(r) := -\frac{3r^2 + a^2}{\left(\sqrt{\frac{r^3}{M}} \pm a\right)^2}. \quad (5.38)$$

Průběhy funkce jsme graficky zanesli do obrázku 5.1.

Omezení výšky

Nyní je vhodná chvíle se zamyslet, nad omezeními proměnné r . Aby měl vlastní čas τ_A , měřený dvojčetem A , smysl, musí být splněna podmínka $r > 2M$.

V rovnicích (5.24) a (5.25) požadujeme, aby měřené vlastní časy obou geodeticky cestujících pozorovatelů byly reálné. To nám vede na dvě podmínky, které lze kompaktně zapsat ve tvaru

$$\Omega^2 - 3r^2 \pm 2a\Omega \geq 0. \quad (5.39)$$

Po dosazení z rovnice (5.10) získáme následující tvar podmínky

$$\frac{r^3}{M} - 3r^2 \pm 2a\sqrt{\frac{r^3}{M}} \geq 0, \quad (5.40)$$

kterou si dále zjednodušíme pomocí substituce $t^2 = Mr$ na tvar:

$$t^3 - 3M^2t \pm 2aM^2 \geq 0. \quad (5.41)$$

Díky vhodnému tvaru si zavedeme Hariotovu substituci $t := y + \frac{M^2}{y}$ čímž získáme výraz

$$y^6 \pm 2aM^2zy^3 + M^6 \geq 0. \quad (5.42)$$

Hledejme kořeny polynomu na levé straně nerovnice (5.42) jako kořeny kvadratické rovnice. Řešením tohoto problému získáme dva nezávislé kořeny y^3 pro každé znaménko, tudíž získáme čtyři hodnoty

$$\begin{aligned} y_{+1/2}^3 &= -2aM \pm i\sqrt{M^6 - a^2M^4}, \\ y_{-1/2}^3 &= +2aM \pm i\sqrt{M^6 - a^2M^4}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Pro každou ze čtyř hodnot y^3 získáme tři hodnoty y , které dosadíme do substitučních rovnic výše a získáme tři hodnoty r , které vychází pro každou hodnotu y^3 stejně ve tvarech

$$r_1 = 4M \sin^2 \left[\frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{a}{M} \right) \right], \quad (5.44)$$

$$r_2 = M \left\{ \sqrt{3} \cos \left[\frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{a}{M} \right) \right] - \sin \left[\frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{a}{M} \right) \right] \right\}^2, \quad (5.45)$$

$$r_3 = M \left\{ \sqrt{3} \cos \left[\frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{a}{M} \right) \right] + \sin \left[\frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{a}{M} \right) \right] \right\}^2. \quad (5.46)$$

Kladný směr obíhání

Pro pozorovatele cestujícího v kladném směru s úhlovou rychlostí $\dot{\phi} = (\Omega + a)^{-1}$ máme podmínku

$\Omega^2 - 3r^2 + 2a\Omega \geq 0$. Pokud nás zajímá, pro jaké r je levá strana rovna nule, zjistíme, že je to pro pouze pro dvě, ze tří výše spočtených hodnot, a to pro hodnoty r_1 a r_2 . Nerovnost je splněna na dvou intervalech. Přesněji pro $r \in \langle 0, r_1 \rangle \cup \langle r_2, \infty \rangle$. My si zavedeme minimální výšku R_+ , na které může pozorovatel obíhat v kladném smyslu po kruhové geodetice $R_+ = r_2$ tedy

$$R_+ = M \left\{ \sqrt{3} \cos \left[\frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{a}{M} \right) \right] - \sin \left[\frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{a}{M} \right) \right] \right\}^2. \quad (5.47)$$

Kdybychom uvažovali interval $r \in \langle 0, r_1 \rangle$ znamenalo by to, že by $r \in \langle 0, M \rangle$. To by pro nás z hlediska druhého stojícího pozorovatele, nemělo smysl. Proto jsme vybrali větší hodnotu r_2 .

Zaměříme se na to, jakých hodnot nabývá R_+ v závislosti na hodnotě a . Limity pro $a \rightarrow 0$ a $a \rightarrow M$ jsou rovny $\lim_{a \rightarrow 0} R_+ = 3M$ a $\lim_{a \rightarrow M} R_+ = 4M$. Mezi body $a = 0$ a $a = M$ hodnota R_+ monotónně narůstá.

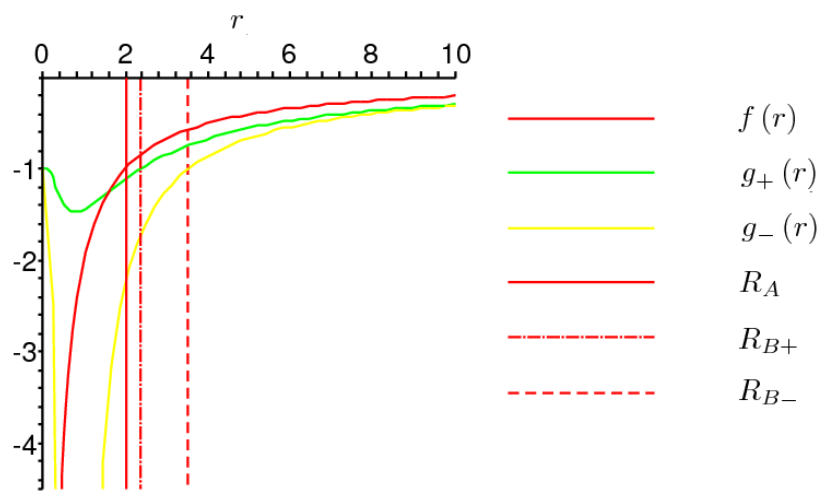
Záporný směr obíhání

Pro pozorovatele cestujícího v záporném směru s úhlovou rychlostí $\dot{\phi} = (\Omega - a)^{-1}$ máme podmínku $\Omega^2 - 3r^2 - 2a\Omega \geq 0$. Když nerovnost změníme na rovnost, zjistíme, že z námi spočtených hodnot r_1 , r_2 a r_3 řeší tuto rovnici pouze jediná a to r_3 . Nerovnost je splněna na intervalu $r \in \langle r_3, \infty \rangle$.

Zaveďme tedy minimální možnou hodnotu R_- , na které ještě může pozorovatel obíhat po kruhové geodetice v záporném smyslu, jako

$$R_- = M \left\{ \sqrt{3} \cos \left[\frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{a}{M} \right) \right] + \sin \left[\frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{a}{M} \right) \right] \right\}^2. \quad (5.48)$$

Hodnota monotónně klesá na intervalu $a \in \langle 0, M \rangle$. V krajních bodech nabývá hodnoty $\lim_{a \rightarrow 0} R_- = 3M$ a $\lim_{a \rightarrow M} R_- = M$.



Obrázek 5.1: Grafické znázornění průběhů funkcí $f(r)$, $g_+(r)$ a $g_-(r)$ definované vztahy (5.37) a (5.38). Do rovnic jsme dosazovali $r = Mx$ pro pevně zvolenou hodnotu $a = \frac{1}{2} M$. Na vodorovnou osu vynášíme hodnotu x a na svislou hodnoty funkcí. Svislé čáry značí dolní mez hodnoty r pro jednotlivé pozorovatele. Stojící pozorovatel A se nemůže nacházet ve výšce x menší, než udává svislá přímka R_A . Obíhající pozorovatel se zase nesmí nacházet ve výšce x menší než je mez udaná svislými čarami $R_{B\pm}$ v závislosti na směru obíhání.

Závěr

Z grafu na obrázku 5.1 a rovnice (5.36) je vidět, že obíhající pozorovatel B naměří vždy menší čas, než stojící pozorovatel A . Pokud obíhá v kladném smyslu, je poměr vlastních časů menší než když obíhá v záporném směru (tj. $(\tau_A/\tau_B)_+ < (\tau_A/\tau_B)_-$). Cestující pozorovatel B , který má nenulovou 3-rychlost a nulové 4-zrychlení, je při setkání mladší, než jeho stojící dvojče A s nulovou 3-rychlostí a nenulovým 4-zrychlením.

Poznámka

Za zmínku stojí, že v [3], narozdíl od našeho volně kruhově obíhajícího pozorovatele, volí kruhově obíhajícího ZAMO pozorovatele (tj. pozorovatele s nulovým úhlovým momentem $p_\phi = 0$ sdruženým s úhlovou souřadnicí ϕ). V tomto případě získají výsledek, že pozorovatel ZAMO je při opětovném shledání starší než statický pozorovatel. Dále ukazují jakou úhlovou rychlost takový ZAMO pozorovatel má a tím také dokazují, že se nemůže pohybovat po geodetice.

Je možné upřednostnit pozorovatele ZAMO oproti statickému pozorovateli. Díky čemuž statický pozorovatel přejde na kruhově obíhajícího pozorovatele vůči vztažné soustavě udané ZAMO pozorovatelem. Původně statický pozorovatel vůči nové vztažné soustavě pozorovatele ZAMO obíhá s nějakou úhlovou rychlostí a je mladší než upřednostňovaný ZAMO pozorovatel. Pro nás je ale výhodnější volit vztažnou soustavu spojenou s hvězdným nebem než soustavu spojenou se ZAMO pozorovatelem a nebudeme se tedy dále tímto případem zabývat.

Kapitola 6

de Sitterův vesmír

Délkový element ds se v de Sitterově vesmíru dá vyjádřit v horosférických souřadnicích (t, χ, θ, ϕ) ve tvaru

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \left[d\chi^2 + \chi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (6.1)$$

6.1 Statický a obíhající pozorovatel

Uvažujme situaci, kdy jeden pozorovatel A čeká na konstantních prostorových souřadnicích χ , θ a ϕ a druhý pozorovatel B cestuje. Pro zjednodušení uvažujme, že se všechny pohyby odehrávají v ekvatoriální rovině (tj. $\theta = \frac{\pi}{2}$). Nechme dvojčce B cestovat takovým způsobem, že se bude měnit pouze jeho souřadnice ϕ a ostatní prostorové souřadnice χ a θ zůstanou konstantní. Uvažujme, že bude cestovat konstantní úhlovou rychlostí ω danou vztahem $\omega = d\phi/dt$. Jeho vektor 4-rychlosti \mathbf{u}_B^μ nabude po úpravě $d\phi/d\tau_B = \omega dt/d\tau_B$ tvaru

$$\mathbf{u}_B = \left(\frac{dt}{d\tau_B}, 0, 0, \omega \frac{dt}{d\tau_B} \right). \quad (6.2)$$

Norma 4-rychlosti $\mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{u}_B^\mu \mathbf{u}_B^\nu = -1$ nám dá možnost, jak určit neznámé složky vektoru 4-rychlosti \mathbf{u}_B^μ pomocí vztahu

$$-1 = -\frac{dt^2}{d\tau_B^2} + e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \chi^2 \omega^2 \frac{dt^2}{d\tau_B^2}. \quad (6.3)$$

Odtud vyplývá rovnost pro neznámou složku

$$\frac{dt}{d\tau_B} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \chi^2 \omega^2}}. \quad (6.4)$$

Proveďme drobné zobecnění, totiž nechme pozorovatele A vykonávat stejný druh pohybu jaký vykonává jeho dvojče B , ale jinou úhlovou rychlostí ω_A . Celý postup výše lze uplatnit i při výpočtu složek vektoru 4-rychlosti \mathbf{u}_A^μ pozorovatele A . Rovnice (6.4) bude platit i pro pozorovatele A pouze s tím rozdílem, že hodnota ω bude nahrazena ω_A . Díky čemuž jsme schopni získat poměr diferenciálů vlastních časů

$$\frac{d\tau_B}{d\tau_A} = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \chi^2 \omega_B^2}}{\sqrt{1 - e^2 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \chi^2 \omega_A^2}}, \quad (6.5)$$

ze kterého je okamžitě vidět, že rychleji pohybující se dvojče bude po opětovném setkání mladší než dvojče pomalejší. Původně uvažované statické dvojče A má nulovou hodnotu ω_A a je po setkání starší.

Závěr

V další podkapitole si ukážeme, že dvojče A se nachází na geodetice, zatímco jeho sourozenec B nikoliv, díky čemuž bude možné, že závěr této podkapitoly formulovat následujícím způsobem: Geodeticky se pohybující dvojče A , mající nulovou 3-rychlost a nulové 4-zrychlení, je po opětovném setkání starší, než jeho negeodeticky cestující sourozenec B , který má nenulovou 3-rychlost a nenulové 4-zrychlení.

6.2 Geodetické a negeodetické pohyby

Pozorovatel B pohybující se s úhlovou rychlostí ω má vektor 4-rychlosti \mathbf{u}_B^μ ve tvaru

$$\mathbf{u}_B = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \chi^2 \omega^2}}, 0, 0, \frac{\omega}{\sqrt{1 - e^2 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \chi^2 \omega^2}} \right). \quad (6.6)$$

Zkusme zjistit, zda se pozorovatel B nemůže pro nějakou hodnotu ω pohybovat po geodetice. Opět vyjděme rovnice geodetiky (1.14), tedy

$$\mathbf{u}_B^\rho \left(\mathbf{u}_{B,\rho}^\sigma + \Gamma_{\rho\xi}^\sigma \mathbf{u}_B^\xi \right) = 0. \quad (6.7)$$

Zabýváme se možnostmi, kdy $\sigma = \phi$, čímž dostaneme pro složky rovnost

$$u_B^\rho \left(u_{B,\rho}^\phi + \Gamma_{\rho t}^\phi u_B^t + \Gamma_{\rho\phi}^\phi u_B^\phi \right) = 0. \quad (6.8)$$

Se zohledněním nulových složek $\Gamma_{\rho\xi}^\sigma$ a vektoru \mathbf{u}_B^μ získáme tvar

$$u_B^t u_{B,t}^\phi + \Gamma_{\phi t}^\phi u_B^\phi u_B^t = 0. \quad (6.9)$$

Po dosazení za složky afinní konexe $\Gamma_{\rho\xi}^\sigma$ a za složky vektoru 4-rychlosti \mathbf{u}_B^μ získáme podmínku

$$-\frac{1}{2} \frac{-e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \chi^2 2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \omega^3}{\left(1 - e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \chi^2 \omega^2\right)^2} + \frac{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}}{2} \frac{\omega}{1 - e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \chi^2 \omega^2} = 0. \quad (6.10)$$

Rovnici vynásobíme $\left(1 - e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \chi^2 \omega^2\right)^2$ a po drobném krácení získáme

$$e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \chi^2 \omega^2 + 1 - e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \chi^2 \omega^2 = 1 \neq 0, \quad (6.11)$$

z čehož je vidět, že pro žádné ω nebude úhlový pohyb pozorovatele B geodetický.

Stojící pozorovatel A má 4-rychlost \mathbf{u}_A^μ ve tvaru $\mathbf{u}_A = (1, 0, 0, 0)$. Rovnice (6.7) se nám díky tomuto tvaru 4-rychlosti \mathbf{u}_A^μ redukuje na 4 rovnice pro indexy σ

$$\Gamma_{tt}^\sigma u_A^t u_A^t = 0. \quad (6.12)$$

Když se podíváme na nulové složky afinní konexe de Sitterovy metriky v horosférických souřadnicích $\Gamma_{\rho\xi}^\sigma$, zjistíme, že jsou všechny čtyři rovnice (6.12) splněny. Pozorovatel A se nachází na geodetice.

Kapitola 7

FRW vesmír

Délkový element ds v FRW vesmíru je geometrizovaných jednotkách zadán rovnicí

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (7.1)$$

Vztažná soustava vesmíru, definovaná množinou volně se pohybující částic, má spolu-pohybující se souřadnice (t, r, θ, ϕ) .

7.1 Radiálně cestující pozorovatel

Radiální pohyb je řešen v [3], z čehož my v této podkapitole vycházíme. Uvažujme pozorovatele B , který cestuje z místa $r = R$ v radiálním směru. Na počátku je vystřelen nějakou počáteční nenulovou rychlostí $v_0 = (dr/dt)_{t=0}$ v kladném směru osy r a se záporným zrychlením $-g(t)$ pro $t > 0$. V každém okamžiku bude mít pozorovatel B souřadnicovou rychlost $v(t)$.

Pozorovatel A bude čekat na místě $r = R$, kde se opět, po uplynutí nějakého času t_1 , střetne s pozorovatelem B .

Z délkového elementu (7.1) je vidět, pro vlastní čas τ_A nepohybujícího se pozorovatele A platí rovnost

$$\tau_A = t. \quad (7.2)$$

Vlastní čas τ_B radiálně se pohybujícího pozorovatele B získáme z definice a rovnice délkového elementu (7.1) jako

$$-d\tau_B^2 = -dt^2 + a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2}. \quad (7.3)$$

Drobnou úpravou a dosazením za $(dr/dt) = v(t)$ získáme vztah

$$\frac{d\tau_B^2}{dt^2} = 1 - a^2(t) \frac{1}{1 - kr^2} v^2(t), \quad (7.4)$$

jehož integrací od $t = 0$ do $t = t_1$ získáme vlastní čas τ_B , jež naměří cestující pozorovatel B , spočítatelný ze vztahu

$$\tau_B = \int_0^{t_1} \sqrt{1 - \frac{a^2(t)}{1 - kr^2} v^2(t)} dt. \quad (7.5)$$

Výraz uvnitř integrálu je vždy menší než jedna a tudíž vlastní čas τ_B je menší než vlastní čas τ_A .

Závěr

Pozorovatel B , který cestuje vůči vesmírné hmotě, je mladší než pozorovatel A , který je v klidu vůči pohybující se vesmírné hmotě. Pozorovatel A se pohybuje po geodetice a má tudíž nulové 4-zrychlení a nenulovou 3-rychlost, kdežto cestující pozorovatel B se pohybuje s nenulovým 3-zrychlením, nenulovou 3-rychlostí a nenulovým 4-zrychlením. Zajímavostí je, že pozorovatel B se pohybuje rychleji, než pozorovatel A .

7.2 Kruhově cestující pozorovatel

Nyní nechme pozorovatele A čekat na konstantních prostorových souřadnicích r , θ a ϕ a jeho dvojče nechme obíhat v ekvatoriální rovině s konstantními souřadnicemi r a $\theta = \frac{\pi}{2}$ po "kružnici" s konstantní úhlovou rychlostí $(d\phi/dt) = \Omega$. Pohyb je kruhový pouze vzhledem k pohybující se vesmírné hmotě ve skutečnosti bude spíše spirálový.

Pozorovatel B tedy bude mít 4-rychlost \mathbf{u}_B^μ , která lze upravit na tvar

$$\mathbf{u}_B = \left(\frac{dt}{d\tau_B}, 0, 0, \frac{d\phi}{d\tau_B} \right) = \left(\frac{dt}{d\tau_B}, 0, 0, \Omega \frac{dt}{d\tau_B} \right). \quad (7.6)$$

Norma 4-rychlosti $\mathbf{g}_{\mu\nu}\mathbf{u}_B^\mu\mathbf{u}_B^\nu = -1$ nám dává možnost, jak určit hodnotu $dt/d\tau$. S užitím rovnice (7.1) jsme schopni určit složky metrického tenzoru $\mathbf{g}_{\mu\nu}$ a sestavit rovnost

$$-1 = -1\frac{dt}{d\tau_B} + a^2(t)r^2\Omega^2\frac{dt}{d\tau_B}. \quad (7.7)$$

Jednoduchou úpravou již získáme hledaný výraz

$$\frac{dt}{d\tau_B} = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2(t)r^2\Omega^2}}. \quad (7.8)$$

V minulé podkapitole jsme ukázali $\tau_A = t$, což nám dává vztah

$$\frac{d\tau_A}{d\tau_B} = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2(t)r^2\Omega^2}}, \quad (7.9)$$

ze kterého je okamžitě vidět, že dvojčce A bude po opětovném shledání starší než jeho kruhově cestující sourozenec B .

7.3 Geodetické a negeodetické pohyby

Pozorovatel cestující radiálním směrem je urychlován zrychlením $-g(t)$, tudíž na něj působí 4-síla, z čehož plyne, že nevykonává radiální pohyb.

Podívejme se na pozorovatele A , který se nachází v klidu vzhledem k vesmírné hmotě a který se, jak tvrdíme, pohybuje po geodetice. Jeho 4-rychlost má hodnotu $\mathbf{u}_A = (1, 0, 0, 0)$. Splňuje-li tato 4-rychlost čtyři rovnosti

$$\mathbf{u}_B^\rho \left(\mathbf{u}_{B,\rho}^\sigma + \Gamma_{\rho\xi}^\sigma \mathbf{u}_B^\xi \right) = 0, \quad (7.10)$$

jedná se o geodetický pohyb. Po dosazení za 4-rychlost \mathbf{u}_A^μ se nám soustava 4 rovnic značně zjednoduší na tvar

$$\Gamma_{tt}^\sigma u_A^t u_A^t = 0. \quad (7.11)$$

Když uvážíme hodnoty složek afinní konexe Γ_{tt}^σ , zjistíme, že jsou nulové pro každou hodnotu σ . Pozorovatel A se tedy nachází na geodetice.

Je možné, aby se pozorovatel B pohyboval po geodetice pro nějakou speciální hodnotu Ω ? Vektor 4-rychlosti pozorovatele B má tvar

$\mathbf{u}_B = \left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2(t)r^2\Omega^2}}, 0, 0, \frac{\Omega}{\sqrt{1-a^2(t)r^2\Omega^2}} \right)$. Dosazením do rovnice (7.10) získáme pro hodnotu indexu $\sigma = t$ rovnost

$$u_B^t u_{B,t}^t + \Gamma_{\phi t}^t u_B^\phi u_B^t + \Gamma_{\phi\phi}^t u_B^\phi u_B^\phi = 0. \quad (7.12)$$

Po dosazení složek afinní konexe $\Gamma_{\phi\xi}^\sigma$ a za složky vektoru 4-rychlosti \mathbf{u}_B^μ přejde rovnice (7.12) na tvar

$$\frac{aa'r^2\Omega^2}{[1-a^2(t)r^2\Omega]^2} + \frac{aa'r^2\Omega^2}{1-a^2(t)r^2\Omega^2} = 0, \quad (7.13)$$

z něhož jednoduchými úpravami získáme výslednou kruhovou rychlost

$$\Omega = \pm \frac{\sqrt{2}}{a(t)r}. \quad (7.14)$$

Pro index $\sigma = \phi$ získáme z rovnice (7.10) podmínku

$$u_B^t u_{B,t}^\phi + \Gamma_{\phi t}^\phi u_B^\phi u_B^t + \Gamma_{\phi\phi}^\phi u_B^\phi u_B^\phi = 0, \quad (7.15)$$

z níž dosazením dostaneme rovnost

$$\frac{-2a(t)a'(t)r^2\Omega^3}{[1-a^2(t)r^2\Omega]^2} + \frac{a'(t)\Omega}{a(t)[1-a^2(t)r^2\Omega]} + \frac{1}{r} \frac{\Omega^2}{[1-a^2(t)r^2\Omega]} = 0. \quad (7.16)$$

Jednoduchou úpravou získáme kvadratickou rovnici pro Ω a jejím řešením výsledek

$$\Omega_{1/2} = \frac{-a(t) \pm \sqrt{a^2(t) + 8a^2(t)a'(t)r^4}}{-4a^2(t)a'(t)r^3}. \quad (7.17)$$

Na první pohled je z rovnic (7.3) a (7.3) zřejmé, že nelze nalézt takovou hodnotu Ω , aby 4-rychlost \mathbf{u}_B^μ splňovala tenzorovou rovnost (7.10). Pozorovatel B se nikdy nebude pohybovat po geodetice.

Kapitola 8

Přehled výsledků

Metrika	Dvojče - pohyb	Původ	3-rychlost	4-zrychlení	Stáří
S	stojí na místě cesta radiál- ním směrem	[3]	ne ano	ano ne	mladší starší
	stojí na místě obíhá po kruhové orbitě	[3]	ne ano	ano ne	starší mladší
SdS	na místě cesta radiál- ním směrem	kap. 2.1	ne ano	ano ne	mladší starší)
	na místě obíhá po kruhové orbitě	kap. 2.2	ne ano	ano ne	starší mladší
AdS	na místě cesta radiál- ním směrem	kap. 4.1	ne ano	ano ne	mladší starší
	na místě cesta po kruhové orbitě	kap. 4.2	ne ano	ano ne	starší mladší

Metrika	Dvojče - pohyb	Původ	3-rychlost	4-zrychlení	Stáří
Kerr	na místě cesta po kruhové orbitě v kladném smyslu	kap. 5.2	ne ano	ano ne	starší mladší
	na místě cesta po kruhové orbitě v záporném smyslu	kap. 5.2	ne ano	ano ne	starší mladší
	cesta po kruhové orbitě v kladném smyslu cesta po kruhové orbitě v záporném smyslu	[4]	ano ano	ne ne	starší mladší
dS	na místě cesta po kruhové orbitě	kap. 6.1	ne ano	ne ano	starší mladší
FRW	na místě radiální po- hyb	[3]	ne ano	ne ano	starší mladší
	na místě kruhový po- hyb	kap. 7.2	ne ano	ne ano	starší mladší

*) Toto platí pouze za speciálních předpokladů (viz. podkapitola 2.1).

Kapitola 9

Diskuse výsledků a závěr

V [1] tvrdí, že dvojče, které se pohybuje rychleji vzhledem ke globálnímu stavu klidu, je při setkání mladší, než dvojče co se pohybuje pomaleji. V článku ztotožňují globální stav klidu s hvězdným nebem, tedy pozorovatelem který se pohybuje ve směru Killingova vektoru metriky, jež je v jejich případě invariantní vůči translaci v čase (tj. je statická).

Oproti tomu příklady z [3], jak jsme se ostatně přesvědčili sami v kapitole 3, ukazují, že statický pozorovatel není vždy při znovu-shledání mladší než ten cestující. Při vyhodnocování výsledků totiž zjistíme, že záleží na charakteru pohybu. Například radiálně vystřelený pozorovatel, který se dále pohybuje volně, se ve Schwarzschildově prostoročase pohybuje rychleji než jeho vůči hvězdnému nebi stojící sourozenec, je ale po opětovném shledání ten starší.

Proto nelze souhlasit s tvrzením, že by šlo paradox dvojčat jednoduše rozřešit jejich vzájemně rozdílnou rychlostí vůči globálnímu stavu klidu (např. hvězdným nebem).

Lze vyvodit obecný závěr: "Při kruhových pohybech je mladší ten pozorovatel, jenž se vzhledem k hvězdnému nebi pohybuje s větší úhlovou rychlostí."

Při radiálních pohybech zase platí obecné pravidlo (obecné ve smyslu námi propočítaných případů): "Geodeticky se pohybující pozorovatel je starší než pozorovatel, který se geodeticky nepohybuje."

Za povšimnutí stojí, že v FRW vesmíru nelze nalézt žádný globální stav

klidu, jako je hvězdné nebe. Pozorovatel, který se nepohybuje a nachází se na geodetice, je vlastně v klidu vůči hmotě vesmíru a je starší. Oproti tomu je ve Schwarzschildově metrice pozorovatel setrvávající v konstantní výšce (tj. v klidu vůči vesmírnému hmotnému objektu) mladší, právě proto, že jeho pohyb není geodetický.

Velmi zajímavá je situace v Schwarzschildově-de Sitterově, Schwarzschildově a anti de Sitterově metrice při kruhových geodetických pohybech obou pozorovatelů. Pokud nastavíme situaci zcela symetricky a necháme obě dvojčata obíhat proti sobě po kruhových geodetikách, budou obě sourozenci po opětovném shledání stejně staří. To je důsledkem úplné symetrie.

Oproti tomu stojí výsledek z [4], rozebraný v podkapitole 5.1. Ačkoliv se obě dvojčata pohybují po protichůdných geodetikách, nejsou při opětovném střetnutí stejně stará. Starší je to, které se pohybuje větší úhlovou rychlostí. Tento rozdíl je zapříčiněn tím, že Kerrova metrika není již sama o sobě symetrická vůči rotaci (tj. neexistuje Killingův vektor ve směru souřadnice ϕ).

Literatura

- [1] Abramowitz M. A., Bajtlik S.: *Adding to the paradox: the accelerated twin is older*, arXiv:0905.2428v1 (2009).
- [2] Dvořák L.: *Obecná teorie relativity a moderní fyzikální obraz vesmíru*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1984
- [3] Grøn Ø., Braeck S.: *The twin paradox in a cosmological context*, arXiv:0909.5364v3 (2010).
- [4] Markley F. L.: *Relativity twin in the Kerr Metric*, Am. J. Phys. **41** (1973) 1246–1250.
- [5] Votruba V.: *Základy speciální teorie relativity*, Academia, Praha, 1977.