Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Kristýna Jurczyková

Stereometrie. Elektronický učební text pro posluchače učitelství, učitele středních škol i jejich žáky

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jarmila Robová, CSc.

Studijní program: Matematika, Učitelství matematiky - informatiky pro SŠ

2009

Poděkování

Děkuji své vedoucí diplomové práce RNDr. Jarmile Robové, CSc. za cenné rady, návrhy a připomínky, které výrazně přispěli ke zlepšení této práce. Dále bych chtěla poděkovat rodičům, kteří mi umožnili studium na této škole.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 9.12.2009 Kristýna Jurczyková

Obsah

Název práce: Stereometrie. Elektronický učební text pro posluchače učitelství, učitele středních škol i jejich žáky.
Autor: Kristýna Jurczyková
Katedra (ústav): Katedra didaktiky matematiky
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jarmila Robová, CSc.
e-mail vedoucího: Jarmila.Robova@mff.cuni.cz

Abstrakt: Stereometrie neboli geometrie v prostoru je důležitou oblastí geometrie, která se zabývá studiem prostorových vztahů. V této práci jsou uvedeny základní definice a věty týkající se vlastností osové afinity v euklidovském prostoru i rovině. Také jsou zde uvedeny základní stereometrické věty a jejich důsledky, vše je doplněné názornými obrázky. Podrobněji se pak práce věnuje osové afinitě mezi rovinami, v rovině a mezi kružnicí a elipsou. Velkou část práce tvoří úlohy na řezy těles rovinou řešené pomocí osové afinity, která je pro dnešní studenty středních škol neznámá. Každá významnější kapitola obsahuje vzorové příklady a sadu úloh k procvičení s možností zobrazení řešení a postupu krok za krokem. Úlohy jsou také doplněny o aplety, jenž umožnují se na řešení podívat z různých úhlů a mohou studentovi pomoci lépe si představit prostorovou situaci zadanou v dané úloze. Tento učební materiál mohou využít nejen studenti k rozšíření svých znalostí z oblasti stereometrie, ale také jejich vyučující pro inspiraci. Pro ně jsou zde připraveny úlohy, které nejsou v současných učebnicích stereometrie, a pracovní listy, které mohou využít při výuce.
Klíčová slova: Tělesa, osová afinita mezi rovinami a v rovině, řez tělesa rovinou, aplety.

Title: Stereometry
Author: Kristýna Jurczyková
Department: Department of Mathematics Education
Supervisor: RNDr. Jarmila Robová, CSc.
Supervisor's e-mail address: Jarmila.Robova@mff.cuni.cz

Abstract: Stereometry or geometry in space is an important area of geometry, which deals with the study of spatial(stereometric) relations. Basic definitions and theorems concerning properties of axial affinity in an Euklidean space and in a plane are presented in this thesis, as well as basic stereometric theorems and their consequences. Everything is supplemented by illustrations. The thesis attends in more detail to axial affinity between two planes, in a plane and between a circle and an ellipse. A great deal of this thesis is formed by exercises concerning sections of bodies by plane, which are solved by axial affinity, which is unknown to today's students of high schools. Every important chapter contains samples and a pack of exercises for practicing with possibility to display the solution and the procedure step by step. These exercises are also supplemented with applets, which make it possible to look at the solution from different visual angles and they can help students better imagine a stereometric situation of the given exercise. This study material can be used not only by students to extend their knowledge of stereometry, but also to inspire their teachers as well. For them there are prepared exercises, which are not in today's schoolbooks about stereometry, and work sheets, which can be used for teaching.
Keywords: Bodies, axial affinity between two planes and in a plane, section of body by plane, applets

Úvod

Stereometrie neboli geometrie v prostoru je důležitou oblastí geometrie, jež se zabývá studiem prostorových vztahů. Pomocí ní můžeme lépe pochopit svět kolem nás, zvládat prostor a správně si představovat prostorové vztahy. Tyto dovednosti potřebujeme v mnoha odvětvích, například v architektuře, strojírenství, letectví, ale nejen v nich, každý z nás je potřebuje, protože se všichni pohybujeme v tomto světě. Tato práce by měla vyplnit mezeru ve studijních materiálech ke školské geometrii, rozšířit znalosti z oblasti stereometrie a pomoci nejen studentům s prostorovou představivostí, ale také učitelům pro inspiraci.

Diplomová práce je rozdělena do sedmi kapitol, které jsou dále děleny do menších významových celků. V první kapitole si připomeneme tělesa a jejich vlastnosti. Následující část se věnuje vysvětlení pojmu dělicí poměr a jeho použití. Třetí kapitola se týká rovnoběžného promítání, jehož vlastnosti jsou podstatné pro osovou afinitu, která je popsaná v kapitole následující. V ní se zabýváme osovou afinitou mezi dvěma rovinami, osovou afinitou v rovině a osovou afinitou mezi kružnicí a elipsou. V další části se zabýváme zobrazení podstav těles ve volném rovnoběžném promítání, které je podstatné pro zobrazení těles. Po zavedení všech důležitých základních definic a vět týkajících se afinních vlastností osové afinity v euklidovském prostoru i rovině následuje poslední kapitola obsahující příklady na řezy těles rovinou s využitím poznatků z předchozích kapitol. Jedná se o řezy hranolů, řezy válců a další úlohy, v nichž jsou příklady, které jsou něčím atypické. Každá tato část obsahuje vzorové příklady a sadu úloh k procvičení s možností zobrazení řešení a postupu krok za krokem. Úlohy jsou také doplněny o aplety, jenž umožnují se na řešení podívat z různých úhlů a mohou studentovi pomoci lépe si představit prostorovou situaci zadanou v dané úloze. Aplety jsou vytvořeny v aplikaci Cabri 3D a k jejich použití je třeba mít nainstalován alespoň plugin, který je zdarma ke stažení na oficiálních stránkách Cabri: *http://www.cabri.com/*.

Pro učitele jsou připraveny úlohy, které nejsou v současných učebnicích stereometrie, a pracovní listy, které si mohou vytisknout a následně použít při výuce.

Celá práce je vypracovaná jako internetová stránka, k níž je volný přístup a její používání je velmi intuitivní.

Kapitola 1

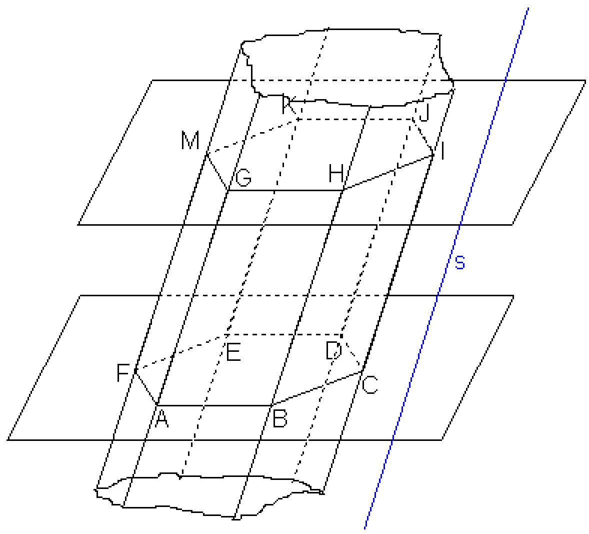
Tělesa

Nyní si tedy připomeneme některá tělesa, která budeme dále používat. Další tělesa naleznete v práci Lídy Kadlecové Stereometrie.

Hranoly

Vznik hranolu

Zvolme rovinu α a v ní libovolný n-úhelník. Dále zvolme přímku s různoběžnou s rovinou α. Sjednocení všech přímek rovnoběžných s přímkou s a protínajících n-úhelník se nazývá **n-boký hranolový prostor**. Tento hranolový prostor řízneme dvěma navzájem rovnoběžnými rovinami, které nejsou rovnoběžné s přímkou s. Průnikem těchto rovin s hranolovým prostorem jsou dva shodné n-úhelníky, tzv. **podstavy hranolu**, a část hranolového prostoru vymezená těmito rovinami se nazývá **n-boký hranol**. Úsečky spojující vrcholy podstav hranolu, které jsou rovnoběžné se směrem s, se nazývají **boční hrany**. Přímky hranolového prostoru, které protínají strany n-úhelníku podstavy tělesa, tvoří **hranolovou plochu**.



Obrázek 1.1: Vznik hranolu

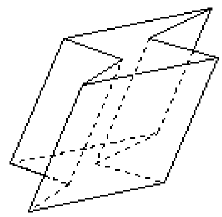
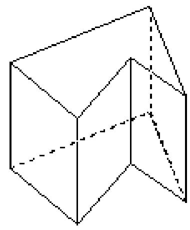
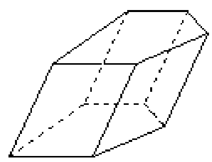
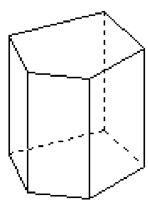
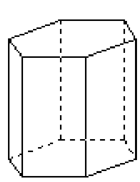
Hranoly dělíme na nekonvexní a konvexní:

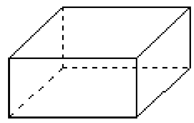
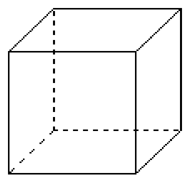
- nekonvexní hranol - jeho podstavy jsou shodné nekonvexní mnohoúhelníky
- konvexní hranol - jeho podstavy jsou shodné konvexní mnohoúhelníky

Tyto skupiny dále dělíme na kolmé a kosé hranoly:

- kosý hranol - boční hrany nejsou kolmé k podstavě
- kolmý hranol - boční hrany jsou kolmé k podstavě

Speciálním případem kolmého n-bokého hranolu je pravidelný n-boký hranol, jehož podstavy jsou shodné pravidelné n-úhelníky.

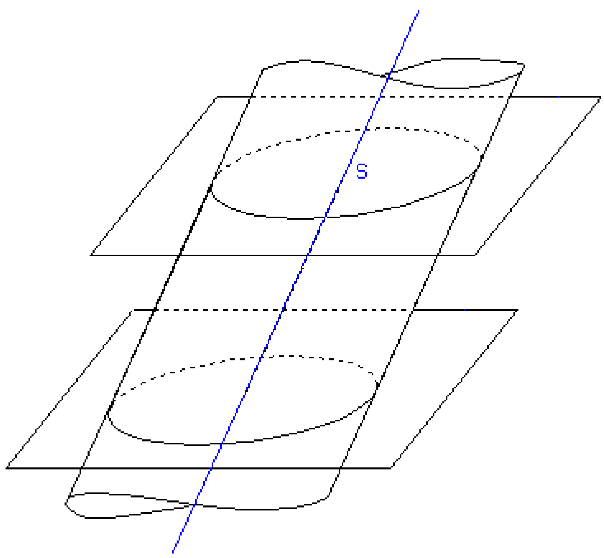
Název tělesa	Popis	Obrázek
Nekonvexní kosý hranol	podstavou je nekonvexní mnohoúhelník	
Nekonvexní kolmý hranol	podstavou je nekonvexní mnohoúhelník a boční hrany jsou kolmé k podstavě	
Konvexní kosý hranol	podstavou je konvexní mnohoúhelník	
Konvexní kolmý hranol	podstavou je konvexní mnohoúhelník a boční hrany jsou kolmé k podstavě	
Pravidelný šestiboký hranol	podstavy jsou pravidelné šestiúhelníky, boční stěny jsou obdélníky (případně čtverce) a boční hrany jsou kolmé k podstavě (jedná se tedy o kolmý hranol)	

Kvádr	podstavou je obdélník nebo čtverec a každé dvě protilehlé stěny jsou rovnoběžné a shodné (jedná se o kolmý čtyřboký hranol)	
Krychle	všechny stěny jsou shodné čtverce (jedná se o pravidelný kolmý čtyřboký hranol)	

Válce

Vznik válce

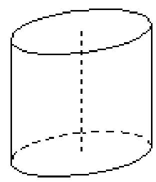
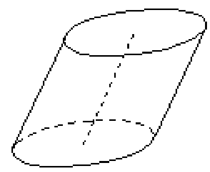
Zvolme rovinu α a v ní libovolný kruh. Dále zvolme přímku s procházející středem kruhu a různoběžnou s rovinou α, tzv. **osa válce**. Sjednocení všech přímek rovnoběžných s přímkou s a protínajících kruh se nazývá **válcový prostor**. Válcový prostor řízneme dvěma navzájem rovnoběžnými rovinami, které nejsou rovnoběžné s přímkou s. Průnik těchto rovin s válcovým prostorem jsou kruhy, tzv. **podstavy válce**, a část válcového prostoru vymezená těmito rovinami se nazývá **kruhový válec**. Úsečky ležíci na plášti válce rovnoběžné s osou válce a mající koncové body na podstavách válce se nazývají **strany válce**. Přímky válcového prostoru, které protínají kružnici, jež je hranicí podstavy tělesa, tvoří **válcovou plochu**.



Obrázek 1.2: Vznik válce

Válce dělíme na kolmé a kosé:

- kosý válec - osa válce není kolmá k podstavě
- kolmý válec - osa válce je kolmá k podstavě

Název tělesa	Popis	Obrázek
Kosý kruhový válec	podstavy jsou shodné kruhy a osa válce není kolmá k podstavě	
Kolmý kruhový válec	podstavy jsou shodné kruhy a osa válce je kolmá na podstavu.	

Poznámka
Kolmý kruhový válec nazýváme též rotační, neboť toto těleso také vzniká rotací obdélníku kolem jedné jeho strany.

Kapitola 2

Dělicí poměr

Nejdříve si zavedeme pojem dělicí poměr, který budeme dále využívat. Týká se každých tří různých bodů ležících na jedné přímce a jejich vzájemných vzdáleností.

Definice
Nechť A, B, C jsou tři libovolné různé kolineární body.
Dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B v daném pořadí je reálné číslo, jehož absolutní hodnota je rovna podílu $|AC|$:$|BC|$, a toto číslo:

- je kladné, není-li bod C bodem úsečky AB;
- je záporné, je-li bod C vnitřní bod úsečky AB.

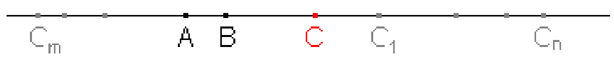
Označení: (ABC).

Rozbor definice
V definici je dán předpoklad, že vezmeme tři různé kolineární body. Co by se stalo, kdyby nebyly různé? Rozeberme si jednotlivé případy.

- C=A, $A \neq B$, pak $|(ABC)|$=0/$|BC|$=0
- C=B, $A \neq B$, pak (ABC) není definován, neboť $|BC|$=0 a nulou nelze dělit

Také je zajímavá otázka, zda dělicí poměr může nabývat hodnoty 1. Nemůže!

Mějme různé body A, B ležící na přímce, jako je na obrazku níže. Bod C zkusíme umístit na přímku tak, aby (ABC)=1. Dělicí poměr je kladný, bod C bude tedy ležet mimo úsečku AB. I když budeme bod C posouvat dále (viz šedé body na obrázku níže), dělicí poměr se bude zmenšovat, blížit k 1, ale nikdy nebude roven 1.

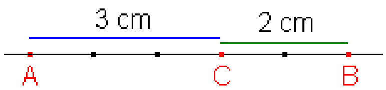


Z uvedeného vyplývá, že máme-li dva různé body A, B na dané přímce, pak polohy každého dalšího bodu C této přímky můžeme jednoznačně zadat dělícím poměrem (ABC).

Nyní si ukážeme příklady na dělicí poměr. V příkladech jsou použity obrázky, na kterých je znázorněna přímka a na ní příslušné body. Vzdálenost bodů snadno zjistíme z obrázku a to tak, že spočítáme úseky mezi body, které jsou oddělené puntíky; každý úsek má délku 1cm.

Příklad 1
Mějme dány body A, B, C ležící na přímce, jak je to naznačeno na obrázku níže. Určete dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B. $(ABC) = ?$

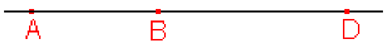
Řešení
Dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B je dán (až na znaménko) poměrem $|AC|$:$|BC|$. $|AC|$ je vzdálenost bodů A, C a $|BC|$ je vzdálenost bodů B, C.
$|AC| = 3$ cm; $|BC| = 2$ cm



Protože bod C leží na úsečce AB, dělicí poměr bude číslo záporné.
$(ABC) = \text{-}|AC|:|BC| = \text{-}3/2$

Příklad 2
Určete bod D na přímce AB tak, aby $(ABD) = 3/4$.

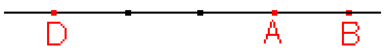
Řešení
Dělicí poměr bodu D vzhledem k bodům A,B je číslo kladné, tedy bod D bude ležet vně úsečky AB a to buď takto



, nebo


.

Dále z dělicího poměru víme, že vzdálenost bodu D od bodu A je 3 cm a vzdálenost bodu D od bodu B je 4 cm. Bod A je tedy blíže k bodu D, jako je to na druhém obrázku. Po nanesení přesných vzdáleností získáme tento výsledek:

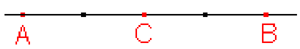


.

Úlohy

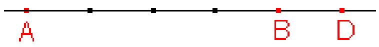
1. Z obrázku zjistěte dělicí poměr:

   a) $(ABC) = ?$

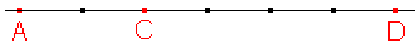
   Řešení: $(ABC) = \text{-}|AC|:|BC| = \text{-}2:2 = \text{-}1$

b) $(ABD) = ?$



Řešení: $(ABD) = |AD|:|BD| = 5:1 = 5$

c) $(ACD) = ?$



Řešení: $(ACD) = |AD|:|CD| = 6:4 = 3/2$

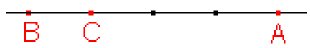
2. Na přímce znázorněte body $A,\ B,\ C$ tak, aby platilo:

a) $(ACB) = -2$

Řešení vypadá takto:

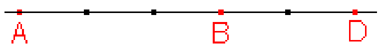
b) $(BCA) = 4/3$

Řešení vypadá takto:

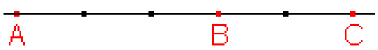


c) $(ADB) = -3/2$

Řešení vypadá takto:



3. Z obrázku zjistěte dělicí poměry: (ABC), (ACB), (BAC), (CAB), (CBA).



Řešení:

$(ABC) = |AC|:|BC| = 5/2$

$(ACB) = -|AB|:|CB| = -3/2$

$(BAC) = |BC|:|AC| = 2/5$

$(CAB) = -|CB|:|AB| = -2/3$

$(CBA) = |CA|:|BA| = 5/3$

Kapitola 3

Rovnoběžné promítání

Již malíři ve středověku se snažili zachytit nějakou skutečnost (přírodu, stavbu, životní styl) ve svých obrazech, neboli zobrazit nějaký prostorový útvar na rovinu (plátno). Jedna z možností, jak získat tento obraz, je použít rovnoběžné promítání. V dnešní době se toto zobrazení používá také pro stavební plány a technické nákresy.

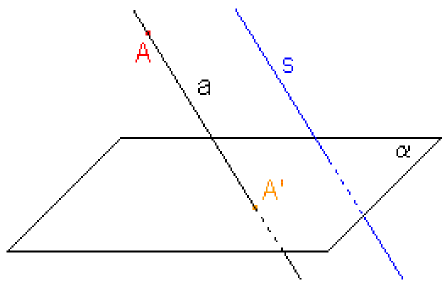
Definice
Mějme rovinu α a přímku s, kterou budeme nazývat **směr promítání**, přičemž přímka s není rovnoběžná s rovinou α.
Rovnoběžné promítání prostoru na rovinu α směrem s je zobrazení, při kterém se body zobrazovaného vzoru promítají do roviny α vzájemně rovnoběžnými přímkami směru s.
Rovina α, na kterou zobrazujeme, se nazývá **průmětna**.
Obraz bodu nazýváme **průmět bodu**.
Přímka směru s, pomocí níž se zobrazuje bod do průmětny, se nazývá **promítací přímka**.
Promítací rovinou přímky p, p je různoběžná se směrem s, nazýváme rovinu, ve které leží přímka p a promítací přímky jejích bodů.

Rozlišujeme následující případy rovnoběžného promítání:

- pravoúhlé - s $\perp$ α
- kosoúhlé - s $\not\perp$ α

Vlatnosti rovnoběžného promítání:

- **Obrazem bodu je bod.**

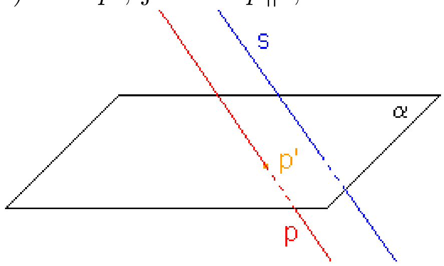


α...průmětna
s...směr promítání
a...promítací přímka bodu A
A'...průmět bodu A

Není-li směr s rovnoběžný s průmětnou α, pak i promítací přímka libovolného bodu není rovnoběžná s průmětnou α. Průnikem promítací přímky s rovinou, jež jsou navzájem různoběžné, je jeden bod.

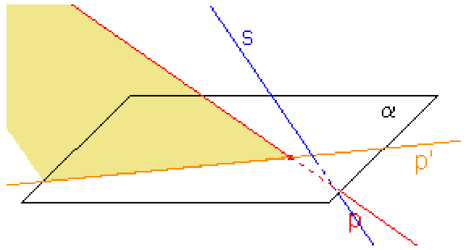
- **Obrazem přímky *p* je:**

a) bod p’, jestliže $p \| s$,



Všechny body přímky p se zobrazí do jednoho bodu p’, protože jejich promítací přímky jsou totožné s přímkou p.

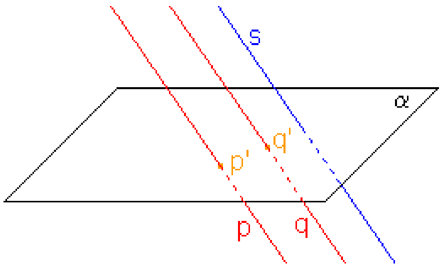
b) přímka p’, jestliže $p \nparallel s$.



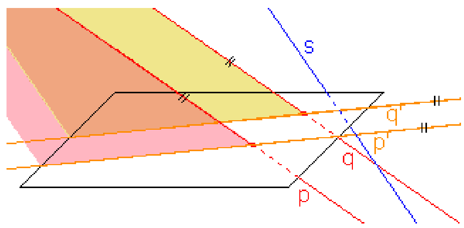
Obrazem přímky p je průnik její promítací roviny a průmětny; průnikem dvou různoběžných rovin je přímka.

- **Obrazem různých rovnoběžek *p*, *q* jsou:**

a) dva různé body p’, q’, jestliže $p \| s$,

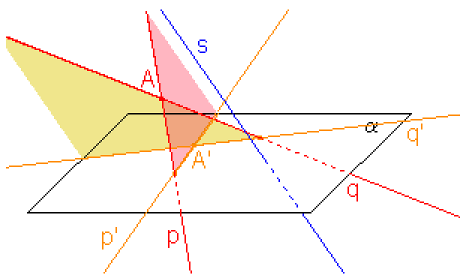


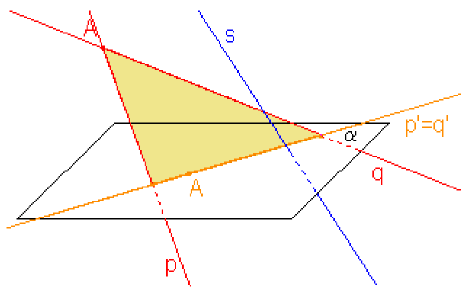
b) rovnoběžky p’, q’, jestliže $p \nparallel s$. Je-li $p \nparallel s$, pak i $q \nparallel s$ a promítací roviny přímek p a q jsou rovnoběžné.



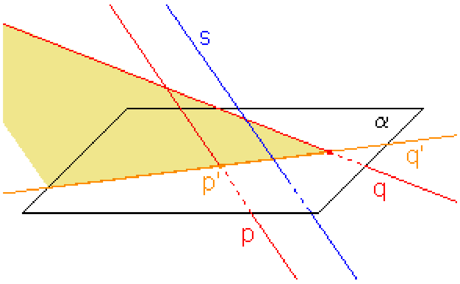
- **Obrazem různoběžek *p*, *q* jsou:**

a) různoběžky, nebo splývající rovnoběžky, jestliže $p \nparallel s$ a zároveň $q \nparallel s$; splývající rovnoběžky jsou to v případě, když promítací roviny přímek p, q splývají, tj. p, q leží v jedné promítací rovině,



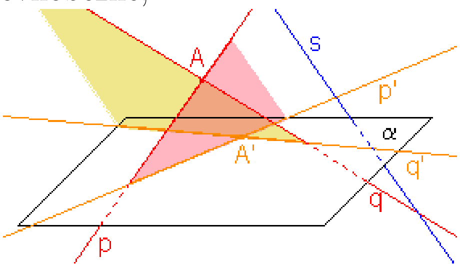


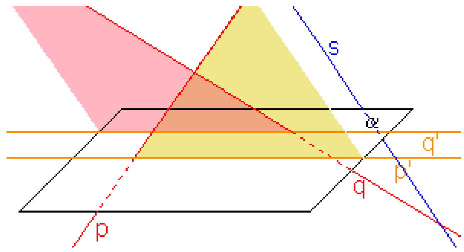
b) přímka *q’* a bod *p’*, jestliže $p \parallel s$ a zároveň $q \nparallel s$; přímka *q’* prochází bodem *p’*.



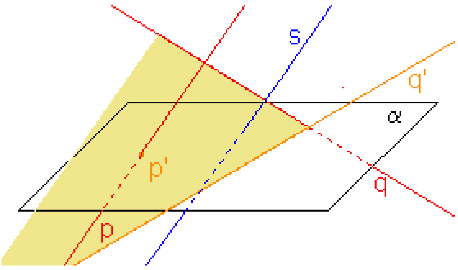
- **Obrazem mimoběžek *p*, *q* jsou:**

a) různoběžky, nebo různé rovnoběžky, jestliže $p \nparallel s$ a zároveň $q \nparallel s$; různé rovnoběžky jsou to v případě, když promítací roviny zadaných přímek jsou navzájem rovnoběžné,



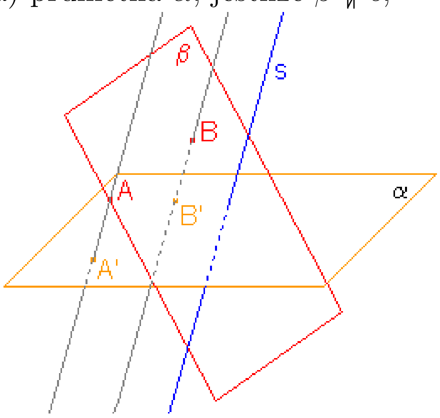


b) přímka *q’* a bod *p’*, jestliže $p \parallel s$ a zároveň $q \nparallel s$; přímka *q’* neprochází bodem *p’*.

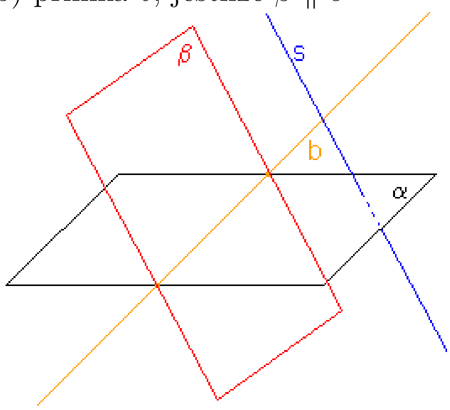


- **Obrazem roviny β je:**

a) průmětna α, jestliže $\beta \nparallel s$,



b) přímka *b*, jestliže $\beta \parallel s$



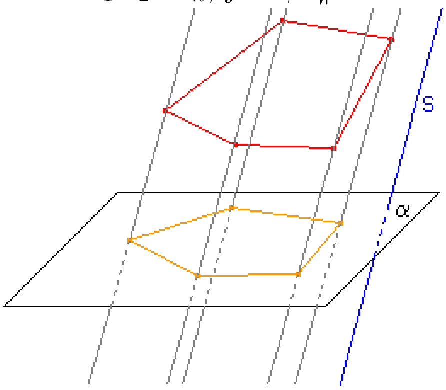
Je-li $\beta \nparallel s$, pak promítací přímky bodů roviny β nejsou rovnoběžné s průmětnou α. Obrazy bodů roviny β jsou body roviny α.

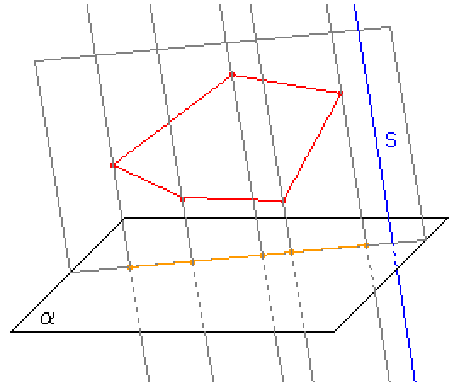
Je-li $\beta \parallel s$, pak průsečnice roviny β s rovinou α je obrazem roviny β.

• **Obrazem konvexního n-úhelníku (n≥3, n∈N) ležícího v rovině β a s vrcholy $A_1A_2..A_n$ je:**

a) opět konvexní n-úhelník s vrcholy $A_1'A_2'..A_n'$, přičemž $A_1'A_2'..A_n'$ jsou po řadě rovnoběžné průměty vrcholů $A_1A_2..A_n$, je-li $\beta \nparallel s$.

b) úsečka, je-li $\beta \parallel s$.





• **Incidence se zachovává** (např. je-li $B \in p$, pak $B' \in p'$).

• **Dělicí poměr se zachovává** (je-li $(ABC)=\lambda$, pak $(A'B'C')=\lambda$).

• **Obrazy útvarů ležících v rovině rovnoběžné s průmětnou jsou shodné se svými vzory.**

Kapitola 4

Osová afinita

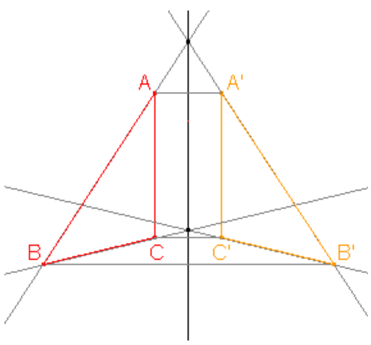
Nyní budeme postupně zkoumat dvě zobrazení - osovou afinitu v rovině a mezi rovinami.

S osovou afinitou v rovině jste se již mohli setkat, a to v podobě osové souměrnosti. Osová souměrnost je speciálním případem osové afinity a pomocí osové souměrnosti také můžeme osovou afinitu odvodit.

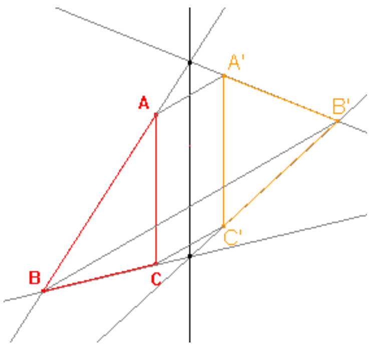
1. Osová souměrnost zobrazuje body symetricky podle osy souměrnosti – obraz se vzorem mají stejnou vzdálenost od osy a promítací přímku kolmou k dané ose.

2. V případě, že vzor a obraz mají stejnou vzdálenost, ale promítací přímka není kolmá na osu, dostáváme takzvané šikmé zrcadlení.

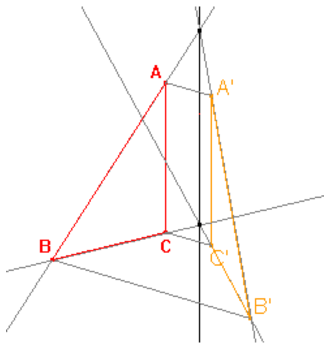
3. Jestliže promítací přímka není kolmá na osu a navíc vzor a obraz mají různou vzdálenost od osy, pak toto zobrazení nazýváme **osová afinita**.



osová souměrnost



šikmé zrcadlení



osová afinita

Osová souměrnost a šikmé zrcadlení jsou speciální případy osové afinity.

Než si popíšeme osovou afinitu v rovině přesněji, ukážeme si nejdříve osovou afinitu mezi dvěma rovinami.

4.1 Osová afinita mezi dvěma rovinami

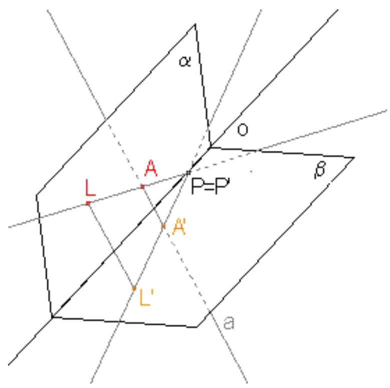
Definice

Jsou dány roviny α a β a směr s, přičemž roviny α i β nejsou rovnoběžné

se směrem *s*.
Osová afinita mezi různoběžnými rovinami α **a** β je rovnoběžné promítání bodů roviny α do roviny β směrem *s*.
Průsečnice rovin α a β se nazývá **osa afinity**.
Osová afinita mezi rovinami α a β je určena osou afinity *o* a uspořádanou dvojicí různých bodů *LL'*, kde *L* je libovolný bod roviny α neležící na ose afinity a *L'* je jeho obraz v rovině β.

Poznámky

- Uspořádaná dvojice bodů *LL'* se nazývá **směr osové afinity**.
- Body *L, L'* neleží na ose afinity.
- Vzor a obraz přímky, která je různoběžná s osou, se protínají na ose afinity.



Obrázek 4.1: Osová afinita mezi dvěma rovinami

Z definice vyplývá, že vlastnosti osové afinity mezi dvěma rovinami jsou stejné jako u rovnoběžného promítání.

Další vlastnosti

- V osové afinitě mezi rovinami α a β je:
  - **a)** obrazem přímky opět přímka;
  - **b)** obrazem roviny opět rovina;
  - **c)** obrazem úsečky *AB* úsečka *A'B'*;
  - **d)** obrazem polopřímky *AB* polopřímka *A'B'*;
  - **e)** obrazem trojúhelníku *ABC* trojúhelník *A'B'C'*;
  - **f)** obrazem středu úsečky *AB* je střed úsečky *A'B'*.
- Osa afinity je množina všech samodružných bodů.
- V osové afinitě mezi různoběžnými rovinami se zachovává rovnoběžnost přímek, tj. dvě rovnoběžné přímky *p, q* se zobrazí na dvě rovnoběžné přímky *p', q'*.

- Jsou-li body P, Q v osové afinitě mezi dvěma rovinami dva různé samodružné body, potom každý bod přímky PQ je samodružný a jedná se o osu afinity.

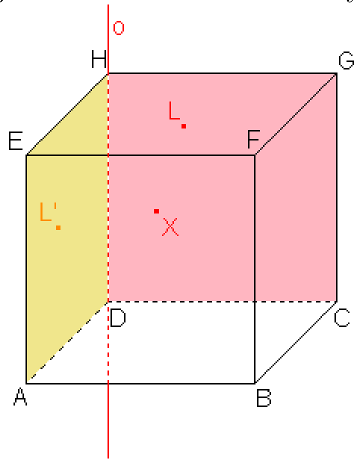
Využití

Osová afinita má široké využití, například v písmomalířství, deskriptivní geometrii a stavebnictví. My ji zde budeme využívat ke konstrukci řezů hranolů, kde rovina β je rovina řezu, rovina α je rovina stěny (nejčastěji podstavy) a s je směr bočních stěn, také ke konstrukci válců, kde rovina β je rovina řezu, rovina α je rovina podstavy a s je směr osy daného válce.

V následujících příkladech na osovou afinitu mezi rovinami α, β je vždy barevně vyznačena stěna ležící zadané rovině. Pokud jsou roviny zadány body neležících v jedné stěně tělesa, jsou barevně vyznačeny podstatné části rovin. Rovina α je vyznačena červenou barvou a rovina β oranžovou barvou.

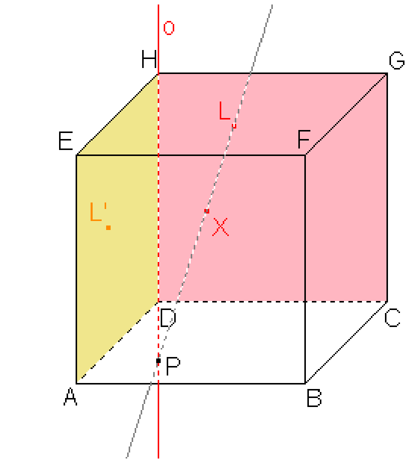
Příklad 1

Je dána krychle $ABCDEFGH$ a osová afinita mezi rovinami α a β určená osou o a uspořádanou dvojicí bodů LL', kde $L \in \alpha$, $L' \in \beta$.
Najděte obraz bodu X roviny α v rovině β, jestliže $\alpha = \leftrightarrow CDG$ a $\beta = \leftrightarrow ADE$.

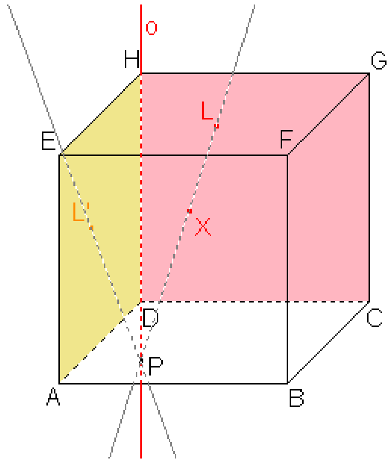


Řešení

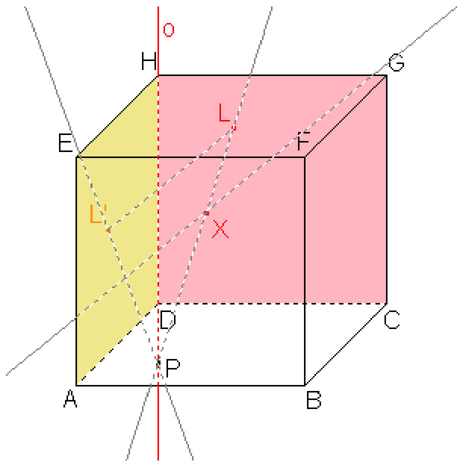
Postup si ukážeme po krocích.



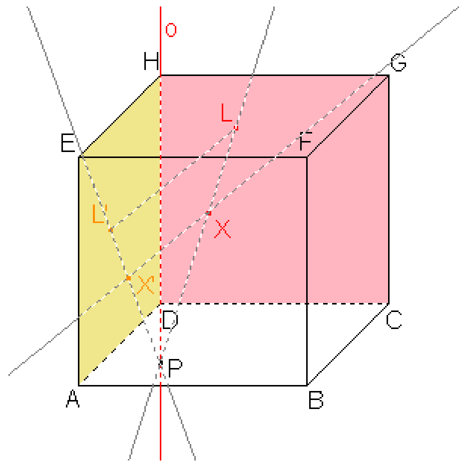
Body L, X mohu vést přímku, která protne osu afinity v bodě P, který je samodružný.



Sestrojíme přímku, která prochází body L' a P a je obrazem přímky LX. Hledaný bod bude ležet na této přímce, a to díky zachování incidence.



Sestrojíme promítací přímku bodu X se směrem LL'.



Obrazem X' bodu X je průsečík rovnoběžky a přímky $L'P$.

Příklad 2

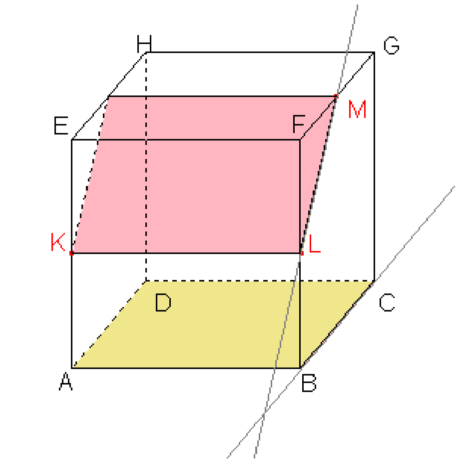
Mějme dánu krychli $ABCDEFGH$ a roviny $\alpha = \leftrightarrow ABC$ a $\beta = \leftrightarrow KLM$, kde K, L, M jsou po řadě středy hran AE, BF, FG.

Najděte osu afinity mezi rovinami α a β.

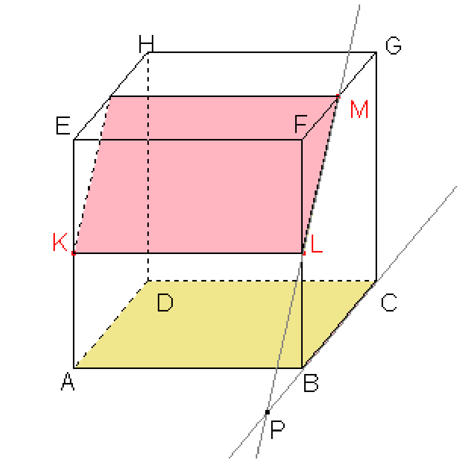
Řešení

Průnik rovin α a β je osa afinity - přímka, která je množinou samodružných bodů. Při hledání osy afinity je tedy potřeba mít zadány dvě roviny, mezi kterými se zobrazuje, a směr afinity. Můžeme jej zvolit libovolně, ale různoběžně s rovinami afinity. Pro tuto úlohu vezměme směr kolmý na rovinu α, bod B je obrazem bodu L.

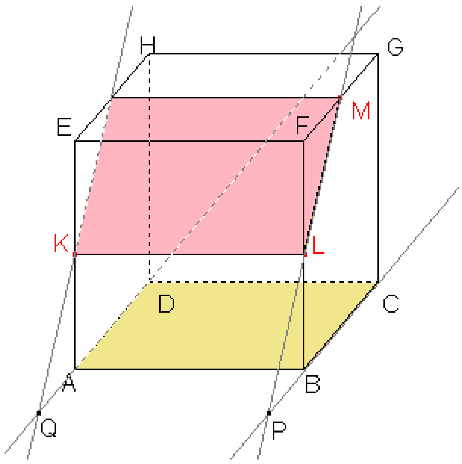
Řešení si ukážeme po krocích.



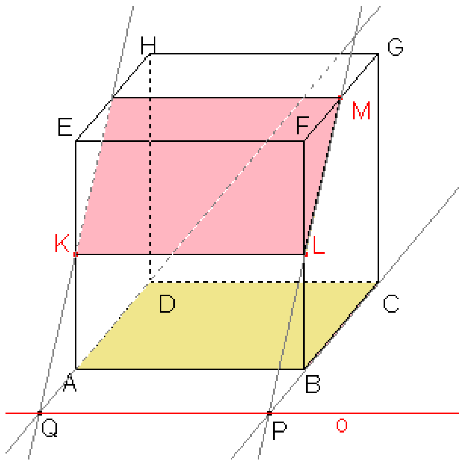
Obrazem přímky dané body LM je přímka BC, protože obraz bodu L je bod B a obraz bodu M je střed úsečky BC.



Průsečíkem přímky LM a přímky BC je samodružný bod P, který leží na ose afinity.



Sestrojíme průsečík Q přímky AD a jejího vzoru.



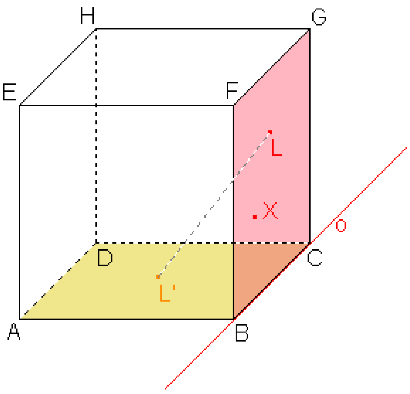
Osa afinity prochází samodružnými body P, Q.

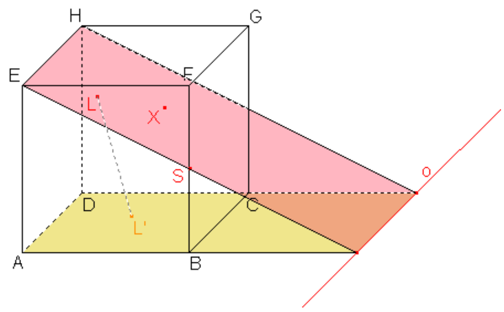
Úlohy

1. Je dána krychle $ABCDEFGH$ a osová afinita mezi rovinami α a β určená osou o a uspořádanou dvojicí bodů LL', kde bod $L \in \alpha$ a bod $L' \in \beta$. Najděte obraz bodu X, $X \in \alpha$, jestliže:

a) $\alpha = \leftrightarrow BCG$, $\beta = \leftrightarrow ABC$

b) $\alpha = \leftrightarrow EHS$, S je střed hrany BF, $\beta = \leftrightarrow ABC$

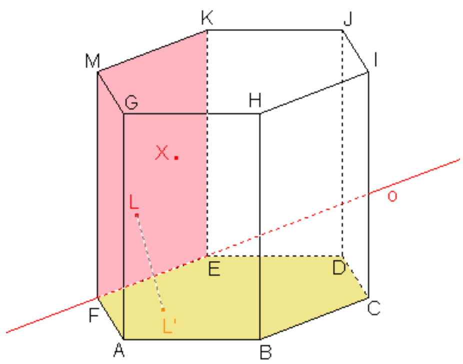


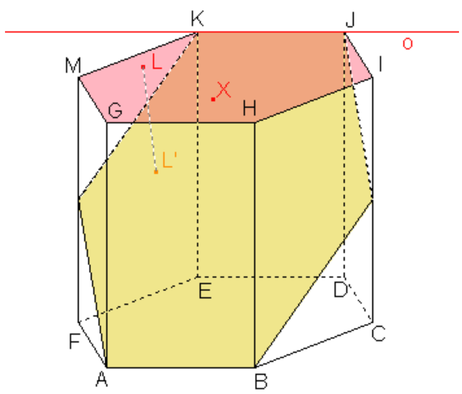


2. Je dán šestiboký hranol $ABCDEFGHIJKM$ a osová afinita mezi rovinami α a β určená osou o a uspořádanou dvojicí bodů LL', kde bod $L \in \alpha$ a bod $L' \in \beta$. Najděte obraz bodu X, $X \in \alpha$, jestliže:

   a) $\alpha = \leftrightarrow EFK$, $\beta = \leftrightarrow ABC$

   b) $\alpha = \leftrightarrow GHI$, $\beta = \leftrightarrow ABJ$





3. Je dána krychle $ABCDEFGH$. Najděte osu afinity mezi rovinami:

   a) $\leftrightarrow GCD$, $\leftrightarrow ABC$

   b) $\leftrightarrow ABC$, $\leftrightarrow KLH$, kde K je střed hrany BF, L je střed hrany CG

   c) $\leftrightarrow CDG$, $\leftrightarrow KLH$, kde $K \in BF$, $(BFK) = -1$, $L \in CG$, $(CGL) = -1$

   d) $\leftrightarrow ADH$, $\leftrightarrow KLH$, kde $K \in AE$, $(AEK) = -1$, $L \in EF$, $(EFL) = -1$

4. Je dána krychle $ABCDEFGH$. Najděte osu afinity mezi rovinami:

   a) $\leftrightarrow ABC$, $\leftrightarrow KLH$, kde $K \in AE$, $(AEK) = -1$, $L \in EF$, $(EFL) = -1$

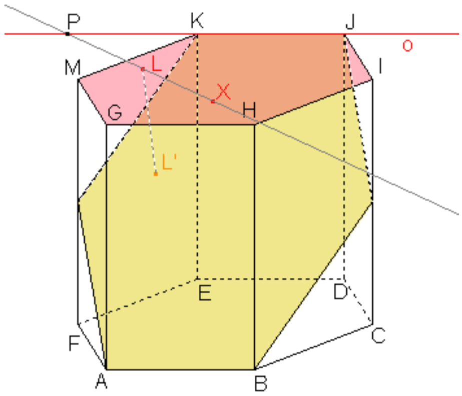
   b) $\leftrightarrow BCG$, $\leftrightarrow KLH$, kde $K \in AE$, $(AEK) = -1$, $L \in EF$, $(EFL) = -1$

5. Je dán šestiboký hranol $ABCDEFGHIJKM$. Najděte osu afinity mezi rovinami:

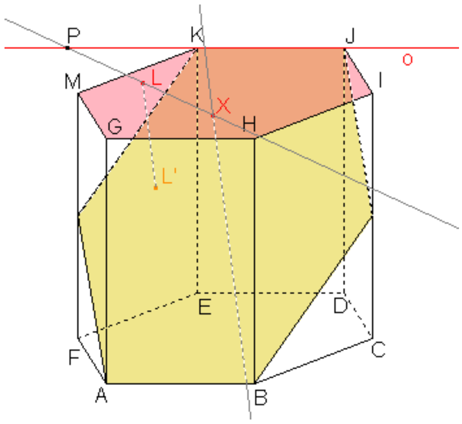
   a) $\leftrightarrow GHI$, $\leftrightarrow AUV$, kde U je střed hrany IC a V je střed hrany DJ

   b) $\leftrightarrow HJU$, kde U je střed úsečky CI; $\leftrightarrow ABC$

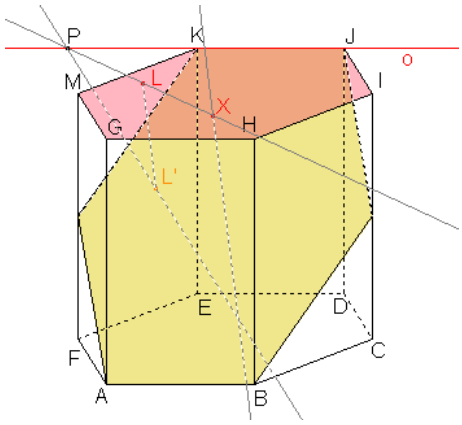
Nyní si ukážeme řešení alespoň jedné úlohy. Vezměme například úlohu 2b. Postup si ukážeme po krocích.



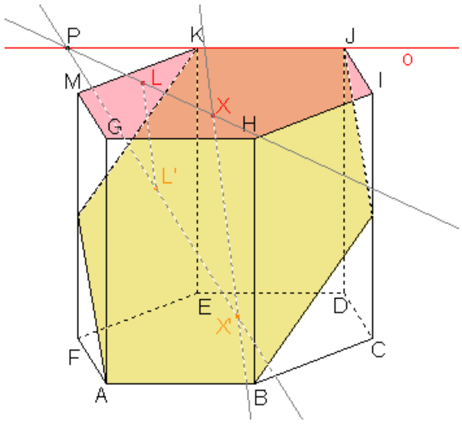
Body L, X můžeme vést přímku, která protne osu afinity v bodě P, který je samodružný, a najdeme obraz této přímky, na kterém bude ležet hledaný obraz bodu X.



Bodem X vedeme rovnoběžku se směrem LL'.



Sestrojíme přímku, která prochází body L' a P a je obrazem přímky LX. Hledaný bod bude ležet na této přímce, a to díky vlastnosti, že obrazem přímky je opět přímka, zachovává se incidence.



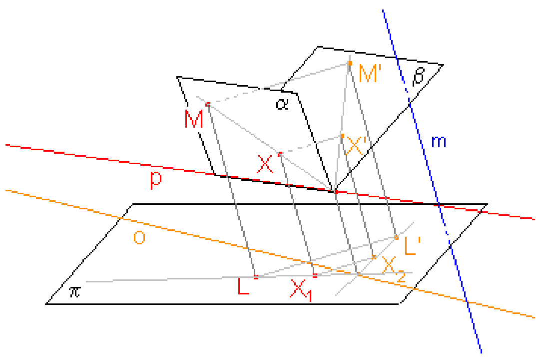
Obrazem bodu X je průsečík rovnoběžky a přímky $L'P$.

4.2 Osová afinita v rovině

Osovou afinitu v rovině si zavedeme pomocí rovnoběžného promítání a osové afinity mezi rovinami.

Definice
Mějme dánu osovou afinitu mezi různoběžnými rovinami α, β, která je určena osou p a uspořádanou dvojicí bodů MM', kde M je libovolný bod ležící v rovině α a M' je jeho obraz ležící v rovině β. Dále je dáno rovnoběžné promítání do průmětny π směrem m, $m \not\parallel \pi$, přičemž $\pi \not\parallel MM'$. Průměty bodů M, M' do roviny π jsou po řadě body L, L'; průmět osy p je přímka o.
Osová afinita v rovině π s osou o je zobrazení, ve kterém se bod L zobrazí do bodu L'.

Osovou afinitu v rovině také získáme jako rovnoběžný průmět osové afinity mezi rovinami α, β do roviny π.



Obrázek 4.2: Rovnoběžný průmět osové afinity

Osová afinita v rovině π je určena osou o a uspořádanou dvojicí bodů LL'.
Body LL' určují **směr osové afinity**.

Ze zavedení osové afinity v rovině vyplývá, že vlastnosti osové afinity v rovině jsou stejné jako u rovnoběžného promítání.

Poznámky

- Body L, L', pomocí kterých je zadána osová afinita, neleží na ose afinity.
- Vzor a obraz přímky, která je různoběžná s osou, se protínají na ose afinity.

Další vlastnosti

1. V osové afinitě v rovině je:

   a) obrazem přímky opět přímka;

   b) obrazem roviny opět rovina;

   c) obrazem úsečky AB úsečka $A'B'$;

d) obrazem polopřímky AB polopřímka $A'B'$;

e) obrazem trojúhelníku ABC trojúhelník $A'B'C'$;

f) obrazem středu úsečky AB střed úsečky $A'B'$.

2. V osové afinitě v rovině se zachovává rovnoběžnost přímek, tj. dvě navzájem rovnoběžné přímky p, q se zobrazí na dvě navzájem rovnoběžné přímky p', q'.

3. Osa afinity je množina všech samodružných bodů.

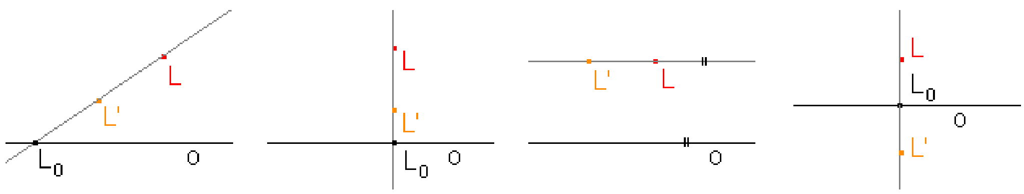
4. Jsou-li body P, Q v osové afinitě v rovině π dva různé samodružné body, potom každý bod přímky PQ je samodružný a jedná se o osu afinity.

5. V osové afinitě v rovině π se přímky, které jsou rovnoběžné se směrem afinity, zobrazí samy na sebe. Říkáme jim **samodružné přímky**.
   Samodružná přímka není totéž co přímka samodružných bodů. Přímka samodružných bodů zobrazuje každý bod sám na sebe, tj. každý bod této přímky je samodružný, ale samodružná přímka znamená, že její body se zobrazí na jiný její bod (jednotlivé body nejsou samodružné, ale přímka se zobrazí opět na tutéž přímku).

Podle směru s rozlišujeme následující případy osové afinity v rovině:

- kosoúhlá - $s \between o$
- pravoúhlá - $s \perp o$
- afinní elace - $s \| o$

Pravoúhlou osovou afinitu s dělicím poměrem $(LL'L_0)$ = -1, kde bod L' je obraz bodu L a L_0 je samodružný bod ležící na přímce LL', nazýváme **osová souměrnost**.

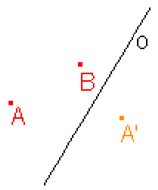


kosoúhlá afinita   pravoúhlá afinita   afinní elace   osová souměrnost

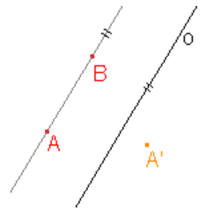
V případě, že vzor a obraz leží ve stejné polorovině vymezené osou o, jde o **přímé zobrazení**, jinak o **nepřímé zobrazení**. Osová souměrnost je příkladem nepřímého zobrazení, afinní elace přímého. Pro pochopení pojmu o přímých a nepřímých zobrazeních se můžete podívat na stránky Jiřího Doležala o Geometrických zobrazeních v rovině.

Příklad 1
Je dána osová afinita v rovině osou o a uspořádanou dvojicí bodů AA'. Najděte obraz bodu B.

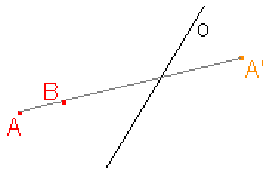
a)



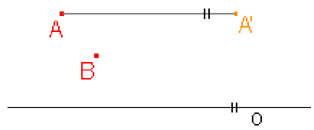
b)



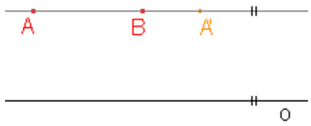
c)



d)

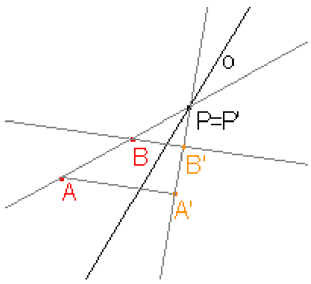


e)



Řešení

a)



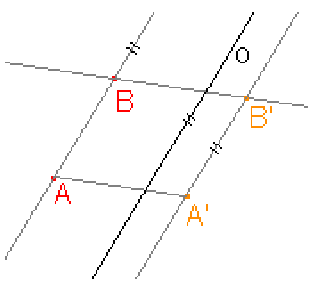
1. Bodem B vedeme rovnoběžku s AA', protože AA' je směr osové afinity.

2. Sestrojíme přímku AB. Průsečíkem přímky AB a osy o je samodružný bod P.

3. Obrazem přímky AB bude přímka $A'B'$,přičemž bod P leží na přímce AB i $A'B'$. Můžeme tedy sestrojit přímku $A'P$, která je obrazem přímky AB.

4. Průsečíkem přímky $A'P$ a rovnoběžky s AA' vedené bodem B je hledaný obraz bodu B bod B'.

b)

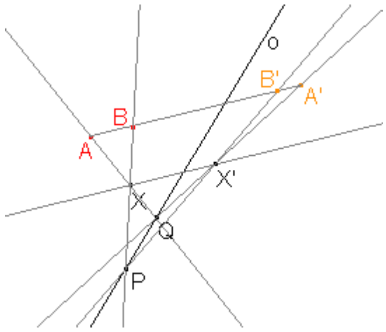


1. Bodem B vedeme rovnoběžku s AA', protože AA' je směr osové afinity.

2. Přímka AB je rovnoběžná s osou o, proto i její obraz bude rovnoběžný s osou o. Bod B' bude tedy ležet na přímce rovnoběžné s AB a která prochází bodem A'.

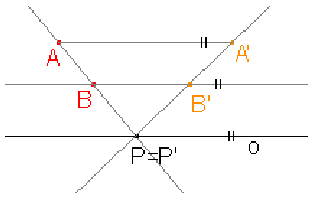
3. Průsečíkem přímky rovnoběžné s AA' procházející bodem B a přímky rovnoběžné s osou a procházející bodem A' je hledaný obraz B'.

c)



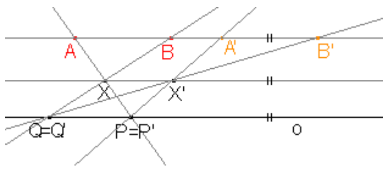
1. Bod B leží na přímce AA', tudíž si zvolíme pomocný bod X tak, aby přímka AX byla různoběžná s osou o, a sestrojíme jeho obraz X' dle řešení Příkladu 1a).
2. Bod B' sestrojíme dle řešení Příkladu 1a), ale místo bodů A, A' vezmeme body X, X'.

d)



1. Bodem B vedeme rovnoběžku s AA', protože AA' je směr osové afinity.
2. Sestrojíme přímku AB. Průsečíkem přímky AB a osy o je samodružný bod P.
3. Obrazem přímky AB bude přímka $A'B'$, přičemž bod P leží na přímce AB i $A'B'$. Můžeme tedy sestrojit přímku $A'P$, která je obrazem přímky AB.
4. Průsečíkem přímky $A'P$ a rovnoběžky s osou o vedené bodem B je hledaný obraz bodu B bod B'.

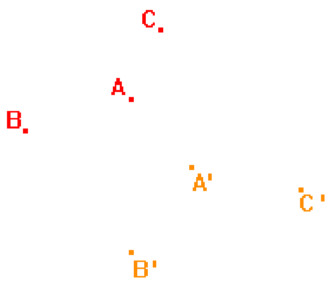
e)



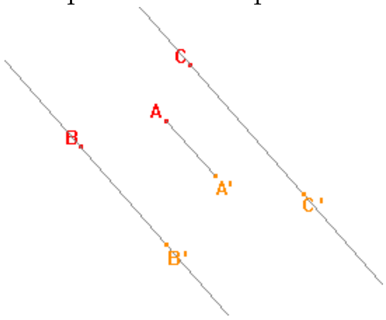
1. Bod B leží na přímce AA', tudíž si zvolíme pomocný bod X tak, aby přímka AX byla různoběžná s osou o, a sestrojíme jeho obraz X' dle řešení Příkladu 1a).
2. Bod B' sestrojíme dle řešení Příkladu 1a), ale místo bodů A, A' vezmeme body X, X'.

Příklad 2

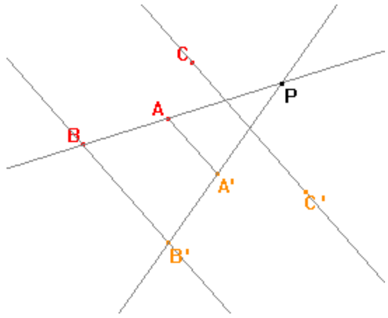
Určete osu a směr afinity, jestliže je osová afinita zadána třemi uspořádanými dvojicemi AA', BB', CC', jako je tomu na obrázku.



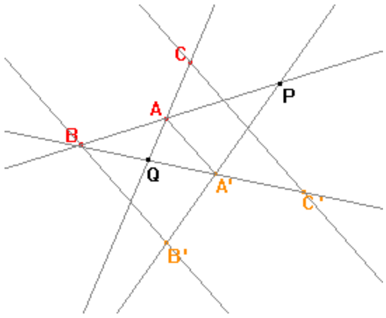
Řešení
Postup si ukážeme po krocích.



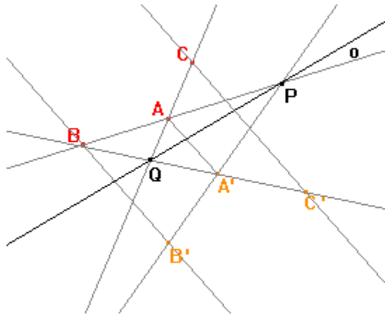
Přímky určené uspořádanými dvojicemi *AA'*, *BB'*, *CC'* jsou navzájem rovnoběžné, a tedy za směr afinity můžeme vzít některou z těchto tří přímek.



Přímka *A'B'* je obrazem přímky AB. Přímky jsou různoběžné, jejich průsečíkem je tedy bod P. Bod P je samodružný a bude ležet na hledané ose afinity.



Stejně jako bod P můžeme sestrojit bod Q, který bude průsečíkem přímek AC a *A'C'* a který je také samodružný.

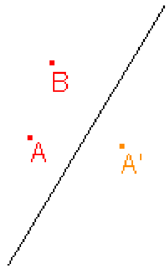


Osu afinity o sestrojíme pomocí bodů P a Q, protože jsou tyto body samodružné, a tudíž jistě leží na ose afinity.

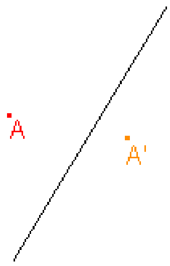
Úlohy

1. Osová afinita je zadána osou o a uspořádanou dvojicí bodů *AA'*. Určete obraz bodu B:

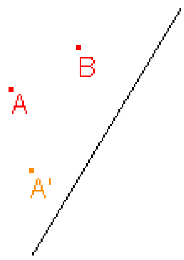
a)



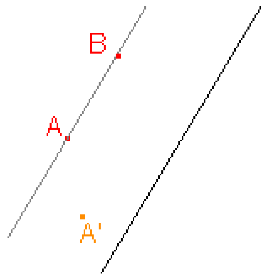
b)



c)

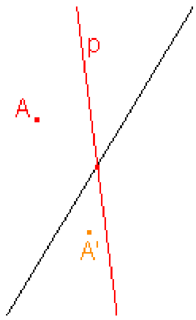


d)

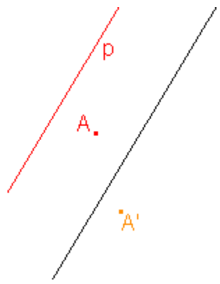


2. Osová afinita je zadána osou o a uspořádanou dvojicí bodů AA'. Určete obraz přímky p:

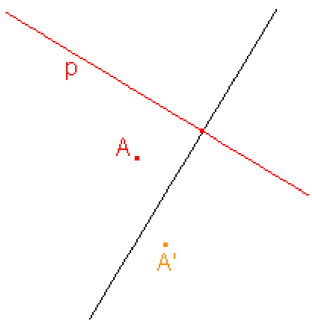
a)



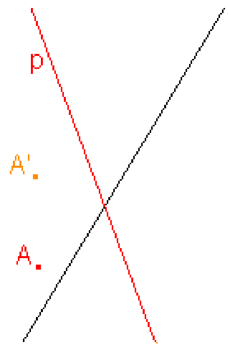
b)



c)

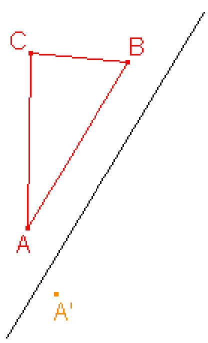


d)

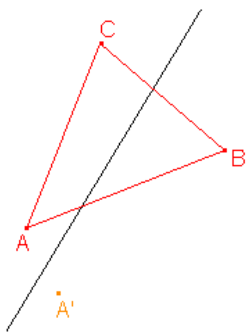


3. Osová afinita je zadána osou o a uspořádanou dvojicí bodů AA'. Určete obraz trojúhelníku ABC:

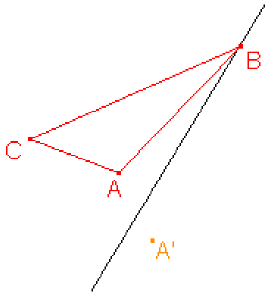
a)



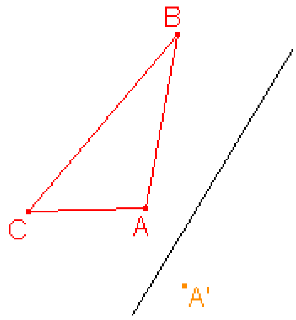
b)



c)

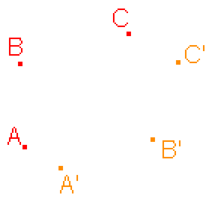


d)

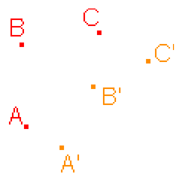


4. Určete osu a směr afinity, jestliže je osová afinita zadána třemi uspořádanými dvojicemi *AA', BB', CC'*.

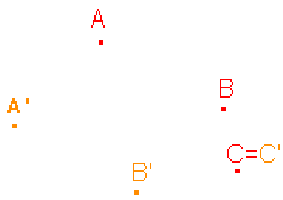
a)



b)

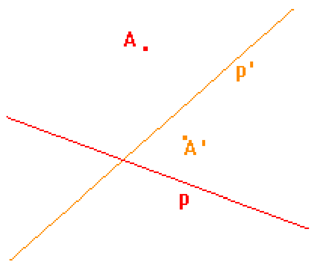


c)

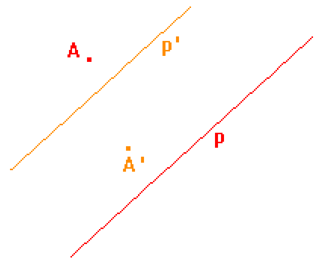


5. Určete osu a směr afinity, jestliže je osová afinita zadána párem odpovídajících si přímek p, p' a uspořádanou dvojicí bodů *AA'*.

a)

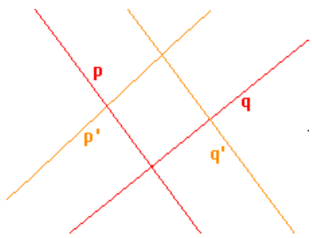


b)

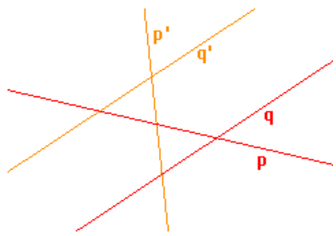


6. Určete osu a směr afinity, jestliže je osová afinita zadána dvěma páry odpovídajících si přímek p, p' a q, q'.

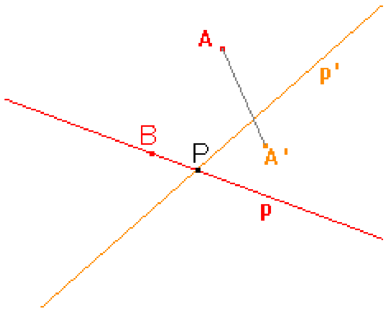
a)



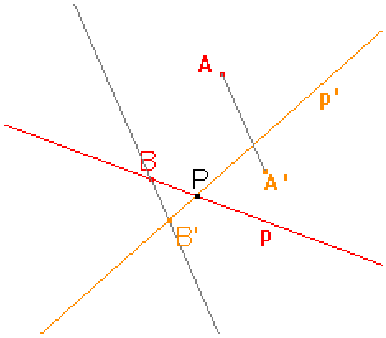
b)



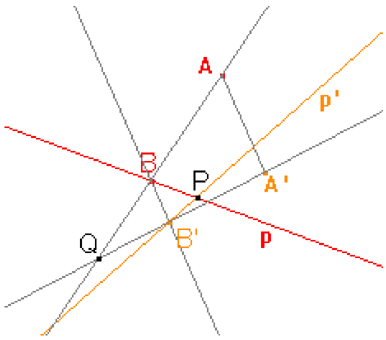
Nyní si ukážeme řešení alespoň jedné úlohy. Vezměme například úlohu 5a. Postup si ukážeme po krocích.



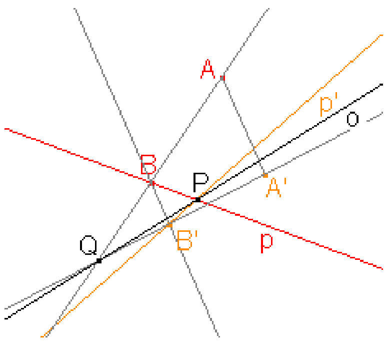
Průsečíkem přímky p a jejího obrazu p*'* je bod P, který je samodružný a bude jím tedy procházet osa afinity. Potřebujeme ještě jeden bod, který bude samodružný a pomocí kterého pak budeme moci sestrojit osu afinity. Použijeme k tomu libovolný bod přímky p, například bod B.



Nejprve najdeme obraz bodu B.
Z definice osové afinity víme, že přímka BB*'* má být rovnoběžná s AA*'*. Dále víme, že bod B*'* leží na přímce p*'*. Bod B*'* získáme jako průsečík přímek BB*'* a p*'*.



Přímka AB se zobrazí na přímku A*'*B*'* a průsečíkem těchto dvou přímek je bod Q, který je samodružný.



Sestrojíme osu o, která prochází body P a Q.

4.3 Osová afinita mezi kružnicí a elipsou

Osová afinita v rovině, která není osovou souměrností, převádí každou kružnici k do elipsy k*'*, a naopak elipsu l převádí buď do elipsy l*'*, nebo do kružnice l*'*. Proto mluvíme o osové afinitě mezi kružnicí a elipsou.

Osová afinita mezi kružnicí a elipsou se používá k řešení některých úloh o elipse, těm se ale na těchto stránkách nebudeme věnovat. My se zaměříme pouze na sestrojení obrazu kružnice a elipsy v osové afinitě, abychom se naučili sestrojovat například podstavu válce.

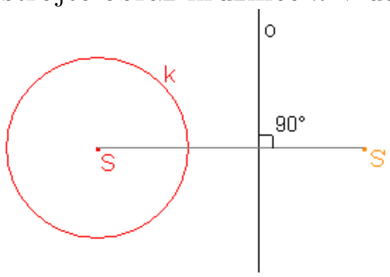
Je-li osová afinita pravoúhlá a není-li to osová souměrnost, pak obrazem kružnice k je elipsa k' taková, že obrazem průměru kružnice, který je rovnoběžný s osou o a obrazem průměru kružnice, který je kolmý na osu, jsou osy elipsy k'.

V osové afinitě mezi kružnicí a elipsou platí:

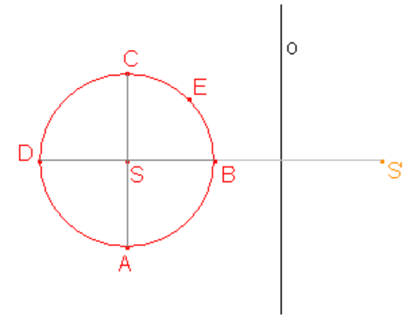
- Obrazem tečny je opět tečna.
- Máme-li obraz a vzor (například kružnice a elipsa), tak umíme vždy poznat zda existuje osová afinita.

Poznámka
Ke konstrukci elipsy stačí znát pět jejich bodů. Tedy stačí uvažovat obrazy pěti bodů (vzorů). V softwaru Cabri II Plus je tento příkaz k dispozici a byl využit v této práci při konstrukcích v příkladech.
Pokud bychom obraz kružnice črtali tužkou na papír, potřebovali bychom více obrazů bodů zadané kružnice.

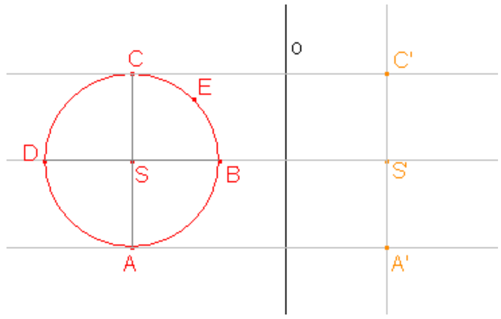
Příklad 1
Je dána kružnice k a osová afinita určená uspořádanou dvojicí bodů SS' a osou o. Sestrojte obraz kružnice k v dané osové afinitě.



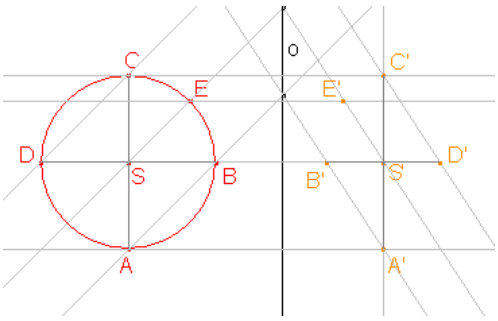
Řešení
Postup si ukážeme po krocích.



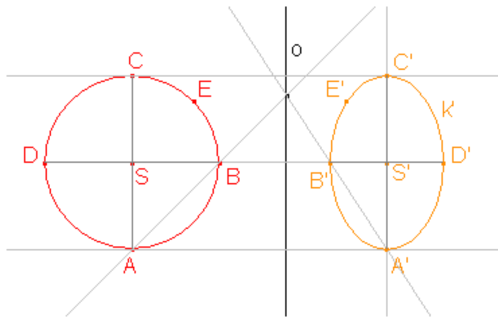
Abychom mohli sestrojit obraz kružnice k, potřebujeme najít obrazy alespoň pěti bodů této kružnice.
Vezměme například body A, B, C, D, E (úsečky AC, BD jsou průměry kružnice) a najděme jejich obrazy. Obrazy těchto bodů pak použijeme k načrtnutí obrazu dané kružnice k.



Sestrojíme obraz A' bodu A a obraz C' bodu C, a to stejně jako v Příkladu 1b v kapitole o osové afinitě v rovině.

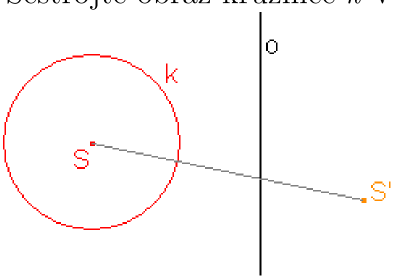


Sestrojíme obrazy B', D', E' bodů B, D, E stejně jako v Příkladu 1a v kapitole o osové afinitě v rovině.

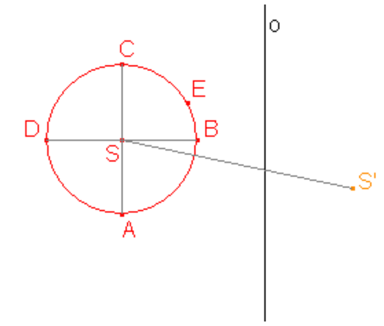


Pomocí bodů A', B', C', D', E' načrtneme obraz kružnice k, kterým bude elipsa k'. Body A', B', C', D' jsou vrcholy elipsy.

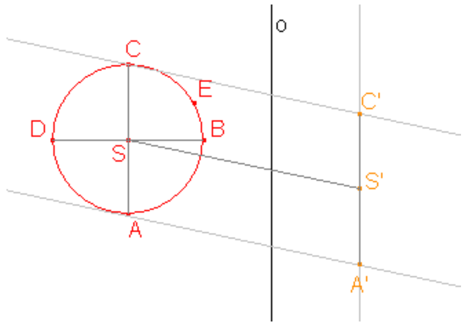
Příklad 2
Je dána kružnice k a osová afinita určená uspořádanou dvojicí bodů SS' a osou o. Sestrojte obraz kružnice k v dané osové afinitě.



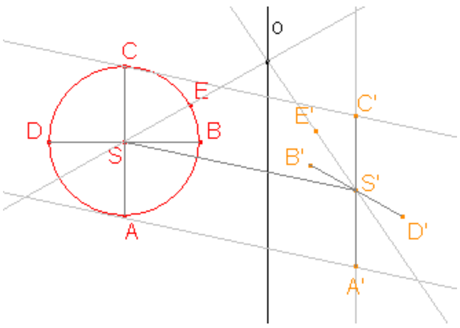
Řešení
Postup si ukážeme po krocích.



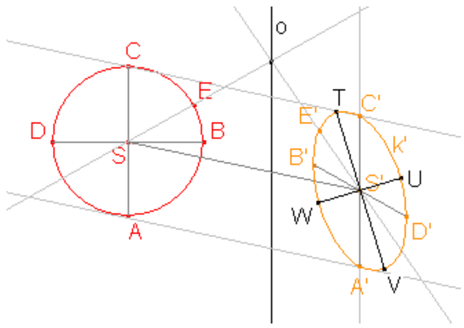
Abychom mohli sestrojit obraz kružnice k, potřebujeme najít obrazy alespoň pěti bodů této kružnice.
Vezměme například body A, B, C, D, E (úsečky AC, BD jsou průměry kružnice) a najděme jejich obrazy. Obrazy těchto bodů pak použijeme k načrtnutí obrazu dané kružnice k.



Sestrojíme obraz A' bodu A a obraz C' bodu C, a to stejně jako v Příkladu 1b v kapitole o osové afinitě v rovině.



Sestrojíme obrazy B', D', E' bodů B, D, E stejně jako v Příkladu 1a v kapitole o osové afinitě v rovině.

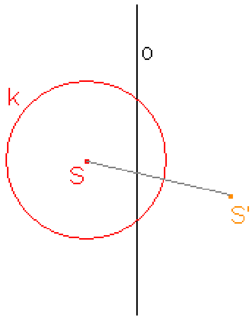


Pomocí bodů A', B', C', D', E' načrtneme obraz kružnice k, kterým bude elipsa k'. Body A', B', C', D' však nejsou vrcholy elipsy. Vrcholy elipsy jsou body T, U, V, W. Z obrazů kolmých průměrů kružnice jsme schopni sestrojit hlavní a vedlejší osu elipsy a to se provádí například Rytzovou konstrukcí, kterou zde ale nebudeme uvádět. V obrázku jsou tyto osy zakresleny pro pochopení toho, že obrazy kolmých průměrů kružnice nemusí být hlavní a vedlejší osa elipsy.

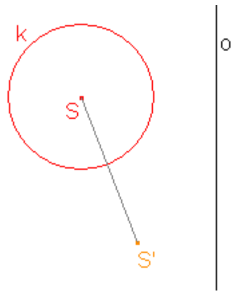
Úlohy

1. Osová afinita je zadána osou o a uspořádanou dvojicí bodů SS'. Určete obraz kružnice k:

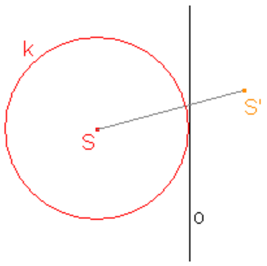
a)



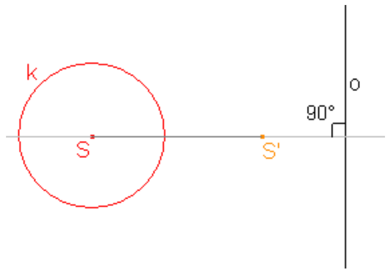
b)



c)

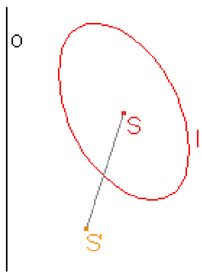


d)

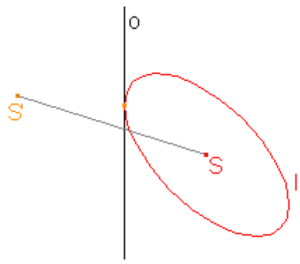


2. Osová afinita je zadána osou o a uspořádanou dvojicí bodů SS'. Určete obraz elipsy l:

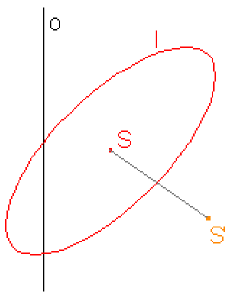
a)



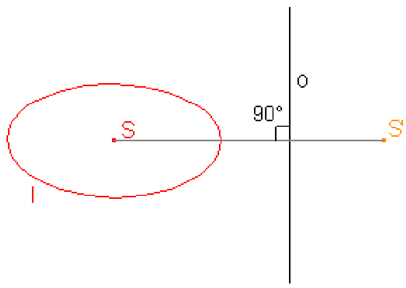
b)



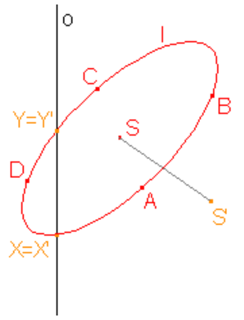
c)



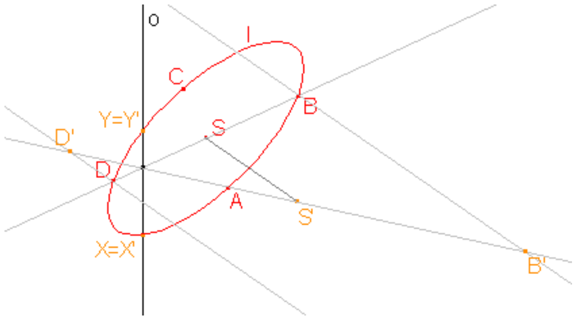
d)



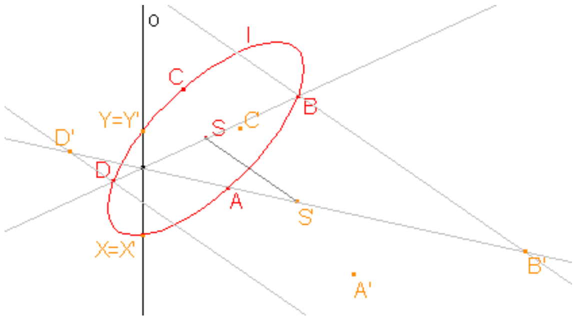
Nyní si ukážeme řešení alespoň jedné úlohy. Vezměme například úlohu 2c. Postup si ukážeme po krocích.



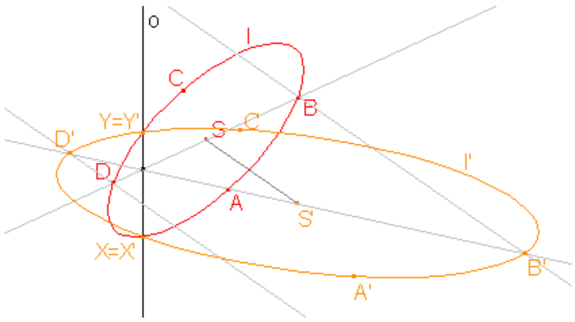
Abychom mohli sestrojit obraz elipsy l, potřebujeme najít obrazy alespoň bodů této elipsy.
Všimněme si nejprve, že elipsu protíná osa afinity ve dvou bodech, tzn. průsečíky elipsy l a osy o jsou dva samodružné body X, Y. Dále vezměme například body A, B, C, D a najděme jejich obrazy.
Obrazy těchto bodů pak použijeme k načrtnutí obrazu elipsy l.



Sestrojíme obraz B' bodu B a obraz D' bodu D, a to stejně jako v Příkladu 1a v kapitole o osové afinitě v rovině.



Sestrojíme obrazy bodů A', C' bodů A, C stejně jako v Příkladu 1a v kapitole o osové afinitě v rovině.



Pomocí bodů A', B', C', D', X, Y načrtneme obraz elipsy l, kterým bude elipsa l'.

Kapitola 5

Podstavy

Než se pustíme do složitějších úloh jako jsou řezy těles, měli bychom se seznámit s tím, jak tato tělesa rovnoběžně promítnout do roviny. My se zde budeme zabývat pouze hranoly a válci. Tato tělesa mají dolní podstavu shodnou s horní podstavou, a tedy k zobrazení těchto těles nám stačí prozkoumat, jak se promítne například dolní podstava daného tělesa.

Ukážeme si dva způsoby, jak získat průmět podstavy tělesa do roviny. V prvním z nich využijeme osovou afinitu v rovině a ve druhém volné rovnoběžné promítání.

Volné rovnoběžné promítání je druh rovnoběžného promítání, je zde určitá volnost ve volbě směru s.
Většina obrázků v učebnicích stereometrie je sestrojena v tomto promítání.

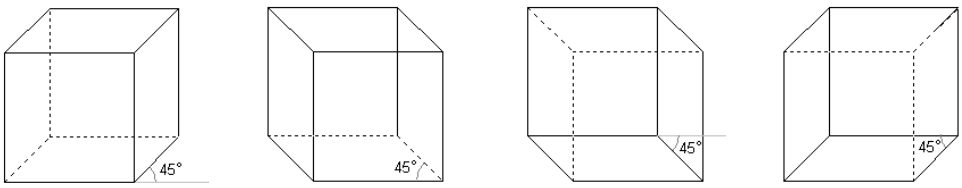
Poznámky k použití volného rovnoběžného promítání

- Průmětnu volíme svislou (např. obrazovka počítače, rovina tabule).
- Podstavy těles umisťujeme do vodorovných rovin tak, aby některá podstavná hrana byla rovnoběžná s průmětnou (u hranolů).
- Úsečky kolmé k průmětně zobrazujeme jako přímky zpravidla s odchylkou 45° od vodorovného směru a vzdálenosti na nich zkracujeme na polovinu.

Tato doporučení můžeme splnit čtyřmi způsoby, a tedy rozlišujeme čtyři pohledy ve volném rovnoběžném promítání, které si ukážeme na obrazu krychle.

Přední stěnu krychle umístíme do roviny rovnoběžné s průmětnou, zobrazí se tedy ve skutečné velikosti, a dále:

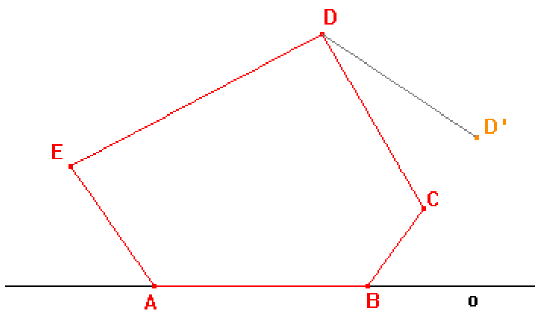
- je-li vidět horní podstava a pravá boční stěna, nazývá se tento pohled **nadhled zprava**
- je-li vidět horní podstava a levá boční stěna, nazývá se tento pohled **nadhled zleva**
- je-li vidět dolní podstava a pravá boční stěna, nazývá se tento pohled **podhled zprava**
- je-li vidět dolní podstava a levá boční stěna, nazývá se **podhled zleva**



Nadhled zprava — Nadhled zleva — Podhled zprava — Podhled zleva

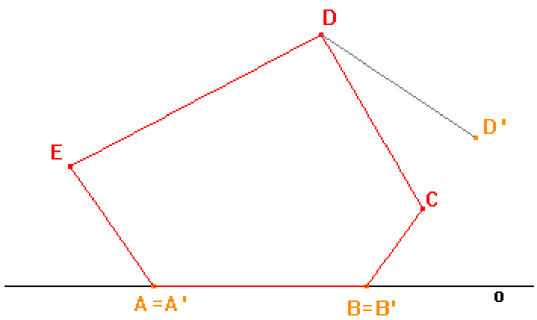
Příklad
Je dáno těleso, jehož podstavou je obecný pětiúhelník. Najděte obraz podstavy v rovnoběžném promítání použitím:

a) osové afinity určené osou o a uspořádanou dvojicí bodů DD',

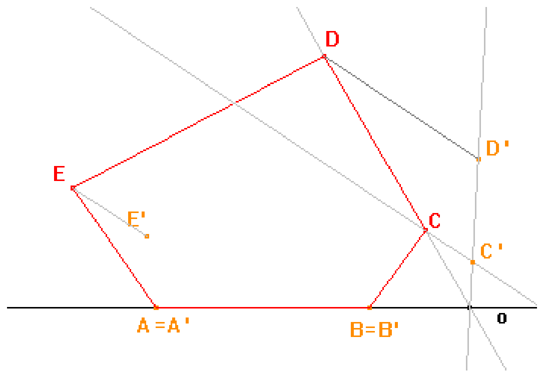


b) volného rovnoběžného promítaní.

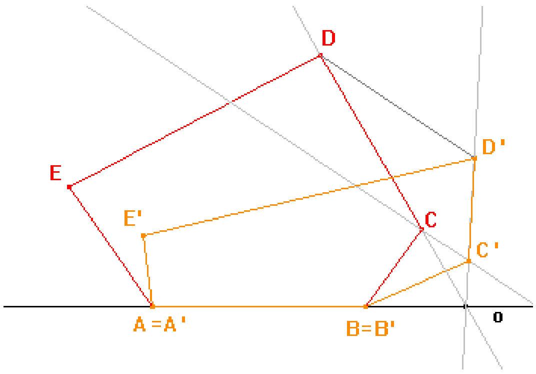
Řešení
Postupy si ukážeme po krocích.
a)



Abychom mohli najít obraz daného pětiúhelníku, musíme najít obrazy jeho vrcholů.
Všimněme si, že pětiúhelník $ABCDE$ má s osou o společnou jednu celou stranu, tj. na ose o leží body A, B, které jsou samodružné. Již máme body A', B' a D' (bod D' je dán ze zadání), stačí nalézt obrazy bodů C, E.

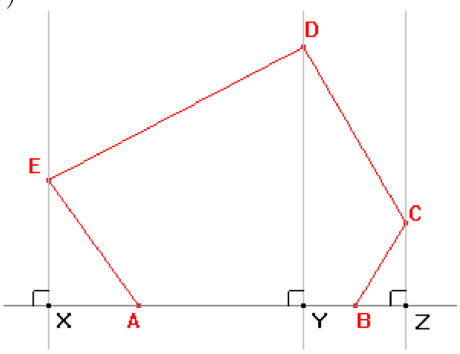


Sestrojíme obraz C' bodu C a obdobným postupem obraz E' bodu E, a to stejně jako v Příkladu 1a v kapitole o osové afinitě v rovině.

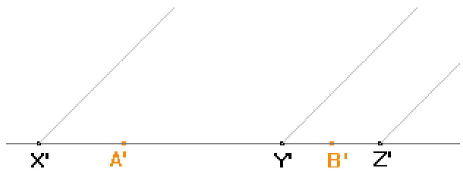


Pomocí bodů *A'*, *B'*, *C'*, *D'*, *E'* načrtneme obraz pětiúhelníku *ABCDE*, kterým bude pětiúhelník *A'B'C'D'E'*.

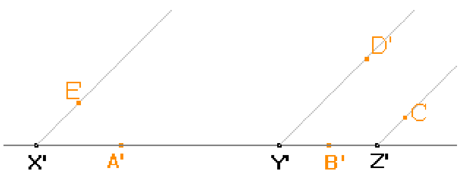
b)



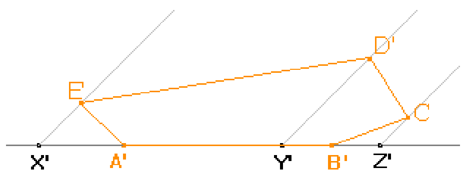
Podstavu tělesa umístíme do vodorovné roviny tak, aby hrana *AB* byla rovnoběžná s průmětnou.
Abychom mohli najít obraz daného pětiúhelníku, musíme najít obrazy jeho vrcholů. Nejprve spustíme kolmice z bodů *E*, *D*, *C* na přímku *AB*. Paty kolmice označíme *X*, *Y*, *Z*.



Platí |*AB*|=|*A'B'*|, |*YX*|=|*Y'X'*|, |*BZ*|=|*B'Z'*|, protože přímka *AB* je rovnoběžná s průmětnou a rovnoběžné promítání zobrazuje útvary ležící v rovnoběžné rovině s průmětnou na shodný útvar. Polopřímky *XE*, *YD*, *ZC* se zobrazí na polopřímky *X'E'*, *Y'D'* , *Z'C'*, které mají s přímkou *AB* odchylku 45°.



Na polopřímku s počátečním bodem *X'* naneseme od počátku poloviční délku úsečky *XE* a tak získáme bod *E'*. Obdobně nalezneme bod *D'* a *C'*.

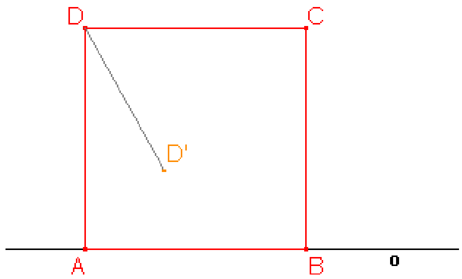


Pomocí bodů *A'*, *B'*, *C'*, *D'*, *E'* načrtneme obraz pětiúhelníku *ABCDE*, kterým bude pětiúhelník *A'B'C'D'E'*.

Úlohy

1. Je dáno těleso, jehož podstavou je čtverec *ABCD*. Najděte obraz podstavy v rovnoběžném promítání použitím:

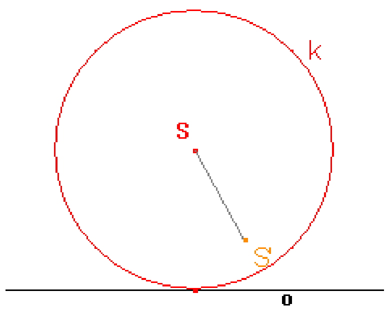
a) osové afinity určené osou o a uspořádanou dvojicí bodů *DD'*,



b) volného rovnoběžného promítaní.

2. Je dáno těleso, jehož podstavou je kruh k. Najděte obraz podstavy v rovnoběžném promítání použitím:

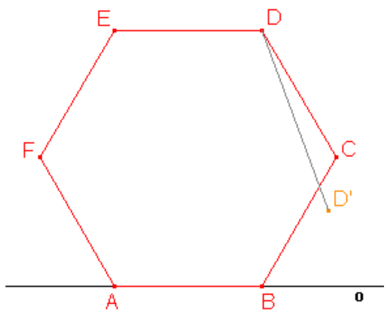
   a) osové afinity určené osou o a uspořádanou dvojicí bodů *SS'*,



   b) volného rovnoběžného promítaní.

3. Je dáno těleso, jehož podstavou je pravidelný šestiúhelník *ABCDEF*. Najděte obraz podstavy v rovnoběžném promítání použitím:

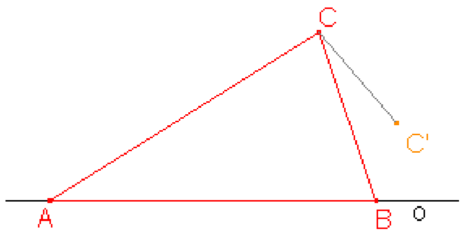
   a) osové afinity určené osou o a uspořádanou dvojicí bodů *DD'*,



   b) volného rovnoběžného promítaní.

4. Je dáno těleso, jehož podstavou je trojúhelník *ABC*. Najděte obraz podstavy v rovnoběžném promítání použitím:

   a) osové afinity určené osou o a uspořádanou dvojicí bodů *CC'*,



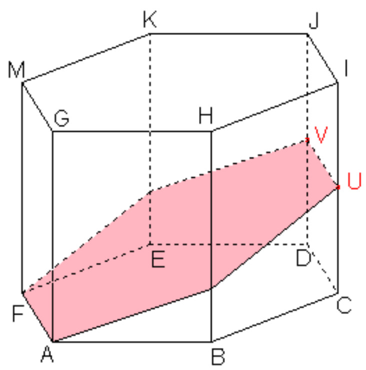
b) volného rovnoběžného promítaní.

Kapitola 6

Řezy těles rovinou

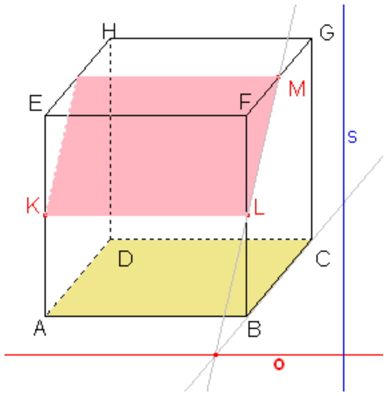
Nejprve si připomeňme, co znamená řez tělesa rovinou.

Řezem tělesa rovinou nazýváme průnik roviny a tělesa.

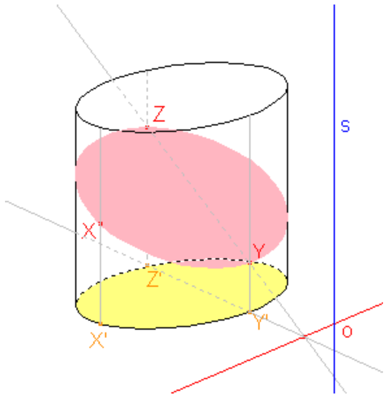


Obrázek 6.1: Řez tělesa rovinou AUV

My se zde naučíme konstruovat řez tělesa rovinou s využitím osové afinity mezi dvěma rovinami, a to mezi rovinou řezu a většinou rovinou podstavy tělesa.
Osou této afinity bude průsečnice roviny řezu a roviny podstavy tělesa, za směr afinity vezmeme pro hranoly směr bočních hran a pro válce směr osy válce.



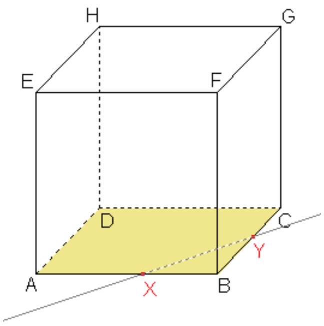
Osová afinita směrem s a osou o, která je průsečnicí roviny řezu KLM a roviny ABC podstavy tělesa



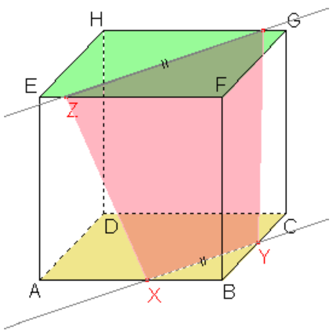
Osová afinita směrem s a osou o, která je průsečnicí roviny řezu XYZ a roviny $X'Y'Z'$ podstavy tělesa

Také si ukážeme jiný způsob konstrukce řezu pomocí následujících tří vět a jejich důsledků:

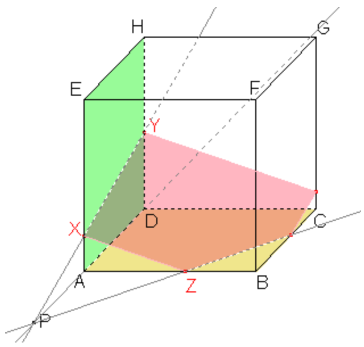
Věta 1: Leží-li dva různé body v rovině, pak přímka jimi určená leží také v této rovině.
Věta 2: Dvě rovnoběžné roviny protíná třetí rovina ve dvou rovnoběžných přímkách.
Věta 3: Jsou-li každé dvě ze tří rovin různoběžné a mají-li tyto tři roviny jediný společný bod, procházejí tímto společným bodem všechny tři průsečnice.



Věta 1



Věta 2



Věta 3

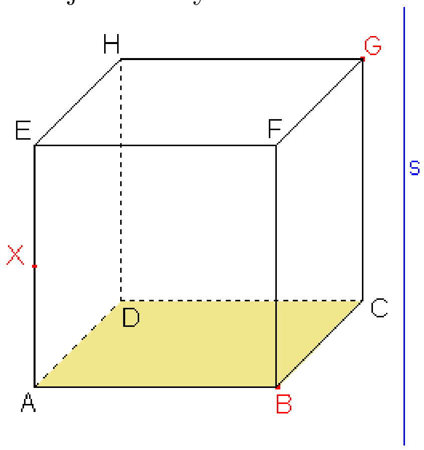
Důsledek 1: Leží-li dva různé body roviny řezu v rovině některé stěny, leží v rovině této stěny i jejich spojnice. Průnik spojnice a stěny je jednou stranou řezu.
Důsledek 2: Jsou-li roviny dvou stěn rovnoběžné a přitom různoběžné s rovinou řezu, jsou průsečnice roviny řezu s rovinami těchto stěn rovnoběžné.
Důsledek 3: Průsečnice rovin dvou sousedních stěn (tj. stěn se společnou hranou) s rovinou řezu a přímka, v níž leží společná hrana, se protínají v jednom bodě.

6.1 Řezy hranolů rovinou

Řezem hranolu rovinou je mnohoúhelník, jehož vrcholy leží na hranách tělesa a jehož strany leží ve stěnách tělesa.

Řezy hranolů, resp. mnohostěnů, stejně jako základní objekty ze stereometrie, jsou již popsány v práci Stereometrie od Lídy Kadlecové. V její práci mimo jiné najdete výklad a několik příkladů ke konstrukci řezů mnohostěnů řešených pomocí tří základních stereometrických vět a jejich důsledků.
My si zde ukážeme, jak konstruovat řez hranolu rovinou pomocí osové afinity mezi rovinami, u některých příkladů si ukážeme i řešení pomocí tří základních vět a jejich důsledků.

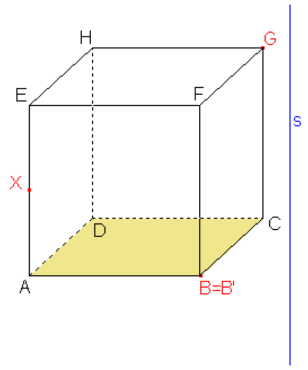
Příklad 1
Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou BGX, kde bod X je střed hrany AE.



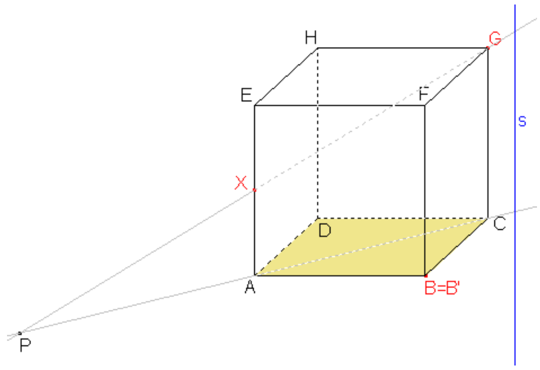
Řešení
Ukážeme si dva způsoby řešení - nejdříve pomocí osové afinity mezi rovinami a dále pomocí stereometrických vět a jejich důsledků.

a) Využijeme osové afinity mezi dvěma rovinami, a to rovinou řezu a rovinou dolní podstavy, za směr afinity s vezmeme směr bočních hran.

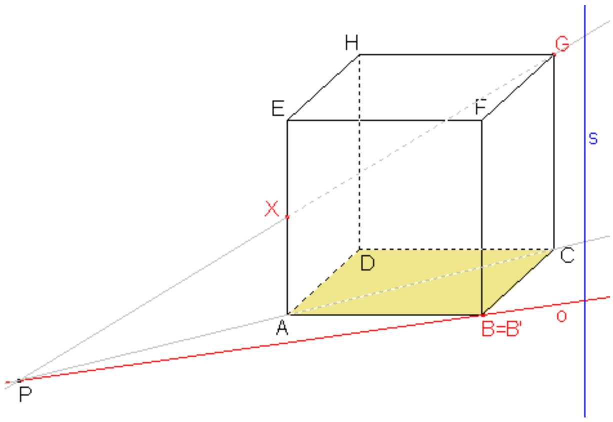
Postup si ukážeme po krocích.



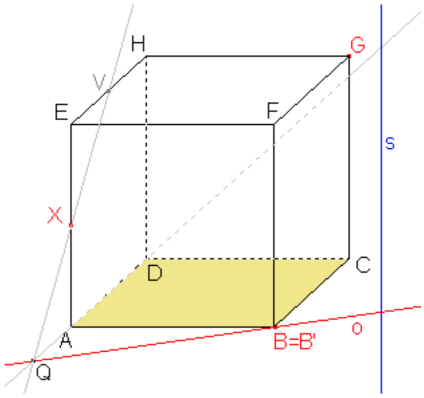
Nejprve musíme najít osu afinity, která je průsečnicí roviny dolní podstavy a roviny řezu dané body BGX. Bod B náleží oběma rovinám, je samodružný a leží tedy i na hledané ose afinity.



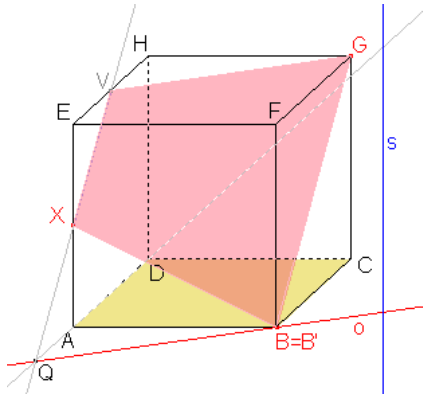
K sestrojení osy afinity budeme potřebovat dva body. Jeden bod již máme, bod B, a druhý získáme pomocí bodů X, G. Obrazem přímky XG v zadané osové afinitě je přímka AC, protože obrazem bodu X je bod A a bodu G je bod C. Průsečíkem přímky XG a přímky AC je samodružný bod P, který bude ležet na ose afinity.



Pomocí bodů B, P již můžeme sestrojit osu afinity o.



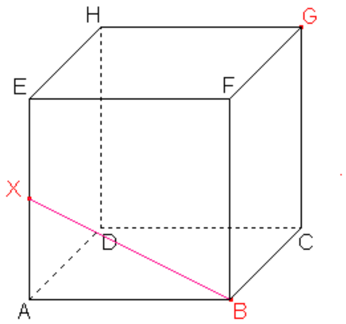
Sestrojíme bod řezu V na hraně krychle EH. Bod Q je průsečík přímky AD s osou o. Vzorem přímky AD v afinitě je přímka XQ a tedy bod řezu V je průsečíkem přímky XQ s hranou EH.



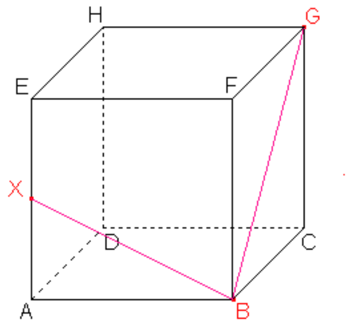
Nyní známe všechny vrcholy mnohoúhelníku, který je řezem, a strany tohoto mnohoúhelníku jsou hranicemi řezu v příslušných stěnách.

b) Využijeme stereometrických vět a jejich důsledků, které jsou popsány v sekci Řezy těles rovinou.

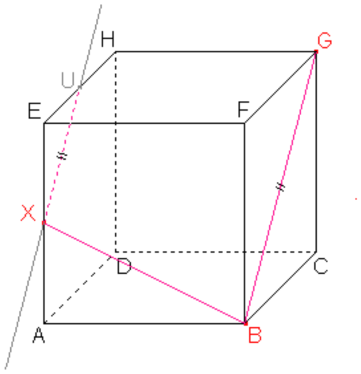
Postup si ukážeme po krocích.



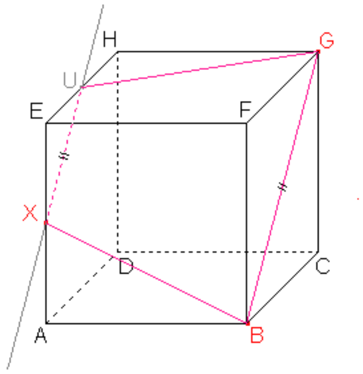
Dle důsledku 1: Body B, X roviny řezu leží v rovině přední stěny, tedy i jejich spojnice leží v rovině této stěny. Průnik spojnice a stěny je jednou stranou řezu.



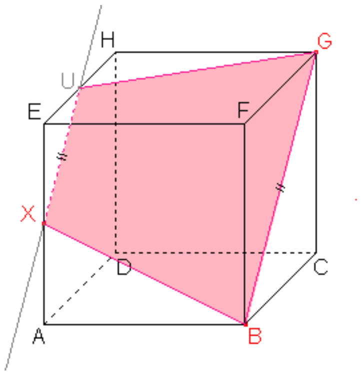
Dle důsledku 1: Body B, G roviny řezu leží v rovině pravé boční stěny, tedy i jejich spojnice leží v rovině této stěny. Průnik spojnice a stěny je další stranou řezu.



Sestrojíme bod U a stranu řezu XU v boční stěně ADE dle důsledku 2: Roviny bočních stěn jsou rovnoběžné a přitom různoběžné s rovinou řezu, proto jsou průsečnice roviny řezu s rovinami těchto stěn rovnoběžné. Můžeme tedy sestrojit rovnoběžku ke straně řezu BG procházející bodem X. Průnik rovnoběžky a hrany EH je hledaný bod U a úsečka XU je stranou řezu.



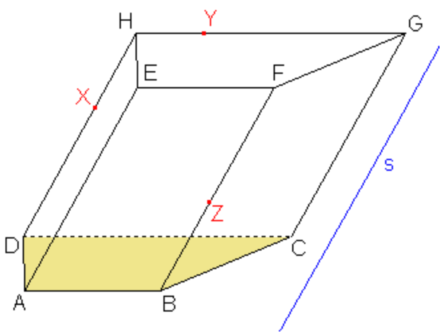
Dle důsledku 1: Body G, U roviny řezu leží v rovině horní stěny, tedy i jejich spojnice leží v rovině této stěny. Průnik spojnice a stěny je další stranou řezu.



Nyní známe všechny vrcholy a strany mnohoúhelníku, který je řezem daného tělesa.

Příklad 2

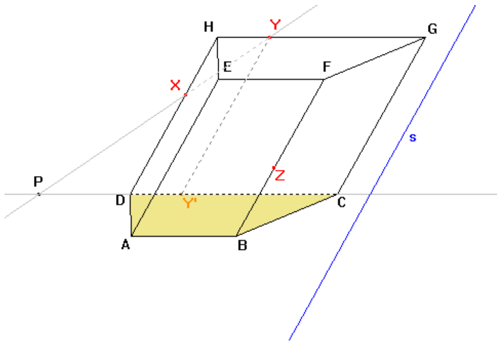
Sestrojte řez kosého čtyřbokého hranolu $ABCDEFGH$, jehož podstava je lichoběžník, rovinou XYZ, kde bod X leží na hraně DH, bod Y leží na hraně GH, bod Z leží na hraně BF.



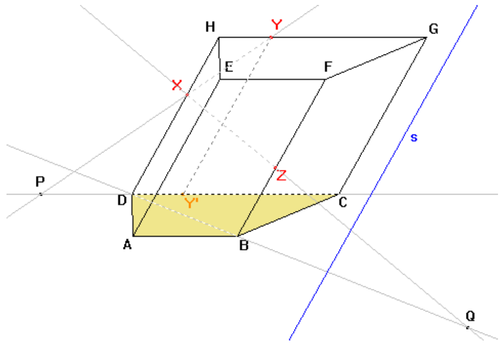
Řešení
Ukážeme si dva způsoby řešení - nejdříve pomocí osové afinity mezi rovinami a dále pomocí stereometrických vět a jejich důsledků.

a) Využijeme osové afinity mezi dvěma rovinami, a to rovinou řezu a rovinou dolní podstavy, za směr afinity s vezmeme směr bočních hran.

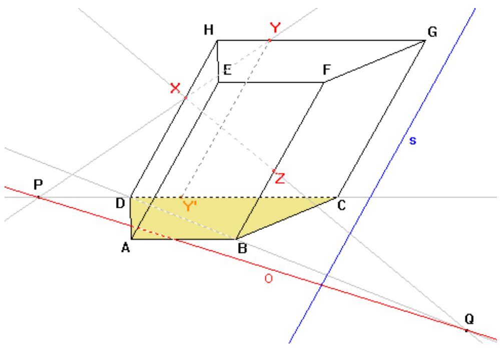
Postup si ukážeme po krocích.



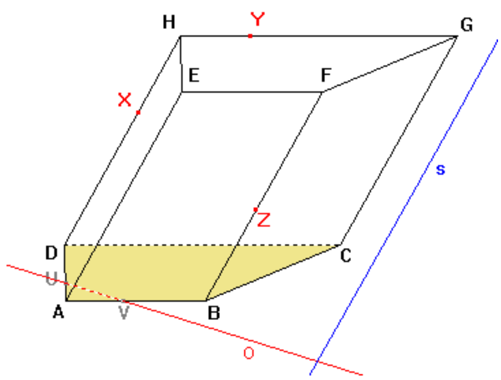
Nejprve musíme najít osu afinity, která je průsečnicí roviny dolní podstavy a roviny řezu dané body XYZ. K sestrojení osy afinity budeme potřebovat dva body. Jeden bod získáme pomocí bodů X, Y. Obrazem přímky XY je přímka DY', protože obrazem bodu X je bod D a bodu Y je bod Y'. Průsečíkem přímky XY a přímky DY' je samodružný bod P, který bude ležet na ose afinity.



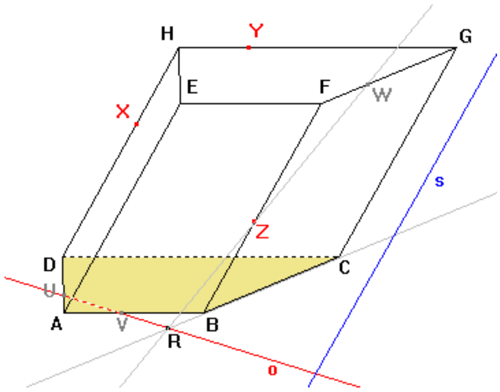
Druhý bod osy získáme pomocí bodů X, Z. Obrazem přímky XZ je přímka DB, protože obrazem bodu X je bod D a bodu Z je bod B. Průsečíkem přímky XZ a přímky DB je samodružný bod Q, který bude ležet na ose afinity.



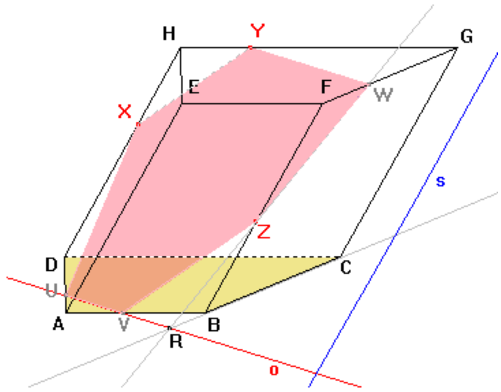
Pomocí bodů P, Q již můžeme sestrojit osu afinity o.



Osa afinity leží v rovině dolní podstavy tělesa a navíc protíná hrany podstavy, proto průsečíky U, V osy afinity s hranami dolní podstavy jsou body řezu.



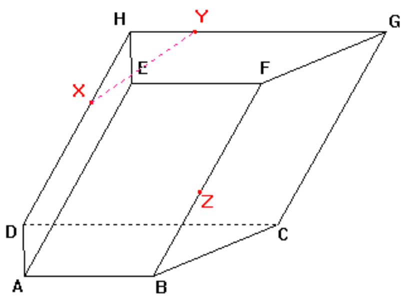
Sestrojíme bod řezu W na hraně FG. Bod R je průsečík přímky BC s osou o. Vzorem přímky BC je přímka ZR a tedy průsečík přímky ZR s hranou FG je bod řezu W.



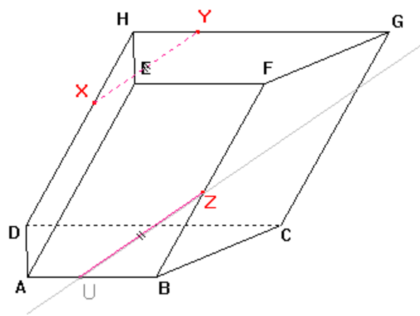
Nyní známe všechny vrcholy mnohoúhelníku, který je řezem, a strany tohoto mnohoúhelníku jsou hranicemi řezu v příslušných stěnách.

b) Využijeme stereometrických vět a jejich důsledků, které jsou popsány v sekci Řezy těles rovinou.

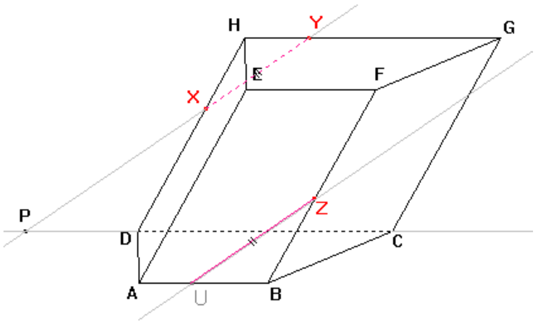
Postup si ukážeme po krocích.



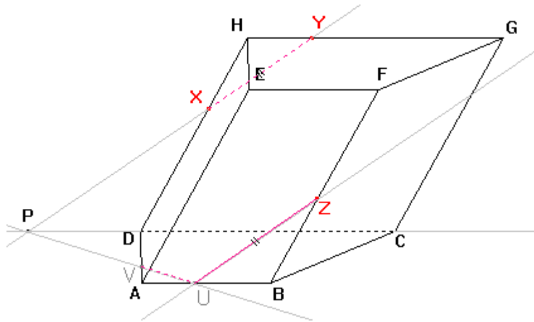
Dle důsledku 1: Body X, Y roviny řezu leží v rovině zadní stěny, tedy i jejich spojnice leží v rovině této stěny. Průnik spojnice a stěny je stranou řezu.



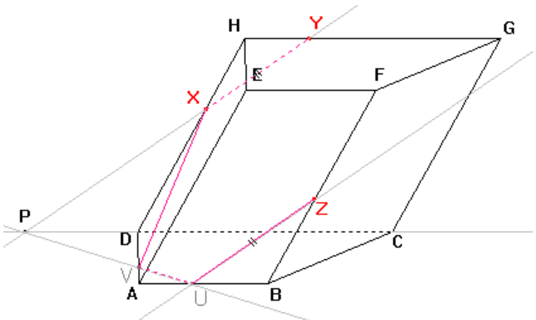
Sestrojíme bod U a stranu řezu ZU v přední stěně ABF dle důsledku 2: Roviny přední a zadní stěny jsou rovnoběžné a přitom různoběžné s rovinou řezu, proto jsou průsečnice roviny řezu s rovinami těchto stěn rovnoběžné.
Můžeme tedy sestrojit rovnoběžku ke straně řezu XY procházející bodem Z. Průsečík rovnoběžky a hrany AB je hledaný bod U a úsečka ZU je stranou řezu.



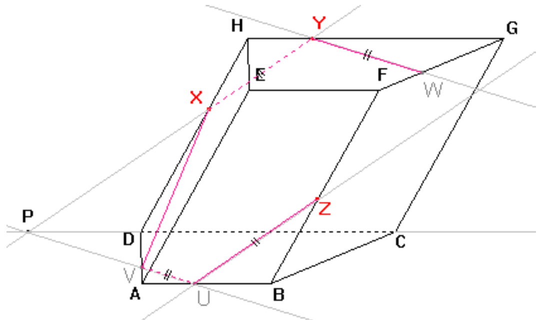
Dle důsledku 3 se průsečnice rovin zadní stěny a dolní podstavy, které jsou sousední, s rovinou řezu a přímka, v níž leží společná hrana těchto stěn, protínají v jednom bodě.
Sestrojíme tedy přímku danou body CD, v níž leží společná hrana zadní stěny a dolní podstavy, a průsečnici roviny řezu a zadní stěny, kterou je přímka XY. Bod P je průsečíkem přímky CD a přímky XY.



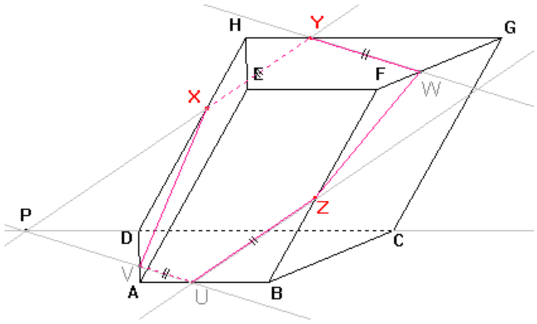
Dle důsledku 3 je bod P průsečíkem přímek CD, XY a přímky PU, která je průsečnicí roviny řezu a dolní podstavy. Nyní můžeme sestrojit průsečík V přímky PU a hrany AD a stranu řezu UV.



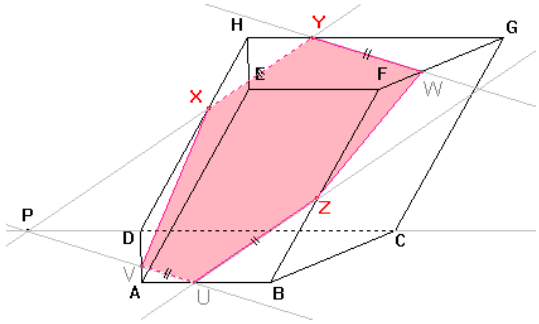
Dle důsledku 1: Body X, V roviny řezu leží v rovině boční stěny, tedy i jejich spojnice leží v rovině této stěny. Průnik spojnice a stěny je další stranou řezu.



Sestrojíme bod W a stranu řezu YW v horní podstavě EFG dle důsledku 2: Roviny dolní a horní podstavy jsou rovnoběžné a přitom různoběžné s rovinou řezu, proto jsou průsečnice roviny řezu s rovinami podstav rovnoběžné.
Můžeme tedy sestrojit rovnoběžku ke straně řezu UV procházející bodem Y. Průsečík rovnoběžky a hrany FG je hledaný bod W a úsečka YW je stranou řezu.



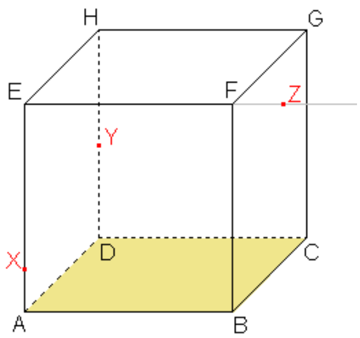
Dle důsledku 1: Body Z, W roviny řezu leží v rovině boční stěny, tedy i jejich spojnice leží v rovině této stěny. Průnik spojnice a stěny je další stranou řezu.



Nyní známe všechny vrcholy a strany mnohoúhelníku, který je řezem daného tělesa.

Úlohy

1. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou XYZ, kde bod X leží na hraně AE, bod Y leží na hraně DH, bod Z leží na polopřímce EF za bodem F.



   a) Řešte pomocí osové afinity.

   b) Řešte pomocí stereometrických vět a jejich důsledků.

2. Sestrojte řez kvádru $ABCDEFGH$ rovinou CXY, kde umístění bodů X, Y je dáno dělicím poměrem $(AEX) =$ -1/3, $(GHY) =$ -4.

   a) Řešte pomocí osové afinity.

   b) Řešte pomocí stereometrických vět a jejich důsledků.

3. Sestrojte řez kosého čtyřbokého hranolu $ABCDEFGH$, jehož podstavou je obdélník, rovinou XYZ, kde umístění bodů X, Y, Z je dáno dělicím poměrem $(AEX) =$ -3/5, $(CGY) =$ -7/3, $(GHZ) = 4$.

   a) Řešte pomocí osové afinity.

   b) Řešte pomocí stereometrických vět a jejich důsledků.

4. Sestrojte řez kolmého trojbokého hranolu $ABCDEF$ rovinou XYZ, kde umístění bodů X, Y, Z je dáno dělicím poměrem $(ADX) = -1/2$, $(EFY) = -3/2$, $(ABZ) = 4$.

   a) Řešte pomocí osové afinity.

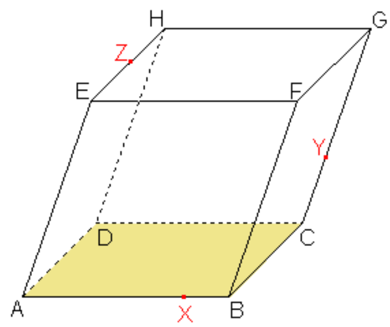
   b) Řešte pomocí stereometrických vět a jejich důsledků.

5. Sestrojte řez kosého trojbokého hranolu $ABCDEF$ rovinou XYZ, kde umístění bodů X, Y, Z je dáno dělicím poměrem (BEX) = -1/3, (EFY) = -1, $(EDZ) = 4$.

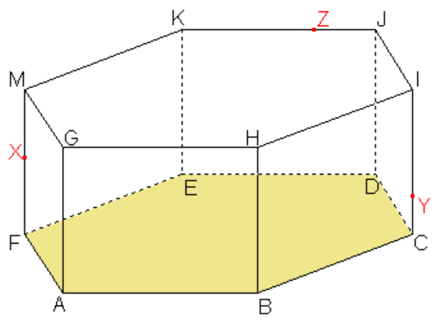
   a) Řešte pomocí osové afinity.

   b) Řešte pomocí stereometrických vět a jejich důsledků.

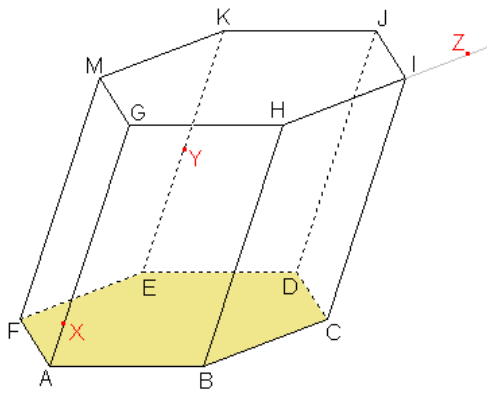
6. Sestrojte řez kosého čtyřbokého hranolu $ABCDEFGH$, jehož podstavou je čtverec, rovinou XYZ, kde bod X leží na hraně AB, bod Y leží na hraně CG, bod Z leží na hraně EH.



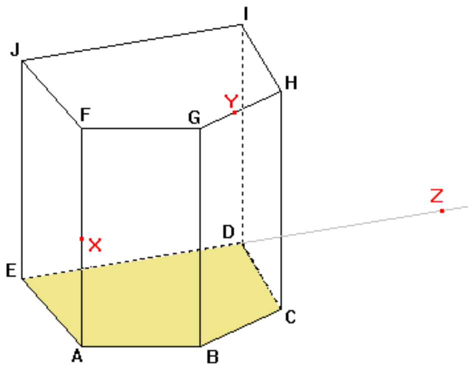
7. Sestrojte řez pravidelného šestibokého hranolu $ABCDEFGHIJKM$ rovinou XYZ, kde bod X leží na hraně FM, bod Y leží na hraně CI, bod Z leží na hraně JK.



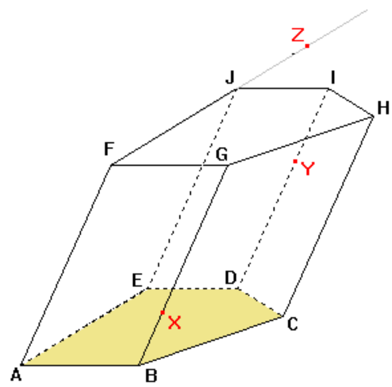
8. Sestrojte řez kosého šestibokého hranolu $ABCDEFGHIJKM$, jehož podstavou je pravidelný šestiúhelník, rovinou XYZ, kde bod X leží na hraně AG, bod Y leží na hraně EK, bod Z leží na polopřímce HI za bodem I.



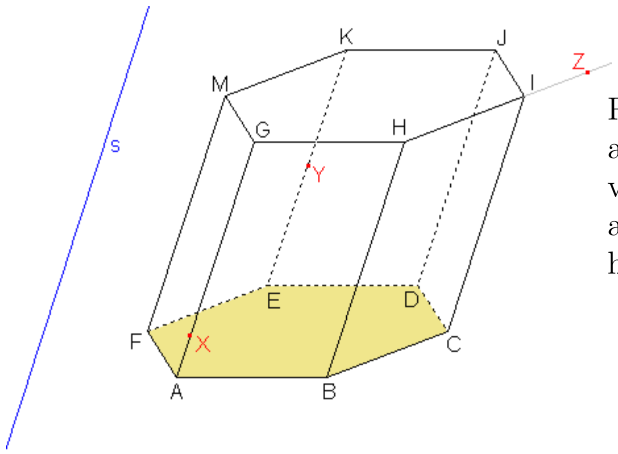
9. Sestrojte řez kolmého pětibokého hranolu $ABCDEFGHIJ$ rovinou XYZ, kde bod X leží na hraně AF, bod Y leží na hraně GH, bod Z leží na polopřímce ED za bodem D.



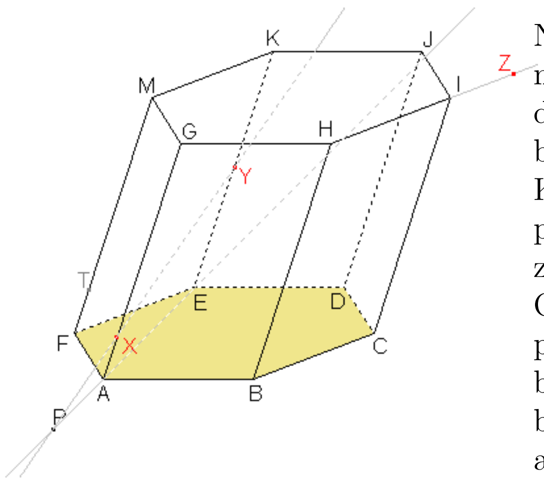
10. Sestrojte řez kosého pětibokého hranolu $ABCDEFGHIJ$ rovinou XYZ, kde bod X leží na hraně BG, bod Y leží na hraně DI, bod Z leží na polopřímce FJ za bodem J.



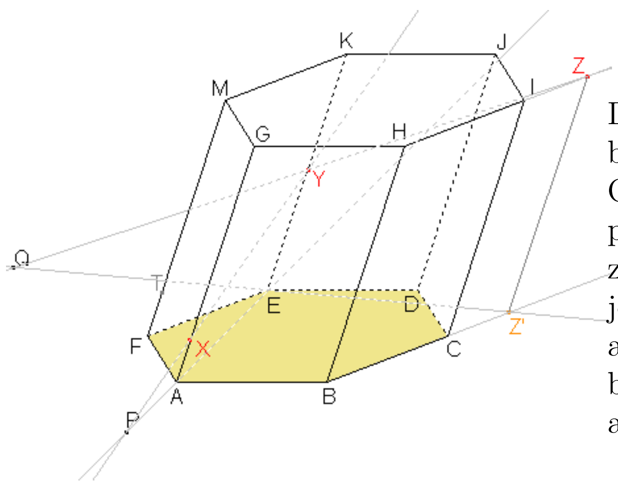
Nyní si ukážeme řešení alespoň jedné úlohy. Vezměme například úlohu 8. Postup si ukážeme po krocích.



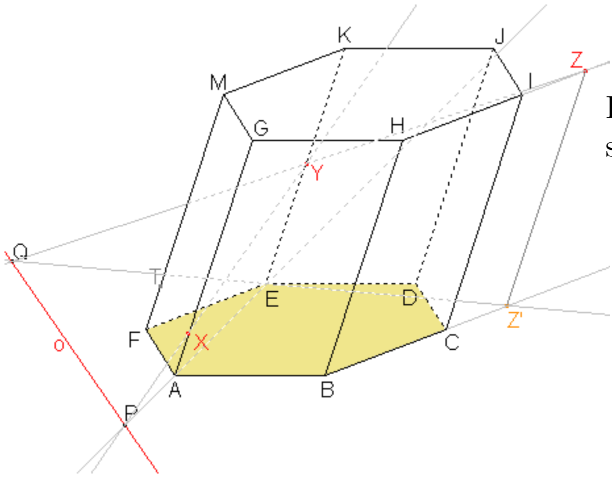
Při řešení úlohy využijeme osové afinity mezi rovinou řezu a rovinou dolní podstavy a za směr afinity s vezmeme směr bočních hran.



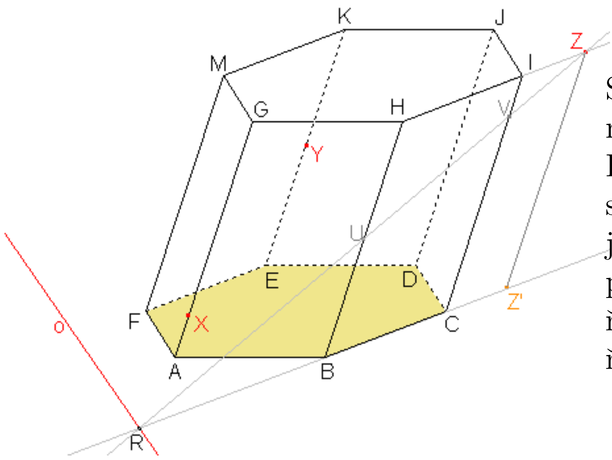
Nejprve musíme najít osu afinity, která je průsečnicí roviny dolní podstavy a roviny řezu dané body XYZ.
K sestrojení osy afinity budeme potřebovat dva body. Jeden bod získáme pomocí bodů X, Y.
Obrazem přímky XY je přímka AE, protože obrazem bodu X je bod A a bodu Y je bod E. Průsečíkem přímky XY a přímky AE je samodružný bod P, který bude ležet na ose afinity.



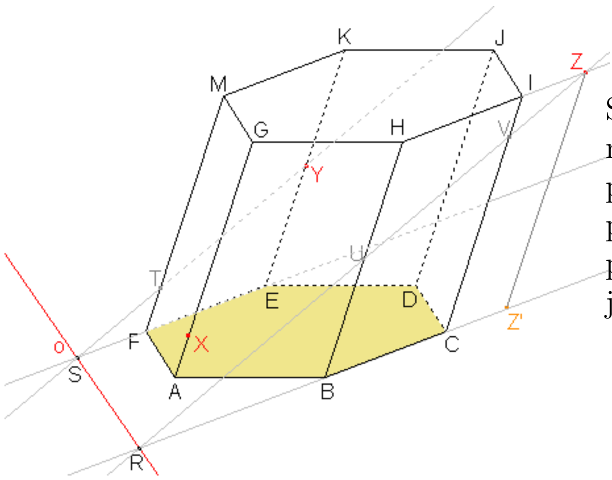
Druhý bod získáme pomocí bodů Y, Z.
Obrazem přímky YZ je přímka EZ', protože obrazem bodu Y je bod E a bodu Z je bod Z'. Průsečíkem přímky YZ a přímky EZ' je samodružný bod Q, který bude ležet na ose afinity.



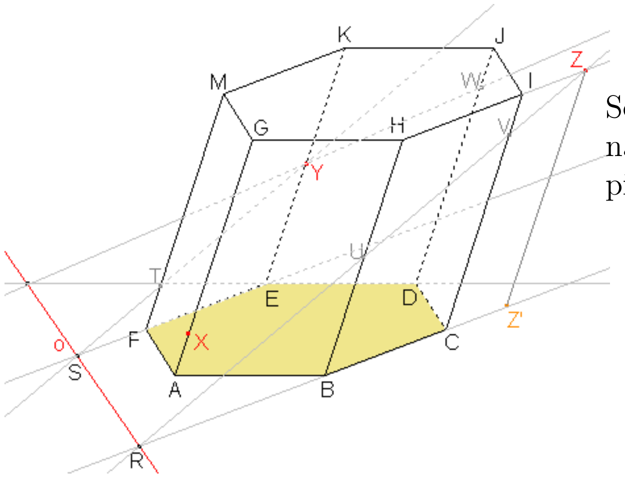
Pomocí bodů *P*, *Q* již můžeme sestrojit osu afinity *o*.



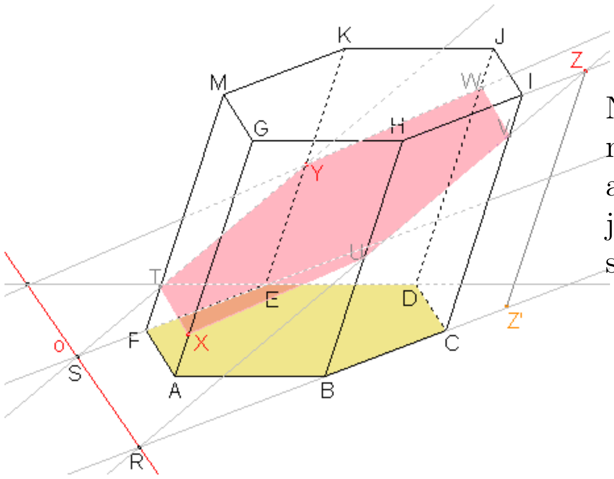
Sestrojíme body řezu *U*, *V* na hraně *BH* a na hraně *CI*. Bod *R* je průsečík přímky *BZ'* s osou *o*. Vzorem přímky *BZ'* je přímka *ZR* a tedy průsečík přímky *ZR* s hranou *BH* je bod řezu *U* a s hranou *CI* je bod řezu *V*.



Sestrojíme bod řezu *T* na hraně *FM*. Bod *S* je průsečík přímky *EF* s osou *o*. Vzorem přímky *EF* je přímka *YS* a tedy průsečík přímky *YS* s hranou *FM* je bod řezu *T*.



Sestrojíme bod řezu W na hraně DJ pomocí bodu Y a přímky DE.



Nyní známe všechny vrcholy mnohoúhelníku, který je řezem, a strany tohoto mnohoúhelníku jsou hranicemi řezu v příslušných stěnách.

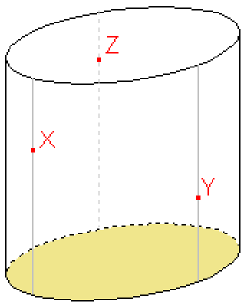
6.2 Řezy válců rovinou

Řezem válce rovinou je rovinný útvar omezený elipsou nebo částí elipsy, jejíž střed leží na ose válce, pokud je tato rovina různoběžná a není kolmá s osou válce. Vzhledem k tomu, že průnikem válcové plochy a roviny je v tomto případě elipsa, potřebujeme více bodů tohoto průniku, abychom ji načrtli.

Poznámka: Ke konstrukci elipsy stačí znát pět jejich bodů. Tohoto využijeme při sestrojení řezu válce. V softwaru Cabri II Plus je tento příkaz k dispozici.

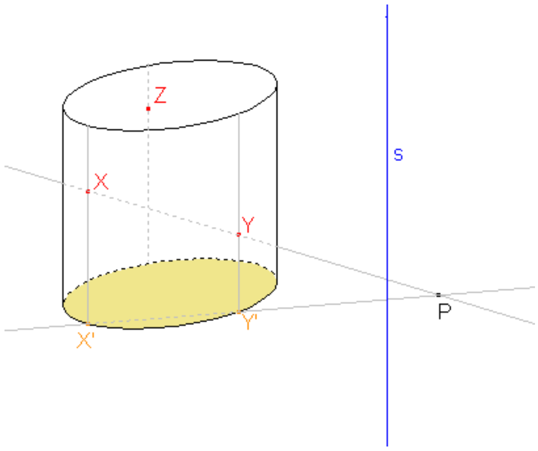
Úlohy se řeší obdobně jako v případě hranolů.
Při jejich řešení využijeme osové afinity mezi dvěma rovinami, rovinou řezu a rovinou dolní podstavy, za směr afinity s vezmeme směr osy válce.

Příklad 1
Sestrojte řez rotačního válce rovinou XYZ, kde X, Y, Z jsou body umístěné na plášti válce, jak je naznačeno na obrázku níže.

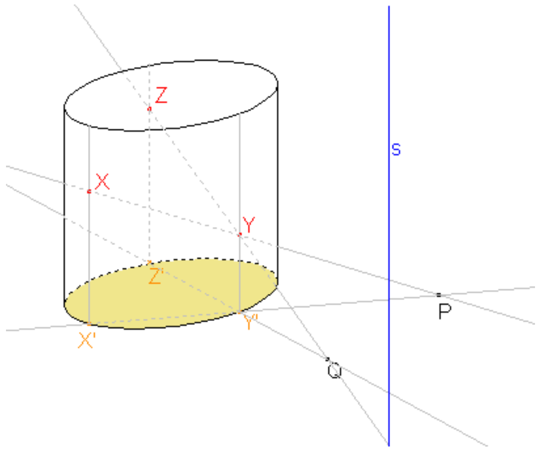


Řešení
Postup si ukážeme po krocích.

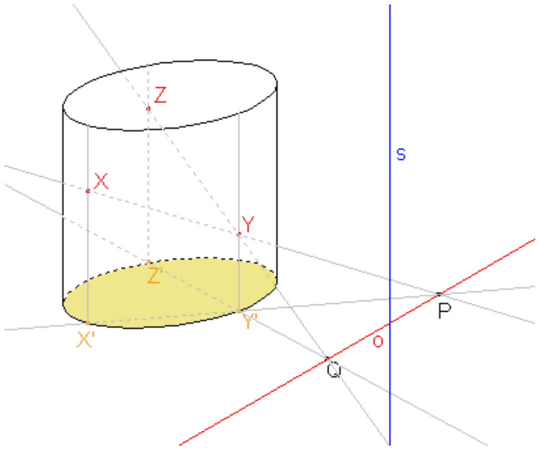
Při řešení úlohy využijeme osové afinity mezi rovinou řezu a rovinou dolní podstavy a za směr afinity s vezmeme směr osy válce.



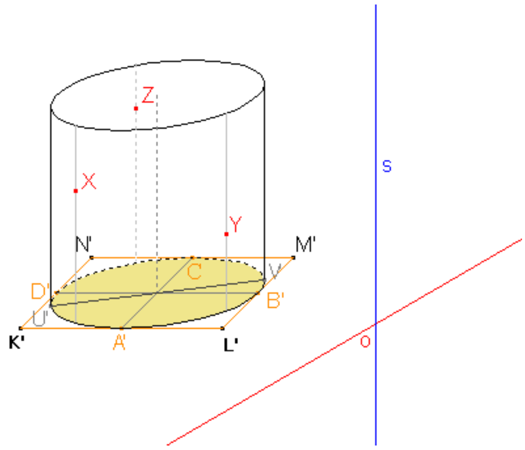
Nejprve musíme najít osu afinity, která je průsečnicí roviny dolní podstavy a roviny řezu dané body XYZ.
K sestrojení osy afinity budeme potřebovat dva body a jejich obrazy. Jeden bod získáme pomocí bodů X, Y. Obrazem přímky XY v osové afinitě je přímka $X'Y'$, protože obrazem bodu X je bod X' a bodu Y je bod Y'. Průsečíkem přímky XY a přímky $X'Y'$ je samodružný bod P, který bude ležet na ose afinity.



Druhý bod osy získáme pomocí bodů Y, Z.
Obrazem přímky YZ je přímka $Y'Z'$, protože obrazem bodu Y je bod Y' a bodu Z je bod Z'. Průsečíkem přímky YZ a přímky $Y'Z'$ je samodružný bod Q, který bude ležet na ose afinity.

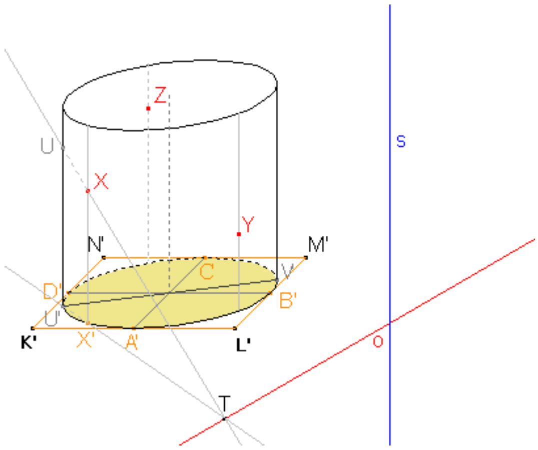


Pomocí bodů P, Q již můžeme sestrojit osu afinity o.

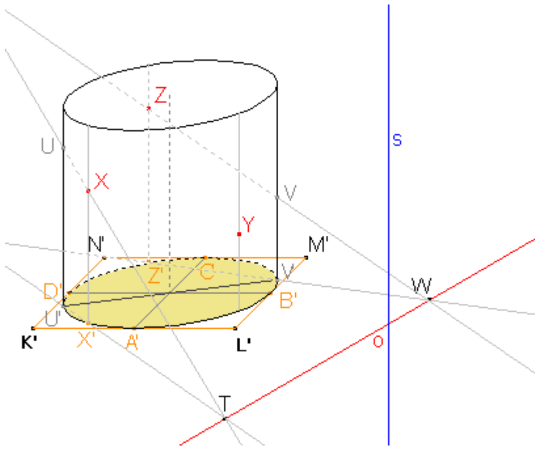


Při sestrojení obrazu válce ve volném rovnoběžném promítání jsme se v Úloze 2b v kapitole o podstavách naučili sestrojit obraz kruhu pomocí opsaného čtverce, jehož obrazem je rovnoběžník *K'L'M'N'* a obrazem kružnice je elipsa. K sestrojení elipsy, která je průsečnicí pláště daného tělesa, resp. válcové plochy a roviny řezu, nám stačí pět bodů, pokud používáme program, který jí umí vykreslit. My si zde naznačíme, jak ji načtrtnout na papíře. K tomu využijeme rovnoběžník *K'L'M'N'* opsaný podstavě tělesa a nalezneme jeho vzor, který bude opsaný hledané elipse, jejíž část je řezem tělesa.

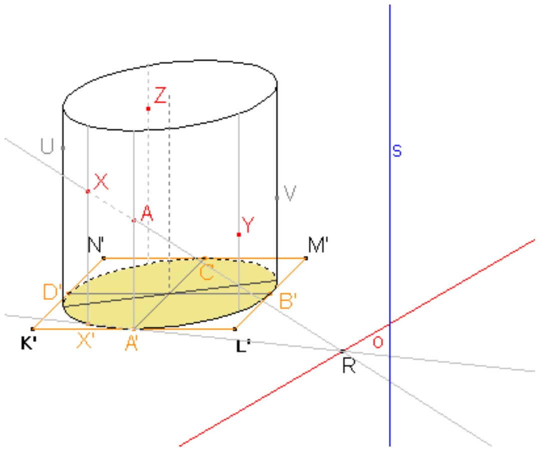
Body *U'*, *V'* jsou vrcholy elipsy v podstavě a v nich se mění její viditelnost.



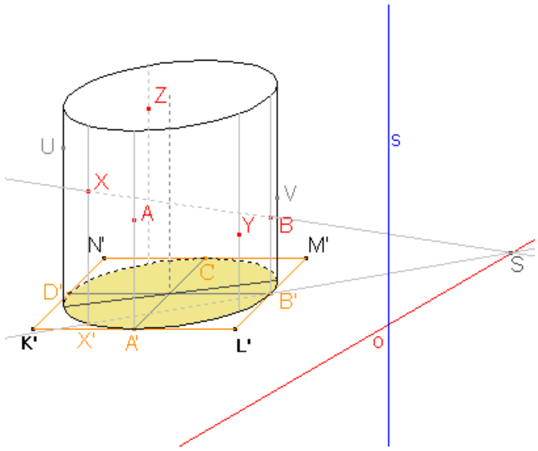
Body X, Y, Z, které určují rovinu řezu, jsou body průsečnice, protože leží na povrchu válce.
Další bod získáme pomocí bodů X, X' a U', kde bod X' je obraz bodu X v dané afinitě. Bodem U' vedeme rovnoběžku se směrem afinity. Bod T je průsečík přímky $X'U'$ s osou o. Vzorem přímky $X'U'$ je přímka XT a tedy průsečík přímky XT s rovnoběžkou se směrem s v bodě U' je bod elipsy U.



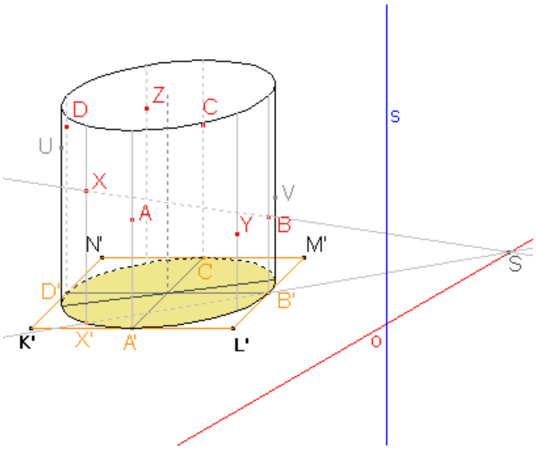
Další bod získáme pomocí bodů Z, Z' a V', kde bod Z' je obraz bodu Z. Bodem V' vedeme rovnoběžku se směrem afinity. Bod W je průsečík přímky $Z'V'$ s osou o. Vzorem přímky $Z'V'$ je přímka ZW a tedy průsečík přímky ZW s rovnoběžkou se směrem s v bodě V' je bod elipsy V.



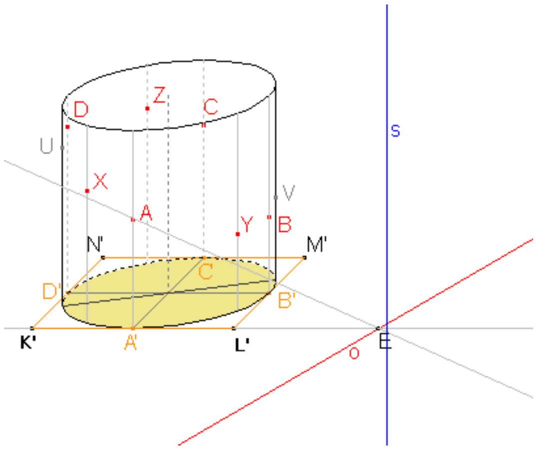
Nyní nalezneme vzor rovnoběžníku, který je opsán podstavě tělesa. Využijeme k tomu body dotyku A', B', C', D' podstavy a rovnoběžníku a jejich vzory.
Bod A získáme pomocí bodů X, X' a A', kde bod X' je obraz bodu X.
Bodem A' vedeme rovnoběžku se směrem afinity. Bod R je průsečík přímky $X'A'$ s osou o. Vzorem přímky $X'A'$ je přímka XR a tedy průsečík přímky XR s rovnoběžkou se směrem s v bodě A' je bod elipsy A.



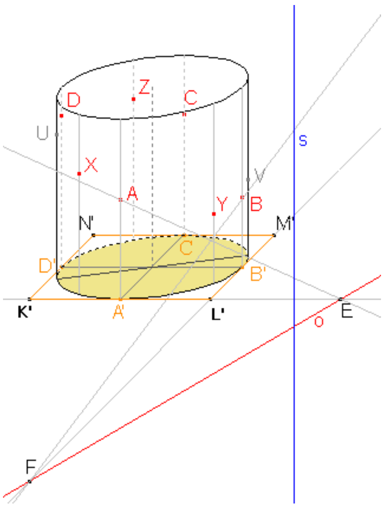
Bod B získáme pomocí bodů X, X' a B', kde bod X' je obraz bodu X.
Bodem B' vedeme rovnoběžku se směrem afinity. Bod S je průsečík přímky $X'B'$ s osou o. Vzorem přímky $X'B'$ je přímka XS a tedy průsečík přímky XS s rovnoběžkou se směrem s v bodě B' je bod elipsy B.



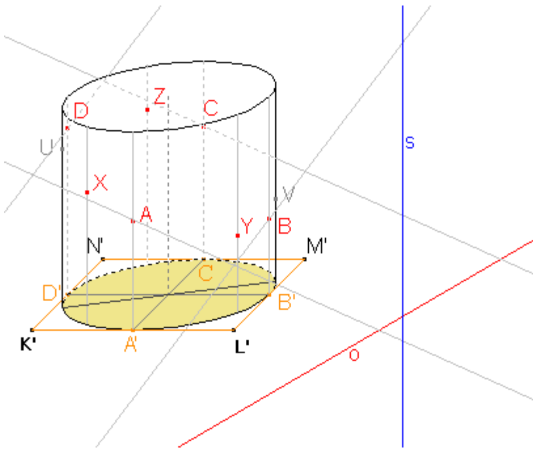
Obdobně jako body A, B nalezneme bod C (pomocí bodů X, X' a C') a bod D (pomocí bodů X, X' a D').



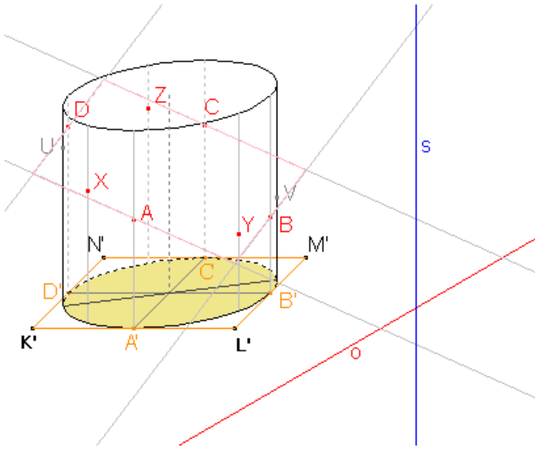
Dále sestrojíme vzor strany $K'L'$ rovnoběžníku opsaného podstavě tělesa. Bod E je průsečík přímky $K'L'$ s osou o. Vzorem přímky $K'L'$ je přímka AE. Vzor strany $K'L'$ leží na přímce AE.



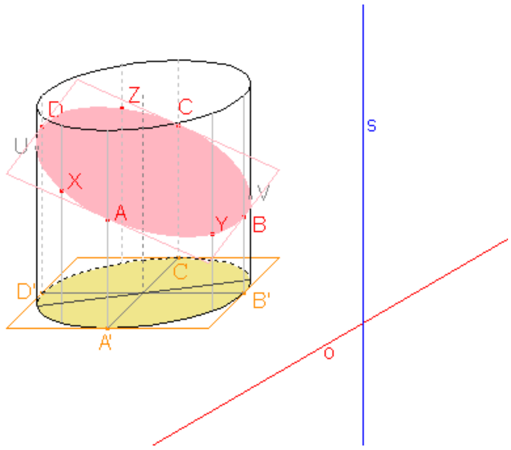
Dále sestrojíme vzor strany $L'M'$ rovnoběžníku opsaného podstavě tělesa. Bod F je průsečík přímky $L'M'$ s osou o. Vzorem přímky $L'M'$ je přímka BF. Vzor strany $L'M'$ leží na přímce BF.



Obdobně sestrojíme vzory ostatních stran rovnoběžníku opsaného podstavě tělesa.

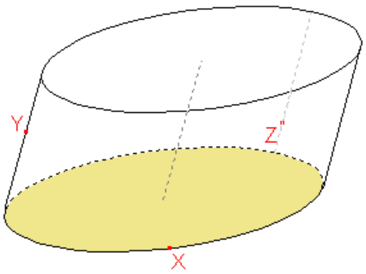


Již můžeme vyznačit rovnoběžník, který je opsaný hledané elipse, která je průsečnicí pláště daného tělesa a roviny řezu, a který je vzorem rovnoběžníku opsaného podstavě.



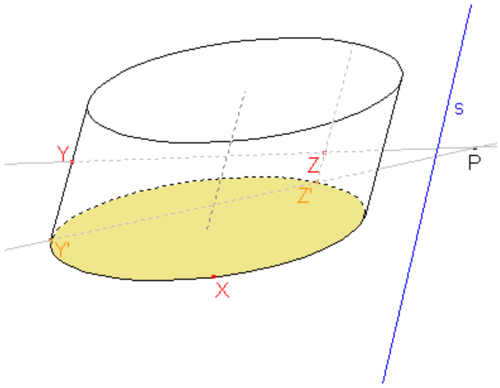
Nyní známe všechny potřebné body k sestrojení elipsy, která je průsečnicí pláště daného tělesa a roviny řezu a také body dotyku hledané elipsy a jí opsaného rovnoběžníku.

Příklad 2
Sestrojte řez kosého válce rovinou XYZ, kde X, Y, Z jsou body umístěné na plášti válce, jak je naznačeno na obrázku níže.

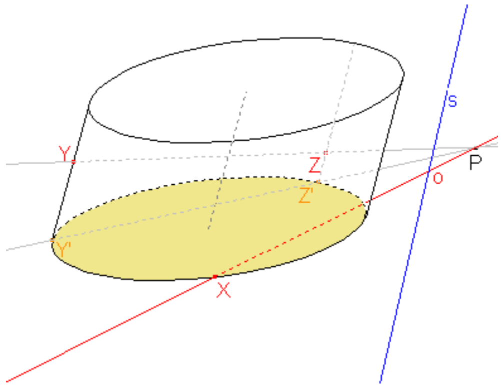


Řešení
Postup si ukážeme po krocích.

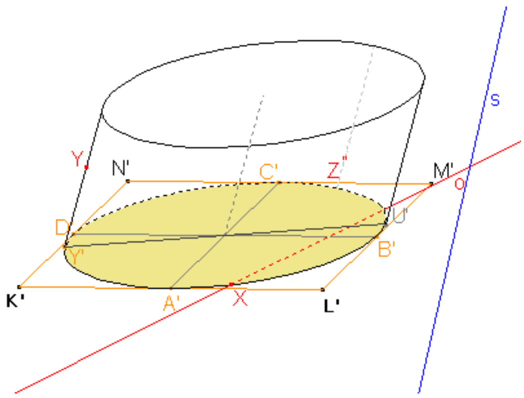
Při řešení úlohy využijeme osové afinity mezi rovinou řezu a rovinou dolní podstavy a za směr afinity s vezmeme směr osy válce.



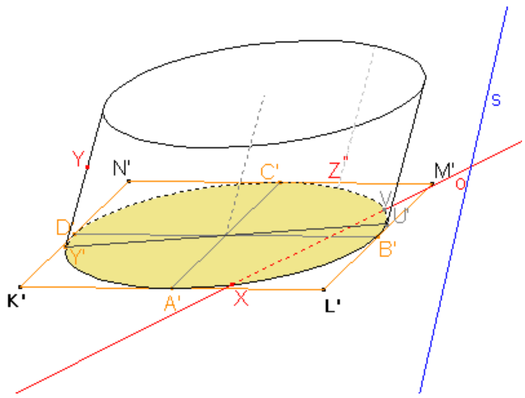
Nejprve musíme najít osu afinity, která je průsečnicí roviny dolní podstavy a roviny řezu dané body XYZ.
K sestrojení osy afinity budeme potřebovat dva body. Bod X náleží oběma rovinám, je samodružný a leží tedy i na hledané ose afinity. Druhý bod získáme pomocí bodů Y, Z.
Obrazem přímky YZ v zadané osové afinitě je přímka $Y'Z'$, protože obrazem bodu Y je bod Y' a bodu Z je bod Z'.
Průsečíkem přímky YZ a přímky $Y'Z'$ je samodružný bod P, který bude ležet na ose afinity.



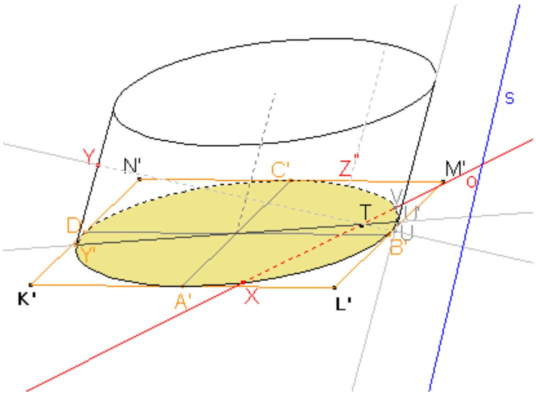
Pomocí bodů X, P již můžeme sestrojit osu afinity o.



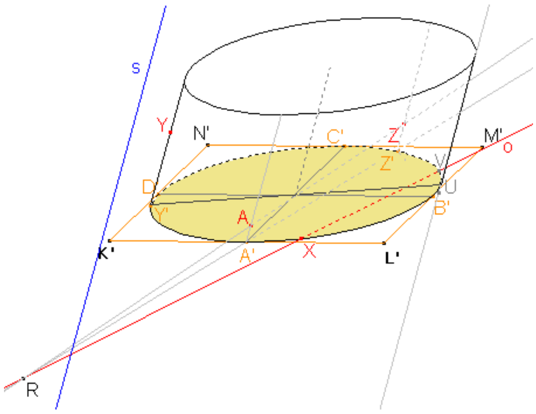
K sestrojení elipsy, která je průsečnicí pláště daného tělesa a roviny řezu, nám stačí pět bodů, pokud používáme program, který jí umí vykreslit. My si zde naznačíme, jak ji načtrtnout na papíře.
K tomu využijeme rovnoběžník opsaný podstavě tělesa a nalezneme jeho vzor, který bude opsaný hledané elipse, jež je částí řezu.
Bod U', Y' jsou vrcholy elipsy v podstavě a v nich se mění viditelnost.



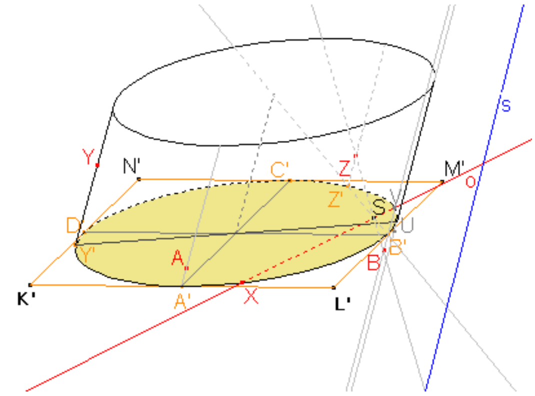
Body X, Y, Z, které určují rovinu řezu, jsou body průsečnice, protože leží na povrchu válce.
Osa afinity leží v rovině dolní podstavy tělesa a protíná hranici podstavy, proto průsečíky X, V osy afinity s hranicí dolní podstavy jsou body řezu.



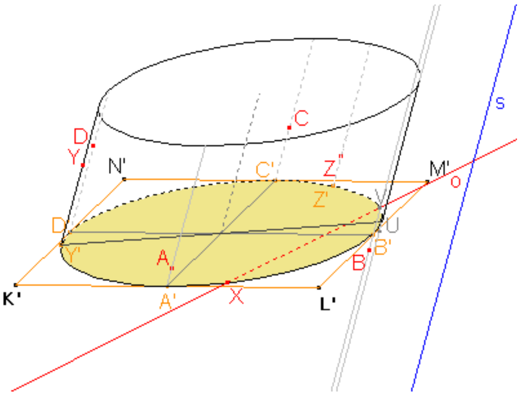
Další bod získáme pomocí bodů Y, Y' a U', kde bod Y' je obraz bodu Y.
Bodem U' vedeme rovnoběžku se směrem afinity. Bod T je průsečík přímky $Y'U'$ s osou o. Vzorem přímky $Y'U'$ je přímka YT a tedy průsečík přímky YT s rovnoběžkou se směrem s v bodě U' je bod elipsy U.



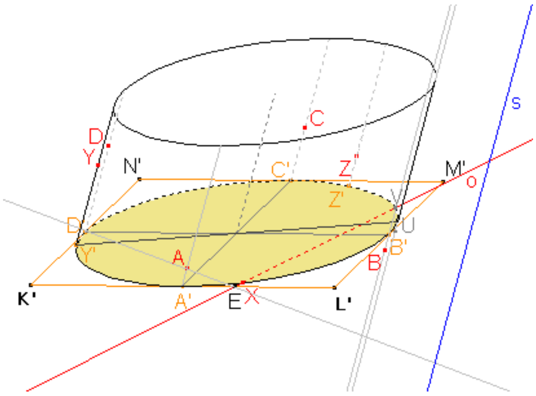
Nyní nalezneme obraz rovnoběžníku opsaného podstavě tělesa. Využijeme k tomu body dotyku A', B', C', D' podstavy a rovnoběžníku a jejich obrazy.
Bod A získáme pomocí bodů Z, Z' a A', kde bod Z' je obraz bodu Z.
Bodem A' vedeme rovnoběžku se směrem afinity. Bod R je průsečík přímky $Z'A'$ s osou o. Vzorem přímky $Z'A'$ je přímka ZR a tedy průsečík přímky ZR s rovnoběžkou se směrem s v bodě A' je bod elipsy A.



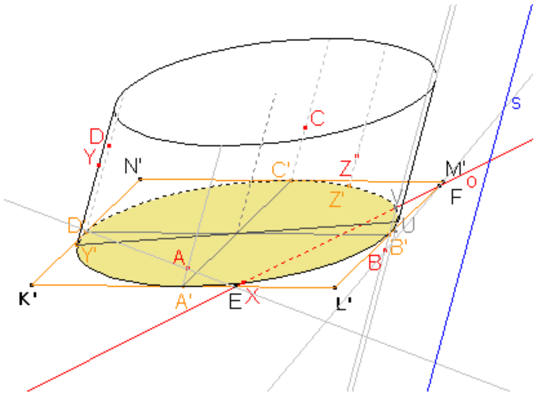
Bod B získáme pomocí bodů Z, Z' a B', kde bod Z' je obraz bodu Z.
Bodem B' vedeme rovnoběžku se směrem afinity. Bod S je průsečík přímky $Z'B'$ s osou o. Vzorem přímky $Z'B'$ je přímka ZS a tedy průsečík přímky ZS s rovnoběžkou se směrem s v bodě B' je bod elipsy B.



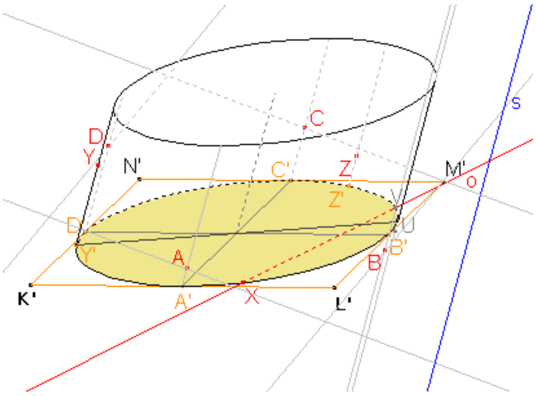
Obdobně jako body A, B nalezneme bod C (pomocí bodů Z, Z' a C') a bod D (pomocí bodů Z, Z' a D').



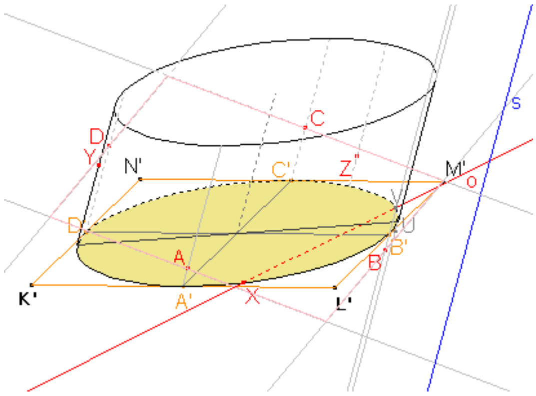
Dále sestrojíme vzor strany *K'L'* rovnoběžníku opsaného podstavě tělesa. Bod *E* je průsečík přímky *K'L'* s osou *o*. Vzorem přímky *K'L'* je přímka *AE*. Vzor strany *K'L'* leží na přímce *AE*.



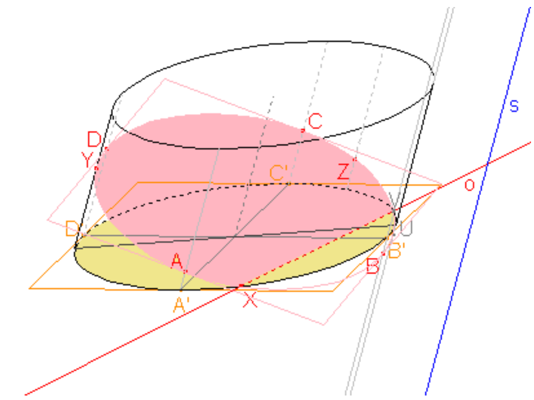
Dále sestrojíme vzor strany *L'M'* rovnoběžníku opsaného podstavě tělesa. Bod *F* je průsečík přímky *L'M'* s osou *o*. Vzorem přímky *L'M'* je přímka *BF*. Vzor strany *L'M'* leží na přímce *BF*.



Obdobně sestrojíme vzory ostatních stran rovnoběžníku opsaného podstavě tělesa.



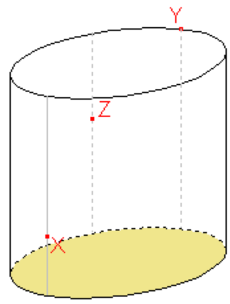
Již můžeme vyznačit rovnoběžník, který je opsaný hledané elipse, která je průsečnicí pláště daného tělesa a roviny řezu, a který je vzorem rovnoběžníku opsaného podstavě.



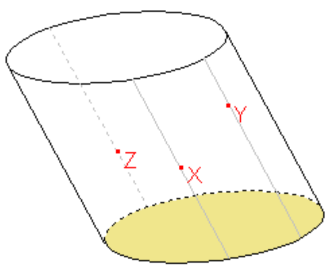
Nyní známe všechny potřebné body k sestrojení části elipsy, která je průsečnicí pláště daného tělesa a roviny řezu a také body dotyku hledané elipsy a jí opsaného rovnoběžníku.

Úlohy

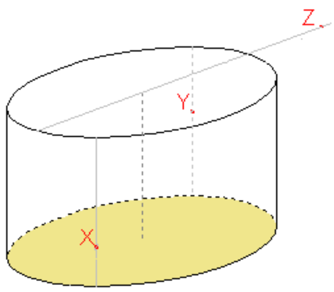
1. Sestrojte řez rotačního válce rovinou XYZ, kde X, Y, Z jsou body umístěné na plášti válce, jak je naznačeno na obrázku níže.



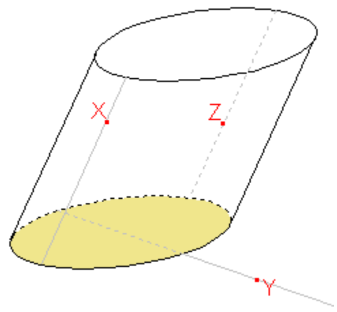
2. Sestrojte řez kosého válce rovinou XYZ, kde X, Y, Z jsou body umístěné na plášti válce, jak je naznačeno na obrázku níže.



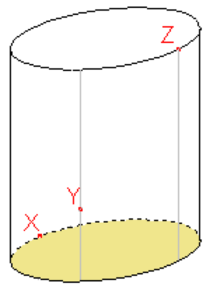
3. Sestrojte řez rotačního válce rovinou XYZ, kde X, Y jsou body umístěné na plášti válce a bod Z leží v rovině horní podstavy, jak je naznačeno na obrázku níže.



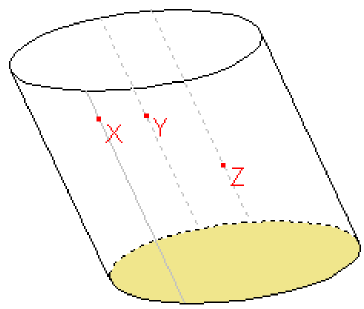
4. Sestrojte řez kosého válce rovinou XYZ, kde X, Y jsou body umístěné na plášti válce a bod Y leží v rovině dolní podstavy, jak je naznačeno na obrázku níže.



5. Sestrojte řez rotačního válce rovinou XYZ, kde X, Y, Z jsou body umístěné na plášti válce, jak je naznačeno na obrázku níže.

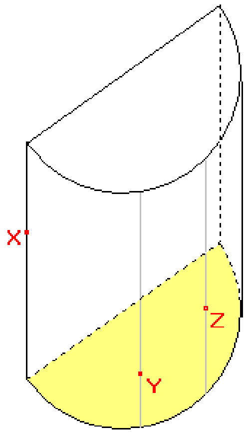


6. Sestrojte řez kosého válce rovinou XYZ, kde X, Y, Z jsou body umístěné na plášti válce, jak je naznačeno na obrázku níže.



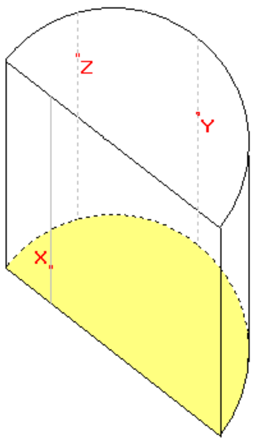
7. Sestrojte řez kolmého půlválce rovinou XYZ, kde X, Y, Z jsou body umístěné na plášti půlválce, jak je naznačeno na obrázku níže.

   (Půlválec je část válce, která vznikne rozdělením válce rovinou kolmou na podstavu, a která obsahuje osu válce.)

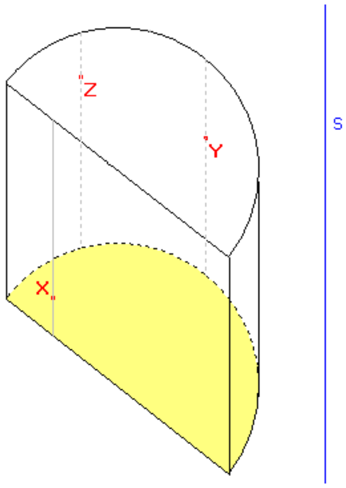


8. Sestrojte řez kolmého půlválce rovinou XYZ, kde X, Y, Z jsou body umístěné na plášti půlválce, jak je naznačeno na obrázku níže.

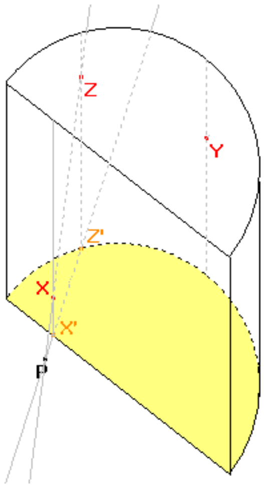
   (Půlválec je část válce, která vznikne rozdělením válce rovinou kolmou na podstavu, a která obsahuje osu válce.)



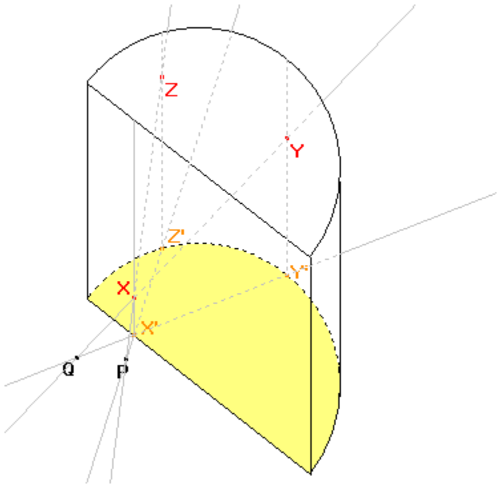
Nyní si ukážeme řešení alespoň jedné úlohy. Vezměme například úlohu 8. Postup si ukážeme po krocích.



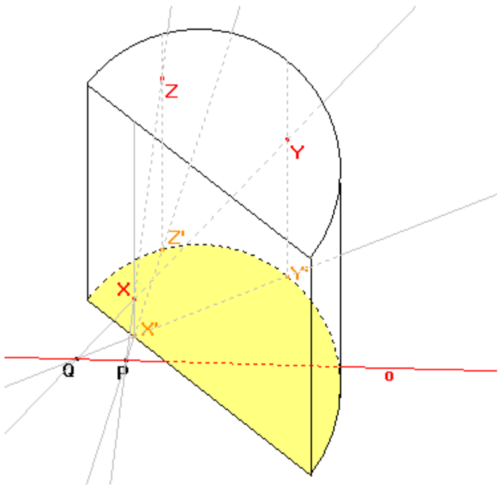
Při řešení úlohy využijeme osové afinity mezi rovinou řezu a rovinou dolní podstavy a za směr afinity s vezmeme směr osy válce.



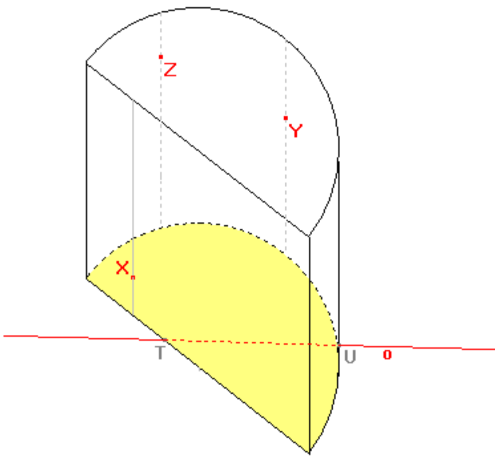
Nejprve musíme najít osu afinity, která je průsečnicí roviny dolní podstavy a roviny řezu dané body XYZ. K sestrojení osy afinity budeme potřebovat dva body. Jeden bod získáme pomocí bodů X, Z.
Obrazem přímky XZ je přímka $X'Z'$, protože obrazem bodu X je bod X' a bodu Z je bod Z'. Průsečíkem přímky XZ a přímky $X'Z'$ je samodružný bod P, který bude ležet na ose afinity.



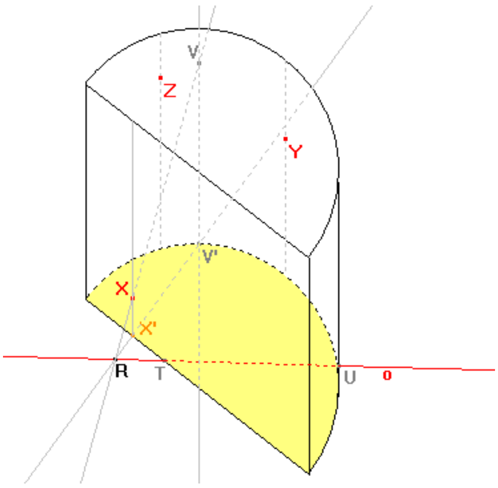
Druhý bod získáme pomocí bodů X, Y.
Obrazem přímky XY v zadané osové afinitě je přímka $X'Y'$, protože obrazem bodu X je bod X' a bodu Y je bod Y'. Průsečíkem přímky XY a přímky $X'Y'$ je samodružný bod Q, který bude ležet na ose afinity.



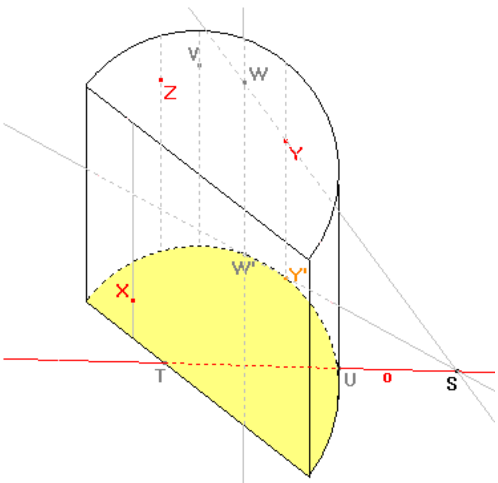
Pomocí bodů P, Q již můžeme sestrojit osu afinity o.



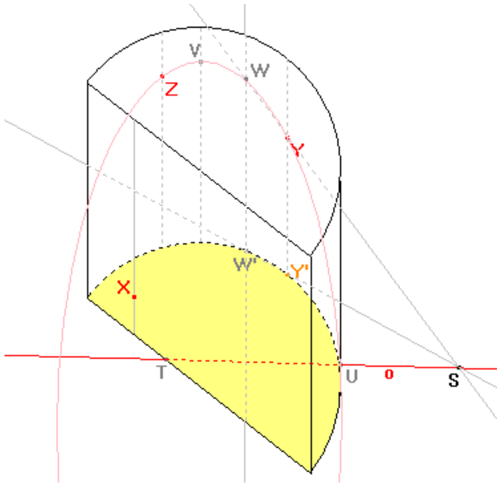
K sestrojení elipsy, jejíž část je průsečnicí pláště daného tělesa a roviny řezu, nám stačí pět bodů. Body Y, Z jsou body průsečnice, protože leží na povrchu válce.
Osa afinity leží v rovině dolní podstavy tělesa a protíná hranici podstavy, proto průsečíky T, U osy afinity s hraniční kružnicí dolní podstavy jsou body řezu a současně TU je hranicí řezu.



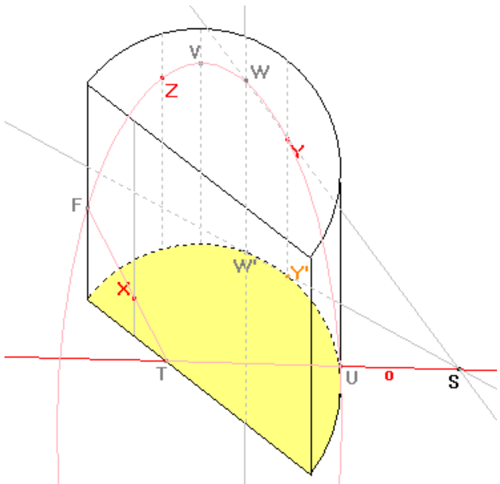
Další bod získáme pomocí bodů X, X' a V', kde bod X' je obraz bodu X a bod V' zvolíme libovolně na hranici dolní podstavy tělesa.
Bodem V' vedeme rovnoběžku se směrem afinity. Bod R je průsečík přímky $X'V'$ s osou o. Vzorem přímky $X'V'$ je přímka XR a tedy průsečík přímky XR s rovnoběžkou se směrem s v bodě V' je bod elipsy V.



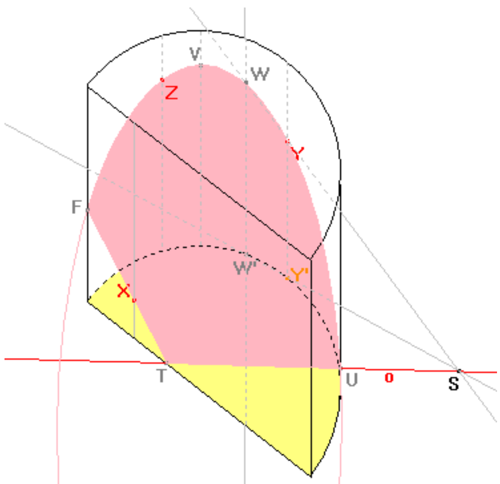
Pátý bod získáme pomocí bodů Y, Y' a W', kde bod Y' je obraz bodu Y a bod W' zvolíme libovolně na hranici dolní podstavy tělesa.
Bodem W' vedeme rovnoběžku se směrem afinity. Bod S je průsečík přímky $Y'W'$ s osou o. Vzorem přímky $Y'W'$ je přímka YS a tedy průsečík přímky YS s rovnoběžkou se směrem s v bodě W' je bod elipsy W.



Pomocí bodů Y, Z, U, V, W již můžeme sestrojit elipsu, jejíž část bude průsečnicí pláště daného tělesa a roviny řezu.



Ještě potřebujeme najít hranici řezu v „přední“ stěně. Touto hranicí je úsečka FT, protože body F, T leží ve stejné rovině a bod F je průsečík elipsy a „přední“ stěny.



Nyní známe vše potřebné k sestrojení řezu daného tělesa.

6.3 Úlohy trochu jinak

V kapitolách Řezy hranolů a Řezy válce jsme ve všech příkladech a úlohách používali osovou afinity mezi rovinou dolní podstavy a rovinou řezu a za směr jsme brali směr bočních hran, resp. směr osy válce.
Nyní si ukážeme příklady a úlohy, v nichž budeme používat různé zadání osové

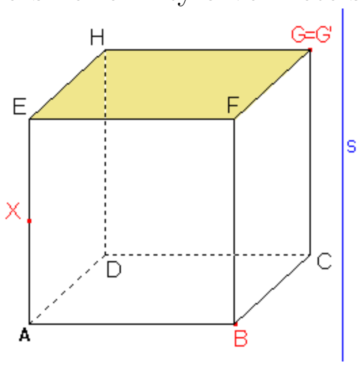
afinity. V některých případech může být výhodné vzít osovou afinitu mezi rovinou řezu a jinou rovinou než rovinou dolní podstavy a vůči nim příslušný směr afinity, protože nám to může zjednodušit a zrychlit postup řešení.

Při řešení takovýchto úloh si také procvičíme prostorovou představivost.

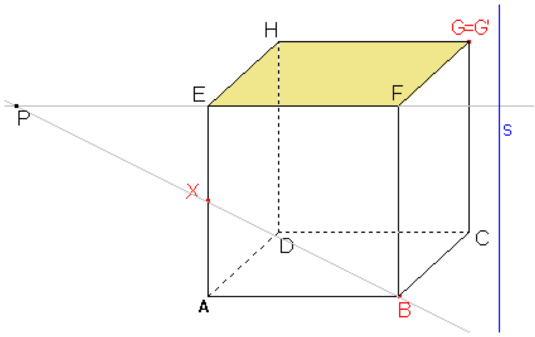
Následující příklady a úlohy 1 až 4, 9 a 10 již byly vyřešeny v některé z kapitol Řezy hranolů, Řezy válce, a proto za zadáním každé z nich je v závorce napsáno, kde tento příklad najdete. Můžete tedy porovnat, které řešení úlohy je rychlejší či jednodušší.

V úlohách 12 až 15 si můžete vyzkoušet jiný typ úloh, kdy hledáme řez tělesa rovinou, která je rovnoběžná se zadanou rovinou a prochází zadaným bodem.
K řešení těchto úloh využijete nejen znalost stereometrických vět a jejich důsledků.

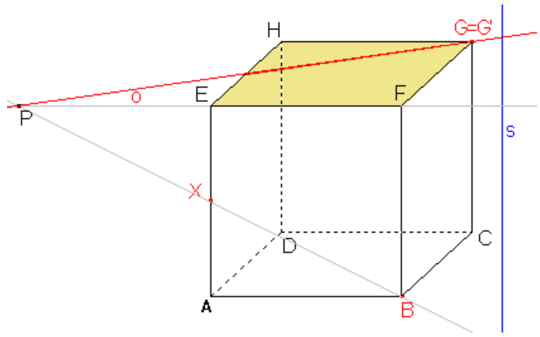
Příklad 1
Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou BGX, kde bod X je střed hrany AE. (Řezy hranolů, Příklad 1)
Při řešení využijte osové afinity mezi rovinou řezu a rovinou horní podstavy, za směr afinity s vezměte směr svislých bočních hran.



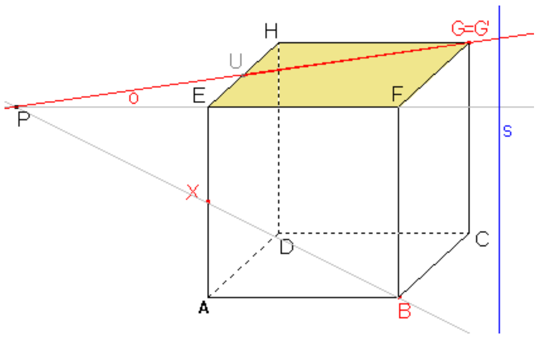
Řešení
Postup si ukážeme po krocích.



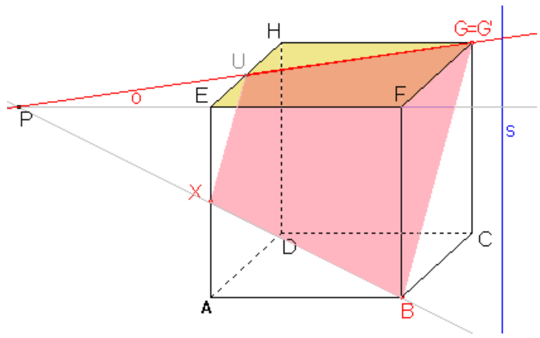
Nejprve musíme najít osu afinity, která je průsečnicí roviny horní podstavy a roviny řezu dané body XYZ.
K sestrojení osy afinity budeme potřebovat dva body. Bod G náleží oběma rovinám, je samodružný a leží tedy i na hledané ose afinity.
Druhý bod získáme pomocí bodů X, B. Obrazem přímky XB v zadané osové afinitě je přímka EF, protože obrazem bodu X je bod E a bodu B je bod F. Průsečíkem přímky XB a přímky EF je samodružný bod P, který bude ležet na ose afinity.



Pomocí bodů G, P již můžeme sestrojit osu afinity o.



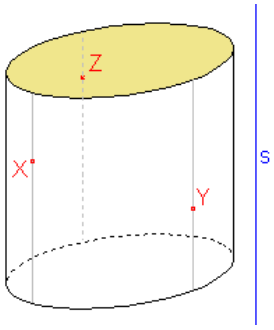
Osa afinity leží v rovině horní podstavy tělesa a protíná hrany podstavy, proto průsečíky G, U osy afinity s hranami horní podstavy jsou body řezu.



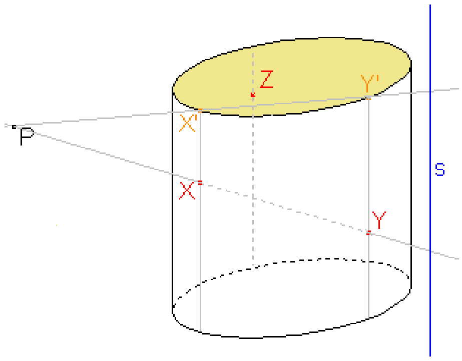
Nyní známe všechny vrcholy mnohoúhelníku, který je řezem, strany tohoto mnohoúhelníku jsou hranicemi řezu v příslušných stěnách.

Příklad 2

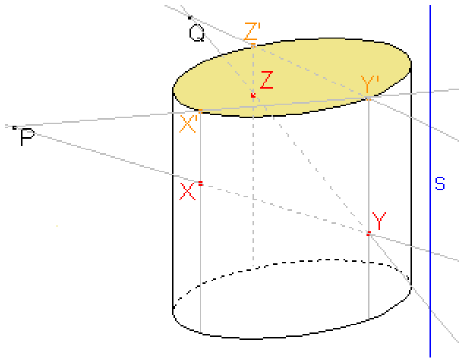
Sestrojte řez rotačního válce rovinou XYZ, kde X, Y, Z jsou body umístěné na plášti válce, jak je naznačeno na obrázku níže. (Řezy válce, Příklad 1)
Při řešení využijte osové afinity mezi rovinou řezu a rovinou horní podstavy, za směr afinity s vezměte směr osy válce.



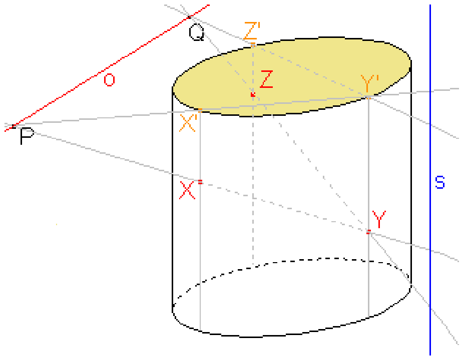
Řešení
Postup si ukážeme po krocích.



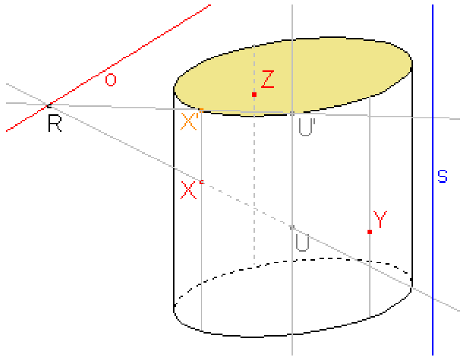
Nejprve musíme najít osu afinity, která je průsečnicí roviny horní podstavy a roviny řezu dané body *XYZ*.
K sestrojení osy afinity budeme potřebovat dva body. Jeden bod získáme pomocí bodů *X*, *Y*.
Obrazem přímky *XY* je přímka *X'Y'*, protože obrazem bodu *X* je bod *X'* a bodu *Y* je bod *Y'*. Průsečíkem přímky *XY* a přímky *X'Y'* je samodružný bod *P*, který bude ležet na ose afinity.



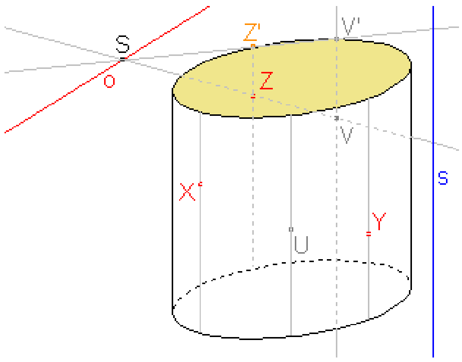
Druhý bod osy získáme pomocí bodů *Y*, *Z*.
Obrazem přímky *YZ* je přímka *Y'Z'*, protože obrazem bodu *Y* je bod *Y'* a bodu *Z* je bod *Z'*. Průsečíkem přímky *YZ* a přímky *Y'Z'* je samodružný bod *Q*, který bude ležet na ose afinity.



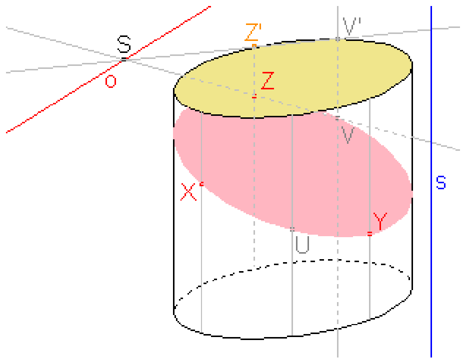
Pomocí bodů P, Q již můžeme sestrojit osu afinity o.



K sestrojení elipsy, která je průsečnicí pláště daného tělesa a roviny řezu, nám stačí pět bodů. Body X, Y, Z, které určují rovinu řezu, jsou body průsečnice, protože leží na povrchu válce.
Další bod získáme pomocí bodů X, X' a U', kde bod X' je obraz bodu X a bod U' zvolíme libovolně na hranici horní podstavy tělesa.
Bodem U' vedeme rovnoběžku se směrem afinity. Bod R je průsečík přímky $X'U'$ s osou o. Vzorem přímky $X'U'$ je přímka XR a tedy průsečík přímky XR s rovnoběžkou se směrem s v bodě U' je bod elipsy U.



Pátý bod získáme pomocí bodů Z, Z' a V', kde bod Z' je obraz bodu Z a bod V' zvolíme libovolně na hranici horní podstavy tělesa.
Bodem V' vedeme rovnoběžku se směrem afinity. Bod S je průsečík přímky $Z'V'$ s osou o. Vzorem přímky $Z'V'$ je přímka ZS a tedy průsečík přímky ZS s rovnoběžkou se směrem s v bodě V' je bod elipsy V.

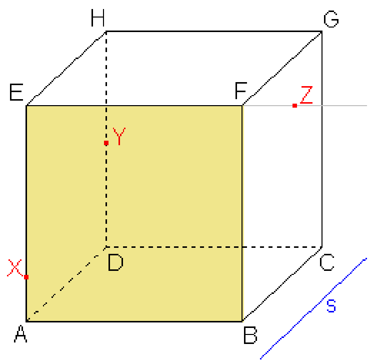


Nyní známe všechny potřebné body k sestrojení elipsy, která je průsečnicí pláště daného tělesa a roviny řezu.

Úlohy

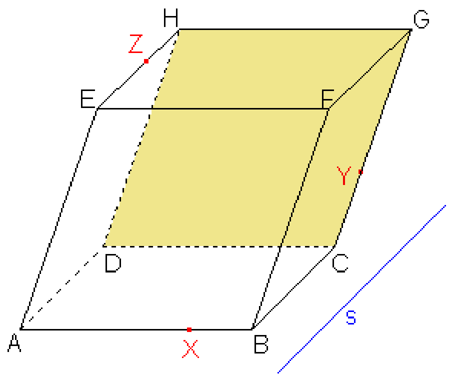
1. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou XYZ, kde bod X leží na hraně AE, bod Y leží na hraně DH, bod Z leží na polopřímce EF za bodem F. (Řezy hranolů, Úloha 1)

   Při řešení využijte osové afinity mezi rovinou řezu a rovinou přední stěny, za směr afinity vezměte dvojici bodů DA.



2. Sestrojte řez kosého čtyřbokého hranolu $ABCDEFGH$, jehož podstavou je čtverec, rovinou XYZ, kde bod X leží na hraně AB, bod Y leží na hraně CG, bod Z leží na hraně EH. (Řezy hranolů, Úloha 6)

   Při řešení využijte osové afinity mezi rovinou řezu a rovinou zadní stěny, za směr afinity vezměte uspořádanou dvojici bodů ZH.



3. Sestrojte řez kvádru $ABCDEFGH$ rovinou CXY, kde pozice bodů X, Y jsou dány dělicím poměrem (AEX) = -1/3, (GHY) = -4. (Řezy hranolů, Úloha 2)

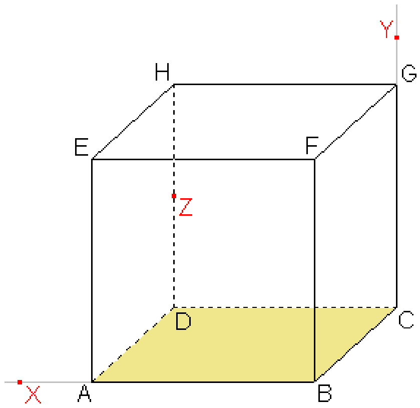
   Při řešení využijte osové afinity mezi rovinou řezu a rovinou levé boční stěny, za směr afinity vezměte uspořádanou dvojici bodů CD.

4. Sestrojte řez kosého čtyřbokého hranolu $ABCDEFGH$, jehož podstavou je obdélník, rovinou XYZ, kde pozice bodů X, Y, Z jsou dány dělicím poměrem (AEX) = -3/5, (CGY) = -7/3, (GHZ) = 4. (Řezy hranolů, Úloha 3)

Při řešení využijte osové afinity mezi rovinou řezu a rovinou pravé boční stěny, za směr afinity vezměte uspořádanou dvojici bodů ZG.

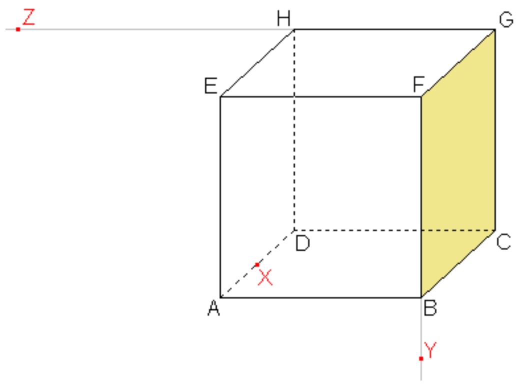
5. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou XYZ, kde bod X leží na polopřímce BA za bodem A, bod Y leží na polopřímce CG za bodem G a bod Z leží na hraně DH.

   Při řešení využijte osové afinity mezi rovinou řezu a rovinou dolní podstavy, za směr afinity vezměte uspořádanou dvojici bodů ZD.



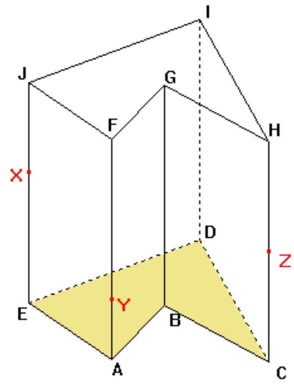
6. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou XYZ, kde bod X leží na hraně AD, bod Y leží na polopřímce FB za bodem B, bod Z leží na polopřímce GH za bodem H.

   Při řešení využijte osové afinity mezi rovinou řezu a rovinou pravé boční stěny, za směr afinity vezměte uspořádanou dvojici bodů ZG.



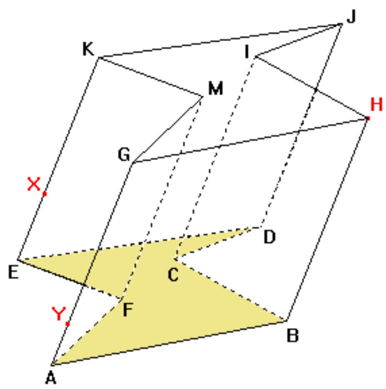
7. Sestrojte řez kolmého nekonvexního pětibokého hranolu $ABCDEFGHIJ$ rovinou XYZ, kde bod X leží na hraně EJ, bod Y leží na hraně AF, bod Z leží na hraně CH.

   Při řešení využijte osové afinity mezi rovinou řezu a rovinou dolní podstavy, za směr afinity vezměte směr bočních hran.



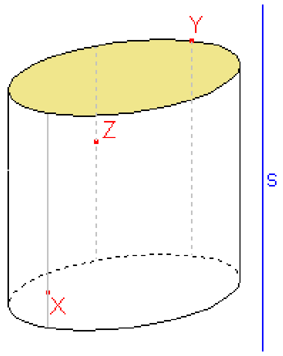
8. Sestrojte řez kosého nekonvexního šestibokého hranolu $ABCDEFGHIJKM$ rovinou HXY, kde bod X leží na hraně EK, bod Y leží na hraně AG.

   Při řešení využijte osové afinity mezi rovinou řezu a rovinou dolní podstavy, za směr afinity vezměte směr bočních hran.



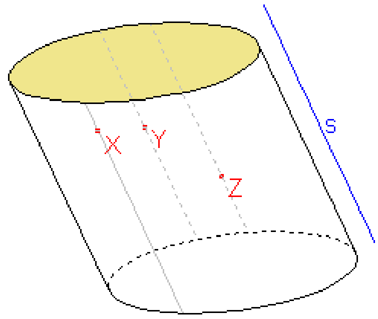
9. Sestrojte řez rotačního válce rovinou XYZ, kde X, Y, Z jsou body umístěné na plášti válce, jak je naznačeno na obrázku níže. (Řezy válce, Úloha 1)

   Při řešení využijte osové afinity mezi rovinou řezu a rovinou horní podstavy, za směr afinity vezměte směr osy válce.

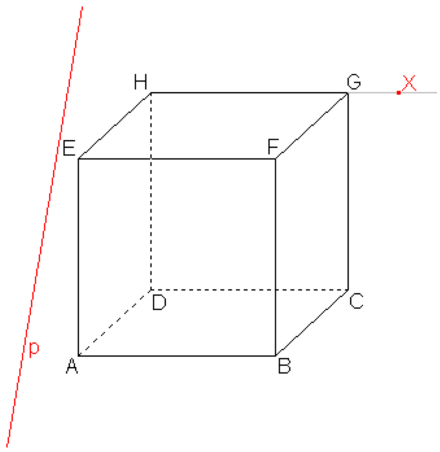


10. Sestrojte řez kosého válce rovinou XYZ, kde X, Y, Z jsou body umístěné na plášti válce, jak je naznačeno na obrázku níže. (Řezy válce, Úloha 6)

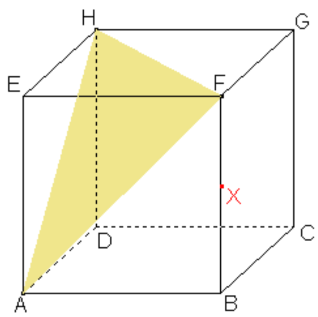
Při řešení využijte osové afinity mezi rovinou řezu a rovinou horní podstavy, za směr afinity vezměte směr osy válce.



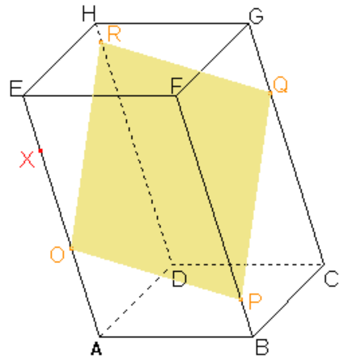
11. Sestrojte řez krychle rovinou, která je určena přímkou p ležící v rovině levé boční stěny, a bodem X.



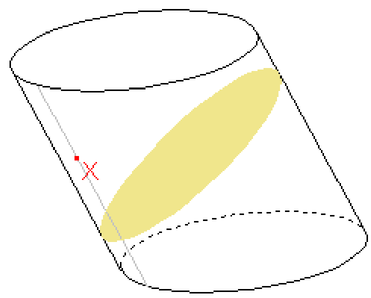
12. Sestrojte řez krychle rovinou, která prochází bodem X a je rovnoběžná s rovinou AFH.



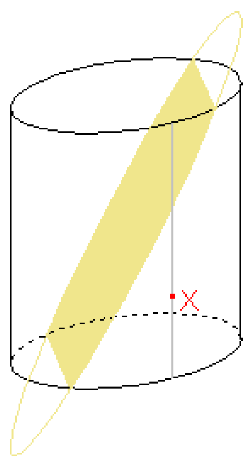
13. Sestrojte řez kosého čtyřbokého hranolu rovinou, která prochází bodem X a je rovnoběžná s rovinou PQR.



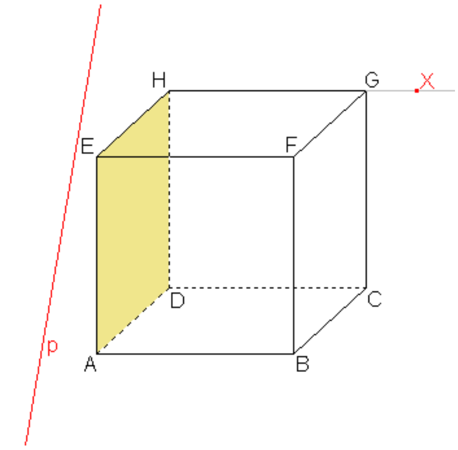
14. Sestrojte řez kosého válce rovinou, která prochází bodem X a je rovnoběžná s danou rovinou, viz obrázek.



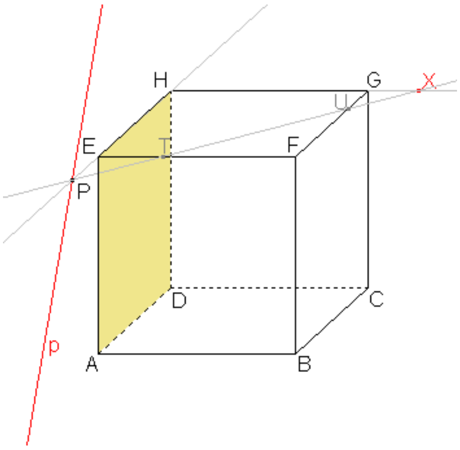
15. Sestrojte řez rotačního válce rovinou, která prochází bodem X a je rovnoběžná s danou rovinou, viz obrázek.



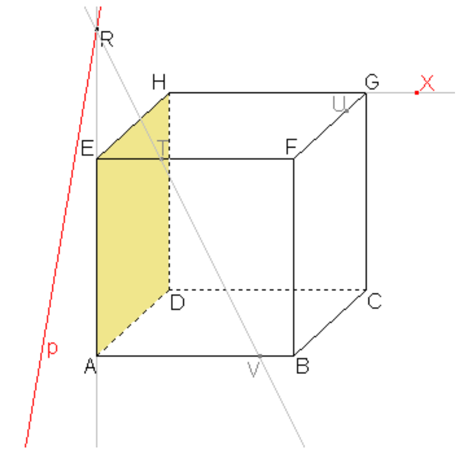
Nyní si ukážeme řešení alespoň jedné úlohy. Vezměme například úlohu 11. Postup si ukážeme po krocích.



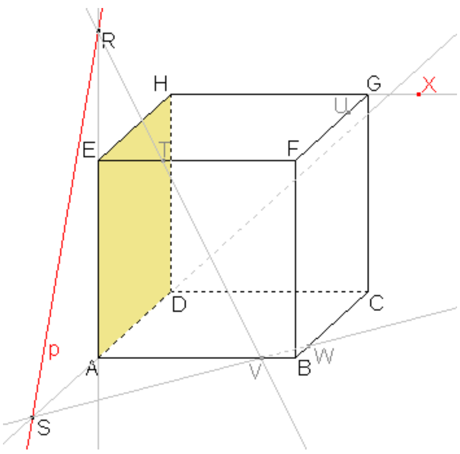
Při řešení využijeme osové afinity mezi rovinou řezu a rovinou, ve které leží přímka p, za směr afinity vezměte uspořádanou dvojici bodů XH.
Přímka p leží jak v rovině řezu, tak i rovině boční stěny, je to jejich průsečnice a tudíž přímka p je osou afinity mezi rovinou řezu a rovinou levé boční stěny.



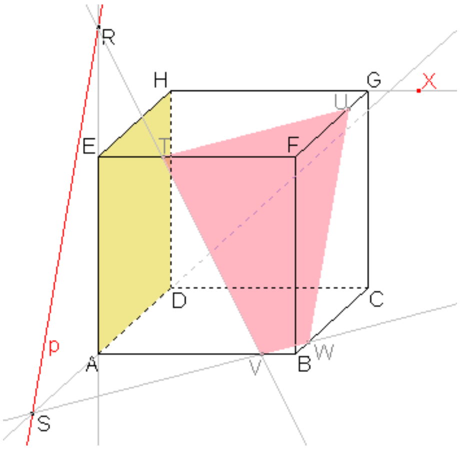
Sestrojíme body řezu T, U na hranách EF a FG. Bod P je průsečík přímky EH s osou p. Vzorem přímky EH je přímka XP a tedy průsečíky přímky XP s hranami EF a FG jsou body řezu T, U.



Sestrojíme bod řezu V na hraně AB. Bod R je průsečík přímky AE s osou p. Vzorem přímky AE je přímka TR a tedy průsečík přímky TR s hranou AB je bod řezu V.



Sestrojíme bod řezu W na hraně BC. Bod S je průsečík přímky AD s osou p. Vzorem přímky AD je přímka VS a tedy průsečík přímky VS s hranou BC je bod řezu W.



Nyní známe všechny vrcholy mnohoúhelníku, který je řezem, a strany tohoto mnohoúhelníku jsou hranicemi řezu v příslušných stěnách.

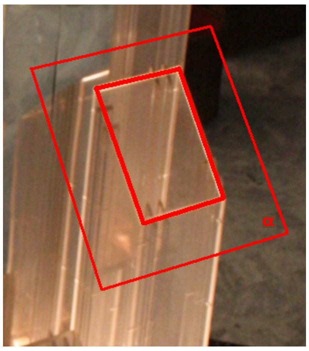
Kapitola 7

Využití řezů těles rovinou v praxi

Řezy těles rovinou mají celou řadu využití. Můžeme se s nimi setkat například ve stavebnictví, strojírenství, architektuře, v deskriptivní geometrii.

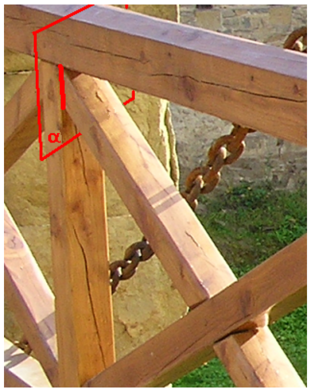
Na následujících obrázcích se můžete podívat na možné použití řezů těles rovinou v praxi.

Řez tělesa rovinou v architektuře.



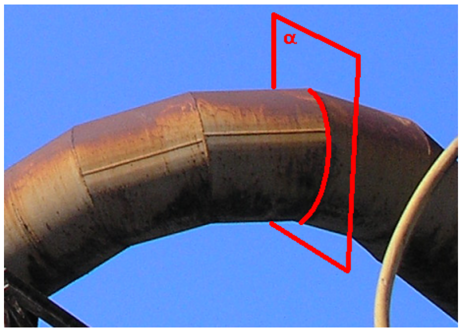
Jedná se o řez čtyřbokého hranolu rovinou.

Řez tělesa rovinou použitý ke konstrukci zábradlí z trámů.



Příslušné „vnitřní“ trámy se musely nejprve říznout rovinou, aby je bylo možné zapříčit mezi dva svislé trámy. Jedná se o řezy čtyřbokých hranolů rovinou.

Řez tělesa rovinou použitý při konstrukci potrubí.



Ohyb roury se skládá z několika kusů válců říznutých rovinami.

Řez tělesa rovinou se také používá ke složitějším konstrukcím, jako je například budova na obrázku.

Závěr

Tato práce byla pojata jako elektronický výukový materiál ke stereometrii pro studenty středních škol a jejich učitele, tudíž je tomu přizpůsoben její obsah a složitost. V práci byl názorně vysvětlen dělicí poměr a rovnoběžné promítání, které je v této práci základem pro zavedení osové afinity mezi rovinami. Dále byla definována a popsána osová afinita mezi rovinami, v rovině a mezi kružnicí a elipsou, která je pro mnohé studenty středních škol zcela neznámým pojmem. Její použití je zde ukázáno na několika příkladech o řezech těles rovinou. Studenti se tyto úlohy učí řešit převážně s využitím stereometrických vět a jejich důsledků, ale v této práci je poukázáno na řešení pomocí osové afinity mezi rovinami, které může být pro některé úlohy vhodnější a v některých případech je obtížné je vyřešit bez ní. V tomto učebním textu je sada úloh tohoto typu k procvičení, ve kterých jsou dána různá tělesa, například různé typy hranolů nebo válců, s možností zobrazení řešení a postupu krok za krokem. Úlohy jsou také doplněny o aplety, jenž umožnují se na řešení podívat z různých úhlů a mohou studentovi pomoci lépe si představit prostorovou situaci dané úlohy. Aplety byly vytvořeny v aplikaci Cabri 3D a k jejich použití je třeba mít nainstalován alespoň plugin, který si můžete stáhnout na oficiálních stránkách Cabri: *http://www.cabri.com/*.

Hlavním účelem této práce bylo především rozšíření současného standardního učiva z oblasti stereometrie a dále pomoci zlepšit prostorovou představivost studentů. Také učitelé mohou použít tento materiál, protože obsahuje i úlohy, které nejsou v současných učebnicích stereometrie. Dále pro ně byly vytvořeny pracovní listy, které si mohou vytisknout a následně použít při výuce. Důraz byl také kladen na interaktivnost, tudíž je celá práce vypracovaná jako internetová stránka, k níž je volný přístup a její používání je velmi intuitivní. Tato práce bude vystavena na webových stránkách Katedry didaktiky matematiky MFF UK v Praze.

V celém textu jsou obrázky vytvořeny v aplikaci Cabri II Plus. Aplikace je určena pro zobrazení geometrických objektů v rovině, což způsobilo obtíže při vykreslování těles a jejich viditelnosti. Její použití však bylo účelné a to z důvodu, aby bylo studentům ukázáno řešení úloh tak, jak by je řešili pravítkem a kružítkem na papír.

Značení a pojmy

A, B, C...	body *A, B, C...*
a, b, c...	přímky *a, b, c...*
α, β, γ, ...	roviny α, β, γ, ...
$\leftrightarrow ABC$	rovina určená třemi různými body *A, B, C*, které neleží v jedné přímce
$\lvert AB \rvert$	vzdálenost bodů *A, B*, resp. délka úsečky *AB*
$p \parallel q$	přímka p je rovnoběžná s přímkou q
$p \nparallel q$	přímka p není rovnoběžná s přímkou q
$p \perp q$	přímka p je kolmá k přímce q
$p \not\perp q$	přímka p není kolmá k přímce q
$p \times q$	přímka p je různoběžná s přímkou q
$A \in p$	bod A leží na přímce p
$A \notin p$	bod A neleží na přímce p
$A \in \alpha$	bod A leží v rovině α
$A \notin \alpha$	bod A neleží v rovině α
$p \parallel \alpha$	přímka p je rovnoběžná s rovinou α
$p \nparallel \alpha$	přímka p není rovnoběžná s rovinou α
$p \perp \alpha$	přímka p je kolmá na rovinu α
$p \not\perp \alpha$	přímka p není kolmá na rovinu α
kolineární body	body ležící v jedné přímce
zobrazení Z v rovině	předpis, který každému bodu X z roviny přiřazuje právě jeden bod *X'* z téže roviny; bod X se nazývá vzor, bod *X'* jeho obraz
prosté zobrazení v rovině	zobrazení, pro které platí, že pro každé dva různé body *X, Y* v rovině jsou jejich obrazy *X', Y'* také dva různé body
samodružný bod	bod, který se při daném zobrazení zobrazí sám na sebe; vzor a obraz splývají
odchylka dvou přímek v rovině	velikost ostrého, pravého nebo nulového úhlu, který má vrchol v libovolném bodě prostoru a jehož ramena jsou rovnoběžná s danými přímkami

Literatura

[1] Pomykalová E. (1997): Matematika pro Gymnázia: stereometrie. *Prometheus, Praha.*

[2] Kadlecová L. (2008): Webová aplikace pro výuku stereometrie *rukopis.*

[3] Kadleček J. (1996): Geometrie v rovině a v prostoru pro střední školy. *Prometheus, Praha.*

[4] Kraemer E. (1991): Zobrazovací metody: promítání rovnoběžné. I,II.díl. *Státní pedagogické nakladatelství, Praha.*

[5] Drs L. (1994): Deskriptivní geometrie pro střední školy I. *Prometheus, Praha.*

[6] Medek V., Šedivý O. (1987): Deskriptivní geometrie pro gymnázia. *Státní pedagogické nakladatelství, Praha.*

Nakládání s prací

Souhlasím s vystavením své práce na webových stránkách Katedry didaktiky matematiky MFF UK v Praze. Dále souhlasím s jejími pozdějšími úpravami za účelem jejího zapojení do struktury matematického portálu, který vznikne z této a podobných diplomových prací. Portál vytvoří a bude spravovat právě a jedině Katedra didaktiky matematiky MFF UK, či osoba jí pověřená.

Kristýna Jurczyková