UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Diplomová práce

Origami jako didaktické prostředí v matematickém vzdělávání

Origami as a Learning Environment in Mathematics Education

Autor: Jana Boháčová

Vedoucí práce: PhDr. Filip Roubíček, PhD.

Praha 2009

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá problematikou origami jako didaktického prostředí v matematickém vzdělávání. Práce má dva hlavní cíle, a to ukázat možnosti origami jako didaktického prostředí v některých oblastech školské matematiky, zejména konstrukční a početní geometrie, a navrhnout náměty na využití origami ve vyučování matematice na druhém stupni základní školy a střední škole.

Práce obsahuje stručný popis historie a geometrických axiomů origami. Dále jsou v ní uvedeny výhody a úskalí využití origami ve vzdělávání a možnosti využití origami v matematickém vzdělávání na různých stupních škol. Stěžejní částí práce je popis a didaktický rozbor úloh vycházejících ze skládání rovnostranného trojúhelníku a mnohostěnů; některé z těchto úloh jsou převzaté, některé jsou vlastní. Praktický význam pro výuku mají rovněž uvedená metodická doporučení pro práci v prostředí origami v rámci matematického vzdělávání, která vycházejí především z vlastních zkušeností s užitím origami ve výuce.

Abstract

The thesis deals with origami as a learning environment in mathematics education. The two main aims of the thesis are to show the possibilities of using origami in various areas of mathematics teaching and learning, especially in synthetic geometry and calculations in geometry, and to suggest specific origami-based activities for secondary education.

First, origami is introduced in its historical context and its geometrical axioms are described. Further, advantages and difficulties of using origami in mathematics education are discussed, with respect to the type and level of school. The fundamental part of the thesis consists of description and didactical analysis of tasks based on folding of an equilateral triangle and various polyhedra. Some of these tasks are adapted from other resources, some were designed by the author. Based on direct experience with employing origami-based tasks in different classrooms, methodological recommendations are added to the individual analyses, facilitating the practical usage of the thesis.

Děkuji PhDr. Filipu Roubíčkovi, PhD. za odborné vedení diplomové práce, především za čas, který vedení věnoval a za podnětné připomínky, které vedly ke zvýšení úrovně práce.

Velký dík patří také mému manželovi za technickou pomoc při úpravě práce a tvorbě obrázků.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jen uvedených pramenů a literatury.

Praha, 29. června 2009

Jana Boháčová

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Diplomová práce se zabývá problematikou origami jako didaktického prostředí v matematickém vzdělávání. Hlavním důvodem k volbě tohoto tématu byla původně skutečnost, že jsem chtěla zjistit, zda by origami nemohlo být jednou z cest, jak zlepšit vztah žáků ke geometrii. V průběhu vlastního studia na základní a střední škole i během jednoho roku, kdy jsem působila jako učitel na jedné základní škole a gymnáziu, jsem si uvědomila, že poměrně velké množství žáků má ke geometrii vztah negativní. Toto zjištění mě přivedlo k myšlence zařazení origami do výuky za účelem zlepšení pohledu žáků na geometrii. Podoba diplomové práce se však od té doby postupně vyvíjela. Zkoumání vlivu origami na vztah žáků ke geometrii není v současné době jejím cílem, přesto to byl původně hlavní motiv, který mě vedl tomu, abych se tématu didaktického využití origami věnovala.

Pod pojmem *origami* rozumím jakékoliv skládání papíru bez použití nůžek a lepidla. Origami vnímám především jako činnost vedoucí k vytvoření papírové skládanky, která reprezentuje řadu geometrických vztahů. Kromě pojmu origami je v podobném významu používán i pojem *geometrie překládaného papíru* (dále GPP). Názory na vymezení těchto pojmů se různí. Pojem origami považuji za nadřazený pojmu GPP, jelikož obsahuje na rozdíl od GPP výrazněji zastoupenou činnostní složku. Z didaktického hlediska se tedy přikláním k používání pojmu origami, který podle mého názoru lépe pokrývá důležitou část vzdělávacího procesu, a tou je činnost žáků. *Didaktické prostředí* tvoří forma reprezentace (origami reprezentuje geometrické vztahy prostřednictvím rovinných i prostorových objektů) a činnosti s ní související (překládání papíru, tj. konstruování přehybů). Origami jako didaktické prostředí umožňuje objevování polohových a metrických vlastností zkonstruovaných objektů.

Hlavními cíli této práce je ukázat možnosti origami jako didaktického prostředí v některých oblastech školské matematiky, zejména konstrukční a početní geometrie, a navrhnout náměty na využití origami ve vyučování matematice na druhém stupni základní školy a střední škole. Dalším cílem je charakterizovat origami z pohledu geometrického a historického a zformulovat metodická doporučení pro práci v prostředí origami na základní a střední škole.

Při zpracovávání diplomového úkolu jsem vycházela zejména ze studia odborné literatury. Jelikož v češtině o problematice origami neexistuje mnoho publikací (vyjma publikací určených pro širokou veřejnost obsahujících pouze návody ke skládání jednotlivých modelů), čerpala jsem v této oblasti zejména z literatury zahraniční. Studium literatury mě podnítilo k tvorbě řady vlastních úloh, a tak jsou úlohy v této práci zčásti převzaté a zčásti vlastní. Didaktický pohled na origami vychází především z ověření některých úloh ve školní praxi[1]. Z průběhu vyučovacího experimentu jsem pořídila videozáznam a jeho výsledky hodnotila především na základě pozorování. Od žáků jsem získala zpětnou vazbu formou krátkých dotazníků.

K dosažení vytyčených cílů práce jsem využila informací ze zmíněných pramenů. Nejprve uvádím stručný přehled historie a geometrických axiomů origami. Didaktický pohled na origami uvedený v páté a šesté kapitole vychází především z vlastní praxe a provedených experimentů. Popisuji výhody a úskalí využití origami ve vzdělávání. Skutečnost, že origami je využitelné v matematickém vzdělávání na všech stupních škol, dokládám náměty pro jednotlivé stupně škol a přehledem oblastí matematiky, pro jejichž vyučování může mít origami přínos. Splnění hlavních stanovených cílů prezentuji na úlohách, které lze s žáky různých stupňů škol řešit v didaktickém prostředí origami. Úlohy jsou zaměřeny na skládání rovnostranného trojúhelníku a mnohostěnů. Některé z těchto úloh jsem ověřila ve školní praxi, což je popsáno v kapitole 8. Rovněž uvádím metodická doporučení pro práci v prostředí origami v matematickém vzdělávání. V závěru práce hodnotím, zda a případně za jakých podmínek je origami v matematickém vzdělávání využitelné jako didaktické prostředí.

[1] V dalším textu budu toto ověření často nazývat experimentem, ačkoliv jsem si vědoma, že se nejednalo o experiment v pravém slova smyslu.

Kapitola 2

Historie origami

2.1 Vznik origami

Výraz *origami* vznikl složením dvou čínských slov - *oru* (skládat) a *kami* (papír). Ačkoliv je slovo origami čínského původu, není přesně jisté, kde a kdy origami vzniklo. Jak uvádí Wu [Wu, 2006], někteří historici se domnívají, že objev skládání papíru musel následovat brzy poté, co byl vynalezen způsob výroby papíru podobného tomu, který používáme dnes. Předpokládá se, že tento způsob objevil Číňan Ts'ai Lun v roce 105 n. l. Nevíme, zda se již Číňané v této době skládání papíru věnovali, nemůžeme však tuto skutečnost vyloučit. Je jisté, že v šestém století našeho letopočtu buddhističtí mniši přinesli znalost výroby papíru do Japonska, kde se posléze začalo skládání papíru rozvíjet. Je zajímavé, že v samotném Japonsku, zemi, která je všeobecně považována za kolébku origami, se výraz origami začal používat až okolo roku 1930. Do té doby označovali Japonci umění skládání papíru výrazy *orisue*, *orikata* nebo *orimono* [Hatori, 2008].

Kromě toho, že se skládání papíru začalo rozvíjet v Japonsku, existují doklady o tom, že v osmém století našeho letopočtu bylo skládání papíru přineseno Maury do Španělska [Beatty, 2008]. Jelikož však islám odsuzuje vytváření jakýchkoliv reprezentativních figur, Mauři využívali skládání papíru k poznávání geometrických vlastností čtverce. Po opuštění Španělska Araby se Španělé přestali omezovat jen na geometrické vzory a rozvinuli *papiroflexii*, umění skládaného papíru. I dnes používají tento výraz namísto výrazu origami, který je ve Španělsku znám málokomu. Někteří historici se dokonce domnívají, že umění skládaného papíru přinesli do Japonska právě španělští Mauři [Historie 1, 2008]. Ať je tomu tak, či ne, je jisté, že po dlouhou dobu se umění skládání papíru rozvíjelo na východě a západě odděleně.

S největší pravděpodobností se nikdy nedozvíme, kde a kdy první papírová skládanka vznikla. Je však jisté, že v Japonsku bylo toto umění po dlouhá staletí nejvíce zdokonalováno, a proto věnuji největší část tohoto pojednání o historii origami právě vývoji origami v Japonsku.

2.2 Vývoj origami v Japonsku do konce 19. století

Zpočátku byl papír v Japonsku velmi vzácnou a drahou komoditou, a proto byly papírové skládanky používány jen při náboženských obřadech a k výzdobě šintoistických svatyní. Jak se papír stával dostupnějším, umění origami se těšilo stále větší popularitě mezi bohatými i chudými a začalo sloužit i jako forma zábavy a odpočinku. Podle Listera[1] [Lister, 2005] se však toto tzv. rekreační origami začalo rozvíjet až kolem roku 1600. Postupy skládání byly přenášeny z generace na generaci ústně, a tak se uchovaly pouze ty nejjednodušší modely.

Nejstarší dochovaný dokument zmiňující origami je krátká báseň, kterou napsal Ihara Saikaku roku 1680. V roce 1797 byla vydána *Senbazuru Orikata*, dílo, jehož název lze přeložit jako Skládání jeřába na tisíc způsobů a které obsahovalo první psané instrukce ke skládání vůbec. Jeřáb je dnes snad nejoblíbenější japonskou skládankou a symbolem dlouhého života, a proto si lidé zavěšují desítky i stovky těchto skládanek v bytech pro štěstí. Z dalšího díla z této doby, *Chusingura Origkata*, je patrný rozdíl mezi skládankami pro děti, které byly jednodušší a prosté jakéhokoliv stříhání, a pro dospělé, které byly mnohem komplexnější a často stříhání obsahovaly. Jedna část díla *Kayaragusa*, encyklopedie japonské kultury publikované v roce 1845, zahrnovala obsáhlou sbírku tradičních modelů origami. Díky výše zmíněným literárním dílům tedy víme, že v této době znali Japonci na sedmdesát různých skládanek. Jednalo se převážně o různá zvířata, květiny a ozdoby. Již v této době byla patrná základní zásada origami: nikoliv věrně kopírovat podobu zobrazovaných objektů, ale pouze je zjednodušeně symbolizovat. Koncem 19. století dosáhlo origami v Japonsku největšího rozkvětu a oblibu si udrželo dodnes.

[1] David Lister je dlouhodobě uznáván jako jeden z předních historiků v oblasti origami. Jeho odborné články jsou dostupné na http://www.britishorigami.info/academic/lister/.

2.3 Moderní origami

V současné době rozlišujeme dva základní typy origami - tradiční a moderní. Pro tradiční origami je typické, že se skládá z jednoho kusu papíru, bez použití nůžek a dalšího zdobení. Autor tradiční skládanky není znám, jedná se o modely, které byly skládány po staletí. Soubor tradičních origami je víceméně uzavřen. Oproti tomu moderní origami ponechává značný prostor pro fantazii skládajícího, povoluje stříhání, slepování jednotlivých dílů a obsahuje některé typy skladů, které u tradičního origami nenalezneme.

Za zakladatele moderního origami je všeobecně považován Akira Yoshizawa[2], který v padesátých letech dvacátého století vydal knihy obsahující úplně nové modely origami. Jemu také vděčíme za vytvoření souboru znaků a diagramů, které jsou dodnes používány při zápisu instrukcí pro skládání origami. Výstavy Yoshizawových modelů, které se konaly v Japonsku i jinde ve světě, seznámily s origami mnoho lidí a vedly k založení Origami Center of America (1958) a British Origami Society (1967). Od této doby přestává být origami výlučně japonskou záležitostí a začínají se mu věnovat lidé po celém světě. Na trhu se objevuje obrovské množství knih s origami tematikou a vznikají origami zájmové kluby v mnoha zemích světa[3]. Česká origami společnost byla založena v roce 2003 a v současné době má 31 řádných členů.

Jedním z typů moderního origami je **modulární origami**, jehož podstatou je složení modelu z více kusů papíru. Z jednoho kusu papíru je složena tzv. základní jednotka. Bez využití lepidla, pouze pomocí zasouvání, je poté větší množství jednotek složeno za vzniku 3D objektu. Většinou bývají ke složení jednoho modelu využity identické jednotky. Jejich počet se však značně liší - byla poskládána i tělesa čítající 900 jednotek. První historická zmínka o modulárním origami pochází z roku 1734, kdy Hayato Okoha uvedl jako jeden z modelů v knize *Ranma Zushiki* modulární krychli. Existují i další ukázky tradičního japonského modulárního origami, jako je kusudama, což jsou poskládané papírové květiny uspořádané do koulí. Nicméně u kusudamy je spojení jednotek provedeno za pomoci niti a nikoliv zasouváním jednotlivých jednotek do sebe.

[2] Akira Yoshizawa (1911–2005) je považován za velmistra origami. Podle jeho vlastního odhadu z roku 1989 vytvořil více než 50 000 modelů, z nichž bylo v jeho 18 knihách publikováno pouze několik set.

[3] Internetové adresy některých origami klubů či společností:
Japonsko (http://www.origami.gr.jp/index-e.html), Velká Británie (http://www.britishorigami.info/), USA (http://www.origami-usa.org/), Německo (http://www.papierfalten.de/),
Česko (http://new.origami.cz/index.php/Hlavn%C3%AD_strana)

Myšlenku modulárního origami znovu objevil až v šedesátých letech dvacátého století Robert Neal v USA a později Mitsonobu Sonobe[4] v Japonsku. Modulární origami se postupně stalo velmi oblíbeným a dnes existují tisíce modelů. Kromě již zmíněných autorů se mezi nejznámější autory modelů modulárního origami řadí Kunihiko Kasahara[5] a Tomoko Fuse[6].

V posledních desetiletích se origami začalo dostávat do centra zájmu vědců, zejména matematiků, informatiků, strojařů a astronomů. Ukazuje se, že origami může pomoci řešit některé problémy jednodušší cestou než běžné postupy [Historie 2, 2002]. V poslední době je origami rovněž velmi oblíbenou didaktickou pomůckou při výuce matematiky. Během posledních dvaceti letech se konaly již čtyři mezinárodní konference zabývající se využitím origami ve vědě a vzdělávání (International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education), což svědčí o tom, že origami již není jen forma zábavy.

Ačkoliv historie origami je poměrně dlouhá a zejména za posledních sto let bylo vytvořeno obrovské množství nových modelů, zdá se, že jeho vývoj zdaleka neskončil a budou zcela jistě vytvořeny další modely a vymyšleny nové postupy. Jeho prapůvodní obřadní význam se sice vytrácí, ale na druhou stranu slouží mnoha dalším účelům - dětem i dospělým jako vhodný způsob trávení volného času, který vede k vytvoření uměleckého díla, vědcům jako prostředek k vyřešení některých problémů a v neposlední řadě učitelům jako didaktické prostředí.

[4]Mitsonobu Sonobe je autorkou pravděpodobně nejznámějšího modulárního origami - Sonobovy kostky, která je složena ze šesti identických jednotek. Další origamisté poté vymysleli velké množství variací těchto jednotek.

[5]Kunihiko Kasahara (narozen 1941) je velmistrem origami, který mimo jiné využil Sonobovu jednotku ke složení celé řady dalších těles, poskládaných až z 900 jednotek. Návody k jejich složení publikoval v knize *Origami for the Connoisseur*.

[6]Tomoko Fuse (narozena 1951) je autorkou mnoha modulárních origami. Jejím zřejmě nejvýznamnějším dílem je kniha *Unit Origami: Multidimensional Transformations*, kde uvádí přesné postupy skládání jednotlivých modelů

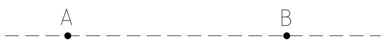
Kapitola 3

Geometrické axiomy origami

V procesu skládání papíru provádíme různé kombinace základních konstrukcí, které origami umožňuje. První systematickou studii těchto základních konstrukcí představil Humiaki Huzita [Huzita, 1992], který popsal šest základních způsobů, jak pomocí origami vytvořit přehyb s využitím již existujících bodů a přehybů. Těchto šest základních konstrukcí je v literatuře uváděno jako *Huzita axiomy*, ačkoliv se ve skutečnosti nejedná o axiomy, ale o popis konstrukcí. V roce 2001 doplnil K. Hatori [Hatori, 2001] sedmý axiom, soubor origami axiomů tedy označujeme jako *Huzita-Hatori axiomy*. Robert J. Lang [Lang, 2003] dokázal, že tento soubor sedmi základních konstrukcí origami je úplný.

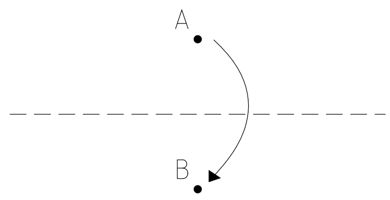
3.1 Huzita-Hatori axiomy

(A1) Jsou-li dány dva body A a B, můžeme vytvořit přehyb, který jimi prochází (obrázek 3.1).



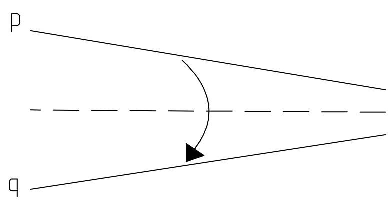
Obrázek 3.1: Axiom 1

(A2) Jsou-li dány dva body A a B, můžeme vytvořit přehyb tak, že se bod A přemístí na bod B (obrázek 3.2). Uvedená konstrukce (A2) odpovídá nalezení osy úsečky AB.



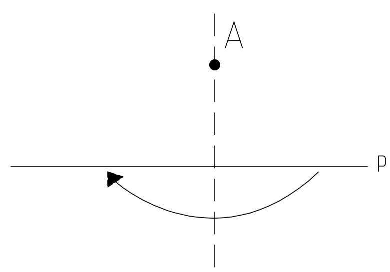
Obrázek 3.2: Axiom 2

(A3) Jsou-li dány dvě přímky p a q, můžeme vytvořit přehyb tak, aby p ležela na q (obrázek 3.3). Konstrukce (A3) je ekvivalentní k nalezení osy úhlu, který svírají přímky p a q.



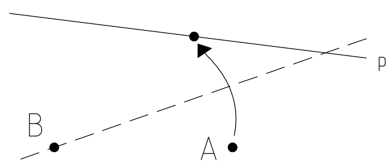
Obrázek 3.3: Axiom 3

(A4) Je-li dán bod A a přímka p, můžeme vytvořit přehyb kolmý k přímce p a procházející bodem A (obrázek 3.4).



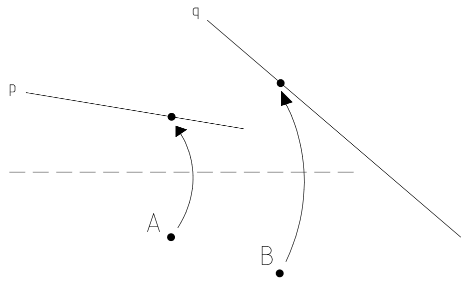
Obrázek 3.4: Axiom 4

(A5) Jsou dány dva body A a B a přímka p. Pak můžeme vytvořit přehyb tak, aby bod A ležel na p a zároveň procházel bodem B (obrázek 3.5). Konstrukce (A5) odpovídá nalezení průsečíku přímky p a kružnice se středem B a poloměrem $|AB|$. Může tedy mít 0,1 nebo 2 řešení. Vymodelovaný přehyb je jednou z tečen paraboly s ohniskem A a řídicí přímkou p.



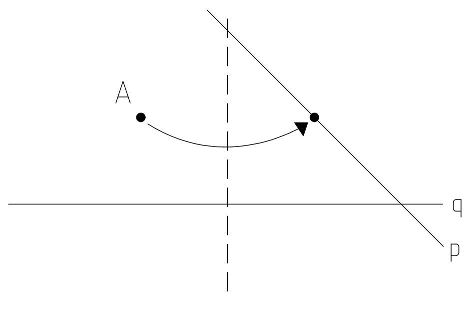
Obrázek 3.5: Axiom 5

(A6) Jsou dány dva body A a B a dvě přímky p a q. Pak můžeme vytvořit přehyb tak, aby bod A ležel na p a bod B ležel na q (obrázek 3.6). Konstrukce (A6) vede k nalezení přímky, která je společnou tečnou dvou parabol. Tyto paraboly mají ohnisko A (resp. B) a řídicí přímku p (resp. q).



Obrázek 3.6: Axiom 6

(A7) Je-li dán bod A a dvě přímky p a q, můžeme vytvořit přehyb kolmý k přímce q tak, aby bod A ležel na p (obrázek 3.7).

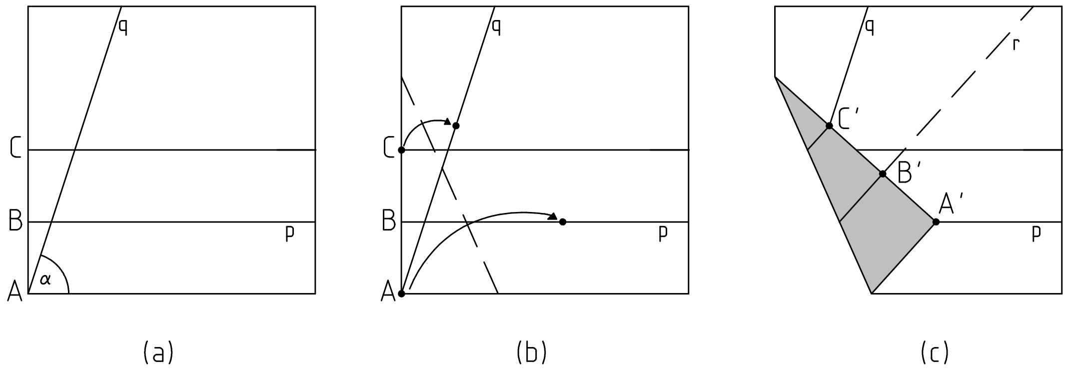


Obrázek 3.7: Axiom 7

Vyjma axiomu (A6) jsou všechny axiomy origami konstruovatelné euklidovsky (tj. pomocí přímého pravítka a kružítka). Právě konstrukce popsaná v axiomu (A6) umožňuje vyřešit pomocí origami dva z tzv. klasických problémů řecké matematiky: trisekci úhlu a duplikaci krychle.

3.2 Trisekce úhlu

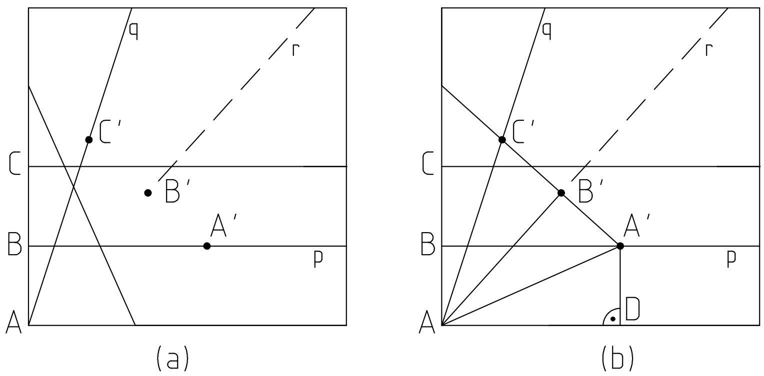
Metodu, jak pomocí origami provést trisekci úhlu, objevil Abe a publikoval ji v roce 1980 [Hushimi, 1980]. Postup k vymodelování trisekce úhlu je uveden na obrázku 3.8.



Obrázek 3.8: Postup k vymodelování trisekce úhlu

V levém dolním vrcholu čtvercového listu papíru o délce strany a nejprve vymodelujeme úhel α. Rovněž vytvoříme přehyb v ose čtverce a následně rovnoběžku s tímto přehybem, která rozděluje vzniklý obdélník na dva shodné obdélníky. Významné body a přímky pojmenujeme (viz obrázek 3.8a). V následujícím kroku použijeme konstrukci (A6) a vytvoříme přehyb tak, aby bod A ležel na přímce p a bod C na přímce q (obrázek 3.8b). Obrazy bodů A, B a C pojmenujeme A', B' a C'. V posledním kroku prodloužíme přímku p tak, jak je uvedeno na obrázku 3.8c. Tuto nově vzniklou přímku pojmenujeme r.

Po rozložení získáváme čtverec s vymodelovanými přímkami a body (viz obrázek 3.9a). Lze dokázat, že přímka r prochází bodem A. Vyznačíme si bod D tak, jak je uvedeno na obrázku 3.9b. Z vlastností skládání papíru vyplývá, že $|A'B'| = |B'C'| = |A'D|$. Zároveň je $AB' \perp A'C'$. Trojúhelník $AA'C'$ je tedy rovnoramenný, z čehož vyplývá, že $|AA'| = |AC'|$. Pak podle věty *Ssu* platí, že $\triangle ADA' \cong \triangle AB'A' \cong \triangle AB'C'$. Konečně tedy $|\angle DAA'| = |\angle B'AA'| = |\angle B'AC'| = \frac{\alpha}{3}$. Popsaným způsobem jsme tedy skutečně sestrojili úhel, který má třetinovou velikost než zvolený úhel α.

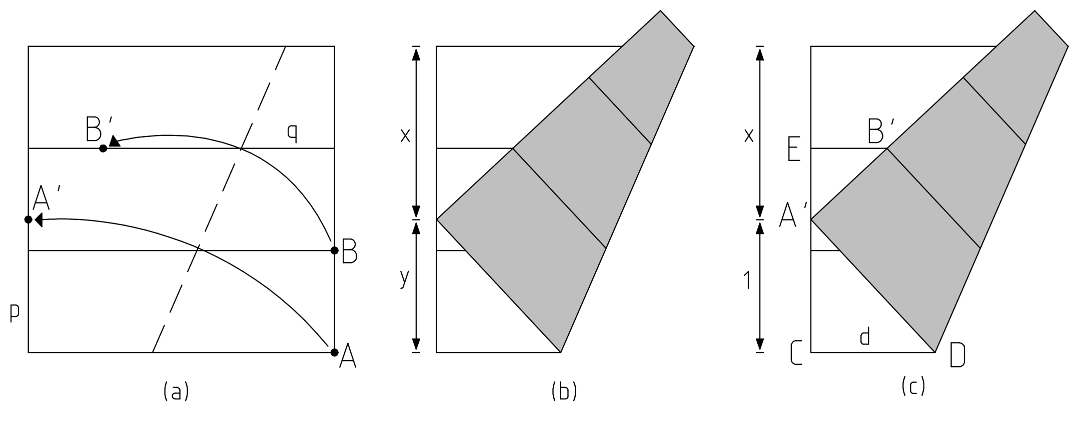


Obrázek 3.9: Důkaz trisekce úhlu

Již od dob antického Řecka se lidé snažili najít způsob, jak pomocí kružítka a přímého pravítka trisekci úhlu provést. Až v 19. století se podařilo prokázat, že to není možné. Již Archimedes však věděl, že pomocí kružítka a pravítka se dvěma značkami to možné je. Výše popsaný postup této skutečnosti využívá; na okraji papíru si překládáním značky vytvoříme. V kombinaci s aplikací axiomu (A6) pak origami skutečně umožňuje trisekci úhlu provést.

3.3 Duplikace krychle

Metodu, jak pomocí origami vyřešit duplikaci krychle (tzn. zkonstruovat úsečku délky $\sqrt[3]{2}$), objevil Messer [Messer, 1986].



Obrázek 3.10: Duplikace krychle

Nejprve je zapotřebí čtverec papíru rozdělit dvěma rovnoběžkami na třetiny. Jeden ze způsobů, jak je možné toto učinit, je stručně popsán v kapitole 5.2.2.1. Poté použijeme konstrukci (A6) a vytvoříme přehyb tak, aby bod A ležel na přímce p a bod B na přímce q (viz obrázek 3.10a). Potom bod A' dělí levou stranu čtverce na dvě úsečky v poměru $\frac{x}{y} = \sqrt[3]{2}$ (obrázek 3.10b).

Jelikož důkaz této metody je poměrně obtížný, je vhodné využít trik, který spočívá v tom, že zvolíme $y = 1$ [Hull, 2006]. Poté potřebujeme dokázat, že $x = \sqrt[3]{2}$. Situaci si označíme tak, jak je uvedeno na obrázku 3.10c. Poté víme následující:

$|CD| = d$, $|A'D| = x + 1 - d$, $|A'B'| = \frac{x+1}{3}$, $|A'E| = x - \frac{x+1}{3} = \frac{2x-1}{3}$.

V $\triangle CDA'$ pomocí Pythagorovy věty vypočítáme, že $d = \frac{x^2+2x}{2x+2}$.

Platí, že $\triangle A'CD \sim \triangle B'EA'$ (viz kapitola 5.2.2.2).

Potom $\frac{|CD|}{|A'D|} = \frac{|EA'|}{|B'A'|} \Rightarrow \frac{d}{x+1-d} = \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow \frac{x^2+2x}{x^2+2x+2} = \frac{2x-1}{x+1}$

Po úpravách dostáváme $x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$. QED.

Kapitola 4

Výhody a úskalí využití origami ve vzdělávání

Myšlenka využitelnosti origami ve vzdělávání není nijak nová. Mezi učiteli má řadu příznivců, ale i odpůrců. V této kapitole se pokusím shrnout výhody využití origami jako didaktického prostředí ve výuce, zejména matematiky, a jeho přínos pro naplňování vzdělávacích cílů. Jsem si vědoma toho, že zařazení origami do výuky s sebou nese i určitá rizika a v některých oblastech má řadu nevýhod, proto je rovněž zmíním. V závěru kapitoly jsou popsány typy návodů, podle nichž mohou žáci origami v rámci vyučování výuky skládat.

4.1 Motivační aspekt origami

Domnívám se, že učitele, kteří se rozhodnou využít při výuce origami, vede k tomuto rozhodnutí mimo jiné přesvědčení, že tak budou žáky motivovat. Jak uvádí Pearl [Pearl, 2008], origami pomáhá zvyšovat motivaci žáků. Podle Pavelkové [Pavelková, 2002] patří mezi základní znaky úloh, které aktualizují poznávací potřeby (a tím zvyšují vnitřní motivaci), především novost, překvapivost, problémovost, neurčitost, neobvyklost, vyvolání pochybnosti a možnost experimentovat. Většinu těchto znaků origami bezesporu splňuje, proto můžeme říci, že úlohy zadané v prostředí origami zvyšují vnitřní motivaci žáků. Vzhledem k tomu, že origami je pro žáky didaktickým prostředím, ve kterém nepracují v hodinách matematiky běžně a je pro ně spíše neobvyklé, znak novosti a neobvyklosti v sobě přirozeně nese[1]. Řada úloh vycházejících z origami má problémový charakter a řešení některých z nich může být pro žáky překvapivé. Je zřejmé, že origami umožňuje žákům experimentovat, jak je ilustrováno v kapitolách 6 a 7.

Při zařazení origami do výuky je však nutné počítat i s tím, že ne všechny žáky bude motivovat k poznávání a experimentování. Řešení úloh v prostředí origami vyžaduje často od žáků, aby sami hledali a objevovali originální a efektivní řešení. Jak uvádí Petty [Petty, 1996], metoda objevování motivuje všechny žáky až na ty zcela apatické, což by mohl být jeden z důvodů, proč některé žáky origami nemotivuje. Důvodů k tomu je však nejspíše více. Vzhledem k tomu, že vztah některých žáků k matematice je natolik negativní, že jakékoliv snahy učitelů o oživení výuky je nepodněcují k většímu úsilí, je potřeba počítat s odmítnutím origami jako didaktického prostředí ze strany takovýchto žáků. Nezájem žáků o origami může být také zapříčiněn případnou manuální nešikovností, která se projevuje skládáním nekvalitních (nepřesných) modelů, což jim nepřináší pocit uspokojení.

4.2 Rozvíjení obecných dovedností

Řešení úloh v prostředí origami vede žáky k rozvíjení řady obecných dovedností (v současných kurikulárních dokumentech označovaných jako kompetence). Pomáhá rozvíjet koncentraci, vizuální a taktilní paměť, vytrvalost, trpělivost, jemnou motoriku, dovednost naslouchat a pozorovat, řídit se pokyny a řešit problémy. V neposlední řadě podporuje rozvíjení algoritmického myšlení, kooperativní učení a socializaci žáků [Pearl, 2008]. Právě skutečnost, že origami je prostředí vhodné pro kooperativní vyučování, považuji za jeden z hlavních důvodů k tomu, aby bylo ve vzdělávání využíváno. Kasíková [Kasíková, 1997] zmiňuje, že nové modely školy považují spolupráci dětí za jeden z podstatných principů vyučování, a proto je zapotřebí, aby byli žáci vzděláváni způsobem, který je ke spolupráci vybízí. Využití origami může být jednou z cest, jak toho dosáhnout.

[1] Jsem toho názoru, že origami nemůže být při výuce matematiky standardním, ale jen alternativním prostředím mimo jiné právě z toho důvodu, aby pro žáky neztratilo tyto znaky. Na druhou stranu není vhodné origami využívat pouze nárazově, jak je objasněno v kapitole 8.3.5. Je tedy nutné, aby učitel nalzel optimální míru využití origami ve výuce.

4.3 Pěstování geometrie

Geometrii chápe Kuřina [Kuřina, 2001] jako umění vidět, umění sestrojovat a umění dokazovat. Přitom zdůrazňuje důležitost pěstování všech těchto tří umění na každé úrovni vzdělávacího procesu. V článku [Kuřina, 2003] dále uvádí, že pro vznik a rozvoj matematiky je kromě těchto tří umění charakteristické ještě umění počítat. Využití origami jako didaktického prostředí je pak jednou z možností, jak k rozvíjení všech těchto čtyř umění přispět.

Umění vidět v geometrii úzce souvisí s pojmem geometrická představivost, pod kterým Kuřina [Kuřina, 1990] rozumí složku názorného myšlení, která spočívá v dovednosti vybavovat si geometrické útvary a jejich vlastnosti. Je zřejmé, že žáci se musí s těmito útvary nejprve seznámit a musí mít možnost s nimi manipulovat, aby byli schopni si geometrické útvary a jejich vlastnosti vybavovat. Origami představuje jeden ze způsobů, jak mohou žáci sami jednotlivé útvary modelovat, následně s nimi manipulovat a zkoumat jejich vlastnosti, a tak přispívá k rozvíjení geometrické představivosti žáků. Na rozdíl od rýsování má origami výraznější vizuální aspekt (žáci mohou sestrojené trojrozměrné útvary pozorovat z různých pohledů) a umožňuje navíc žákům i taktilní zkušenost, kdy žáci mají možnost sestrojené útvary poznávat nejen zrakem, ale i hmatem.

Umění sestrojovat souvisí s dovedností provádět geometrické konstrukce, které představují významnou složku školské matematiky [Kuřina, 1996]. Origami představuje jeden ze způsobů geometrického konstruování[2] a nabízí řadu zajímavých konstrukčních úloh. Najdeme mezi nimi i takové úlohy, které podněcují zvídavost žáků, vedou k samostatnému objevování zákonitostí a ukazují žákům jasně cíl práce (tj. zkonstruovat nějaký útvar). Dále představují přirozený most, po kterém mohou manuální zkušenosti žáků přejít do jejich geometrické poznatkové struktury a přispívají k zvnitřnění pojmů žáky. Tyto charakteristiky konstrukčních úloh uvádí také Hejný [Hejný, 1989]. Ztotožňuji se s jeho názorem, že zařazování konstrukčních úloh do výuky matematiky má přínos pro rozvíjení matematických dovedností žáků. Navíc se domnívám, že pokud budou žáci provádět geometrické konstrukce nejen běžným způsobem (tj. rýsováním), ale i pomocí origami (nebo i jinými konstrukčními postupy), může být přínos geometrického konstruování pro vzdělávací proces ještě zvýšen.

Využití origami napomáhá rozvíjet i umění dokazovat. Jak je patrné z některých úloh popsaných v kapitolách 5, 6 a 7, v prostředí origami vzniká přirozeným způ-

[2] Stručná charakteristika základních geometrických konstrukcí prováděných v prostředí origami je uvedena v kapitole 5.1.2.

sobem řada problémů důkazového charakteru, které žáci sami cítí potřebu řešit. Rozvíjí se tak jejich dovednost argumentovat a dokazovat.

Konečně řešení řady úloh vycházejících z origami vyžaduje provádění výpočtů a používání matematických nástrojů (Pythagorova věta, goniometrické funkce, kosinová věta apod.), a tak vede k rozvíjení umění počítat. Úlohy řešené v prostředí origami umožňují žákům vidět smysl provádění výpočtů. Zároveň mohou být pro žáky zpestřením při procvičování počítání, které je často potřeba k tomu, aby si je zautomatizovali.

4.4 Charakteristika modelování pomocí origami

Nespornou výhodou geometrického modelování pomocí origami je snadná dostupnost materiálu, tj. papíru. I u nás již lze za rozumnou cenu sehnat speciální papíry pro skládání origami[3]. Jejich využití však v případě jednodušších modelů (včetně všech modelů popsaných v kapitolách 6 a 7) není nezbytné, postačí i obyčejný barevný papír. Další výhodou je skutečnost, že složené modely si žáci mohou ponechat, odnést domů či jimi vyzdobit třídu. Origami modely nejsou úplně statické, lze je rozevírat (na rozdíl od např. modelů mnohostěnů slepených z příslušných sítí), což žákům může napomoci při vytváření představ o jednotlivých útvarech a při řešení úloh vycházejících z origami.

Na druhou stranu modelování pomocí origami má i určité nevýhody. Některé útvary lze pomocí něj modelovat velmi obtížně (např. pravidelný dvanáctistěn), nebo vůbec (např. kružnice). Postupy skládání některých modelů jsou velmi náročné na čas a přesnost práce. Při nepřesném skládání je často sestrojený model natolik nekvalitní, že neumožňuje žákům vidět v něm správně geometrické vztahy a využít jej k řešení úloh z něj vycházejících.

4.5 Mezipředmětové vztahy

Jedním z požadavků na vzdělávání vycházejících z rámcových vzdělávacích programů je vytváření mezipředmětových vztahů. Origami nabízí možnosti, jak tento požadavek naplňovat. Nejvýraznější je zřejmě vazba vyučování matematice v prostředí origami s výtvarnou a pracovní výchovou. V rámci těchto předmětů žáci mo-

[3] Výhodou těchto papírů je jejich menší tloušťka, která umožňuje snazší a přesnější provedení přehybů

hou skládat některé náročnější modely, jejichž vlastnosti pak zkoumají v hodinách matematiky. Mohou také vytvářet ozdobné papíry využitelné ke skládání jednotlivých modelů. Další předmět, který origami pomáhá s matematikou propojit, je český jazyk, a to zejména v aktivitách, kdy žáci zapisují vlastní návod pro složení modelu (více viz apitola 5.2.4). V takové situace musí stručně a srozumitelně slovně popsat jednotlivé kroky skládání. Ukazuje se, že při zařazení origami do výuky je vhodné zmínit i historii tohoto umění, proto lze uvést i vazbu na dějepis.

4.6 Nároky na učitele a žáky

Využití origami při výuce s sebou přináší i určitá rizika týkající se nároků, které prostředí origami klade jak na učitele, tak na žáky. Zařazení origami do výuky vyžaduje od učitele velmi pečlivou přípravu. Učitel musí připravit potřebné materiály (vhodný papír ke skládání, zadávací listy), promyslet formu práce žáků, zvolit vhodné úlohy a připravit se na různé způsoby jejich řešení ze strany žáků. Předpokladem pro plné využití origami je rozvinutá schopnost učitele vidět a rozumět geometrickým problémům, které v sobě origami ukrývá. Při samotné výuce je pak nutné počítat s poměrně náročným řízením práce žáků. Doporučení pro přípravu vyučovací hodiny v prostředí origami jsou uvedena v kapitole 8.3.1. Je také zapotřebí vzít v úvahu značné nároky na čas, který žáci potřebují pro řešení úloh vycházejících z origami. Ukazuje se, že pro efektivní využití origami jako didaktického prostředí je nezbytné, aby se v něm naučili pracovat jak žáci, tak učitel (což ostatně platí pro kterékoliv didaktické prostředí)

4.7 Typy návodů

Předpokladem pro zařazení origami do výuky je dovednost složit model podle návodu. Existuje několik typů návodů, podle kterých mohou žáci různého věku postupovat. Nejčastěji používané jsou následující tři návody.

Demonstrace učitelem patří mezi základní didaktické postupy a je využitelná i v případě origami. Učitel předvádí žákům jednotlivé kroky skládání a žáci je pak na základě nápodoby provádějí. Tímto způsobem se děti učí od rodičů nebo kamarádů skládat běžné dětské papírové skládanky (např. vlašťovku, parníček, večerníčkovskou čepici), a proto je většině žáků blízký. Zásady, které by měl učitel při volbě tohoto návodu dodržovat, jsou uvedeny v kapitole 8.3.3.

Grafický návod, v podobě diagramů, ve kterých je používána speciální symbolika origami, s krátkými doplňujícími komentáři, je v origami nejběžnější. Jak bylo uvedeno v kapitole 2.3, autorem tohoto způsobu záznamu konstrukcí v origami je Akira Yoshizawa. Tímto způsobem je dnes zaznamenávána většina postupů skládání modelů v publikacích určených jak široké veřejnost, tak vědcům zabývajících se origami. Ukázkou grafického návodu je návod pro složení jedné z variací Sonobovy jednotky, který je uvede n v kapitole 7.1.

Návod pomocí modelů, které zachycují jednotlivé kroky skládání, staví žáky před problém objevení provedení přehybů v jednotlivých krocích. Žáci však nemusí sami zjistit pořadí kroků skládání tak, jako je tomu v případě poskytnutí návodu ve formě **výsledného modelu**. Jak je podrobněji uvedeno v kapitole 8.3.2, skládání podle výsledného modelu představuje pro žáky náročný úkol. Ukazuje se ale, že například při skládání mnohostěnů je ve fázi zasouvání základních jednotek do sebe pro žáky názornější trojrozměrný model než grafický návod s dvojrozměrnými obrázky.

Je samozřejmé, že uvedené tři typy návodů je při výuce možné kombinovat. Například když žáci postupují podle grafického návodu, může jim učitel demonstrovat vytvoření některých složitějších přehybů. Při skládání složitějších mnohostěnů žákům napomůže kombinace grafického návodu a výsledného modelu.

Rozhodnutí učitele, jaký typ návodu použije, značně závisí na tom, co chce zařazením origami do výuky sledovat a jaké dovednosti žáků chce rozvíjet. Některé výhody a nevýhody jednotlivých typů návodů jsou uvedeny v kapitole 8.3.2.

Kapitola 5

Možnosti využití origami v matematickém vzdělávání na různých stupních škol

Tato kapitola obsahuje stručný přehled oblastí matematiky, ve kterých je origami jako didaktické prostředí uplatnitelné, a náměty několika úloh. Přehled není vyčerpávající, ale spíše ilustruje rozmanitost možností využití origami v matematickém vzdělávání, a to na různých stupních škol. Rozdělení z tohoto hlediska je čistě formální. Je zřejmé, že se možnosti využití origami na jednotlivých stupních škol značně prolínají.

Existují úlohy, které lze řešit na všech stupních škol, při postupné gradaci jejich obtížnosti. Příkladem je modelování rovnostranného trojúhelníku (viz kapitola 6 a krychle (viz kapitola 7). V obou případech lze modelování provádět již na prvním stupni základní školy za účelem seznámení se s těmito útvary a zároveň se staršími žáky řešit obtížnější úlohy vycházející z těchto modelů. Na druhou stranu existují v prostředí origami úlohy typické pro daný stupeň školy, jelikož se váží na dané učivo. Příkladem je modelování paraboly (kapitola 5.3.2) nebo výpočet povrchu a objemu mnohostěnů (kapitola 7.6).

Vzhledem k oboru mého studia se o možnostech využití origami na prvním stupni základní školy a na vysoké škole zmňuji jen okrajově.

5.1 První stupeň základní školy

Období, kdy děti nastupují do školy, je pro ně podle mého názoru obdobím velmi náročným a zároveň důležitým. Vytvářejí si ke škole a k jednotlivým předmětům vztah, který značně ovlivní rozvíjení jejich dovedností a školní úspěšnost. Domnívám se, že zejména v počátcích školní docházky je vhodné částečně zachovat formu vzdělávání, na kterou byli žáci do té doby zvyklí, a tou je hra. Věřím, že origami je didaktické prostředí, které v sobě prvky hry obsahuje, a tak je jeho zařazení do výuky na prvním stupni žádoucí a přínosné, zejména pro rozvíjení představivosti a jemné motoriky. Žáci se navíc v tomto prostředí postupně naučí pracovat, což jim později umožní řešit v něm i náročnější úlohy. Na prvním stupni vidím možnosti využití origami při výuce matematiky zejména v následujících třech oblastech.

5.1.1 Zavádění geometrických pojmů

V rámci vyučování matematiky se žáci na prvním stupni seznamují s mnoha geometrickými pojmy (např. kosočtverec, rovnoramenný trojúhelník, úhlopříčka, střed úsečky, osa úsečky, strana, hrana). Prostředí origami jim může prostřednictvím modelování pomoci některé pojmy lépe pochopit, hlavně však pod dobrým vedením učitele vede žáky k tomu, aby geometrické pojmy správně používali. Význam zařazení origami do výuky matematiky na prvním stupni spatřuji také v tom, že pomáhá žákům budovat si správné geometrické představy.

5.1.2 Základní geometrické konstrukce

Origami představuje netradiční geometrický konstrukční nástroj, v některých případech jednodušší než rýsování, a proto je při výuce vítanou alternativou. Umožňuje konstruovat kolmice, rovnoběžky, střed úsečky, osu úsečky, různé mnohoúhelníky (čtverec, obdélník, rovnoramenný a rovnostranný trojúhelník aj.) a mnohostěny (zejména krychli), se kterými se tak žáci mohou seznámit a „osahat“ si je. Konstruování pomocí origami také napomáhá žákům budovat si správné představy o shodnosti útvarů a osové souměrnosti. Konstrukční úlohy řešené v prostředí origami rozpracovala v diplomové práci Šternová [Šternová, 2003].

5.1.3 Metrické vztahy

Jednou z důležitých dovedností, kterou žáci na prvním stupni rozvíjejí, je měření délek úseček. Aby tuto dovednost mohli plně rozvinout, potřebují ji procvičovat. Pomocí origami žáci snadno a rychle vytvoří netradičním způsobem úsečky různých délek, které mohou měřit a porovnávat, a tím objevovat metrické vztahy. Význam využití origami v tomto případě je podle mého názoru zejména motivační, věřím, že žáky zaujme více měření něčeho, co sami vytvořili, než něčeho, co pouze dostali vytištěné k dispozici.

Origami vede rovněž k uchopení pojmu obvod a může být propedeutikou pojmu obsah. Skládáním papíru lze modelovat dělení celku na stejné části (zlomky 1/2, 1/4, 1/8, atd.), a to různými způsoby, což je důležité pro vytvoření správných představ pojmu zlomek. Modelování dalších zlomků (např. 1/3, 1/5, 1/6) je sice rovněž možné, ale pro žáky prvního stupně poměrně náročné.

5.2 Druhý stupeň základní školy

V rámci vyučování matematiky na druhém stupni základní školy si žáci postupně osvojují hlubší matematické poznatky a osvojují si řadu matematických dovedností. Otvírají se tak další možnosti pro využití origami, zejména ve vyučování geometrii.

5.2.1 Mnohoúhelníky a jejich vlastnosti

Na druhém stupni se žáci seznamují s mnohoúhelníky, zejména se učí rozpoznávat typy trojúhelníků a čtyřúhelníků. Origami umožňuje také modelování pravidelných mnohoúhelníků (šestiúhelník, osmiúhelník a pětiúhelník). Žáci mohou vyhledávat mnohoúhelníky v síti přehybů a mohou zkoumat jejich vlastnosti, např. určovat velikosti jejich vnitřních úhlů a délky jejich stran. Několik konkrétních úloh tohoto typu je uvedeno v kapitole 7.2.

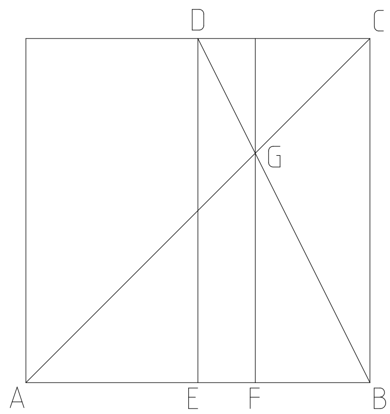
Skládanky vytvořené pomocí origami, rozložený papír se sítí přehybů i útvary tvořené přehyby jsou často osově či středově souměrné. Origami umožňuje žákům ověřovat osovou souměrnost přeložením papíru a snadno určovat osy, resp. střed souměrnosti.

5.2.2 Shodnost a podobnost

Rozložením skládanky vznikne na papíru síť přehybů, která obsahuje často shodné či podobné mnohoúhelníky (jedna taková síť je na obrázku 7.2). Úkolem pro žáky pak je tyto shodné či podobné mnohoúhelníky hledat a zdůvodnit jejich shodnost, resp. podobnost. Na základě shodnosti trojúhelníků lze dokázat správnost konstrukce trisekce úhlu pomocí origami (viz kapitola 3.2). Samotná konstrukce a její důkaz by mohla být zařazena na základní škole jako úloha pro nadané žáky, na střední škole jako ukázka matematického důkazu. Dále jsou stručně popsány dvě úlohy, jejichž řešení vychází z podobnosti trojúhelníků a je významné pro provedení duplikace krychle pomocí origami popsané v kapitole 3.3.

5.2.2.1 Rozdělení čtverce na třetiny

Při skládání origami je někdy zapotřebí rozdělit čtverec papíru na tři shodné obdélníky, což je také výchozí situace pro provedení duplikace krychle. Toto rozdělení lze provést buď přibližně, zkusmo (což je běžná praxe), nebo přesně. Popíšu přesnou konstrukci, kterou představil Hull [Hull, 2006]. Provedeme přehyby tak, jak je naznačeno na obrázku 5.1. Nejprve překládáním čtverce sestrojíme jeho úhlopříčku AC a střední příčku ED. Poté vytvoříme úsečku BD a průsečík AC a BD označíme G. Bodem G vedeme úsečku rovnoběžnou s BC a její průsečík s AB označíme F. Platí, že $|FB| = \frac{1}{3}|AB|$



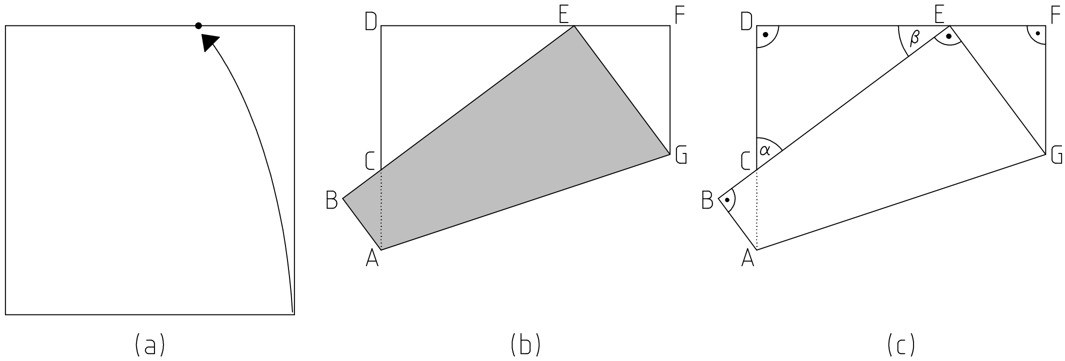
Obrázek 5.1: Rozdělení čtverce na třetiny

Důkaz této skutečnosti není úplně triviální; může opět nalézt uplatnění na základní škole jako problémová úloha pro nadané žáky, na střední škole jako ukázka přímého matematického důkazu.

Předpokládáme, že délka strany čtverce je jedna, a umístíme ho do soustavy souřadnic tak, že bod A má souřadnice $[0,0]$ a bod $B[1,0]$. Bod G leží na ose 1. a 3. kvadrantu, a proto jeho souřadnice označíme $[x,x]$. Jestliže $|AF| = x$, pak $|FB| = 1-x$. Podle věty *uu* o podobnosti trojúhelníků platí, že $\triangle EBD \sim \triangle FBG$. Poměr podobnosti trojúhelníků je $\frac{|DE|}{|GF|} = \frac{|EB|}{|FB|} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1/2}{1-x} \Rightarrow 2-2x = x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$.

5.2.2.2 Hagaova věta

Vytvořením jediného přehybu na čtvercovém papíru lze vymodelovat tři podobné trojúhelníky, což tvrdí tzv. Hagaova věta. Vezmeme čtverec papíru a zvolíme libovolný bod na jeho horní straně. Poté vytvoříme přehyb tak, že na tento bod přiložíme pravý dolní vrchol čtverce (obrázek 5.2a). Vytvořili jsme takto trojúhelníky ACB, EDC a GFE (obrázek 5.2b). Platí, že $\triangle ABC \sim \triangle EDC \sim \triangle GFE$. Právě toto tvrzení je známo jako Hagaova věta[1], která má uplatnění při důkazu správnosti postupu duplikace krychle pomocí origami.



Obrázek 5.2: Hagaova věta

Hagaovu větu mohou snadno dokázat žáci, kteří mají základní znalosti o podobnosti trojúhelníků. Na obrázku 5.2c jsou vyznačeny pravé úhly, nechť $|\angle DCE| = \alpha$ a $|\angle CED| = \beta$. Z trojúhelníku DCE je patrné, že $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ - \beta$. Platí, že $|\angle FEG| = 180^\circ - 90^\circ - \beta = 90^\circ - \beta = \alpha$. Úhly DCE a ACB jsou vrcholové, a tedy $|\angle ACB| = \alpha$. Podle věty *uu* o podobnosti trojúhelníků pak platí, že $\triangle ABC \sim \triangle EDC \sim \triangle GFE$.

[1] Kazuo Haga je japonský matematik a origamista, který publikoval řadu matematických úloh vycházejících z origami. Cílem jeho úloh je pomocí origami žákům ukázat „mikroverzi“ tří fází matematického výzkumu, tj. objev, domněnku a důkaz [Haga, 2002]

5.2.3 Mnohostěny a metrické úlohy

Pro úplnost přehledu možností využití origami ve vyučování matematice zde uvádím, že pomocí origami je možné sestrojit modely mnohostěnů. Tomuto tématu je věnována kapitola 7. Modely mnohostěnů, ale i mnohoúhelníky vytvořené přehyby, lze při výuce využít k řešení metrických úloh; ukázky takových úloh jsou v kapitolách 6.3 a 7.6.

Pro řešení těchto úloh vycházejících z origami je nezbytné, aby žáci aplikovali Pythagorovu větu nebo využili znalosti o goniometrických funkcích ostrého úhlu v pravoúhlém trojúhelníku. Prostředí origami tak poskytuje příležitosti procvičovat tyto dovednosti v netradičních úlohách. Z vlastní zkušenosti vím, že žáci potřebují vypočítat poměrně hodně úloh, aby se naučili Pythagorovu větu a goniometrické funkce správně používat. Při řešení úloh z učebnice však poměrně brzy ztrácejí motivaci. Zařazením úloh řešených v prostředí origami (stejně jako zařazení jiných, pro ně netradičních úloh) lze získat zpět jejich zájem, a umožnit jim tak plně ovládnout tak významné matematické nástroje, jakými Pythagorova věta i goniometrické funkce nepochybně jsou. V kapitole 6.4 je popsáno, jak může být prostředí origami využito k odvození některých hodnot goniometrických funkcí. Pythagorova věta má uplatnění při řešení úloh uvedených v kapitolách 6.3, 7.6 a 7.7.

5.2.4 Zápis postupu konstrukce

Na druhém stupni se žáci seznamují s geometrickou symbolikou a učí se ji používat při zápisu postupu konstrukce v konstrukčních úlohách. Skládání papíru je svým způsobem také konstrukční úloha, a tak se nabízí, aby žáci zaznamenali její postup. Ukazuje se, že aktivita, kdy žáci zaznamenávají postup, který se naučili podle demonstrace učitelem, žáky zaujme[2]. Tato aktivita navíc vede k rozvíjení různých dovedností žáků. Žáci jsou nuceni vyjadřovat se stručně a zároveň srozumitelně a přesně, načrtávají a pojmenovávají rovinné útvary, vymýšlejí nebo se učí používat symboliku vhodnou pro origami. Mám zkušenost, že tato aktivita dá možnost vyniknout i žákům, kteří jinak v matematice nevynikají, a tak získat k matematice pozitivnější vztah. Uvedená aktivita je přínosnější pro žáky, kteří nemají zkušenosti se skládáním origami podle grafického návodu, protože musí objevovat vlastní způsoby, jak postup zaznamenat a nejen aplikovat již známou symboliku. V každém případě je při začlenění této aktivity do výuky nutno počítat se značnou časovou ná-

[2] V rámci výuky matematiky v sedmém ročníku jsem během jedné vyučovací hodiny naučila žáky složit základní Sonobovu jednotku (viz Příloha F) a jejich úkolem bylo napsat návod k jejímu složení. Ukázka jednoho takového žákovského návodu je v Příloze L

ročností. Naučit se skládat Sonobovu jednotku a sepsat návod pro její složení zabere žákům přinejmenším jednu vyučovací hodinu (45 min).

5.3 Střední škola

Origami má své uplatnění rovněž ve výuce matematiky na střední škole. Právě na střední škole se mohou žáci seznámit s klasickými problémy řecké matematiky a řešit trisekci úhlu a duplikaci krychle pomocí origami (viz kapitola 3.2 a 3.3). Stručně zmíním i některé další typy středoškolských úloh, které vycházejí z origami.

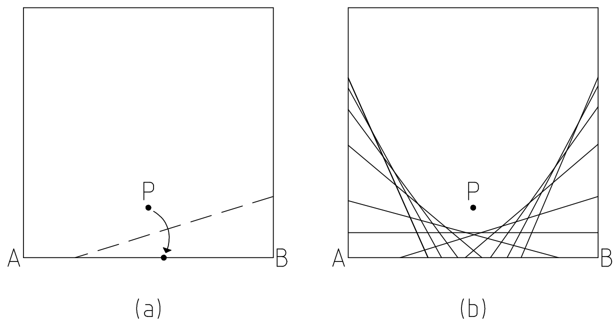
5.3.1 Zobrazení v rovině

Po rozložení skládanky vzniká na papíru síť přehybů, ve které lze obvykle nalézt řadu shodných či podobných mnohoúhelníků. Tímto způsobem může být žákům zadána úloha nalézt zobrazení, které zobrazí jeden mnohoúhelník na druhý. Touto oblastí se poměrně podrobně zabývá ve své diplomové práci Šternová [Šternová, 2003], nebudu ji tedy hlouběji zmiňovat. Za zmínku stojí, že na základě provedeného experimentu zjistila, že zúčastněné žáky zaujala zejména větší názornost při práci s papírem, která u nich vedla k lepší představě jednotlivých zobrazení.

5.3.2 Modelování paraboly

Jak bylo uvedeno v kapitole 3.1, konstrukce odpovídající axiomu (A5) představuje sestrojení tečny paraboly. Jak zmiňuje Hull [Hull, 2006], tuto skutečnost učitelé využívali při výuce matematiky již kolem roku 1924.

Žáci si na obdélníkovém či čtvercovém papíru vyznačí libovolný bod P a zvolí si jednu ze stran papíru. Pak vytvoří přehyb tak, že přiloží bod P k libovolnému bodu zvolené strany papíru (obrázek 5.3a). Postup několikrát zopakují a na papíře získají několik přehybů, které jsou tečnami paraboly s ohniskem P a řídicí přímkou AB (obrázek 5.3b). Nebudu se zde touto problematikou podrobněji zabývat, odkazuji na již zmíněnou publikaci [Hull, 2006], kde je detailně rozebrána z hlediska matematického i didaktického.



Obrázek 5.3: Modelování paraboly

5.3.3 Analytická geometrie

V rámci tématického celku analytická geometrie lze použít origami jako prostředí, v němž žáci modelují body a přímky a posléze hledají jejich analytické vyjádření, určují vzdálenost bodu od přímky, odchylky přímek apod. Jsem si vědoma toho, že v tomto případě nepřináší origami z matematického pohledu žákům nic nového, ale může mít u některých žáků motivační účinek, a proto bych se jako učitel jeho využití nebránila.

Některé problémy vycházející z origami lze řešit jak syntetickým, tak analytickým postupem. Pro ilustraci uvádím analytický způsob důkazu správnosti postupu rozdělení čtverce na třetiny, uvedeného v kapitole 5.2.2.1. Výchozí situace je zobrazena na obrázku 5.1; nechť $A[0;0]$ a $B[1;0]$. Pak přímka AC má vyjádření $y = x$ a přímka BD vyjádření $y = -2x + 2$. Bod P je průsečíkem těchto dvou přímek, jeho souřadnice tedy vypočítáme vyřešením soustavy příslušných rovnic, kdy dostáváme $P[\frac{2}{3}; \frac{2}{3}]$.

5.3.4 Stereometrie

Studium stereometrie na střední škole je podle mých zkušeností pro řadu žáků velice obtížné. Origami zřejmě není zcela ideální prostředí, které jim pomůže této problematice porozumět, ale může jim pomoci získat o mnohostěnech konkrétní představu. V kapitole 7.7 je uvedeno několik úloh týkajících se řezů mnohostěnů. Domnívám se, že některé z nich by mohly být zařazeny do výuky před samotným studiem stereometrie, aby napomohly žákům získat o problematice řezů určitou reálnou představu založenou na manipulaci s modely mnohostěnů.

5.4 Vysoká škola

Úlohy vycházející z origami představují někdy velmi složité matematické problémy, jejichž řešení přísluší studiu matematiky na vysoké škole. Není předmětem této práce zde úlohy této obtížnosti rozebírat, proto odkazuji opět na publikaci Hulla [Hull, 2006], kde jsou představeny úlohy zasahující do oblasti teorie čísel, kombinatoriky, teorie grafů, lineární algebry, topologie, sférické trigonometrie a diferenciálního a integrálního počtu.

Origami rovněž nabízí úlohy vhodné pro studium učitelství matematiky. U nás to za tím není příliš běžné, ale z podoby některých britských a amerických publikací ([Pearl, 2008], [Franco, 1999], [Hull, 2006], [Mitchell, 2001], [Baicker, 2004]) usuzuji, že v těchto státech je situace jiná. Zmíněné publikace zaměřené na využití origami při výuce matematiky jsou koncipovány pro učitele, obsahují didaktický rozbor jednotlivých úloh a často pracovní listy, které je možno okopírovat a dát žákům. Vedou učitele k tomu, aby origami do výuky efektivně zařazovali.

Kapitola 6

Rovnostranný trojúhelník v prostředí origami

S pojmem rovnostranný trojúhelník se žáci setkávají již na prvním stupni základní školy. Domnívám se, že již od tohoto období lze k vymodelování rovnostranného trojúhelníku využít origami. Přínos využití origami pak spatřuji v tom, že žáci si alternativním způsobem oproti klasickému rýsování zhotoví vlastní model útvaru, se kterým dále pracují, mohou si jej vystřihnout a „osahat" si jej.

Konstrukci rovnostranného trojúhelníku pomocí origami můžeme při vyučování rozvinout v různých podobách a využít k řešení řady úloh, a to podle věku a úrovně matematických znalostí a dovedností žáků. V nejjednodušší formě je tato aktivita pro žáky možností, jak si bez použití rýsovacích potřeb vymodelovat rovnostranný trojúhelník a poznávat či ověřovat jeho vlastnosti - délky stran, velikosti vnitřních úhlů, osy souměrnosti apod. V nejsložitější podobě přivede tento úkol žáky k hledání největšího možného rovnostranného trojúhelníku vepsaného do čtverce a k problému, jak tento trojúhelník ze čtverce papíru složit.

Představím postupně základní varianty úloh. Je samozřejmé, že během konkrétní vyučovací hodiny je možné úlohy a problémy z jednotlivých variant kombinovat. Jsem si vědoma toho, že k vyřešení řady z uvedených úloh není použití origami nutné a že by v zásadě mohl postačit náčrtek rovnostranného trojúhelníku. Věřím však, že využití origami je alternativou, která žáky zaujme a motivuje k většímu úsilí.

6.1 Skládání rovnostranného trojúhelníku ve čtverci podle návodu

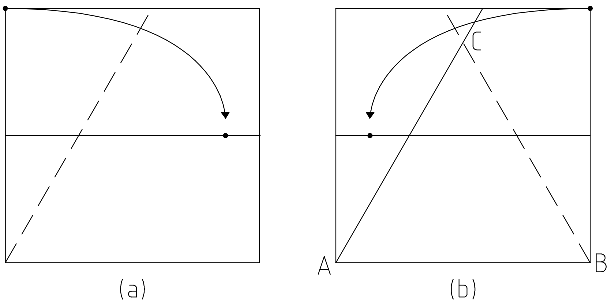
Rovnostranný trojúhelník se občas využívá jako základní tvar pro skládání některých skládanek, a tak bývá návod k jeho složení ze čtverce často uváděn. Ačkoliv existuje několik způsobů, jak ve čtverci rovnostranný trojúhelník složit, v publikacích o origami se nejčastěji setkáváme s následujícím postupem, který uvádí např. Gross [Gross, 2005].

6.1.1 První postup skládání rovnostranného trojúhelníku

1) Nejprve vymodelujeme přehyb, který rozděluje čtverec na dva shodné obdélníky.

2) Poté přiložíme levý horní vrchol čtverce na tento přehyb tak, aby nově vznikající přehyb zároveň procházel levým dolním vrcholem čtverce (obrázek 6.1a).

3) Skládanku rozložíme a krok 2) zopakujeme i s pravým horním vrcholem čtverce. Vzniklý $\triangle ABC$ je rovnostranný (obrázek 6.1b).



Obrázek 6.1: První postup skládání rovnostranného trojúhelníku

Na první pohled jednoduchý sklad v sobě ukrývá náročný úkol - přiložit levý (resp. pravý) horní vrchol čtverce na osu čtverce tak, aby vznikající přehyb zároveň procházel levým (resp. pravým) dolním vrcholem čtverce (používáme axiom (A5)). Je pravda, že provedení tohoto přehybu vyžaduje velmi dobře rozvinutou jemnou motoriku, což někteří žáci nemají. Toto úskalí lze vyřešit tak, že žákům poradíme trik, jak takový přehyb provést.[1] Pokud by ani tato rada žákovi nepomohla, můžeme mu

[1]Nejprve je zapotřebí vytvořit krátký přehyb v nejbližším okolí dolního vrcholu čtverce, který tímto vrcholem prochází. Poté tento přehyb přitiskneme prstem k podložce a horní vrchol čtverce posouváme tak dlouho, až se dotýká přehybu v ose čtverce. Nakonec nový přehyb dokončíme.

dát k dispozici čtverec papíru, na kterém budou předem vyznačeny body, na které je třeba vrcholy čtverce přiložit.

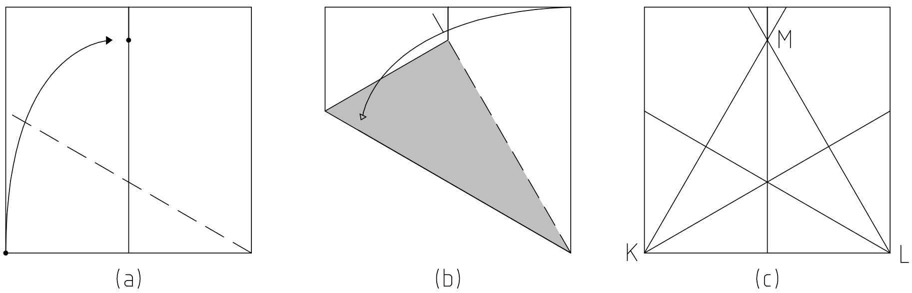
Využití uvedeného postupu skládání rovnostranného trojúhelníku při výuce však přináší jednu nevýhodu - z postupu není pro žáky zřejmé, proč je $\triangle ABC$ rovnostranný. Tento didaktický problém lze vyřešit použitím následujícího postupu.

6.1.2 Druhý postup skládání rovnostranného trojúhelníku

1) Nejprve vymodelujeme přehyb, který rozděluje čtverec na dva shodné obdélníky. Poté přiložíme levý dolní vrchol čtverce na tento přehyb tak, aby nově vznikající přehyb zároveň procházel pravým dolním vrcholem čtverce (obrázek 6.2a).

2) Vytvoříme přehyb, který „kopíruje" přeloženou dolní stranu čtverce (obrázek 6.2b). Skládanku rozložíme.

3) Zopakujeme kroky 1) a 2) s pravým dolním vrcholem čtverce. Na rozloženém čtverci přehyby tvoří $\triangle KLM$, který je rovnostranný (obrázek 6.2c).



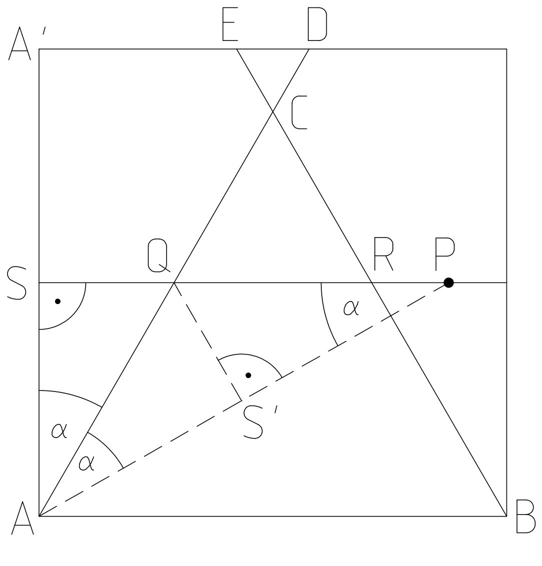
Obrázek 6.2: Druhý postup skládání rovnostranného trojúhelníku

U tohoto postupu skládání je díky vlastnostem skládání papíru zřejmé, proč je $\triangle KLM$ rovnostranný. Na druhou stranu tento postup vyžaduje od žáků provedení více přehybů, než postup první, a povede tedy pravděpodobně k větším nepřesnostem. Volba postupu tedy záleží na tom, jaké učitel sleduje cíle. Pokud chceme, aby žákům bylo zřejmé, že zkonstruovaný trojúhelník je rovnostranný, je druhý postup skládání pravděpodobně vhodnější. Na druhou stranu, pokud chceme model trojúhelníku využít k měření délek stran, výšek a velikostí vnitřních úhlů, zvolení prvního uvedeného postupu skládání povede podle mého názoru u žáků k sestrojení přesnějšího modelu rovnostranného trojúhelníku. Navíc zvolení tohoto postupu vede ke vzniku problému, jak prokázat, či vyvrátit, že zkonstruovaný $\triangle ABC$ je rovnostranný.

6.2 Důkaz, že složený trojúhelník je rovnostranný

Jak bylo uvedeno v kapitole 6.1.1, z prvního postupu skládání rovnostranného trojúhelníku není patrná jeho rovnostrannost. Je velmi pravděpodobné, že pokud žákům zadáme úkol změřit délky stran vymodelovaného trojúhelníku, budou se kvůli nepřesnosti skládání a měření tyto údaje u jednotlivých žáků lišit. Může se tedy stát (a bylo by to žádoucí), že se samovolně objeví problém, zda pomocí tohoto postupu lze opravdu vymodelovat rovnostranný trojúhelník. V tom případě je třeba žáky přivést k tomu, aby cítili potřebu tuto skutečnost dokázat, nebo vyvrátit. Důkaz lze provést následujícím způsobem.

Vyznačíme si body P, Q, S, S' a A' tak, jak je uvedeno na obrázku 6.3. Nechť $|AB| = a$ a $|\angle APQ| = \alpha$. Bod P je bod, do kterého byl v průběhu skládání přemístěn vrchol čtverce A'. Z použité konstrukce vyplývá, že úsečka AP je souměrně sdružená s úsečkou AA' podle osy AC, a proto $|AP| = |AA'| = a$. Obdobně $|AS'| = |AS| = \frac{a}{2}$ a $|\angle AS'Q| = |\angle ASQ| = 90°$. $\triangle APQ$ je tedy rovnoramenný, jelikož jeho výška prochází středem strany. Pak $|\angle APQ| = |\angle PAQ| = \alpha$. Přímka AC je osou $\angle PAS$, a tudíž je $|\angle SAQ| = |\angle PAQ| = \alpha$. Potom platí, že $3\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 30°$. Konečně dostáváme, že $|\angle BAC| = 60°$. Obdobným způsobem lze dokázat, že $|\angle ABC| = 60°$, $\triangle ABC$ je tedy rovnostranný. Je zřejmé, že rovněž $\triangle APA'$ je rovnostranný.



Obrázek 6.3: Důkaz rovnostrannosti $\triangle ABC$

Důkaz rovnostrannosti $\triangle ABC$ mohou teoreticky provést již žáci, kteří si osvojili dostatečné poznatky o trojúhelnících a osové souměrnosti (tedy žáci 6. ročníku ZŠ). Pro žáky této věkové kategorie jej však považuji za příliš náročný, jelikož vyžaduje od žáků značný vhled do situace. Bylo by však možné zařadit jej jako rozšiřující úlohu pro nadanější žáky, nebo jej zařadit do výuky ve vyšších ročnících.

V každém případě je zapotřebí, aby si žáci uvědomili, že je vhodné pracovat s $\triangle APS$. Žáci těžko na tuto skutečnost přijdou sami, učitel tedy v procesu dokazování hraje důležitou roli, v rámci které žáky důkazem provádí tak, aby nabyli dojmu, že důkaz provedli sami.

Popsaný důkaz je z matematického hlediska korektní, ale je poněkud „kostrbatý“ a žáci se v něm pravděpodobně budou těžko orientovat. S využitím druhého postupu skládání rovnostranného trojúhelníku (viz kapitola 6.1.1) lze snadno dokázat, že i první postup skládání vede k sestrojení rovnostranného trojúhelníku. První přehyb je v obou postupech skládání totožný. Z druhého postupu skládání je však rovnostrannost sestrojeného trojúhelníku zřejmá, a tak byl prvním přehybem pravý úhel rozdělen na dva úhly o velikosti 30° a 60° (viz obrázek 6.2). I přehyby u prvního postupu byly tedy vymodelovány úhly o velikosti 60° (viz obrázek 6.1) a výsledný trojúhelník je proto rovnostranný.

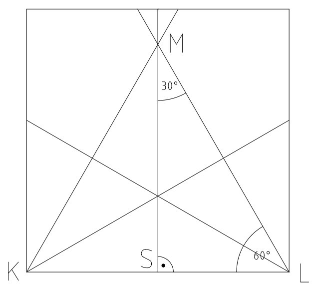
6.3 Výpočet obsahů vymodelovaných rovnostranných trojúhelníků

V rámci zkoumání vymodelovaného $\triangle ABC$ je možné zabývat se se žáky dalším problémem - určením jeho obsahu. K určení obsahu $\triangle ABC$ je zapotřebí znát délku jeho výšky. Pomocí origami mohou žáci v $\triangle ABC$ výšky snadno vymodelovat a změřit jejich délku. Lze očekávat, že vzhledem k nepřesnosti skládání a měření se budou jejich údaje lišit. Tuto skutečnost lze využít k přivedení žáků k tomu, aby cítili potřebu délku výšky určit přesně, tj. výpočtem. Pokud již žáci znají Pythagorovu větu, mohou ji k výpočtu využít. Takový úkol sice není o mnoho zajímavější a náročnější než běžné úlohy z učebnice na užití Pythagorovy věty, ale motivační faktor, který v tomto případě práce s origami přináší, považuji za velmi důležitý. Pokud žáci Pythagorovu větu ještě neznají, lze problém výpočtu vymodelovaného trojúhelníku využít jako úvodní úlohu k jejímu zavedení, jelikož z něj vyplývá potřeba odvození vztahu, který umožňuje výpočet délky strany v pravoúhlém trojúhelníku, ve kterém známe délky dvou zbývajících stran.

Můžeme se se žáky rovněž zabývat problémem, zda je možné vypočítat délky stran a následně i obsahy dvou dalších vymodelovaných trojúhelníků - $\triangle CDE$ a $\triangle QRC$ (viz obrázek 6.3). Tyto výpočty nejsou pro žáky ZŠ rozhodně triviální. Je k nim mimo jiné zapotřebí využít znalosti o goniometrických funkcích a provést úpravy výrazů s odmocninami. Opět by tedy tyto úlohy mohly být využity jako rozšiřující pro nadanější žáky, nebo by mohly být zařazeny až na střední škole.

6.4 Odvození hodnot goniometrických funkcí

Oběma výše uvedenými postupy konstrukce rovnostranného trojúhelníku žáci zároveň zkonstruovali tzv. trojúhelník $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ [2], který mohou využít k odvození hodnot goniometrických funkcí pro úhly o velikosti 30° a 60°. Z konstrukce vyplývá, že délka jeho přepony je dvojnásobná oproti délce jedné z jeho odvěsen, a vzhledem k tomu, že můžeme pracovat se čtvercem papíru libovolné velikosti a zkonstruovat tak trojúhelník $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ libovolné velikosti, žáci snadno nahlédnou, že pro každý takový trojúhelník bude platit, že jeho přepona má dvojnásobnou délku než jedna z odvěsen. Objevení této skutečnosti umožní žákům odvodit hodnoty goniometrických funkcí pro úhly o velikosti 30° a 60°. Pro ilustraci uvádím odvození hodnot $\sin 30^\circ$ a $\sin 60^\circ$, odvození pro ostatní goniometrické funkce je analogické.



Obrázek 6.4: Odvození hodnot goniometrických funkcí

Nechť čtvercový list papíru, ve kterém byl vymodelován rovnostranný $\triangle KLM$ (viz obrázek6.4), má délku strany a. Potom v $\triangle SLM$ platí: $|LM| = a, |SL| = \frac{a}{2}$. Pomocí Pythagorovy věty vypočítáme, že $|SM| = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Potom $\sin 30^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$ a $\sin 60^\circ = a\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

V řadě učebnic pro základní školy je žákům učivo o goniometrických funkcích pouze předloženo bez jakýchkoliv podnětů k zamyšlení a hodnoty goniometrických funkcí žáci zjišťují pomocí tabulek nebo kalkulaček. Domnívám se proto, že by pro žáky mohlo být přínosné, kdyby zjistili, že jsou sami schopni určit přesné

[2] Označení trojúhelník $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ je v anglické literatuře běžné a používá se pro pravoúhlé trojúhelníky s velikostí dvou zbývajících úhlů 30° a 60°.

hodnoty goniometrických funkcí některých úhlů. Zároveň origami v tomto případě umožňuje provést vnitřní diferenciaci výuky tak, aby všichni žáci měli možnost tuto úlohu řešit. Nadanější žáci ji mohou řešit v obecnější rovině a provést odvození tak, jak jsem jej uvedla výše. Žáci, kterým činí upravování výrazů s proměnnou a s odmocninami potíže, mohou určovat hodnotu některé z goniometrických funkcí pro úhly o velikosti 30° a 60° pouze pro jeden konkrétní trojúhelník (ten, který si sami vymodelovali) a pracovat tak pouze s číselnými výrazy. Pak považuji za účelné každého z těchto žáků nechat vymodelovat trojúhelník $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ ze čtverce papíru o jiné velikosti stran, aby každý z nich pracoval s rozdílnými hodnotami a aby tak i tito žáci došli k závěru, že hodnota goniometrické funkce závisí pouze na velikosti úhlu a nikoliv na délce stran trojúhelníku.

6.5 Nalezení vlastního způsobu, jak ve čtverci složit rovnostranný trojúhelník

Problematiku složení rovnostranného trojúhelníku je možné žákům představit také jiným způsobem. Namísto předvedení postupu skládání trojúhelníku a následného dokázání, že se jedná o rovnostranný trojúhelník, můžeme žáky vést k tomu, aby sami způsob složení rovnostranného trojúhelníku objevili. Zadání takového úkolu by mohlo znít velmi prostě: „Pomocí překládání papíru vymodelujte ze čtvercového listu papíru rovnostranný trojúhelník.“

Takto zadaná úloha je divergentního typu[3], jelikož existuje mnoho způsobů, jak splnit její zadání. S divergentními úlohami se žáci v matematice příliš často nesetkávají. Jejich zařazení do výuky však považuji za důležité, protože jejich řešení rozvíjí u žáků tvořivost.

Je pravda, že málokterý žák problém složení rovnostranného trojúhelníku ve čtverci vyřeší zcela samostatně, ale s několika vhodně poskytnutými radami lze žáky k objevu dovést. Jak uvádí Hull [Hull, 2006], je vhodné nejprve žáky navést, aby ve čtverci složili trojúhelník $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ a tuto dovednost posléze využili ke složení rovnostranného trojúhelníku. Je podle něj možné žákům poskytnout velmi cennou nápovědu, že se mají snažit o složení takového pravoúhlého trojúhelníku, který má přeponu dvojnásobné délky než je jedna z odvěsen (takový trojúhelník je totiž právě hledaný trojúhelník $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$), případně i navrhnout vymodelování a využití osy strany čtverce. Mnoho žáků se však podle jeho zkušeností snaží složit

[3]Při řešení úloh divergentního typu vymýšlíme různé postupy a varianty, zvažujeme eleganci řešení a docházíme k originálním výsledkům [Lokšová, 1999].

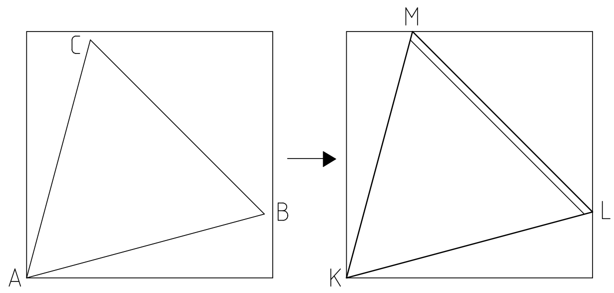
trojúhelník $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ tak, že jeho pravý úhel leží ve vrcholu čtverce, což je poměrně náročný úkol. Tvrdí, že pak je vhodné žákům navrhnout, aby pravý úhel trojúhelníku umístili dovnitř čtverce, což jim může pomoci problém vyřešit.

To nicméně neznamená, že žáci nevymyslí jiný, originální způsob. K motivaci žáků k následujícímu problému by bylo ideální, kdyby složili rozdílné rovnostranné trojúhelníky. Ale již skutečnost, že postupem skládání uvedeným v kapitole 6.1.1 se vymodelují tři rovnostranné trojúhelníky o různé délce stran, postačí k tomu, abychom žákům položili následující otázku: „Jaký je největší rovnostranný trojúhelník, který lze složit ve čtverci? “

6.6 Maximální rovnostranný trojúhelník vepsaný do čtverce

Otázka uvedená na konci předchozího odstavce staví žáky před velice zajímavý problém. Pokud před řešením tohoto problému již nějakým způsobem složili rovnostranný trojúhelník, jehož strana má stejnou délku jako strana čtverce (ať již podle návodu, nebo vlastním vymyšleným způsobem), mohou tento trojúhelník využít k nalezení největšího možného rovnostranného trojúhelníku vepsaného do čtverce. Je možné, že žáci sami objeví, že pokud pootočí $\triangle ABC$ kolem jednoho z vrcholů, je pak možné ho ještě trochu zvětšit (viz obrázek 6.5). Výhoda toho, že $\triangle ABC$ žáci získali skládáním papíru, je, že žáci si tuto situaci mohou snadno vymodelovat vystřižením $\triangle ABC$ a jeho přiložením na nový čtverec papíru. Je však také možné, že žáci budou trvat na tom, že největší možný trojúhelník je právě $\triangle ABC$, tj. takový, který má délku strany shodnou s délkou strany čtverce. V tom případě jim může učitel dát k dispozici vystřižený $\triangle KLM$ (viz obrázek 6.5) a říci jim, že jej vystřihl ze čtverce papíru o stejné velikosti, jako mají žáci. Jejich úkolem pak je vymyslet způsob, jak by se tento trojúhelník do čtverce mohl vejít. Domnívám se, že tento úkol žáky zaujme, poněvadž pro ně bude mít charakter hlavolamu a budou ho moci řešit manipulací s papírovým trojúhelníkem. Žáci tak zjistí, že je možné ze čtverce získat větší rovnostranný trojúhelník, než je $\triangle ABC$.

Poté však žáci potřebují odvodit přesnou polohu $\triangle KLM$ ve čtverci. Formou diskuse může učitel žáky přivést k tomu, že požadovaný trojúhelník určitě bude mít jeden z vrcholů umístěný ve vrcholu čtverce. Tato skutečnost vyplývá z myšlenky pootočení $\triangle ABC$ a jeho zvětšení, jak je zobrazeno na obrázku 6.5. Dále je nutné určit velikost úhlu, o který je zapotřebí $\triangle ABC$ pootočit tak, aby vzniklý $\triangle KLM$ byl maximální. Řešení tohoto problému lze provést dvěma odlišnými postupy - syntetickým a analytickým. Podstatu syntetického postupu by mohli být schopni odhalit

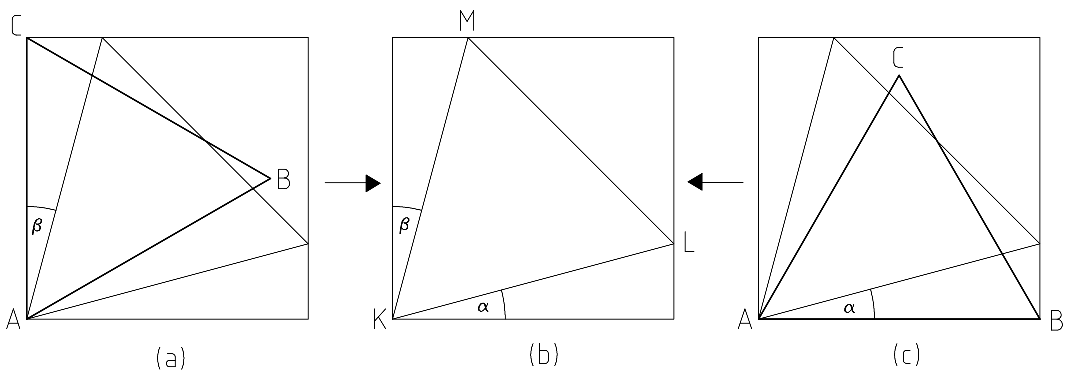


Obrázek 6.5: Pootočení $\triangle ABC$ a jeho zvětšení

již na druhém stupni ZŠ. Oproti tomu řešení analytickým postupem vyžaduje od žáků, aby měli znalosti o grafech goniometrických funkcí, můžeme jej tedy očekávat až od žáků SŠ, kteří tyto znalosti mají. Je pravděpodobné, že někteří žáci budou upřednostňovat syntetický postup, jiní postup analytický. Domnívám se, že je důležité, aby učitel oba tyto postupy považoval za rovnocenné a správné. Představím nejprve postup syntetický a poté analytický.

6.6.1 Syntetický pohled na nalezení maximálního rovnostranného trojúhelníku ve čtverci

Hledaný $\triangle KLM$ získáme otočením a zvětšením $\triangle ABC$, k určení jeho polohy potřebujeme zjistit velikost úhlu α, resp. β (viz obrázek 6.6b). Představme si, že $\triangle ABC$ je ve čtverci umístěn dvěma způsoby (obrázek 6.6a,c). Pak $\triangle KLM$ vznikne otočením $\triangle ABC$ z obrázku 6.6a kolem bodu A o úhel β a zároveň otočením $\triangle ABC$ z obrázku 6.6c kolem bodu A o úhel α. Je zřejmé, že v obou případech bude úhel otočení stejný, tedy $\alpha = \beta \Rightarrow 2\alpha = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ$.

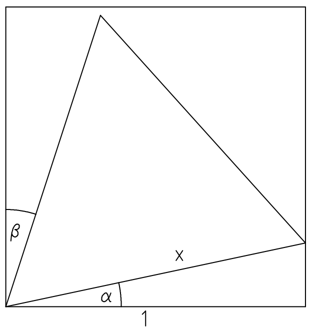


Obrázek 6.6: Určení polohy maximálního trojúhelníku synteticky

Poloha hledaného maximálního rovnostranného trojúhelníku je tedy taková, že jeden vrchol trojúhelníku leží ve vrcholu čtverce a trojúhelník je souměrný podle úhlopříčky čtverce.

6.6.2 Analytický pohled na nalezení maximálního rovnostranného trojúhelníku ve čtverci

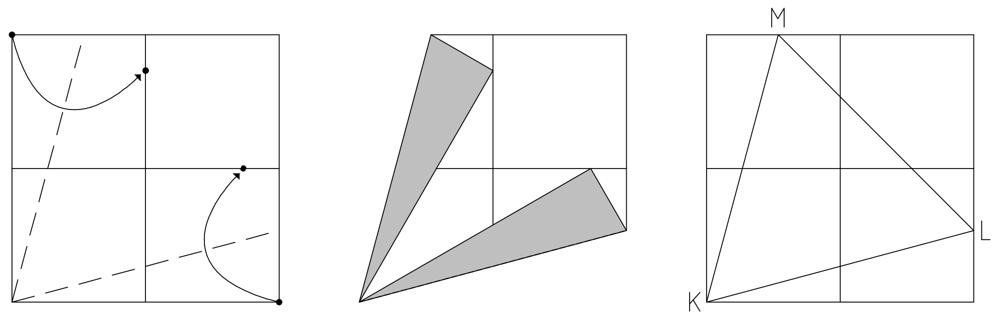
Pro představu situace si budou žáci potřebovat načrtnout obrázek obdobný obrázku 6.7. Pro zjednodušení můžeme pracovat se čtvercem o délce strany 1. Je zřejmé, že $0^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ$, protože pokud by $\alpha > 15^\circ$, pak by $\beta \leq 15^\circ$ a byli bychom v symetrické situaci. Pro případ maximálního trojúhelníku nás více zajímá velikost úhlu α, než délka jeho strany. Pokud totiž budeme znát hodnotu α, budeme znát i polohu hledaného trojúhelníku. Délka strany rovnostranného trojúhelníku závisí na velikosti úhlu α vztahem $x = 1/\cos\alpha$. Jelikož $\cos\alpha$ je na intervalu $0^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ$ funkce klesající, je funkce $1/\cos\alpha$ na tomto intervalu rostoucí. Tudíž délka strany x bude maximální v koncovém bodě tohoto intervalu, tedy $\alpha = 15^\circ$ a zároveň $\beta = 15^\circ$.



Obrázek 6.7: Určení polohy maximálního trojúhelníku analyticky

6.6.3 Nalezení vlastního postupu složení maximálního rovnostranného trojúhelníku

Když již žáci znají přesnou polohu maximálního rovnostranného trojúhelníku vepsaného do čtverce, mohou hledat způsob, jak hledaný maximální $\triangle KLM$ složit. Pokud již během předchozí práce odhalili, jak složit trojúhelník $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$, nemělo by pro ně být velkým problémem skládáním papíru vymodelovat úhel o velikosti 15° a posléze hledaný $\triangle KLM$. Jeden elegantní způsob, jak $\triangle KLM$ složit, je uveden na obrázku 6.8.



Obrázek 6.8: Složení maximálního trojúhelníku

Se složeným $\triangle KLM$ je možné se žáky, kteří již umí využívat goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku, dále pracovat. Mohou vypočítat délku jeho strany a jeho obsah a tyto údaje porovnat s údaji o $\triangle ABC$ z obrázku 6.3. Žákům může být rovněž zadán úkol, aby sepsali návod ke složení největšího rovnostranného trojúhelníku tak, aby někdo jiný byl schopen podle tohoto návodu trojúhelník složit.

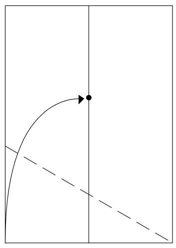
Na této úloze mi přijde pro žáky mimo jiné přínosné, že si uvědomí, že origami jim někdy umožní provést některé konstrukce mnohem jednodušeji než klasické rýsovací potřeby. Například úhel o velikosti 15° je sice možné zkonstruovat pouze pomocí kružítka a přímého pravítka, ale je to rozhodně pracnější než pomocí origami.

6.7 Složení rovnostranného trojúhelníku z papíru formátu A4

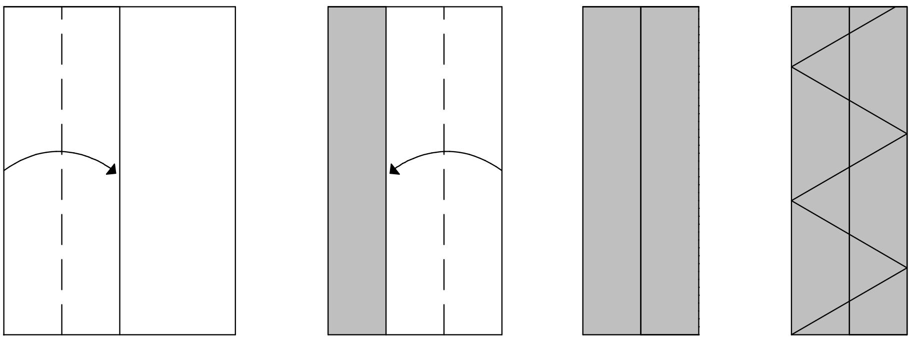
Rovnostranný trojúhelník není v žádném případě nutné skládat z papíru čtvercového tvaru. Můžeme snadno využít i obdélníkový papír a vzhledem k snadné dostupnosti se nabízí využití papíru formátu A4. Myšlenka postupu skládání je úplně stejná, jako při použití čtvercového papíru, zjednodušený postup je uveden na obrázku 6.9.

Nevýhodou je, že pokud budeme se žáky skládat rovnostranný trojúhelník z obdélníkového papíru, nebudeme s nimi moci řešit úlohy popsané v kapitole 6.6. Na druhou stranu, pokud využijeme formát papíru A4, můžeme z něj podle návodu uvedeného na obrázku 6.10 složit síť pravidelného čtyřstěnu (pro složení rovnostranných trojúhelníků použijeme postup uvedený na obrázku 6.9).

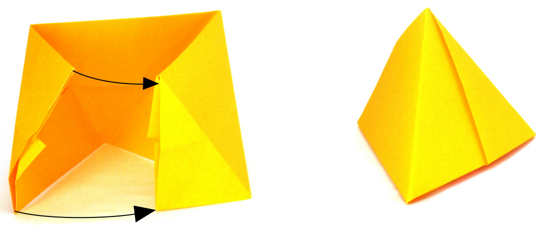
Z této sítě je pak možné bez použití lepidla pravidelný čtyřstěn složit (viz obrázek 6.11). Zasunutí papíru vyžaduje trochu trpělivosti, ale žáci si tak poměrně jednoduše zhotoví model pravidelného čtyřstěnu, který mohou využít při dalších úlohách (výpočet povrchu a objemu, řezy, roviny souměrnosti aj.). Domnívám se, že sestrojení modelu pravidelného čtyřstěnu má pro žáky smysl, protože se v běžném životě s pravidelným čtyřstěnem nesetkávají tak často, jako např. s krychlí, a mají proto větší problémy si jej představit.



Obrázek 6.9: Skládání rovnostranného trojúhelníku z papíru formátu A4



Obrázek 6.10: Skládání sítě pravidelného čtyřstěnu

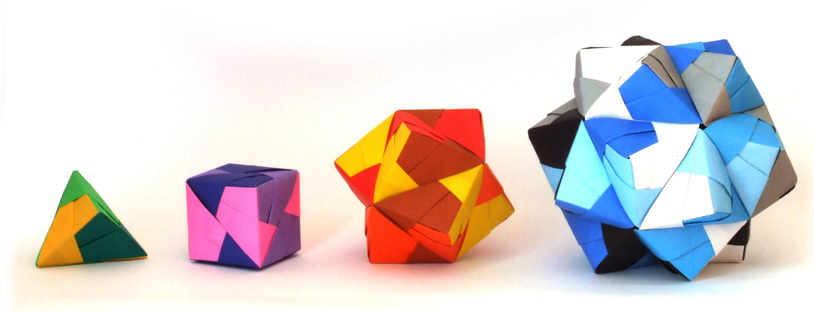


Obrázek 6.11: Skládání pravidelného čtyřstěnu

Kapitola 7

Skládání mnohostěnů

Origami nabízí možnosti využití ke skládání modelů mnohostěnů. V kapitole 6.7 byl uveden jeden z postupů, jak složit pravidelný čtyřstěn. Pomocí modulárního origami (viz kapitola 2.3) můžeme složit značné množství modelů různorodých mnohostěnů, některé z nich jsou zobrazeny v Dodatku A[1]. Cílem této práce však není představit co nejvíce modelů. Didaktické uplatnění bude ukázáno na čtyřech mnohostěnech složených z různého počtu stejných základních jednotek. Za základní jednotku jsem zvolila jednu z variací Sonobovy jednotky, jejíž autorkou je T. Fuse. Důvodem pro tuto volbu byla skutečnost, že barevné uspořádání těles z ní složených umožňuje řešit některé kombinatorické úlohy. Dalším důvodem bylo, že ji využívá B. Franco [Franco, 1999] v úlohách, které pro mě byly velkou inspirací pro tvorbu vlastních úloh.



Obrázek 7.1: Mnohostěny složené z jedné z variací Sonobovy jednotky

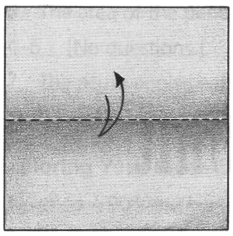
[1]V Dodatku A jsou pro ilustraci uvedeny fotografie některých modelů, jejichž postup skládání objevila a popsala Tomoko Fuse [Fuse, 2005].

Sonobova jednotka je používána ke složení různých mnohostěnů. Rozhodla jsem se popsat úlohy založené na využití čtyř z nich, a to trojbokého dvojjehlanu, krychle, hvězdicorohého osmistěnu a hvězdicorohého dvacetistěnu (viz obrázek 7.1). Popsané úlohy jsou však poměrně různorodé; týkají se různých oblastí matematiky a vyznačují se rozdílnou obtížností. Zároveň spolu úlohy úzce souvisejí a často na sebe navazují. Domnívám se, že vhodné by bylo, aby je žáci řešili v rámci dlouhodobého projektu nebo projektového dne, kterého by se účastnili žáci z různých ročníků. Pak by mohli jednodušší úlohy řešit žáci z nižších ročníků a náročnější úlohy žáci z vyšších ročníků a přitom spolupracovat. Stejně jako v předchozí kapitole nyní postupně představím několik úloh.

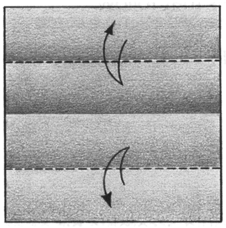
7.1 Návod ke složení základní jednotky

Jak bylo uvedeno v kapitole 4.7, existuje několik způsobů, jak se žáci naučí daný model složit. Všechny uvedené způsoby lze využít i pro složení základní jednotky. Zde uvádím grafický návod a úlohy, které mohou řešit žáci v průběhu skládání.

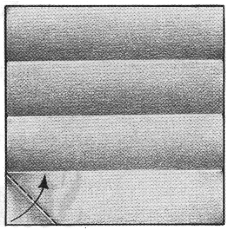
1) Čtverec papíru orientujeme tak, aby směřoval bílou stranou nahoru. Přeložíme jej tak, aby vznikly dva shodné obdélníky.



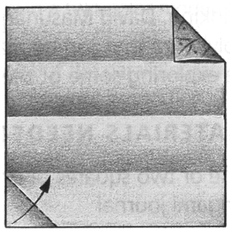
2) Každý ze vzniklých obdélníků přeložíme podélně na polovinu a rozložíme.



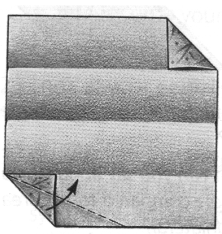
3) Přeložíme levý dolní vrchol čtverce tak, jak je naznačeno na obrázku..



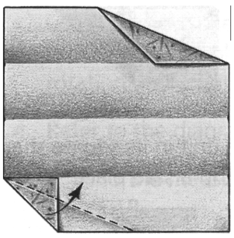
4) Papír otočíme o 180° a zopakujeme krok 3.



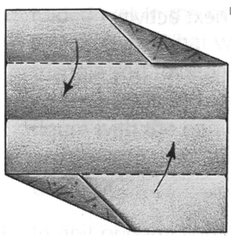
5) Vzniklý úhel o velikosti 45° přeložením rozpůlíme.



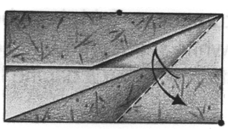
6) Papír otočíme o 180° a zopakujeme krok 5.



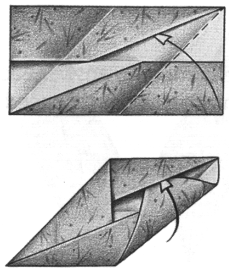
7) Přeložíme v již existujících přehybech.



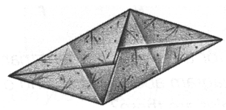
8) Pravý dolní vrchol přiložíme na horní hranu tak, aby vznikl rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník a poté rozložíme. Otočíme o 180° a krok zopakujeme.



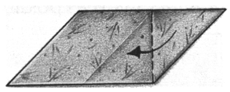
9) Oba trojúhelníky vložíme do vzniklých „kapes“.



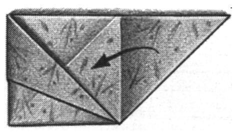
10) Takto vypadá správně složená jednotka. Velikost bílého proužku uprostřed závisí na přesnosti skládání. Čím větší je, tím nepřesněji bylo skládání provedeno.



11) Skládanku otočíme. Pro využití jednotky ke skládání mnohostěnů je vhodné provést ještě následující sklad.



12) Model otočíme o 180° a zopakujeme krok 11.



V průběhu skládání mohou žáci řešit jednoduché úlohy, které nemají pro řešení úloh uvedených v dalších podkapitolách většinou zásadní význam, ale slouží především k procvičování geometrické terminologie, určování typů mnohoúhelníků, hledání symetrií vznikajících útvarů a určování velikostí vnitřních úhlů. Uvádím na ukázku několik úloh, které se vztahují k následujícím tématům:

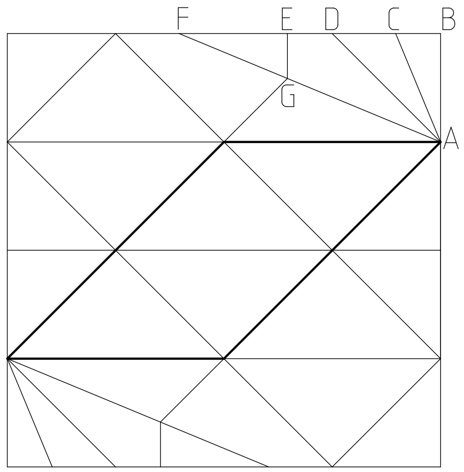
1) **klasifikace trojúhelníků**
Jaký typ trojúhelníku byl tímto přehybem vytvořen? Jaké jsou velikosti jeho vnitřních úhlů? krok (3) a (5)

2) **souměrnost rovinných útvarů**
Je složený šestiúhelník osově nebo středově souměrný? Pokud ano, nalezněte osu/osy, resp. střed, souměrnosti. krok (4)

3) **klasifikace čtyřúhelníků a jejich vlastnosti**
Jaký typ mnohoúhelníků představují dva vzniklé shodné barevné mnohoúhelníky? krok (8)
Urči typ vzniklého čtyřúhelníku a velikost jeho vnitřních úhlů. krok (10)

7.2 Úlohy vycházející z rozložené základní jednotky

Po rozložení základní jednotky získáme čtverec papíru s přehyby (obrázek 7.2), který může být podkladem pro řešení celé řady úloh. Uvádím ukázky některých z nich.



Obrázek 7.2: Rozložená základní jednotka

Považuji za účelné zadat žákům úkol narýsovat čtverec papíru se vzniklými přehyby. Při rýsování jsou žáci přirozeně vedeni ke zjišťování vztahů mezi úsečkami a útvary, které skládáním vznikly, což jim umožní řešit další úlohy. Domnívám se, že díky lepší orientaci v síti vzniklých přehybů budou žáci schopni nalézat i jednodušší způsoby řešení, které vychází právě z vlastností skládání papíru. Předpokládám, že rýsování žáky zaujme podstatně více, pokud jej budou provádět s využitím vhodného grafického editoru.

Papír se vzniklými přehyby mohou žáci dále zkoumat z hlediska souměrností - zda je osově či středově souměrný. Rovněž mohou hledat souměrnosti útvarů, které vznikly skládáním. Například čtyřúhelník $ADEG$ se zdá být na první pohled osově souměrný podle osy AE (mohlo by se tedy jednat o deltoid). Pokud však žáci určí velikosti jeho vnitřních úhlů, zjistí, že osově souměrný není.

Přehyby tvoří rozličné mnohoúhelníky (např. různé typy trojúhelníků, kosodélníky, čtverce, obdélníky, lichoběžníky, nekonvexní mnohoúhelníky), které mohou žáci určovat, nebo naopak podle zadaných vlastností vyhledávat. Budou si tak jednotlivé pojmy a vlastnosti mnohoúhelníků upevňovat. Jednou z takových úloh by mohlo být nalezení co největšího počtu různých lichoběžníků [2]. Žáci ji mohou řešit formou soutěže (kdo jich nalezne za stanovený čas nejvíce) nebo domácí úlohy. Vhodným prostředím pro řešení těchto úloh by mohla být i interaktivní tabule. Učitel na ni promítne několik obrázků čtverců se vzniklou sítí přehybů (obrázek 7.2) a žáci do nich chodí postupně různými barvami zvýrazňovat jednotlivé lichoběžníky. Celá aktivita může být postavena tak, že žáci, kteří již nejsou schopni zvýraznit žádný další lichoběžník, vypadávají. Pak je žák nucen i taktizovat a přemýšlet, který lichoběžník z těch, co nalezl, je atypický, ostatní spolužáci ho neobjevili, a tak se vyplatí jej zmínit jako poslední.

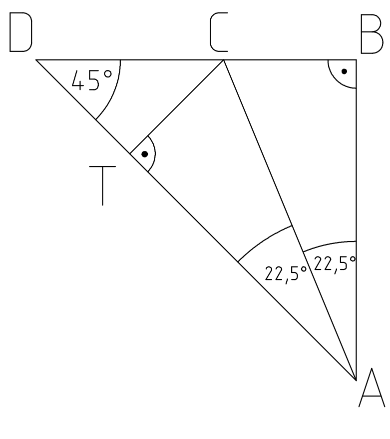
Na rozloženém čtverci papíru je rovněž vidět čtyřúhelník tvořící samotnou základní jednotku (silněji vyznačený kosodélník na obrázku 7.2). K výpočtu objemů a povrchů těles z ní složených žáci potřebují určit délky jeho stran (znají-li délku strany výchozího čtverce). Ještě před určením délek stran základní jednotky je však zřejmě vhodné zadat žákům úkol, aby určili její obsah. Domnívám se, že pokud by obsah základní jednotky určovali až po té, co vypočítají délky jejích stran, spíše by jej počítali s využitím vzorce pro výpočet obsahu rovnoběžníku, což by byl zbytečně náročný způsob řešení. Obsah základní jednotky totiž mohou určit velmi snadno, aniž by cokoliv počítali. Stačí, když si uvědomí, že je tvořena čtyřmi shodnými trojúhelníky, zatímco výchozí čtverec papíru šestnácti. Obsah základní jednotky je tedy čtvrtinový oproti obsahu výchozího čtverce. Je možné (a z didaktického hlediska by to nakonec bylo i přínosné), že někteří žáci si této skutečnosti nevšimnou

[2]Nalezla jsem jich sedmnáct, ale nevylučuji, že jich je více. Mám zkušenost, že právě lichoběžník je útvar, se kterým se žáci příliš nesetkávají, nejsou schopni popsat jeho vlastnosti a odlišit jej od jiných čtyřúhelníků. Proto věřím, že tato úloha má smysl a umožní žákům uvědomit si a zapamatovat vlastnosti lichoběžníku. V průběhu experimentu popsaného v kapitole 8.2 jsem si tuto zkušenost potvrdila. Žáci prvního ročníku čtyřletého gymnázia měli potíže vymezit pojem lichoběžník.

a budou obsah stejně určovat pomocí vzorce. Pak je jistě vhodné poukázat na to, že ne vždy je použití vzorce výhodné a že je dobré zkoušet hledat i jiná, výhodnější řešení.

Je-li a délka strany výchozího čtverce, je zřejmé, že délka kratší strany základní jednotky je $\frac{a}{2}$. Pomocí Pythagorovy věty lze vypočítat, že délka delší strany je $\frac{a}{2}\sqrt{2}$. Stejně jako v úlohách popsaných v kapitole 6.4 i v tomto případě mohou žáci tuto úlohu řešit podle úrovně svých matematických dovedností buď algebraicky (a tedy pomocí výrazů s proměnnou), nebo s čísly.

Na závěr této podkapitoly uvedu jednu úlohu, která se týká porovnání a výpočtu obsahů trojúhelníků ABC a ACD. Domnívám se, že způsob, jakým ji žáci řeší, může poukázat na to, zda mají geometrický vhled. Úkolem žáků je nejprve odhadnout a poté bez počítání zdůvodnit, zda mají tyto trojúhelníky stejné nebo různé obsahy. Toto zdůvodnění lze provést více způsoby. Obsah trojúhelníku závisí na délce strany a k ní příslušné výšky. Platí, že $v_{BC} = v_{CD} = |AB|$. Stačí tedy zjistit, jaký je vztah mezi délkami stran BC a CD. Během provádění odpovídajících přehybů lze snadno nahlédnout, že $|CD| > |BC|$, a proto i obsah trojúhelníku ACD je větší než obsah trojúhelníku ABC. Odůvodnění ale lze provést i jednodušším způsobem.



Obrázek 7.3: Porovnání a výpočet obsahů $\triangle ABC$ a $\triangle ACD$

Z obrázku 7.3 je zřejmé, že $\triangle ABC \cong \triangle ACT$ podle věty *usu* o shodnosti trojúhelníků. Pak je zřejmé, že obsah trojúhelníku ACD je větší než obsah trojúhelníku ABC. V průběhu experimentu v prvním ročníku čtyřletého gymnázia se k řešení této úlohy dostala pouze jedna dvojice, která však velmi rychle nalezla tento jednodušší způsob porovnání obsahů $\triangle ABC$ a $\triangle ACD$ a prokázala tak vhled do této situace. Určení obsahu $\triangle ABC$, resp. $\triangle ACD$, je typická úloha na využití goniometrických funkcí, resp. kosinové věty. Zajímavější úloha je, jak tyto obsahy určit bez využití těchto nástrojů. Pak tuto úlohu považuji za problémovou, vhodnou pro nadanější žáky.

Je-li a délka strany čtverce papíru, pak $|AB| = |AT| = \frac{a}{4}$ a $|AD| = \frac{a}{4}\sqrt{2}$. Klíčovým problémem je určení $|BC|$. Nechť $|BC| = x$.

Pak $|CT| = |DT| = x$ a platí, že $x = |AD| - |AT| = \frac{a}{4}\sqrt{2} - \frac{a}{4} = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{4}$.

Když známe hodnotu x, není již náročné obsahy trojúhelníků ABC a ACD vypočítat.

7.3 Skládání mnohostěnů

Jak jsem uvedla výše, z mnohostěnů, které lze složit ze Sonobovy jednotky, jsem zvolila čtyři, jimiž se budu podrobněji zabývat, a to dvojjehlan, krychli, hvězdicorohý osmistěn a hvězdicorohý dvacetistěn (dále jen osmistěn a dvacetistěn). Přeložené návody převzaté z publikace B. Franco [Franco, 1999] jsou uvedeny v Dodatcích B-E.

Domnívám se však, že není příliš vhodné, aby žáci mnohostěny (zejména osmistěn a dvacetistěn) skládali pouze podle těchto grafických návodů. Ukazuje se, že jejich složení podle tohoto návodu je značně obtížné, jelikož je složité se v nákresech zorientovat. V případě osmistěnu a dvacetistěnu považuji za vhodnější použít jinou variantu návodu, nejlépe kombinaci grafického návodu s již složeným modelem. V případě krychle považuji za vhodné zadat žákům, ať vymyslí sami, jak ze šesti jednotek složit krychli (bez ohledu na pravidelné barevné uspořádání). Pokud by byli zcela bezradní, může jim učitel nejprve napovědět, jakým způsobem do sebe jednotky zasouvat, případně je dovést k tomu, aby si uvědomili, co bude tvořit stěnu krychle. Rovněž v případě trojbokého dvojjehlanu mi přijde pro žáky přínosnější, pokud se pokusí sami odhalit, jakým způsobem lze složit těleso ze tří jednotek, než aby jen postupovali podle návodu.

Složení osmistěnu a zejména dvacetistěnu vyžaduje značnou manuální zručnost a provádí se mnohem lépe ve více lidech. Osmistěn je složen z dvanácti a dvacetistěn z třiceti jednotek. Není nutné, aby žáci skládali všechny potřebné jednotky v hodině matematiky. Mohou je složit doma, nebo například v hodině pracovních činností. Každopádně je však žádoucí, aby na složení obou těles pracovali žáci ve skupinách. Mohou si rozdělit práci se složením jednotek a snadněji složit samotná tělesa. Origami je tedy v tomto případě také prostředím, které rozvíjí kooperativní dovednosti žáků.

Když jsou již žáci dobře seznámeni se způsobem spojování základních jednotek, může pro ně být navazující úlohou objevit a složit další mnohostěny, které lze sestrojit z různého počtu základních jednotek.

7.4 Objevování vlastností složených mnohostěnů

Hlavním cílem sestrojení modelů zmíněných mnohostěnů je, aby žáci mohli zkoumat jejich vlastnosti. Věřím, že žáci budou mít větší zájem o objevování vlastností mnohostěnů, když budou mít k dispozici jejich modely, a ještě větší zájem, pokud si tyto modely zhotovili sami.

První hledisko, ze kterého mohou žáci mnohostěny zkoumat, je počet jejich stěn, vrcholů a hran. Údaje by nejlépe měli zaznamenávat do tabulky (viz Tabulka 7.1). Pro všechny čtyři vymodelované mnohostěny platí Eulerova věta. Domnívám se, že z údajů o trojbokém dvojjehlanu, krychli a hvězdicorohém osmistěnu by žáci mohli být schopni tento vztah odvodit. Spočítat vrcholy a stěny hvězdicorohého dvacetistěnu je sice náročné, ale zdaleka ne tak náročné, jako spočítat jeho hrany. Objevenou Eulerovu větu tedy mohou žáci využít k určení počtu jeho hran výpočtem.

mnohostěn	**počet stěn**	**počet vrcholů**	**počet hran**
trojboký dvojjehlan	6	5	9
krychle	6	8	12
hvězdicorohý osmistěn	24	14	36
hvězdicorohý dvacetistěn			

Tabulka 7.1: Vlastnosti mnohostěnů

Při zkoumání těles by žáci měli daná tělesa popsat, tj. určit jaké mnohoúhelníky tvoří jejich stěny, případně jak vypadá síť jednodušších mnohostěnů. Rovněž by měli zkusit daná tělesa pojmenovat: u dvojjehlanu a krychle by měli dojít k tomu, že se v obou případech jedná o šestistěn, hvězdicorohý osmistěn patří mezi čtyřiadvacetistěny a hvězdicorohý dvacetistěn je šedesátistěn. Učitel je pak může seznámit se zavedenými názvy pro tato tělesa (u hvězdicorohého osmistěnu a dvacetistěnu tyto názvy vyplývají z toho, že tyto mnohostěny lze vytvořit z osmistěnu a dvacetistěnu; podrobněji viz kapitola 7.7). Další hledisko, ze kterého mohou žáci mnohostěny zkoumat, jsou jejich souměrnosti. Žáci se v šestém ročníku v rámci učiva o osové souměrnosti okrajově setkávají i s pojmem rovinová souměrnost. Domnívám se, že by této problematice mohlo být věnováno trochu více času, aby žáci pochopili, že existují nejen souměrné rovinné útvary, ale i souměrná tělesa. U sestrojených modelů mohou tedy hledat tyto roviny souměrnosti, případně i určovat, jaké mnohoúhelníky vzniknou, pokud provedeme řez mnohostěnů těmito rovinami (více viz kapitola 7.7).

7.5 Zobrazování mnohostěnů ve volném rovnoběžném promítání

Volné rovnoběžné promítání je jednou ze zobrazovacích metod, se kterou se žáci na základní škole setkají. Naučí se v něm zobrazovat kvádry a zejména krychli. Domnívám se, že nadaní žáci by mohli být schopni pravidla volného rovnoběžného promítání aplikovat i při zobrazování sestrojených mnohostěnů[3]. Smysl takové činnosti pak spatřuji v tom, že v průběhu zobrazování jsou žáci nuceni uvědomit si a využít řadu vztahů, které v daných mnohostěnech platí. Zobrazení trojbokého dvojjehlanu a pravidelného osmistěnu budou podle mého názoru schopni provést nadanější žáci 8. a 9. ročníku základní školy, zobrazení pravidelného dvacetistěnu může být vhodným tématem do výběrového semináře na gymnáziu.

Nemyslím si však, že by žáci měli obrazy mnohostěnů rýsovat ručně, jelikož je to velmi zdlouhavý a na přesnost náročný proces, kdy jediná chyba znamená nutnost přerýsování celého výkresu. Spíše si myslím, že je vhodné využít skutečnosti, že většina dnešních žáků umí velmi dobře zacházet s počítačem, a pomoci jim naučit se pracovat s některým vhodným rýsovacím programem, což mohou žáci později využít i při řešení jiných geometrických úloh. Věřím, že využití počítače výrazně zvýší motivaci žáků k řešení této úlohy a zároveň jim umožní pochopit, jak jim vhodně zvolený počítačový program může pomoci přesně narýsovat i velmi složité útvary.

7.6 Výpočet povrchu a objemu jednotlivých mnohostěnů

Metrické údaje, které by žáci v rámci zkoumání sestrojených mnohostěnů měli zjistit, jsou jejich povrch a objem. I u těchto úloh platí, že žáci je mohou počítat buď obecně, nebo s konkrétními hodnotami, podle toho, jaká je jejich úroveň matematických znalostí a dovedností. V tabulce 7.2 jsou uvedeny odvozené vzorce pro vý-

[3]V případě hvězdicorohého osmistěnu a dvacetistěnu zřejmě není z důvodu značné komplikovanosti těchto mnohostěnů smysluplné, aby žáci zobrazovali tyto mnohostěny, ale spíše mnohostěny, které vzniknou jejich ořezáním - pravidelný osmistěn, dvacetistěn a pětiboký antihranol (o těchto řezech je pojednáno v kapitole 7.7).

počet povrchů a objemů vymodelovaných mnohostěnů, trojbokého jehlanu, který tvoří „rohy“ obou hvězdicorohých mnohostěnů, a osmistěnu, který vznikne ořezáním hvězdicorohého osmistěnu. Ve všech vzorcích i v dalším textu je a délka výchozího čtverce papíru.

mnohostěn	**povrch**	**objem**
trojboký jehlan	$\frac{(3+\sqrt{3})a^2}{16}$	$\frac{\sqrt{2}a^3}{192}$
trojboký dvojjehlan	$\frac{3a^2}{8}$	$\frac{\sqrt{2}a^3}{96}$
krychle	$\frac{3a^2}{4}$	$\frac{\sqrt{2}a^3}{32}$
osmistěn	$\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$	$\frac{\sqrt{2}a^3}{24}$
hvězdicorohý osmistěn	$\frac{3a^2}{2}$	$\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$
hvězdicorohý dvacetistěn	$\frac{15a^2}{4}$	$\frac{5(3+8\sqrt{2}+\sqrt{5})a^3}{96}$

Tabulka 7.2: Povrch a objem mnohostěnů

Z tabulky 7.2 jsou patrné zajímavé vztahy mezi povrchy a objemy některých mnohostěnů. Například krychle má dvojnásobný povrch oproti dvojjehlanu a poloviční oproti hvězdicorohému osmistěnu. Tuto skutečnost by žáci měli být schopni odvodit bez počítání tak, že si uvědomí, že jednu stěnu krychle tvoří dva trojúhelníky, které jsou shodné s trojúhelníkem, který tvoří stěnu dvojjehlanu a hvězdicorohého osmistěnu. Za zajímavé považuji i to, že vymodelovaná krychle má třikrát větší objem než dvojjehlan. Většina lidí, které jsem požádala, aby odhadli poměr těchto objemů, odhadovala, že krychle má maximálně dvakrát tak velký objem než dvojjehlan. Žáci tak mohou místo běžně zadané úlohy na výpočet objemu daného tělesa řešit úlohu, kdy mají nejprve odhadnout a poté vypočítat poměr objemů obou mnohostěnů. Řada z nich bude nejspíše výsledkem překvapena a tato úloha pak může sloužit jako ukázka toho, že smysly nás někdy matou a pouze přesným výpočtem se můžeme dobrat správného výsledku.

Výpočet povrchu všech čtyř vymodelovaných mnohostěnů (tj. trojbokého dvojjehlanu, krychle, hvězdicorohého osmistěnu a dvacetistěnu) je velmi obdobný, protože jejich stěny jsou tvořeny shodnými rovnoramennými pravoúhlými trojúhelníky. Obsah těchto trojúhelníků mohou žáci snadno určit z rozložené základní jednotky - stačí, když si všimnou (nebo je učitel k tomu navede) že výchozí čtverec obsahuje dohromady šestnáct těchto trojúhelníků, a tak je obsah jednoho trojúhelníku $\frac{a^2}{16}$ a povrchy jednotlivých mnohostěnů jsou příslušným násobkem této hodnoty. Je samozřejmě možné obsah tohoto trojúhelníku vypočítat i klasickým způsobem, tj. pomocí vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku. Pak je nutné nejprve pomocí Pythagorovy věty vypočítat, že jeho ramena mají délku $\frac{\sqrt{2}a}{4}$ a poté podle vzorce vypočítat obsah. Domnívám se, že úlohu zabývající se určením obsahu jedné stěny vymodelovaných mnohostěnů by měl učitel využít k tomu, aby žáci pochopili, že se často vyplatí hledat alternativní způsoby řešení oproti klasickým, jelikož jim mohou ušetřit mnoho času i výpočtů[4]. Výpočet povrchu vymodelovaných mnohostěnů je oproti výpočtům objemů mnohem jednodušší, a tak se nabízí využít této skutečnosti k vnitřní diferenciaci výuky. Méně nadaní žáci určují u daného mnohostěnu jeho povrch a jejich nadanější spolužáci objem.

Vyjma krychle jsou výpočty objemů mnohostěnů založeny na výpočtu objemu jehlanu, a tak je nemohou provádět žáci, kteří neznají vzorec pro výpočet jehlanu. Vymodelování některého z těchto těles by však mohlo být úvodní motivací k tomu, aby žáci cítili potřebu zjistit, jak lze objem jehlanu vypočítat. Nyní stručně nastíním, jakým způsobem lze určit objem všech čtyř vymodelovaných mnohostěnů.

Výpočet objemu vymodelované krychle je na rozdíl od zbývajících tří mnohostěnů poměrně jednoduchý. Žáci potřebují pouze určit délku její hrany, což mohou učinit pomocí Pythagorovy věty s využitím rozložené základní jednotky[5]. V případě krychle jsou zřejmě zajímavější úlohy zabývající se výpočty objemů těles, která vzniknou jejími řezy (podrobněji v kapitole 7.7.2).

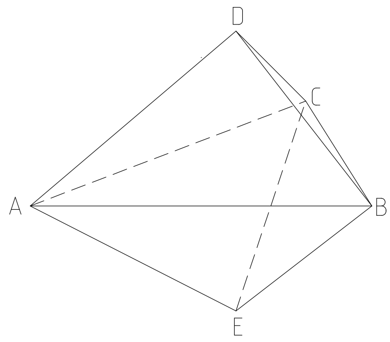
7.6.1 Objem trojbokého dvojjehlanu

Trojboký dvojjehlan $ABCDE$ (obrázek 7.4) je možné rozdělit na dva shodné trojboké jehlany $ABCD$ a $ABCE$, jejichž podstavou je rovnostranný trojúhelník ABC o délce strany $\frac{a}{2}$ a zbývající stěny tvoří shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky, jejichž ramena mají délku $\frac{\sqrt{2}a}{4}$.

Při výpočtu objemu dvojjehlanu by tedy žáci měli objevit, že stačí vypočítat objem jednoho z jehlanů a ten pak vynásobit dvěma. Aby žáci byli schopni vypočítat objem jehlanu, musí si uvědomit, že potřebují určit obsah rovnostranného trojúhelníku, který tvoří jeho podstavu, a výšku jehlanu. Výpočet obsahu rovnostranného trojúhelníku, když je známá délka jeho strany, je pro žáky, kteří umí aplikovat Pythagorovu větu, nepříliš náročná úloha, která se mimo jiné běžně vyskytuje v učebnicích. Oproti tomu nalezení způsobu, jak vypočítat výšku jehlanu, vyžaduje od žáků dobrou prostorovou představivost. Potřebují si uvědomit, že výška jehlanu

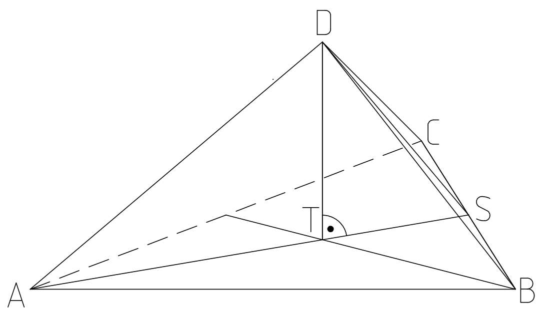
[4]V průběhu experimentů popsaných v kapitole 8 se ukázalo, že většina žáků si nevšimla možnosti jednoduchého řešení a raději použila Pythagorovu větu. Při porovnání obou postupů však žáci pochopili výhodnost alternativního způsobu řešení.

[5]Až při přípravě experimentu v osmém ročníku ZŠ jsem si uvědomila, že délku hrany krychle je možné vypočítat i bez pomoci Pythagorovy věty. Lze ji určit odmocněním hodnoty obsahu jedné stěny krychle. V průběhu experimentu někteří žáci samostatně objevili právě tento způsob řešení.



Obrázek 7.4: Trojboký dvojjehlan

prochází těžištěm podstavného rovnostranného trojúhelníku a je odvěsnou v pravoúhlých trojúhelnících ATD a TSD (obrázek 7.5). Pokud si oni sami nebo učitel vyrobí model dvojjehlanu pomocí origami z průhledné folie, je pak snadné pomocí špejlí vymodelovat jeho výšku a jednu z těžnic podstavy, což umožní žákům nahlédnout, jaký pravoúhlý trojúhelník mohou k výpočtu výšky využít. Mám zkušenost, že řada žáků má při řešení metrických úloh v prostoru problém se orientovat v zobrazeních těles ve volném rovnoběžném promítání a pravoúhlé trojúhelníky, které jsou pro řešení úloh klíčové, v nich zkrátka „nevidí“. Obzvláště jim tedy může pomoci, když si situaci pomocí špejlí vymodelují.



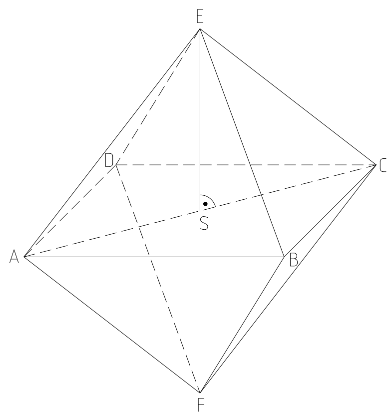
Obrázek 7.5: Výpočet objemu trojbokého jehlanu

K výpočtu výšky je možné využít buď $\triangle ATD$, nebo $\triangle TSD$. Využití $\triangle TSD$ je však výhodnější, jelikož z rozložené základní jednotky lze snadno určit, že $|SD| = \frac{a}{4}$, zatímco $|AD|$ je nutné nejprve pomocí Pythagorovy věty vypočítat. Tato skutečnost je opět vhodným podnětem k diskusi se žáky na téma hledání nejvhodnějšího, tzn. co nejjednoduššího, způsobu řešení. Když vypočítáme délku úsečky SD a délku úsečky ST, jež je třetinou těžnice podstavného trojúhelníku, můžeme pomocí Pythagorovy věty vypočítat výšku jehlanu a posléze jeho objem podle vzorce $V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v$. [6]

[6] V průběhu experimentu se ukázalo, že výpočet objemu dvojjehlanu je poměrně komplexní a

7.6.2 Objem hvězdicorohého osmistěnu

Výpočet objemu vymodelovaného hvězdicorohého osmistěnu představuje poměrně komplexní úlohu. Žáci musí nejprve objevit, že mnohostěn lze „rozřezat“ na osm shodných trojbokých jehlanů[7], a jeden pravidelný osmistěn, jehož hrana má stejnou délku jako strany podstav trojbokých jehlanů. Tato úloha je podrobněji popsána v kapitole 7.7.3. Výpočet objemu trojbokého jehlanu je popsán v kapitole 7.6.1, objem pravidelného osmistěnu lze provést obdobným způsobem. Pravidelný osmistěn $ABCDEF$ je tvořen dvěma pravidelnými čtyřbokými jehlany $ABCDE$ a $ABCDF$ (obrázek 7.6).



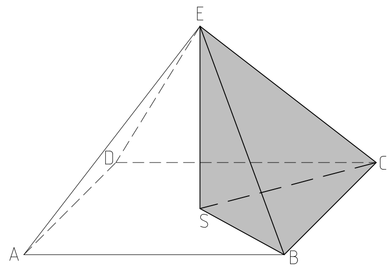
Obrázek 7.6: Pravidelný osmistěn

Podstavu čtyřbokého jehlanu tvoří čtverec o délce strany $\frac{a}{2}$, jeho obsah je tedy $\frac{a^2}{4}$. Výšku čtyřbokého jehlanu lze vypočítat pomocí Pythagorovy věty z trojúhelníku SCE, kde $|CE| = \frac{a}{2}$ a $|SC| = \frac{\sqrt{2}a}{4}$. Pak již pomocí vzorce pro výpočet jehlanu lze objem vypočítat. Je zajímavé, že pravidelný osmistěn má stejný objem, jako všech osm „odřezaných“ trojbokých jehlanů dohromady (viz Tabulka 7.2). Ve skutečnosti totiž lze pravidelný osmistěn rozdělit na osm shodných trojbokých jehlanů, které jsou totožné s osmi jehlany, které byly z hvězdicorohého osmistěnu odříznuty (jeden z těchto jehlanů je vyznačen na obrázku 7.7).

Této skutečnosti by rovněž bylo možné využít při výpočtu objemu pravidelného čtyřbokého jehlanu, pokud by si toho žáci všimli. Domnívám se však, že to není příliš pravděpodobné a že je vhodnější se žáky toto diskutovat až poté, co vypočítají, že objem pravidelného osmistěnu je stejný jako objem osmi odříznutých trojbo-

pro žáky náročná úloha. Aby její zařazení do výuky mělo smysl, je zapotřebí na její řešení vyhradit dostatek času.

[7] Tyto jehlany jsou zároveň shodné s jehlany, které tvoří trojboký dvojjehlan (viz obrázek 7.4.



Obrázek 7.7: Trojboký jehlan v pravidelném čtyřbokém jehlanu

kých jehlanů. Učitel pak může dát žákům k dispozici model pravidelného osmistěnu a modely osmi trojbokých jehlanů, aby si tento jev mohli sami vymodelovat a lépe představit. Ačkoliv jak pravidelný osmistěn, tak trojboké jehlany je možné vymodelovat pomocí origami, domnívám se, že vzhledem k náročnosti sestrojení těchto modelů je vhodnější vyrobit klasické papírové modely (sítě obou mnohostěnů jsou zobrazeny v Dodatku G).

7.6.3 Objem hvězdicorohého dvacetistěnu

Výpočet hvězdicorohého dvacetistěnu v sobě skrývá velmi náročný úkol, a to výpočet objemu pravidelného dvacetistěnu, který vznikne ořezáním dvaceti trojbokých jehlanů (výpočet jejich objemu je uveden v kapitole 7.6.1). Přesný výpočet objemu pravidelného dvacetistěnu představuje poměrně komplexní a náročnou úlohu, vhodnou pro nadané žáky na střední škole. Se žáky základní školy lze objem určit přibližně. Výpočet je založen na rozdělení dvacetistěnu na dvacet shodných trojbokých jehlanů. Podstavou těchto jehlanů je rovnostranný trojúhelník tvořící stěnu dvacetistěnu a výšku jehlanu lze vypočítat pomocí goniometrických funkcí (díky tomu dojde k zaokrouhlení a určité nepřesnosti výsledku). Výpočet zde nebudu uvádět, jelikož není z hlediska cílů této práce důležitý. Tuto úlohu zmiňuji hlavně proto, abych poukázala na to, že origami může být cesta, jak motivovat žáky k řešení této náročné úlohy. Žáci zřejmě cítí větší potřebu vypočítat objem mnohostěnu, který sami sestrojili, než mnohostěnu zadaného pouze formou délek jeho hran. Nevýhodou origami pro řešení objemu hvězdicorohého dvacetistěnu je skutečnost, že sestrojený model nepomáhá žákům vidět způsob rozdělení pravidelného dvacetistěnu na jehlany. Při řešení této úlohy je vhodné využít i jiný model pravidelného dvacetistěnu, který žákům umožní o rozdělení na jehlany získat představu.

7.7 Řezy mnohostěnů

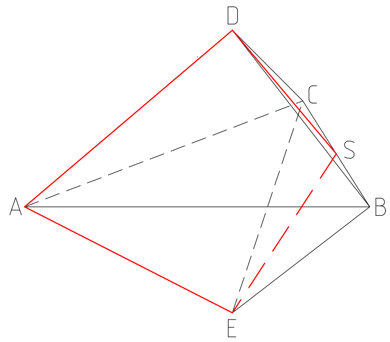
Modely mnohostěnů mohou sloužit k řešení mnoha dalších úloh, které vycházejí z řezů těchto mnohostěnů a které nepochybně vedou k rozvíjení prostorové představivosti. Ačkoliv je tato problematika většinou probírána až na střední škole v rámci stereometrie, domnívám se, že právě z důvodu rozvíjení prostorové představivosti je žádoucí uvedené úlohy zařadit do výuky již na základní škole. Většina z mnohostěnů, které se v úlohách objevují, jsou mnohostěny, se kterými se žáci běžně nesetkávají. Tím spíše však během řešení úloh budou žáci svoji prostorovou představivost muset zapojovat (a tak snad i rozvíjet), jelikož nebudou moci vycházet z dosavadních zkušeností.

7.7.1 Řezy trojbokého dvojjehlanu

Jak bylo uvedeno v kapitole 7.4, u sestrojených mnohostěnů mohou žáci hledat roviny souměrnosti. U dvojjehlanu se nabízí, aby odvodili, jaké mnohoúhelníky vzniknou řezy těmito rovinami. Zadání úlohy by mohlo znít: „Co nejpřesněji popište mnohoúhelníky, které jsou řezy dvojjehlanu jeho rovinami souměrnosti, a mnohostěny, které těmito řezy vzniknou.“ Trojboký dvojjehlan má celkem čtyři roviny souměrnosti - roviny *ABC*, *EBD*, *ECD* a *EAD* (obrázek 7.4). Řez dvojjehlanu rovinou *ABC* tvoří rovnostranný trojúhelník, což zřejmě nebude žákům činit velké potíže určit. Není naopak na první pohled patrné, že řez dvojjehlanu každou ze zbývajících tří rovin souměrnosti je deltoid (obrázek 7.8).

Rozříznutím dvojjehlanu rovinou *ABC* vzniknou dva shodné trojboké jehlany a zbývajícími rovinami dva shodné kosé čtyřboké jehlany. S kosými jehlany se žáci příliš často nesetkávají, a tak mají v rámci této úlohy alespoň možnost se s jedním seznámit. Měli by si rovněž uvědomit, že tyto dva rozdílné mnohostěny (kolmý trojboký jehlan a kosý čtyřboký jehlan) mají shodné objemy. Shodnost jejich objemů vyplývá ze skutečnosti, že každý z nich má poloviční objem oproti výchozímu dvojjehlanu.

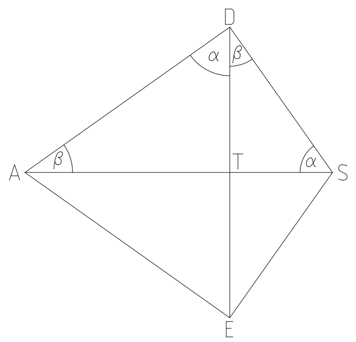
Z vlastní zkušenosti vím, že deltoid je útvar, který žáci z běžného života sice dobře znají (ačkoliv mu většinou říkají drak), ale neumějí jej geometricky popsat a uvést, čím se liší od obecného čtyřúhelníku. V rámci této úlohy tak budou s pomocí učitele nuceni uvědomit si, že deltoid je konvexní čtyřúhelník, který má právě jednu osu souměrnosti a že jeho úhlopříčky jsou navzájem kolmé a jedna z nich je půlena druhou. Jsem přesvědčená, že je zapotřebí, aby se žáci seznamovali s rozličnými rovinnými útvary a byli schopni je od sebe odlišit. V učebnicích se však velmi často setkávají jen s určitými typy mnohoúhelníků a navíc ve stále týchž polohách



Obrázek 7.8: Řez trojbokého dvojjehlanu

(například pokud je deltoid zmíněn v rámci nějaké úlohy, bývá zobrazen tak, že jeho osa souměrnosti je svislá). Nemyslím si, že je důležité, aby žáci znali pojem deltoid, ale měli by být schopni tento útvar na základě obrázku přesně geometricky popsat.

Deltoid vzniklý řezem dvojjehlanu (obrázek 7.9) mohou žáci dále zkoumat, tj. mohou určit jeho obsah a úhly, které svírají jeho strany. O tomto deltoidu víme následující údaje. Úsečka DE je zároveň výškou dvojjehlanu a úsečka AS je těžnicí rovnostranného trojúhelníku ABC (způsob výpočtu jejich délek je uveden v kapitole 7.6.1). Platí, že $|AS| = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{3}$ a $|DE| = \frac{a}{6} \cdot \sqrt{6})$[8]. Bod T je těžištěm rovnostranného trojúhelníku ABC a zároveň celého dvojjehlanu, a proto $|ST| = \frac{1}{3}|AS|$ a $|AT| = \frac{2}{3}|AS|$. Z rozložené základní jednotky dále víme, že $|DS| = |ES| = \frac{a}{4}$ a $|AD| = |AE| = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

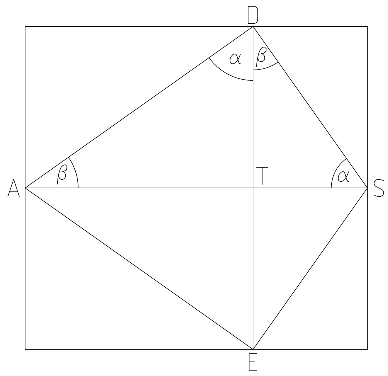


Obrázek 7.9: Deltoid $AESD$

Všechny tyto údaje lze využít k výpočtu obsahu deltoidu různými způsoby. Deltoid lze rozložit na čtyři pravoúhlé trojúhelníky, jejichž délky stran známe, a můžeme

[8] Zde, stejně jako v celé této kapitole je a délka strany výchozího čtverce papíru.

tedy vypočítat jejich obsah. Deltoid můžeme rovněž rozložit na dva shodné trojúhelníky ASD a AES, u nichž známe délku strany AS i příslušné výšky, a můžeme tak určit jejich obsah. Nebo si můžeme všimnout, že deltoid lze doplnit na obdélník (obrázek 7.10), jehož obsah je dvojnásobný oproti obsahu deltoidu a lze jej vypočítat podle vzorce $S = |AS| \cdot |ED|$.



Obrázek 7.10: Deltoid $AESD$ doplněný na obdélník

Všechny tři uvedené způsoby výpočtu obsahu deltoidu jsou založeny na rozložení, případně doplnění, deltoidu na útvary, jejichž obsah umíme určit. K řešení této úlohy je však možné přistoupit i jinak. Pokud žáci před řešením této úlohy vypočítali objem trojbokého jehlanu $ABCD$, který vznikne řezem dvojjehlanu rovinou ABC, mohou jej využít k výpočtu obsahu deltoidu. Kosý čtyřboký jehlan $AESDB$, jehož podstavou je právě deltoid, má totiž stejný objem jako trojboký jehlan $ABCD$ a z rozložené základní jednotky snadno vidíme, že jeho výška je $\frac{a}{4}$. Pak již ze vzorce pro výpočet objemu jehlanu můžeme snadno vypočítat obsah jeho podstavy, tedy deltoidu.

Skutečnost, že obsah deltoidu lze vypočítat různými způsoby je opět možné při výuce využít k tomu, aby žáci pochopili, že většinou existuje více způsobů řešení, proto je na místě hledat řešení vhodné a efektivní.

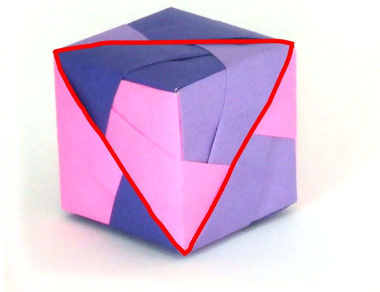
Celý proces výpočtu obsahu deltoidu vyžaduje od žáků, aby si uvědomili celou řadu vztahů mezi úsečkami a opakovaně používali Pythagorovu větu. Výpočet je poměrně časově i početně náročný a je opět vhodný spíše pro nadanější žáky. Méně nadaní žáci mohou počítat obsah rovnostranného trojúhelníku, který vznikne řezem rovinou ABC a na základě výsledků mohou hodnoty obsahů obou útvarů porovnat. Je zajímavé, jakým způsobem se obsahy liší; obsah trojúhelníku ABC je $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$ a obsah deltoidu je $\frac{a^2\sqrt{2}}{16}$. Bez určení přibližných hodnot obou odmocnin by žáci měli být schopni odvodit, který z obsahů je větší.

Dalším problémem, který mohou žáci v souvislosti s deltoidem řešit, je, jaké jsou velikosti vnitřních úhlů deltoidu. Podle věty *sss* o podobnosti trojúhelníků platí, že $\triangle TSD \sim \triangle TDA \sim \triangle DSA$, a proto $|\angle SDA| = 90°$. Tuto skutečnost lze zjistit i ověřením pravoúhlosti trojúhelníku ASD aplikací Pythagorovy věty. Pomocí goniometrických funkcí pak můžeme v některém z pravoúhlých trojúhelníků určit velikost úhlů α a β (obrázek 7.9). Zajímavou otázkou rovněž je, zda lze deltoidu $AESD$ opsat kružnici, případně, kde je její střed. Vzhledem k tomu, že trojúhelníky SDA a AES jsou pravoúhlé, leží jejich vrcholy D a E na Thaletově kružnici sestrojené nad úsečkou AS. Thaletova kružnice je zároveň kružnicí opsanou deltoidu $AESD$.

7.7.2 Řezy krychle

Krychle je mnohostěn, jehož řezy se žáci na střední škole zabývají nejčastěji. Model krychle sestrojený pomocí origami zřejmě není nejvhodnější model, který žákům pomůže pochopit problematiku konstrukce řezů ve volném rovnoběžném promítání. Manipulace s ním by jim však mohla pomoci představit si, jak vypadají některé řezy krychle v prostoru. Z vlastní zkušenosti vím, že řada žáků má problémy ve volném rovnoběžném promítání vidět samotnou krychli, natož aby viděli, jaké útvary vzniknou jejími řezy. Proto je účelné, aby pracovali s modely krychle a nejen s jejími zobrazeními ve volném rovnoběžném promítání.

Zde však chci uvést jednu úlohu, která podle mého názoru plně využívá možnosti origami a jejíž řešení je až překvapující. Mohou ji však řešit již žáci na druhém stupni základní školy, když se podrobněji zabývají krychlí. Z modelu krychle jakoby „vykukují“ čtyři trojboké jehlany, které jsou shodné s trojbokými jehlany, ze kterých se skládá výše zmíněný dvojjehlan. Jeden z těchto jehlanů je vyznačen na obrázku 7.11.



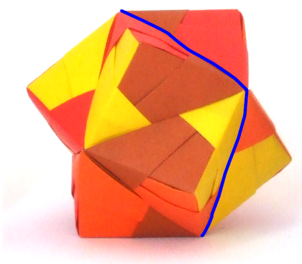
Obrázek 7.11: Řez krychle

Otázkou je, zda po odříznutí všech čtyř těchto jehlanů z krychle něco zbude a pokud ano, o jaký mnohostěn se jedná. Domnívám se, že toto je pro žáky poměrně náročná úloha na prostorovou představivost. Učitel může žákům, kteří ji nemají příliš dobře rozvinutou, napomoci rozkládacím modelem krychle (síť tohoto modelu je zobrazena v Dodatku H), který umožňuje postupné odklopení jednotlivých jehlanů, a dovést je tak k tomu, že po odříznutí čtyř jehlanů zbude pravidelný čtyřstěn, jehož hrana má délku stejnou jako úhlopříčka stěny krychle. Je to rovněž způsob, jak přejít od krychle jakožto mnohostěnu žákům dobře známému k mnohostěnu, jímž se můžeme chtít se žáky podrobněji zabývat, tj. pravidelnému čtyřstěnu.

Navazující úlohou potom je určit, jakou část objemu původní krychle tento pravidelný čtyřstěn zaujímá. Postupy popsanými v kapitole 7.6 mohou žáci určit objemy krychle a jehlanu a odečtením čtyřnásobku objemu jehlanu od objemu krychle zjistit, že pravidelný čtyřstěn zaujímá třetinu objemu krychle (viz Tabulka 7.2). Lze samozřejmě také vypočítat objem pravidelného čtyřstěnu samostatně, obdobným způsobem jako objem trojbokého jehlanu. Ačkoliv má pravidelný čtyřstěn stejný objem jako dva trojboké jehlany dohromady, není možné jej na tyto dva jehlany rozříznout.

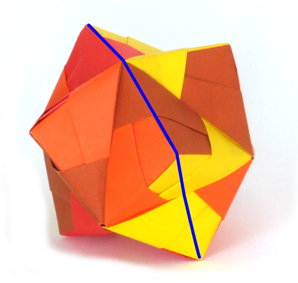
7.7.3 Řezy hvězdicorohého osmistěnu

U hvězdicorohého osmistěnu nás stejně jako u trojbokého dvojjehlanu může zajímat, jaké útvary jsou řezem jeho rovinami souměrnosti. I hvězdicorohý osmistěn má dva typy rovin souměrnosti. Řezem vedeným první z nich (obrázek 7.12) je čtyřúhelník, který má všechny strany stejně dlouhé a protější strany rovnoběžné.



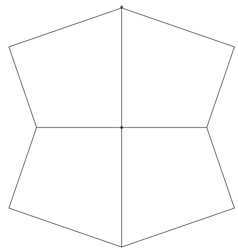
Obrázek 7.12: Řez hvězdicorohého osmistěnu 1

Může se tedy jednat o kosočtverec, nebo čtverec. Žáci tedy musí hlavně zdůvodnit, proč je řezem čtverec a nikoliv kosočtverec, což mohou odvodit z toho, že daný čtyřúhelník má stejně dlouhé úhlopříčky. tato úloha je tedy vede k tomu, aby si uvědomili, jak se od sebe jednotlivé typy rovnoběžníků liší.



Obrázek 7.13: Řez hvězdicorohého osmistěnu 2

Řezem rovinou souměrnosti druhého typu (obrázek 7.13 vznikne nekonvexní osmiúhelník, u kterého umíme snadno určit délky všech jeho stran i dvou na sebe kolmých úhlopříček a který je složen ze čtyř deltoidů, které jsou shodné s deltoidem, který vznikl řezem dvojjehlanu (obrázek 7.14).



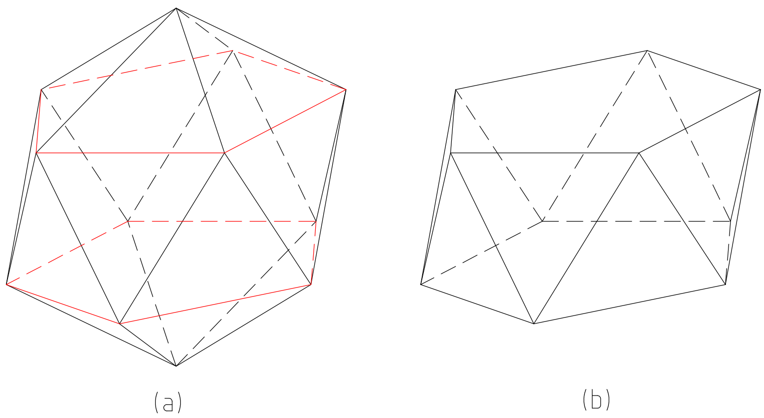
Obrázek 7.14: Nekonvexní osmiúhelník

Žáci mohou dále zkoumat vlastnosti tohoto osmiúhelníku, zejména určovat velikosti jeho vnitřních úhlů a jeho obsah. Podrobný rozbor těchto úloh již neuvádím, jelikož je velmi obdobný jako postup u deltoidu uvedený v kapitole 7.7.1.

Řezů hvězdicorohého osmistěnu se týká také již dříve zmíněný problém, který úzce souvisí s výpočtem objemu tohoto mnohostěnu. Tímto problémem je odhalení mnohostěnu, který vznikne odřezáním všech osmi trojbokých jehlanů z hvězdicorohého osmistěnu. Úkolem pro žáky je opět co nepřesněji vzniklý mnohostěn popsat, případně načrtnout, jak vypadá jeho síť, nebo tento mnohostěn vymodelovat např. ze stavebnice Polydron. Hledaným mnohostěnem je pravidelný osmistěn, výpočet jeho výšky a objemu je nastíněn v kapitole 7.6.2.

7.7.4 Řezy hvězdicorohého dvacetistěnu

V případě hvězdicorohého dvacetistěnu je pro žáky základní otázkou, jaký mnohostěn vznikne ořezáním všech dvaceti trojbokých jehlanů. Žáci by měli odvodit, že se bude jednat o mnohostěn, který má dvacet shodných stěn tvaru rovnostranného trojúhelníku. Pro některé žáky však zřejmě i poté bude náročné představit si, jak výsledný mnohostěn vypadá. Proto považuji za vhodné, aby tento mnohostěn vymodelovali, např. pomocí stavebnice Polydron. Další možností je navrhnout síť výsledného pravidelného dvacetistěnu. Obdobnou úlohou je vymodelování či navržení sítě mnohostěnu, který vznikne odříznutím dvou pětibokých jehlanů z dvacetistěnu (obrázek 7.15a). Žáci se tak mohou seznámit s pětibokým antihranolem (obrázek 7.15b).



Obrázek 7.15: Pravidelný dvacetistěn a pětiboký antihranol

7.8 Kombinatorické úlohy

Sestavování mnohostěnů z různobarevných jednotek vede při správném postupu (viz přílohy B-E) ke vzniku modelů s barevným uspořádáním, které je podnětem pro řešení dalších úloh. Například ze tří barev lze složit dvě krychle, jejichž uspořádání barev není identické. Úkolem žáků je určit, zda jsou tyto dvě krychle stejné, případně popsat, čím se od sebe liší.

Nejzajímavější z hlediska uspořádání barev je však hvězdicorohý dvacetistěn složený ze šesti různých barev. V každém z dvaceti vrcholů trojbokých jehlanů se stýkají stěny tří barev, přičemž ve vrcholech dvou protějších jehlanů jsou vždy barvy stejné, pouze opačně uspořádané (jednou ve směru a podruhé proti směru hodinových ručiček). Úlohou pro žáky je určit, zda jsou ve vrcholech jehlanů zastoupeny všechny barevné kombinace, které lze ze šesti barev vytvořit. Jinými slovy žáci řeší kombinatorickou úlohu, kdy hledají, kolik lze vytvořit trojic ze šesti prvků. Žáci základní školy sice ještě neznají příslušný vzorec, který umožní počet kombinací vypočítat, přesto však mohou tuto úlohu řešit. Klíčem ke správnému řešení pro ně je, aby vymysleli systém, jak všechny kombinace (kterých je dvacet) vypsat tak, aby na žádnou nezapomněli a žádnou zároveň nezopakovali vícekrát. Jeden takový systém popisuje tabulka 7.3. Každý řádek představuje jednu kombinaci, místo šesti barev je uvedeno šest písmen.

A	B	C			
A	B		D		
A	B			E	
A	B				F
A		C	D		
A		C		E	
A		C			F
A			D	E	
A			D		F
A				E	F
	B	C	D		
	B	C		E	
	B	C			F
	B		D	E	
	B		D		F
	B			E	F
		C	D	E	
		C	D		F
		C		E	F
			D	E	F

Tabulka 7.3: Systém nalezení kombinací tří prvků ze šesti

Vzhledem k tomu, že hvězdicorohý dvacetistěn je tvořen dvaceti jehlany a každá barevná kombinace se opakuje dvakrát, je zřejmé, že v jednom modelu je zastoupena pouze polovina možných kombinací. Navazující úlohou je sestavit druhý model hvězdicorohého dvacetistěnu, ve kterém bude zastoupeno zbývajících deset barevných kombinací. Žáci střední školy, kteří již mají z oblasti kombinatoriky hlubší znalosti, mohou řešit úlohu, kolik existuje různých hvězdicorohých mnohostěnů z hlediska výskytu barevných kombinací, či jaká je pravděpodobnost, že dva lidé složí dva modely obsahující ve vrcholech jehlanů stejné barevné kombinace.

Kapitola 8

Využití origami ve výuce

V této kapitole je popsán průběh celkem čtyř vyučovacích hodin matematiky, ve kterých bylo využito origami k řešení některých úloh uvedených v kapitolách 6 a 7. Úlohy jsem vyzkoušela ve dvou třídách, v osmém ročníku základní školy a prvním ročníku čtyřletého gymnázia. Pro obě třídy je charakteristický malý počet žáků, což je dáno charakterem celé školy. Jsou dva důvody, proč jsem k provedení experimentu zvolila právě tyto třídy.

Tím prvním je, že jsem považovala malý počet žáků za velkou výhodu. Věřila jsem, že pro mě jako pro učitele s málo zkušenostmi bude snazší v tomto prostředí pracovat. Navíc jsem si byla vědoma, že jak já, tak žáci nemáme s využitím origami ve výuce matematiky žádnou zkušenost. Proto jsem se domnívala, že bude snazší řídit průběh celého experimentu v menší skupině žáků.

Druhým důvodem bylo, že jsem po dobu necelých dvou let na této škole působila jako učitel matematiky a chemie na částečný úvazek, a tak znám některé ze žáků v obou třídách. Měla jsem tedy alespoň u některých žáků určitou představu o tom, co od nich mohu očekávat. Tuto skutečnost jsem považovala za žádoucí z hlediska hladkého průběhu celého experimentu.

8.1 Popis vyučovacích hodin v 8. ročníku ZŠ

Některé z úloh vycházejících ze skládání rovnostranného trojúhelníku, základní jednotky a krychle jsem vyzkoušela v rámci dvou vyučovacích hodin v 8. ročníku jedné pražské základní školy. Během obou hodin bylo přítomno všech šest žáků této třídy, tři chlapci a tři děvčata. Výuka probíhala během 3. a 5. vyučovací hodiny v jednom dni.

8.1.1 Cíle

Zařazení origami do výuky v osmém ročníku mělo naplnit několik cílů. Mělo žákům ukázat jiný, pro ně nezvyklý způsob geometrického modelování rovinných i prostorových útvarů. Žáci v prostředí origami měli být schopni zdůvodnit vlastnosti vymodelovaných trojúhelníků a hledat maximální rovnostranný trojúhelník vepsaný do čtverce. Dále se měli seznámit se základní symbolikou origami a naučit se rozumět a postupovat podle grafického návodu. Cílem rovněž bylo, aby žáci nalezli co nejjednodušší způsob výpočtu povrchu a objemu sestrojeného modelu krychle.

8.1.2 Průběh

V úvodu jsem žáky krátce seznámila s tím, co je bude v rámci dvou nadcházejících vyučovacích hodin čekat, a s jejich pomocí jsem stručně vymezila, co je origami. Poté jsem jim demonstrovala složení rovnostranného trojúhelníku ze čtvercového papíru prvním postupem, který je popsán v kapitole 6.1.1. Žáci seděli v jedné řadě a já mezi nimi a předváděla jsem jim jednotlivé kroky skládání, které oni společně se mnou prováděli. Ukázalo se však, že toto rozmístění nebylo nejvhodnější, jelikož žáci sedící na kraji řady pořádně neviděli jednotlivé kroky skládání, které jsem jim předváděla.

Po dokončení skládání následovala diskuse o vlastnostech složeného trojúhelníku. Většina žáků uvedla, že se jedná o rovnostranný trojúhelník, při podrobnějším dotazování se však ukázalo, že jsou si jisti pouze jeho rovnoramenností a rovnostrannost nejsou schopni prokázat. Proto bylo jejich dalším úkolem vymyslet způsob, jak ve čtverci papíru složit trojúhelník, u něhož by si byli jisti, že je rovnostranný. Nejprve jsme diskutovali další vlastnosti rovnostranného trojúhelníku, které by nám mohly napomoci způsob skládání objevit. Mým cílem bylo navést žáky k tomu, že mohou využít osu souměrnosti rovnostranného trojúhelníku a rovnostranný trojúhelník vymodelovat způsobem popsaným v kapitole 6.1.2, což se jim nakonec podařilo.

Poté jsem položila žákům otázku, zda je možné ve čtverci složit větší rovnostranný trojúhelník. Po velice krátkém přemýšlení všichni žáci odpověděli, že to možné není. Vyzvala jsem je, ať se nad tím ještě jednou pořádně zamyslí. Ve skupině chlapců pak vypukla poměrně bouřlivá diskuse, kdy jeden z nich se domníval, že existuje větší trojúhelník. Zbývající dva si již vymodelovaný trojúhelník složili tak, aby s ním mohli v novém čtverci manipulovat, a ve čtverci s ním různě otáčeli a snažili se argumentovat, že žádný větší trojúhelník se tam již nevejde. První žák jim pak ale ukázal, že vhodným pootočením trojúhelníku vznikne ještě trochu místa pro jeho zvětšení. Na základě toho, že si chlapci trojúhelník poskládali tak, aby s ním mohli manipulovat, jsem ostatním doporučila, aby si svůj již vymodelovaný rovnostranný trojúhelník vystřihli. Po krátké diskusi pak žáci došli k závěru, že pokud rovnostranný trojúhelník, který má délku strany stejnou, jako je délka čtverce, trochu pootočí kolem jednoho ze společných vrcholů, je pak možné trojúhelník ještě trochu zvětšit. Nakonec všichni žáci samostatně, nebo s pomocí vystřiženého maximálního trojúhelníku, který jsem posléze každému dala, odvodili, jak lze do čtverce umístit největší možný rovnostranný trojúhelník.

Následovala společná diskuse o přesné poloze maximálního rovnostranného trojúhelníku ve čtverci, tj. velikosti úhlů α a β (obrázek 6.6). Žáci velice rychle uvedli, že velikost obou úhlů je 15°. Popsali velice dobře, jak k tomuto číslu došli, ale nebyli schopni zdůvodnit, proč by oba úhly měly mít stejnou velikost. Někteří z nich to podle mého názoru chápali, ale nebyli schopni to vysvětlit. Nakonec jsem tedy provedla toto zdůvodnění sama postupem popsaným v kapitole 6.6.1, který žáci snadno pochopili.

Následujícím úkolem pro žáky bylo vymyslet postup složení maximálního rovnostranného trojúhelníku. Aby žáci nezačali vymýšlet nesmyslné postupy, rovnou jsem jim poskytla nápovědu, aby využili toho, že již umí skládáním papíru vymodelovat úhel o velikosti 30°. Chtěla jsem žáky přivést k tomu, aby nejprve vymodelovali úhel o velikosti 30° a poté jeho osu. Ukázalo se však, že jsem neměla celý postup detailně promyšlen. Žáci sice snadno vymodelovali jeden úhel o velikosti 15°, ale poté jim činilo potíže vymodelovat druhý, který by byl správně zorientovaný. V tu chvíli vznikl ve třídě trochu zmatek, kdy žáci nevěděli, jak dále postupovat. Situaci jsem vyřešila dost nevhodným způsobem - vyzvala jsem jednoho ze žáků, který již postup objevil, aby jej předvedl ostatním. On však nebyl schopen svůj postup přehledně popsat a ostatní mu nevěnovali velkou pozornost. Bylo by zřejmě účelnější, abych objevení postupu skládání věnovala podstatně víc času. Žáci, kteří by postup odhalili, by měli za úkol jej popsat a zakreslit, s ostatními bych o problému více diskutovala. Vzhledem k tomu, že jsem chtěla část hodiny ještě věnovat skládání krychle, rozhodla jsem se ukončit činnost týkající se skládání maximálního rovnostranného trojúhelníku, a tak ale zůstala tato problematika některým žákům nevyjasněna.

Na závěr série úloh týkajících se skládání rovnostranného trojúhelníku jsem ještě žákům položila otázku, proč si myslí, že je v publikacích o origami uváděn většinou první postup skládání. Žáci hlavní příčinu (méně přehybů, a tím pádem větší přesnost) odhalili velice snadno a rychle. Oproti připravenému scénáři jsem však zapomněla se žáky diskutovat porovnání konstrukcí pomocí origami a pomocí pravítka a kružítka.

Zbývající část druhé vyučovací hodiny jsem věnovala některým úlohám týkajících se skládání základní jednotky a následně krychle. Nejprve dostali žáci grafický návod, jak složit základní jednotku (viz kapitola 7.1), podle kterého měli jednotku složit. Žáci, kteří měli jednotku složenou rychleji, dostali za úkol určit čtyřúhelník, který základní jednotka představuje, a velikost jeho vnitřních úhlů.

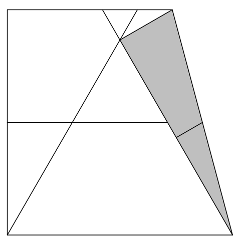
Když žáci skládání dokončili, někteří se sami ptali, k čemu jim je to, co složili. Jeden žák uvedl, že si myslí, že z jednotky půjde složit krychle a že to již dříve ve škole dělali (jak jsem se později dozvěděla, žáci dříve již skládali krychli z původní Sonobovy jednotky). Nechala jsem žáky ať se rozdělí do skupin, ve kterých se pokusí ze šesti jednotek krychli složit. Podle očekávání se rozdělili na tříčlennou dívčí skupinu, jednu dvojčlennou chlapeckou skupinu a zbývající žák chtěl pracovat samostatně. Všem jsem dala k dispozici potřebný počet základních jednotek. Žák pracující samostatně velmi rychle objevil systém zasouvání jednotek do sebe, obě zbývající skupiny potřebovaly nápovědu, jak do sebe jednotky zasouvat. Poté však již krychli velice snadno a rychle složili. Jejich předchozí zkušenost se skládáním Sonobovy kostky zde zřejmě hrála významnou roli.

Další úlohou pro žáky bylo co nejjednodušším způsobem bez měření určit povrch krychle, jestliže ví, že výchozí čtverec papíru má délku strany 15 cm. Jelikož nezbývalo mnoho času, napověděla jsem žákům téměř ihned, že by mohli zkusit něco vysledovat z rozložené základní jednotky a každé skupině jsem dala jednu další k dispozici. Všichni chlapci si po rozložení jednotky téměř okamžitě všimli, že čtverec papíru je vzniklými přehyby rozdělen na šestnáct pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků a stěna krychle je tvořena dvěma těmito trojúhelníky. Tuto skutečnost pak snadno využili pro výpočet povrchu krychle, který byl v obou případech v pořádku. Naproti tomu dívčí skupina po rozložení základní jednotky objevila pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny mají stejnou délku jako hrana krychle. Pomocí Pythagorovy věty poté délku odvěsny vypočítaly a posléze správně určily i povrch krychle. Celý postup jim trval podstatně déle než chlapcům, a tak chlapci stihli vypočítat i objem krychle. Překvapilo mě, že jej určili způsobem, na který jsem já sama přišla až při rozmýšlení průběhu experimentu a ne již během tvorby a popisování jednotlivých úloh. Uvědomili si, že pokud již znají obsah čtverce tvořícího stěnu krychle, mohou délku jeho strany vypočítat odmocněním této hodnoty a objem poté podle vzorce $V = a^3$. Tímto způsobem se zcela vyhnuli využití Pythagorovy věty, které jsem původně při výpočtu objemu krychle považovala za nezbytné. Zajímavým závěrem experimentu tak byla diskuse o porovnání obou použitých postupech určení povrchu krychle a vhodnosti hledání co nejjednoduššího řešení.

8.1.3 Ukázka žákovského řešení

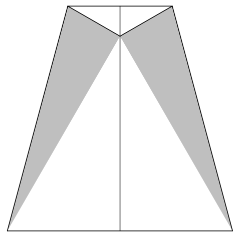
Chci zde uvést jeden žákovský způsob řešení ověření rovnostrannosti trojúhelníku složeného prvním postupem. Ten mohl při mém vhodném vedení být využit k tomu, aby žáci objevili elegantní postup složení rovnostranného trojúhelníku ve čtverci, a to jak trojúhelníku o délce strany shodné s délkou strany čtverce, tak maximálního trojúhelníku.

Poté, co jsem žáky vyzvala, aby se pokusili prokázat, že trojúhelník složený prvním postupem je rovnostranný, přehnul jeden žák pravou stranu čtverce ke straně vymodelovaného trojúhelníku (viz obrázek 8.1). Ačkoliv jsme nakonec společně i s ostatními žáky tento způsob důkazu zamítli na základě nepřesnosti skládání a možné chyby, považuji jej za velice hodnotný. Tomuto žákovi se podařilo využít prostředí origami k tomu, aby snadno porovnal délku dvou úseček.



Obrázek 8.1: Žákovský způsob ověření rovnostrannosti vymodelovaného trojúhelníku

Považuji nyní za velkou chybu, že jsem si neuvědomila, že by žáci mohli tento postup snadno využít k objevení, jak lze ve čtverci složit trojúhelník, u kterého jsou si jisti, že je rovnostranný (obrázek 8.2). Rovněž mohl tento objev snadno vést k vymodelování maximálního rovnostranného trojúhelníku ve čtverci. Přehybem naznačeným na obrázku 8.1 totiž žák vymodeloval úhel o velikosti $15°$, což je konstrukce klíčová pro vymodelování maximálního rovnostranného trojúhelníku, a mohl tak objevit způsob skládání zobrazený na obrázku 6.8.



Obrázek 8.2: Možný žákovský způsob složení rovnostranného trojúhelníku

8.1.4 Výsledky

Při přípravě série úloh týkajících se skládání rovnostranného trojúhelníku, základní jednotky a krychle jsem si stanovila odpovědět na několik otázek. Postupně uvedu tyto otázky i odpovědi, které se mi na ně podařilo získat.

1. Jaké obtíže činí žákům provést náročný přehyb, který je aplikací axiomu (A5)?

   Ukázalo se, že provedení přehybů nečinilo žákům žádné závažnější potíže a že jsou schopni jej zvládnout samostatně, či s jednoduchou nápovědou popsanou v kapitole 6.1.1. Dokonce i žák, kterému na levé ruce chybí dva prsty, neměl se skládáním potíže.

2. Budou žáci trvat na tom, že trojúhelník složený prvním postupem je rovnostranný, protože je to vidět?

   Žáci velice snadno pochopili, že jejich domněnku, že trojúhelník je nejen rovnoramenný, ale i rovnostranný, je potřeba dokázat. Zároveň přiznali, že toho nejsou schopni.

3. Budou žáci schopni s nápomocí objevit druhý způsob skládání, případně alespoň zdůvodnit, proč takto složený trojúhelník je rovnostranný?

   Jak uvedu níže, při řešení tohoto úkolu jsem nevyužila nápadu jednoho ze žáků a vmanipulovala jsem žáky do mnou očekávaného řešení. Nelze říci, že žáci způsob skládání přímo objevili, ale jak později všichni uvedli, pochopili, proč takto složený trojúhelník je rovnostranný.

4. Objeví některý ze žáků zcela samostatně myšlenku pootočení a následného zvětšení trojúhelníku?

   Jednomu ze žáků se skutečně podařilo zcela samostatně tuto myšlenku objevit a posléze i objasnit dvěma dalším spolužákům.

5. Pomůže vystřižený maximální trojúhelník žákům k objevu a motivuje je ke splnění úkolu?

   Všechny žáky zaujalo, že jsem jim dala k dispozici větší rovnostranný trojúhelník, než sami předtím vymodelovali, který jsem vystřihla ze čtverce papíru o stejné délce strany. Začali s ním ihned manipulovat a snažili se jej do čtverce umístit. Ti, kteří předtím ještě myšlenku pootočení trojúhelníku neobjevili, ji objevili právě s pomocí tohoto vystřiženého maximálního trojúhelníku.

6. Objeví, nebo alespoň pochopí žáci polohu maximálního trojúhelníku ve čtverci?

   Oproti mému očekávání žáci polohu maximálního trojúhelníku ve čtverci velice snadno odhalili na základě toho, že „je to prostě vidět“, jak uvedl jeden ze žáků. Nebyli plně schopni ji zdůvodnit, ale předložené zdůvodnění bez problémů pochopili.

7. Vymyslí žáci, jak maximální trojúhelník složit, a pochopí, že origami umožňuje provést některé konstrukce snáze?

   Konstrukci úhlu o velikosti 15° vymysleli žáci poměrně rychle, ale z výše popsaných důvodů někteří nebyli schopni složení trojúhelníku dotáhnout do úplného konce. Na druhou část otázky jsem nenašla odpověď, jelikož jsem se jí zapomněla při výuce zabývat.

8. Jak se žáci vypořádají se skládáním podle návodu, když nikdy předtím origami podle grafického návodu neskládali?

   Vyjma provedení kroků 8) a 9) jim skládání nečinilo žádné větší potíže. Naopak, jak sami uvedli, přišlo jim jednodušší a zábavnější než skládání podle mnou předváděného postupu.

9. Jakým způsobem se žáci budou snažit krychli složit?

   Žáci rychle odhalili, jaká část základní jednotky bude zřejmě tvořit stěnu hledané krychle, ale většině z nich (kromě žáka pracujícího samostatně) činilo potíže vymyslet, jakým způsobem do sebe jednotky zasouvat. Bylo patrné, že si pamatují, že je třeba do sebe jednotky zasunout, ale vzhledem k tomu, že v minulosti skládali krychli z trochu jiné základní jednotky a navíc to bylo, jak uvedli, před zhruba dvěma lety, potřebovali v této oblasti nápovědu.

10. Napadne žáky i bez nápovědy při výpočtu povrchu krychle podívat se na rozloženou základní jednotku?

    Jak jsem uvedla výše, z důvodu nedostatku času jsem neposkytla žákům dostatek prostoru pro to, aby je to mohlo napadnout.

8.2 Popis vyučovacích hodin v 1. ročníku čtyřletého gymnázia

Některé z úloh týkajících se skládání základní jednotky a dvojjehlanu jsem vyzkoušela v rámci dvou navazujících vyučovacích hodin v 1. ročníku jednoho pražského čtyřletého gymnázia. Během obou hodin bylo přítomno osm žáků této třídy, čtyři chlapci a čtyři děvčata. Celý průběh experimentu byl zaznamenáván videokamerou.

8.2.1 Cíle

Z hlediska matematického obsahu mělo využití origami v průběhu experimentu naplnit několik cílů. Mělo žáky vést k používání vhodných geometrických pojmů a přesnému matematickému vyjadřování. Dále mělo rozvíjet dovednost žáků postupovat podle algoritmu a porozumět základní symbolice origami a způsobu znázornění postupu skládání. Především však mělo dovést žáky k pochopení, že matematické úlohy lze většinou řešit několika způsoby a je výhodné (z hlediska času i náročnosti řešení) hledat taková řešení, která co nejlépe využívají všechny informace, které prostředí, v němž jsou řešeny, poskytuje.

8.2.2 Průběh

V úvodu jsem žáky stručně seznámila s náplní následujících dvou vyučovacích hodin a nechala je, aby se rozdělili do dvojic. Jeden žák vyjádřil přání pracovat samostatně, a tak nakonec žáci pracovali ve třech dvojicích a dva žáci samostatně. Všichni žáci uvedli, že nemají s origami žádné větší zkušenosti a že nikdy neskládali žádnou skládanku podle grafického návodu. Poté byli žáci stručně seznámeni se základní symbolikou origami a dostali k dispozici grafický návod, jak složit základní jednotku (viz kapitola 7.1). Zároveň obdrželi tři již složené základní jednotky. Jejich úkolem bylo složit dvě základní jednotky, a to buď s využitím grafického návodu, složených modelů, nebo kombinací obojího. Většina žáků postupovala podle grafického návodu, pouze jedna žákyně skládala jen s využitím základních jednotek.

Žáci, kteří byli hotovi, dostali k dispozici první pracovní listy s úlohami vycházejícími ze základní jednotky (viz Příloha I), kterými se ve zbytku první vyučovací hodiny zabývali. Byli informováni, že úlohy mají řešit v pořadí, v jakém jsou uvedeny v zadávacích listech. Ukázalo se, že žáci si nepamatují rozdíly mezi některými typy čtyřúhelníků (kosočtverec vs. kosodélník, lichoběžník vs. rovnoběžník) a že je třeba tyto pojmy objasnit. Podle očekávání nerozuměli pojmu nekonvexní mnohoúhelník, se kterým se nikdy předtím nesetkali, a který tak bylo třeba zavést.

Žáci pracovali při skládání i na úlohách značně rozdílným tempem, výrazně lépe pracovaly dvojčlenné skupiny než žáci pracující samostatně[1]. Většina žáků stihla vyřešit do konce první vyučovací hodiny pouze úlohy č.1-2c (viz Příloha I).

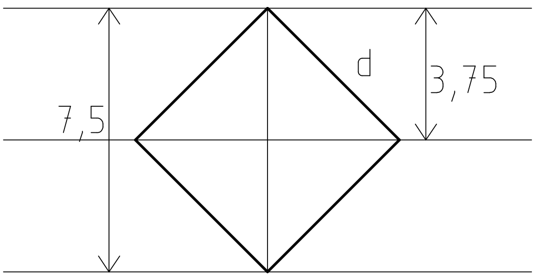
V úvodu druhé vyučovací hodiny jsem žákům vysvětlila, že již nebudeme pokračovat v řešení úloh z prvních zadávacích listů, abychom měli dostatek času pro další aktivitu. V rámci této aktivity se měli žáci nejprve pokusit ve skupinách ze tří základních jednotek složit libovolný mnohostěn pomocí zasouvání jednotek do sebe. Jednomu žákovi se podařilo objevit správný způsob zasouvání jednotek, ostatním jsem tuto skutečnost po přibližně třech minutách napověděla. Všichni žáci se poté snažili s využitím této znalosti složit nějaký mnohostěn. Ukázalo se však, že ani s touto nápovědou si žáci nevědí se skládáním mnohostěnu příliš rady, ztrácejí zájem a pozornost. Proto jsem po třech minutách dala každé skupině k dispozici již složený model dvojjehlanu s informací, že právě tento mnohostěn lze ze tří základních jednotek složit. Následně se všem žákům podařilo složit vlastní model dvojjehlanu, ačkoliv rozdílně rychle. Opět výrazně rychleji pracovali žáci, kteří skládali dvojjehlan ve dvojici. Od tohoto okamžiku se začaly utvářet rozdíly v úlohách, které žáci v danou chvíli řešili. Někteří potřebovali ještě poměrně dost času ke složení dvojjehlanu, a tak začali žáci v různou dobu řešit úlohy ze druhých zadávacích listů (viz Příloha J). Při popisu dvojjehlanu se opět ukázalo, že žáci mají potíže s geometrickou terminologií a následně i se vzpomenutím si na vzorce pro výpočet obsahů a objemů. Výpočet povrchu dvojjehlanu se podařilo zcela samostatně provést pouze dvěma nejrychleji pracujícím žákyním (provedly jej s využitím Pythagorovy věty), ostatním bylo zapotřebí trochu poradit. Jednu dvojici jsem záměrně nasměrovala k nalezení jednoduššího řešení popsaného v kapitole 7.6, které potom v rámci shrnutí výpočtu povrchu představili ostatním.

[1] Je pravda, že zvláště v případě žákyně pracující samostatně jsem se dopustila závažné chyby. Téměř jsem se jí nevěnovala a ona tak neměla možnost o úlohách s nikým diskutovat

Jelikož někteří žáci začali řešit i úlohu týkající se výpočtu objemu dvojjehlanu, rozhodla jsem se ji v závěru hodiny alespoň stručně se žáky projít. V tu chvíli však již někteří žáci byli značně unaveni či otráveni a nevěnovali mi pozornost, a tak spolupracovali jen čtyři žáci. Ti navrhli, že je zapotřebí vypočítat objem jednoho ze dvou jehlanů tvořících dvojjehlan. Vzorec pro tento výpočet neznali. Poté co jsem jim ho sdělila, byli schopni navrhnout, jak vypočítat obsah podstavného rovnostranného trojúhelníku. Vzhledem k nedostatku času však nebylo možné celý výpočet dokončit. V posledních pěti minutách žáci doplnili krátký dotazník (viz Příloha K).

8.2.3 Ukázka žákovského řešení

Představím jedno řešení úlohy týkající se výpočtu povrchu dvojjehlanu, které vymyslela jedna dvojice. Je z něj patrné, že ačkoliv žákyně vyčetly z rozložené základní jednotky důležité údaje, nevyužily je k elegantnímu řešení, ale raději použily naučený způsob výpočtu délky strany v pravoúhlém trojúhelníku, tj. Pythagorovu větu.



Obrázek 8.3: Žákovský způsob výpočtu povrchu dvojjehlanu

Žákyně si načrtly obrázek 8.3, který odpovídá výřezu z rozložené základní jednotky, a provedly následující výpočet.

$$\begin{aligned} d^2 &= 3{,}75^2 \cdot 2 \\ d^2 &= 28{,}125 \\ S &= 6 \cdot \frac{d^2}{2} \\ S &= 6 \cdot \frac{28{,}125}{2} \\ S &= 84{,}375\ cm^2 \end{aligned}$$

Žákyně si evidentně uvědomily, že obsah jedné stěny dvojjehlanu je poloviční než obsah silněji vyznačeného čtverce na obrázku 8.3. Nejprve určily délku strany tohoto čtverce pomocí Pythagorovy věty a následně vypočítaly povrch celého dvojjehlanu. Ačkoliv si to do náčrtku vyznačily, neuvědomily si, že znají jak délku základny, tak i příslušnou výšku rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku tvořícího stěnu dvojjehlanu, a mohou tedy snadno podle vzorce vypočítat obsah tohoto trojúhelníku, aniž by aplikovaly Pythagorovu větu.

Při zadání této úlohy (viz úloha č. 2 v příloze J) jsem se snažila navést žáky k tomu, aby hledali co nejjednodušší způsob řešení. Ukázalo se, že by možná bylo vhodnější udat i podmínku nepoužití Pythagorovy věty. Případně mohli žáci hledat dvě různá řešení, jedno s využitím Pythagorovy věty a druhé bez něj, aby mohli porovnat jejich časovou výhodnost i náročnost.

8.2.4 Výsledky

Při přípravě série úloh týkajících se skládání základní jednotky a dvojjehlanu jsem si stanovila odpovědět na několik otázek. Postupně uvedu tyto otázky i odpovědi, které se mi na ně podařilo získat.

1. Jakou variantu skládání si žáci budou volit a proč?

   Kromě jedné dvojice se všichni rozhodli postupovat podle grafického návodu, protože, jak uvedli v dotazníku, jim to přišlo jednodušší. V jedné dvojici se rozhodli skládat podle již složené základní jednotky, ale příliš při tom nespolupracovali. Jeden žák z této dvojice se nakonec rozhodl dokončit skládání podle grafického návodu. Naopak žákyně z této skupiny vytrvala a základní jednotku složila bez použití grafického návodu, protože, jak uvedla, to byla větší výzva.

2. Jak se žáci vypořádají se skládáním podle návodu, když nikdy předtím origami podle grafického návodu neskládali?

   Ukázalo se, že se skládáním základní jednotky podle grafického návodu neměla žádná skupina, vyjma žáka pracujícího samostatně, vůbec žádné potíže. Žáci pracující ve dvojicích si vzájemně pomáhali.

3. Jakým způsobem budou žáci postupovat při skládání základní jednotky podle již složených modelů?

   Jak jsem uvedla výše, pouze dva žáci se odhodlali skládat základní jednotku pouze s využitím tří již složených základních jednotek. Oba dva nejprve rozložili jednu základní jednotku a snažili se vytvořit na svém čtverci papíru co nejvíce přehybů podle rozložené jednotky. Teprve poté začali opatrně rozkládat další jednotku a přijít na to, v jakém pořadí byly přehyby utvořeny. Jeden z žáků nakonec úsilí vzdal (viz výše). Ačkoliv žákyně vytvořila samostatně síť všech potřebných přehybů na rozloženém čtverci papíru, nebyla schopná bez malé dopomoci základní jednotku složit až do konce. Ukázalo se, že celý proces je i pro žáka prvního ročníku gymnázia poměrně časově i intelektuálně náročný.

4. Jaká kritéria budou žáci používat při popisu dvojjehlanu?

   Většina žáků v popisu zmínila pojem jehlan. Častý byl výčet počtu stěn, pouze jedna skupina zmínila i počet vrcholů a jedna chybný počet hran. Dále se vyskytovaly informace založené na skutečnosti, že dvojjehlan byl složen pomocí origami (např. „Na každé stěně se setkávají dva kosodélníky“). Jedna skupina uvedla, že pokud se dívají přímo na kterýkoliv roh šestistěnu, vidí čtyři stěny. Žádná skupina ale neuvedla ucelený popis dvojjehlanu, který by umožnil odlišit jej od jiných mnohostěnů. Jedna skupina sice uvedla, že se jedná o dva jehlany spojené k sobě podstavou, ale již neuvedla, o kolikaboké jehlany se jedná, či jaké mnohoúhelníky tvoří jejich stěny.

5. Využijí žáci k výpočtu povrchu i objemu výhodně údaje, které lze vyčíst z rozložené základní jednotky?

   Ukázalo se, že žáci se snaží aplikovat naučené postupy řešení, místo aby hledali jednodušší, vycházející z údajů, které lze vyčíst z rozložené základní jednotky. Jedna dvojice například sice z rozložené základní jednotky správně určila, že výška rovnoramenného trojúhelníku tvořícího stěnu dvojjehlanu je $3{,}75$ cm (žáci pracovali s papírem tvaru čtverce, o délce strany 15 cm), ale nevšimla si, že mohou snadno určit, že délka jeho základny je $7{,}5$ cm. Proto vypočítala pomocí Pythagorovy věty délku ramene pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku a následně jeho obsah. Při srovnání metod výpočtu povrchu dvojjehlanu si však žáci uvědomili, že není vždy vhodné aplikovat naučené způsoby řešení, ale že je výhodné snažit se hledat jednodušší.

8.3 Metodická doporučení

Na základě obou provedených experimentů a prostudované literatury se nyní pokusím zformulovat metodická doporučení pro práci v prostředí origami. Pokud má být zařazení origami do výuky matematiky smysluplné, je zapotřebí, aby si jich byl učitel vědom a řídil se jimi.

8.3.1 Příprava vyučovací hodiny

Využití origami při výuce vyžaduje velmi pečlivou přípravu ze strany učitele, obzvláště při prvních pokusech, kdy jak učitel, tak žáci nejsou zvyklí v prostředí origami pracovat. Ačkoliv jsem podle mého názoru měla druhý experiment značně lépe připravený než první (žáci obdrželi pracovní listy, byli seznámeni se základní symbolikou origami a informováni o pravidlech práce), ukázalo se, že práce v prostředí origami vyžaduje ze strany učitele ještě pečlivější přípravu. Žáci při řešení úloh volí rozdílné strategie a jejich rychlost práce se značně liší. Pro učitele je tak velmi náročné stíhat sledovat a pomáhat všem žákům a koordinovat práci třídy jako celku. Řešením by zřejmě bylo mít připravené jednoduché nápovědy na kartičkách, které by žáci postupně podle potřeby dostávali. Podmínkou pro efektivní využití origami je také dobrá znalost žáků ze strany učitele, která má za následek předvídání toho, jak jednotliví žáci budou pracovat.

Zároveň je třeba si uvědomit, že řešení úloh v prostředí origami je značně časově náročné. Je zapotřebí na jednotlivé úlohy vyhradit dostatek času. Jsem si vědoma, že jsem časovou náročnost úloh značně podcenila. Díky tomu jsem se v průběhu druhého experimentu dopustila celé řady didaktických chyb (např. jsem nedala žákům dostatek prostoru pro popis jejich řešení v rámci společné diskuse, ale spíše jsem jejich výsledky za účelem ušetření času shrnula sama).

8.3.2 Volba typu návodu

Velice důležitým rozhodnutím, které musí učitel učinit, je volba návodu, podle kterého budou žáci skládat. Jednotlivé typy návodů byly uvedeny v kapitole 4.7. Použití každého z nich rozvíjí u žáků různé dovednosti, je rozdílně časově náročné. Volba typu návodu tedy závisí na cílech, které si učitel při zařazení origami do výuky stanoví.

Výhodou demonstrace postupu učitelem je možnost při každém kroku se žáky pojmenovávat vznikající útvary a diskutovat se žáky jejich vlastnosti. Domnívám se, že v případě jednoduššího modelu, nižšího věku žáků a v okamžiku, kdy jedním z hlavních cílů využití origami je procvičování geometrické terminologie (tedy většinou s mladšími žáky), je vhodné zvolit demonstraci postupu učitelem. Zdá se však, že z hlediska motivace je vhodnější použít grafický návod (vytištěný nebo promítnutý) než demonstraci postupu učitelem. Žáci jsou tak více zaujati a zřejmě je pro ně spíše výzvou skládanku složit podle psaného postupu, než jen kopírovat postup, který jim někdo předvádí[2]. Zároveň se tak učitel vyvaruje zmateně popsaného postupu. Navíc poté mají žáci postup skládání stále před sebou a mohou si kdykoliv jednotlivé kroky připomenout a využít při řešení úloh. Žákům, kteří mají se skládáním podle grafického návodu potíže, může učitel pomoci tím, že bude jednotlivé kroky provádět společně s nimi. Aby však žáci mohli skládat podle grafického návodu, je nutné je nejprve seznámit se symbolikou, která je v origami používaná.

Varianta, kdy žáci skládají model podle již složeného modelu, který mají k dispozici, je z hlediska rozvíjení dovedností zřejmě nejzajímavější, ale je nutné počítat s velkou časovou náročností. Žáci musí postup skládání samostatně rozložit do jednotlivých kroků, což je pro ně značně intelektuálně náročné. Domnívám se, že v případě volby tohoto typu návodu je vhodné ponechat žákům na řešení tohoto problému dostatek času a jejich způsoby řešení následně diskutovat. Přípravnou fází na řešení tohoto problému může pro žáky být varianta rozfázovaného návodu, ve které je rozložení postupu do jednotlivých kroků již provedeno.

8.3.3 Zásady správné demonstrace návodu učitelem

Pokud se učitel rozhodne k tomu, že bude žákům postup skládání demonstrovat, je podle Barbary Pearl [Pearl, 2008] nutné dodržet několik zásad, které nyní uvedu.

Při prvním zařazení origami do výuky je důležité začít s jednoduchým modelem. Učitel by měl pracovat s výrazně větším formátem papíru přiloženým na tabuli. Ukazuje se, že pro žáky není matoucí, že učitel má papír umístěný ve vertikální poloze, zatímco oni v horizontální. Dále se doporučuje, aby učitel na svém papíru barevně vyznačil přehyby, které se mají provést. Thomas Hull [Hull, 2006] navíc uvádí, že se mu velmi osvědčilo provádět přehyby pod vizualizérem. Všichni žáci pak detailně vidí ruce i papír učitele. Pokud má učitel vizualizér k dispozici, lze jej

[2]Koneckonců i mě při skládání origami přináší uspokojení nejen výsledná skládanka, ale i skutečnost, že se mi podařilo náročný postup „dešifrovat“ a zvládnout. Předpokládám, že žáci to vnímají stejně.

podle něj výhodně využít i k předvedení, jak do sebe zasouvat základní jednotky v případě modulárního origami.

Dále je zapotřebí vyvarovat se instrukcí typu „přeložte takto“. Je mnohem lepší přesně uvést, jakým způsobem má přehyb vzniknout, kde začíná a končí apod. Při každém kroku by měl učitel nejprve popsat výchozí situaci a orientaci papíru, poté uvést instrukce pro vytvoření přehybu a provést jej a následně pojmenovat nově vzniklý útvar. Při zvolení takového přístupu učitel neustále používá geometrické pojmy, a žáci tak mají možnost je pochopit a osvojit si je.

Další důležitou zásadou je, pokud to není žákem vyžádané, vyvarovat se toho, aby učitel skládal žákův model. Taková pomoc ze strany učitele může u žáka vyvolat pocity neúspěchu a zabránit dalšímu aktivnímu přístupu. Pokud není jiné východisko než provést přehyb na modelu žáka, je vhodné jej následně rozložit a nechat jej žáka provést znovu.

8.3.4 Záznam výsledků žáky

Důležitou zásadou, kterou je zapotřebí při práci se žáky v prostředí origami dodržet, je vedení žáků k tomu, aby svá zjištění zaznamenávali. Jak uvádí B. Franco [Franco, 1999], vedení jakéhosi origami deníku pomůže žákům, aby jejich práce byla organizovaná, podpoří rozvoj jejich vyjadřovacích dovedností a umožní jim zaznamenat jejich objevy. Tento deník může být veden volným způsobem, nebo může být spíše zadávacími listy, do kterých žáci doplňují odpovědi a postupy řešení. Domnívám se navíc, že pokud budou žáci vedeni k tomu, aby výsledky úloh zaznamenávali, budou je spíše vnímat jako smysluplné. Jsem si vědoma toho, že jsem tuto zásadu v průběhu prvního experimentu výrazně zanedbala, a to ze dvou důvodů. Tím prvním důvodem byla časová tíseň - měla jsem k dispozici pouze dvě vyučovací hodiny, v jejichž průběhu jsem chtěla vyzkoušet více úloh. Za druhé jsem neodhadla, nakolik je dodržování této zásady významné. Teprve v průběhu samotného experimentu mi došlo, že se mi nedaří udržet práci organizovanou a že z ní žáci nebudou mít v podstatě téměř žádný výstup právě proto, že jsem je důsledně nevedla k zaznamenávání výsledků. Zejména při skládání rovnostranného trojúhelníku byli žáci značně zmateni a nepamatovali si rozdíly mezi jednotlivými postupy. Kdyby první postup skládání dostali ve formě grafického návodu a druhý sami zaznamenali, mohli pak i odhalit souvislosti, které mezi oběma postupy jsou.

8.3.5 Forma zařazení origami do výuky

Je zřejmé, že využití origami při výuce rozhodně nemůže být ojedinělou záležitostí. Pokud má mít origami při výuce význam, musí se žáci postupně naučit v tomto prostředí pracovat. Seznámit se s ním nejprve v rámci jednodušších úloh a propracovat se k úlohám komplexnějším. Velkým úskalím využití origami při výuce je, že je pro žáky vyčerpávající. Domnívám se, že je to právě proto, že je to pro ně nový, neznámý přístup, který vyžaduje jejich plné soustředění. Věřím, že i zde by bylo řešením častější využití origami. Moje původní představa, že by se žáci mohli věnovat některým mnou popsaným úlohám v rámci projektového dne je tak zřejmě idealizovaná. Domnívám se, že pokud by nebyli zvyklí s origami pracovat, bylo by to zcela nevhodné, jelikož by to pro ně bylo značně intelektuálně náročné. Na základě výsledků experimentu považuji za vhodnější zařazení úloh v rámci dlouhodobějšího projektu, v jehož průběhu se žáci budou postupně seznamovat s prací v tomto prostředí.

8.3.6 Origami a skupinová práce

Během experimentu se ukázalo, že zcela zásadní je, aby žáci mohli o řešení úloh diskutovat. Žáci pracující ve dvojicích vykazovali značně lepší výsledky než žáci pracující samostatně mimo jiné zřejmě právě proto, že byli v komunikaci se spolužákem nuceni vysvětlovat své představy a navržené postupy řešení a naopak reagovat na návrhy spolužáka. Jak uvádí B. Franco [Franco, 1999], při práci s origami je nejvhodnější uspořádání žáků do dvojic, v některých případech čtveřic. Žáci tak mohou diskutovat jednotlivé úlohy a při skládání modelů mnohostěnů mají k dispozici více rukou, což jim skládání výrazně usnadní. Je zřejmé, že žáci musí být zvyklí ve skupinách efektivně pracovat.

8.3.7 (Ne)zaujetí žáků

Za největší problém, který jsem v průběhu druhého experimentu odhalila, považuji skutečnost, že ne všichni žáci využití origami ve vyučování matematice vítají. Většina žáků sice v dotaznících uvedla, že řešit úlohy týkající se vlastnoručně vyrobeného modelu mnohostěnu jim přijde zábavnější a názornější, než řešit běžné úlohy z učebnice. Jeden žák (který uvedl, že „matematika nepatří k jeho oblíbeným předmětům“) však napsal, že „raději řeší zavedené úlohy, které se dají přetrpět“. Je tedy při využití origami nutné počítat s tím, že někteří žáci nebudou ochotni a motivováni hledat vlastní způsoby řešení, jelikož preferují naučit se algoritmy, které mohou aplikovat. Zkoumání toho, zda dlouhodobější a promyšlené využití origami by mohlo i tuto skupinu žáků motivovat ke změně přístupu ke studiu matematiky, by mohlo být otázkou pro další zkoumání.

Zájem ze strany žáků ale paradoxně může být rovněž nežádoucí. Manipulace s papírem a se složenými objekty v sobě totiž skrývá riziko. Je celkem pochopitelné, že žáci jsou složenými objekty zaujati a chtějí si manipulaci s nimi vyzkoušet (jedna dvojice byla například značně zaujata složeným dvojjehlanem, všelijak s ním otáčela, překlápěla jej), a tak je jejich pozornost od řešení úloh odpoutána. Je zřejmě důležité zvláště při prvních pokusech o využití origami dát žákům dostatek času, aby si tuto pro řešení úloh nepotřebnou manipulaci vyzkoušeli a neměli později takovou potřebu ji provádět.

Kapitola 9

Závěr

Na základě prostudované literatury a provedených didaktických experimentů vyslovuji závěr a potvrzuji zjištění mých předchůdců (zejména T. Hulla [Hull, 2006], B. Franco [Franco, 1999], B. Pearl [Pearl, 2008] a H. Šternové [Šternová, 2003]), že origami je využitelné v matematickém vzdělávání, zejména jako alternativní způsob geometrického modelování. Origami není rozhodně jediným didaktickým prostředím vhodným pro geometrické modelování a stejně jako další prostředí má svá omezení. Proto je nezbytné ho vhodně kombinovat s jinými způsoby geometrického modelování (např. rýsováním a pevnými modely).

V kapitole 6 jsem popsala úlohy vycházející ze skládání rovnostranného trojúhelníku a uvedla didaktický rozbor jejich řešení. Myšlenku využití skládání rovnostranného trojúhelníku při výuce jsem převzala od T. Hulla [Hull, 2006] a doplnila ji o některé další úlohy a způsoby řešení. Uvedla jsem důkaz rovnostrannosti trojúhelníku složeného Hullovým postupem a představila jsem další způsob skládání rovnostranného trojúhelníku, ze kterého je rovnostrannost patrná. Rovněž jsem uvedla oproti Hullovi další, podle mého názoru jednodušší, způsob odvození polohy maximálního rovnostranného trojúhelníku ve čtverci. Ukázala jsem, jak může být skládání rovnostranného trojúhelníku při výuce využito k odvození některých hodnot goniometrických funkcí. Některé z popsaných úloh jsem ověřila ve výuce (viz kapitola 8.1).

V kapitole 7 jsem uvedla rozbor úloh týkajících se skládání čtyř konkrétních mnohostěnů - trojbokého dvojjehlanu, krychle, hvězdicorohého osmistěnu a hvězdicorohého dvacetistěnu. Inspirací k volbě těchto mnohostěnů pro mě byla publikace B. Franco [Franco, 1999], kde jsou popsány úlohy z nich vycházející. Tyto úlohy jsem okomentovala a na jejich základě jsem vytvořila další úlohy, týkající se zejména výpočtu povrchů a objemů daných mnohostěnů a jejich řezů. Využití některých úloh vyplývajících ze skládání jedné z variací Sonobovy základní jednotky a ze skládání trojbokého dvojjehlanu jsem ověřila při výuce. Ukázala jsem, že modely mnohostěnů sestrojené pomocí origami mohou sloužit žákům k utváření představ o mnohostěnech.

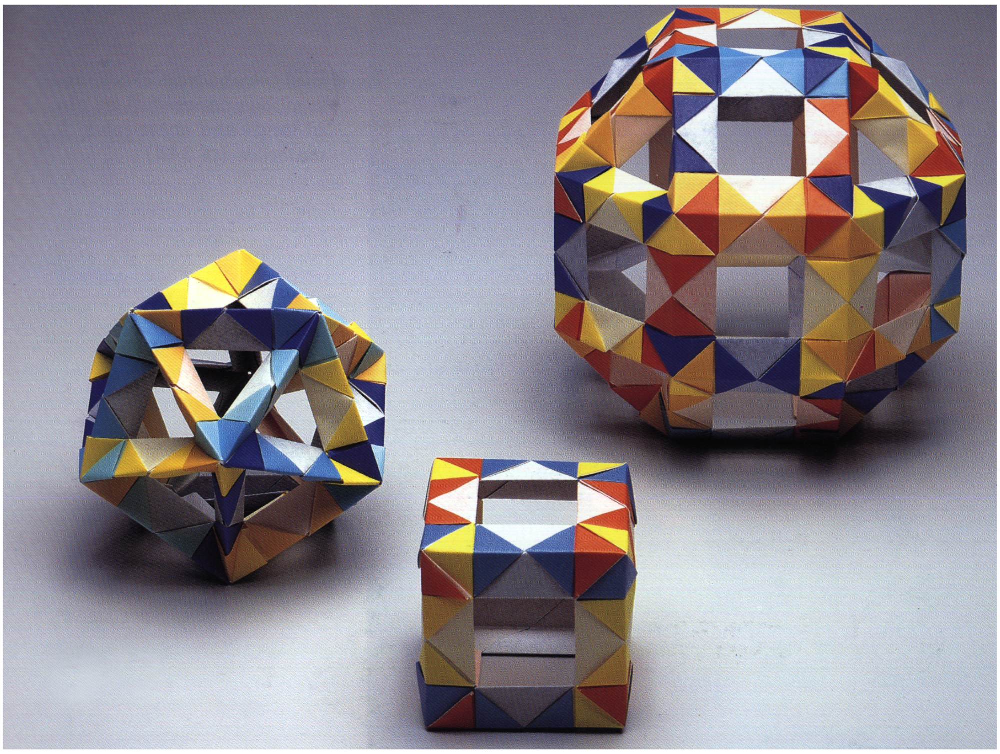
V uvedených kapitolách jsem ukázala řešení úloh vycházejících z origami. Tyto úlohy mají z didaktického hlediska jednu velmi zajímavou vlastnost; mohou být řešeny různými způsoby, které se liší použitým matematickým aparátem, přístupem i obtížností. Aplikace naučených způsobů řešení nebývá většinou výhodná, a tak jsou žáci vedeni k hledání jiných způsobů, které vhodně využívají informací vyplývajících z vlastností skládání papíru. Tuto skutečnost považuji společně s motivačním aspektem origami za jeden z největších přínosů origami pro matematické vzdělávání. Origami pomáhá nabourávat rutinní postupy řešení žáků a zamezovat vzniku poznatků bez porozumění a motivuje většinu žáků k většímu úsilí v hodinách matematiky.

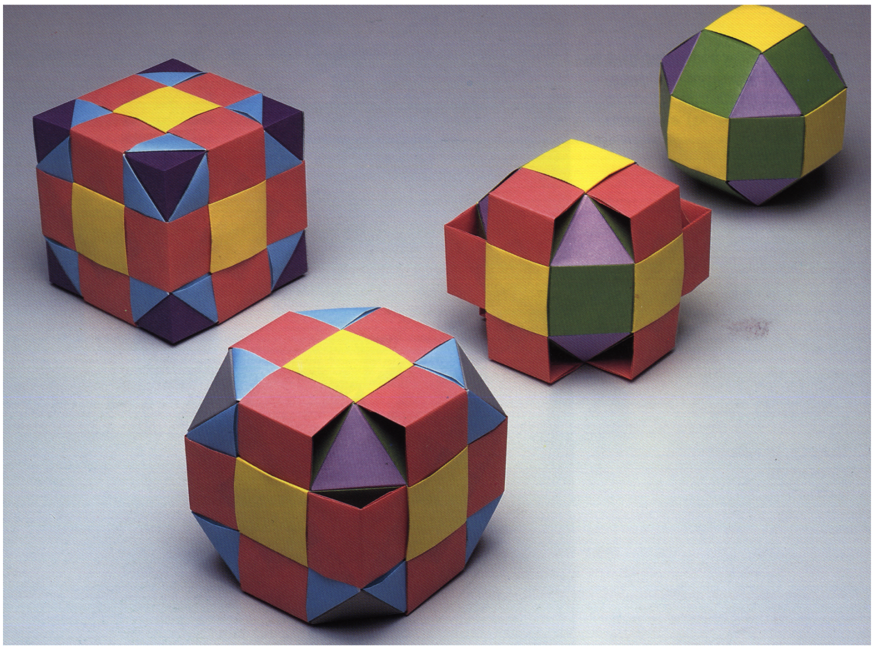
Na základě získaných poznatků konstatuji, že při zařazení origami do výuky je nutné brát v potaz některé důležité skutečnosti. Pro plné využití potenciálu, který origami může pro výuku matematiky představovat, je nezbytné, aby se v něm jak učitel, tak žáci naučili správně pracovat. Toho lze dosáhnout pouze postupným a systematickým zařazováním origami do výuky. Origami může být efektivně využito jen těmi učiteli, kteří vidí a rozumí geometrickým problémům v něm skrytých a kteří jsou ochotni věnovat čas důkladné přípravě na výuku. I žáci si musí zvyknout na poněkud odlišný způsob práce v prostředí origami. Ukazuje se například, že pro užití prostředí origami je přínosná skupinová práce. Na druhou stranu užití origami žáky přirozeně k práci ve skupině vede. V kontrastu s některými mými předchůdci (zejména B. Pearl [Pearl, 2008]) jsem zjistila, že nelze přeceňovat motivační aspekt origami, existují totiž žáci, které zařazení origami do výuky nejenže nemotivuje k většímu úsilí, ale dokonce je spíše demotivuje. Zejména na základě vlastních zkušeností s využitím origami ve výuce jsem popsala metodická doporučení pro práci v prostředí origami (viz kapitola 8.3).

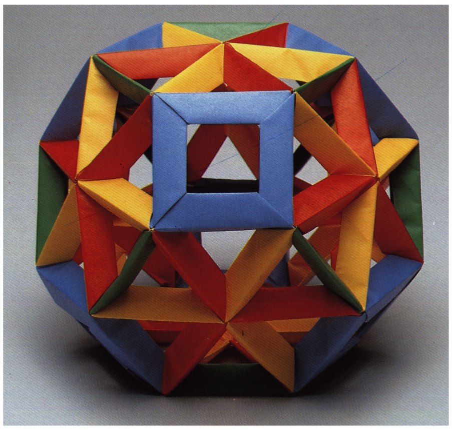
V souvislosti s problematikou využití origami v matematickém vzdělávání vznikly v průběhu této práce některé otázky, které by mohly být podnětem pro další zkoumání. Bylo by přínosné zjistit vhodnou míru využití origami jako didaktického prostředí a okolnosti vedoucí žáky k hledání originálních způsobů řešení. Lze totiž očekávat, že při nadměrném zařazování origami do výuky se mohou žáci naučit nalézat výhodná řešení úloh typická pro toto prostředí a začít je aplikovat rutinně. Podnětem pro další zkoumání v této oblasti by mohla být i otázka, zda přiměřeným a systematickým vedením žáků k práci v prostředí origami lze motivovat k řešení matematických úloh i žáky, kteří nemají o matematiku velký zájem.

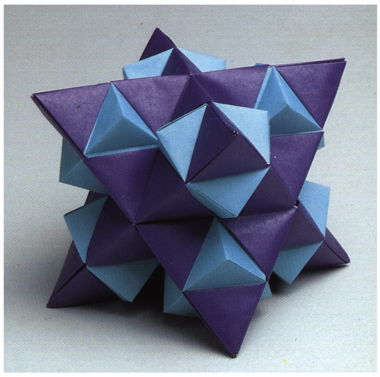
Dodatek A

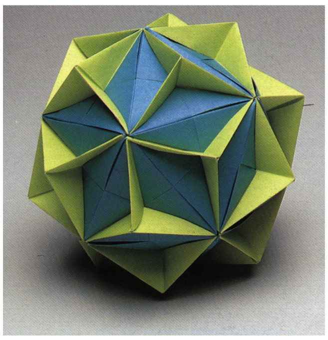
Modely mnohostěnů

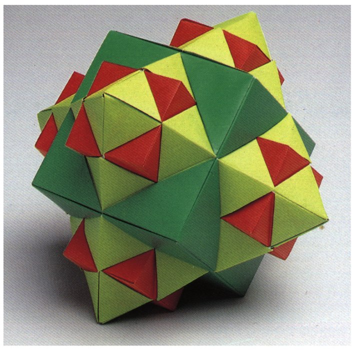


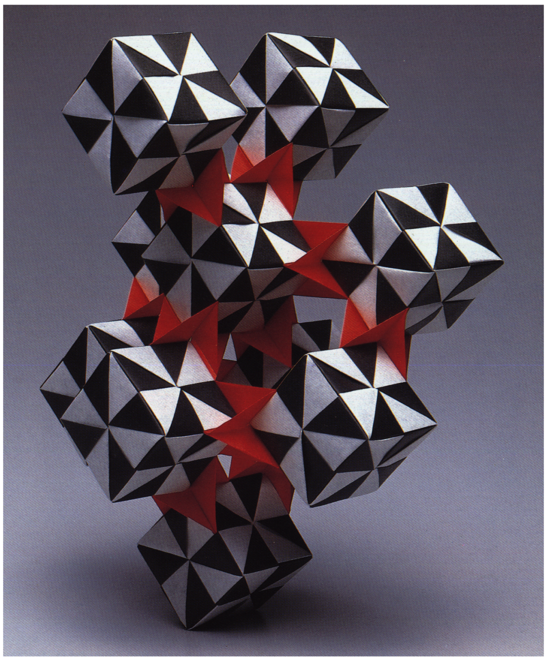


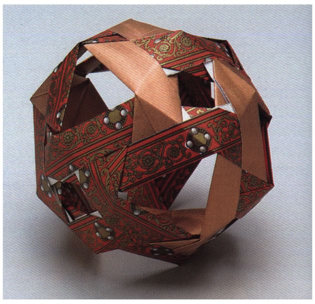


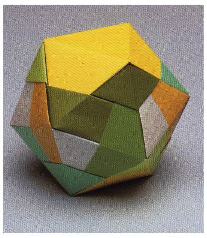










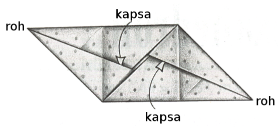


Dodatek B

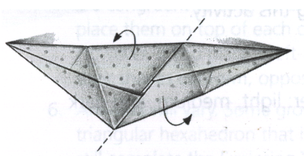
Návod pro složení dvojjehlanu

Dvojjehlan složíme ze tří základních jednotek, nejlépe různých barev, nebo vzorů.

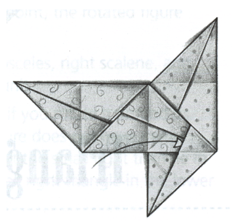
1) Základní jednotky spojujeme dohromady zasouváním rohů do kapes. Každá základní jednotka má dva rohy a dvě kapsy.



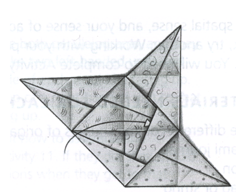
2) Utvořte přehyb podél úhlopříčky obsahující bílý proužek a poté jej opět rozložte.



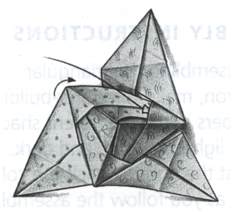
3) Zasuňte roh jednotky první barvy do kapsy jednotky druhé barvy.



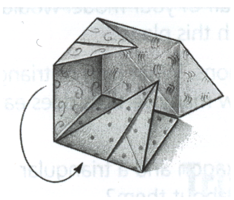
4) Otočte skládanku o 90° po směru pohybu hodinových ručiček a zasuňte roh jednotky třetí barvy do kapsy jednotky druhé barvy.



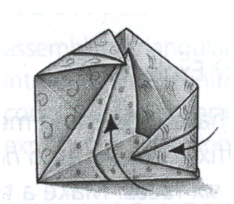
5) Nyní zasuňte roh jednotky první barvy do kapsy jednotky třetí barvy. Tímto krokem se stane skládanka trojrozměrnou a vytvoříte „pyramidu“.



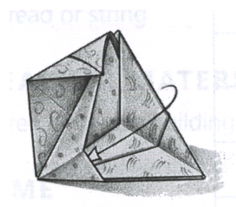
6) Skládanku otočte.



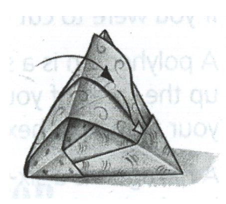
7) Zasuňte roh jednotky třetí barvy do kapsy jednotky první barvy.



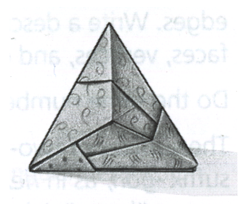
8) Zasuňte roh jednotky první barvy do kapsy jednotky druhé barvy. Ujistěte se, že roh jednotky druhé barvy zůstane vně skládanky.



9) Zasuňte roh jednotky druhé barvy do kapsy jednotky třetí barvy.



10) Složili jste dvojjehlan.

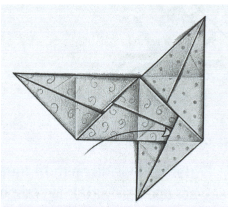


Dodatek C

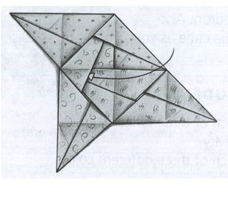
Návod pro složení krychle

Nejprve složte šest základních jednotek, dvě od každé ze tří zvolených barev, či vzorů.

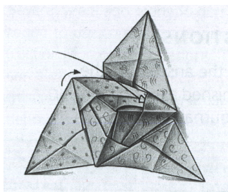
1) Zasuňte roh jednotky druhé barvy do kapsy jednotky první barvy.



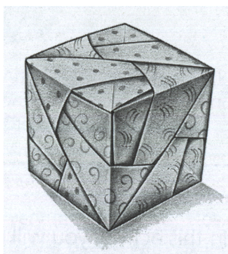
2) Otočte skládanku o 90° proti směru pohybu hodinových ručiček a zasuňte roh jednotky třetí barvy do kapsy jednotky druhé barvy.



3) Utvořte pyramidu zasunutím jednotky první barvy do jednotky třetí barvy. Tím jste složili jeden roh krychle.



4) Dokončete složení krychle se zbývajícími třemi jednotkami. Během skládání se vždy ujistěte, že každá stěna krychle je tvořena pouze dvěma barvami.

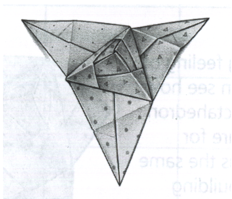


Dodatek D

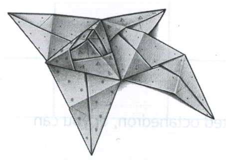
Návod pro složení hvězdicorohého osmistěnu

Nejprve složte dvanáct základních jednotek, tři od každé ze čtyř zvolených barev, či vzorů.

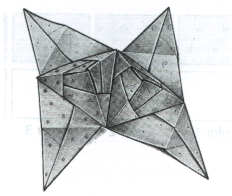
1) Zvolte tři základní jednotky, každou jiné barvy. Zasuňte do sebe tyto tři jednotky podle obrázku, stejným způsobem, jako jste to učinili u trojbokého dvojjehlanu.



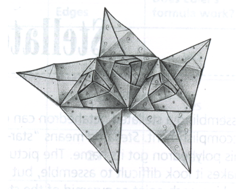
2) Zvolte základní jednotku jedné z barev, které jste již použili. Začněte pomocí ní vytvářet další jehlan. Od této chvíle vždy při zasouvání dodržujte následující pravidlo: na každé hraně vznikajícího mnohostěnu se stýkají právě dvě barvy.



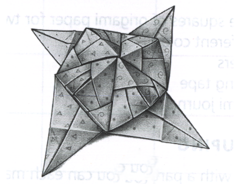
3) Dokončete druhý tříbarevný jehlan zasunutím jednotky čtvrté barvy, kterou jste zatím nepoužili.



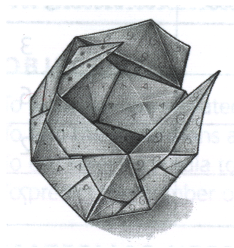
4) Pokračujte stejným způsobem po směru hodinových ručiček a dodržujte výše uvedené pravidlo. Třetí jehlan dokončete základní jednotkou stejné barvy, jako je úplně první jednotka v prstenci jehlanů.



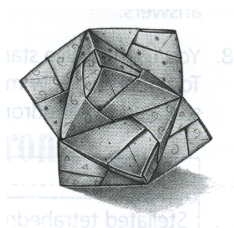
5) K dokončení čtvrtého jehlanu, kterým se spojí prstenec jehlanů, zasuňte základní jednotku té barvy, která splňuje pravidlo o setkávání barev na hranách.



6) Otočte skládanku jako na obrázku. zopakujte postup skládání jehlanů. začněte libovolným rohem a dokončete nový jehlan přidáním dvou nových základních jednotek. Barva druhé použité jednotky musí být stejná jako barva rohu napravo od ní.



7) Dokončete postup se zbývajícími jednotkami. Složili jste hvězdicorohý osmistěn.



Dodatek E

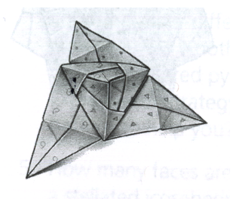
Návod pro složení hvězdicorohého dvacetistěnu

Nejprve složte třicet základních jednotek, pět od každé ze šesti zvolených barev, či vzorů.

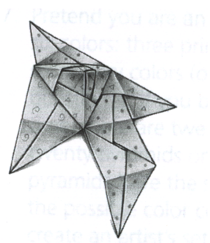
Při skládání hvězdicorohého dvacetistěnu dodržujte vždy tato dvě pravidla:

- **Ve vrcholu každého jehlanu se vždy stýkají právě tři barvy.**
- **Na každé hraně vznikajícího mnohostěnu se stýkají právě dvě barvy.**

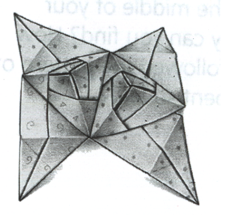
1) Zvolte tři základní jednotky, každou jiné barvy. Zasuňte do sebe tyto tři jednotky podle obrázku, stejným způsobem, jako jste učinili u trojbokého dvojjehlanu.



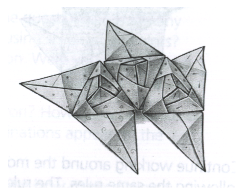
2) Začněte vytvářet další jehlan zasunutím jednotky potřebné barvy.



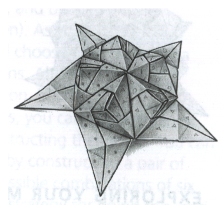
3) Dokončete druhý jehlan zasunutím jednotky jedné z barev, kterou jste ještě nepoužili. Celkem budete vytvářet pět jehlanů.



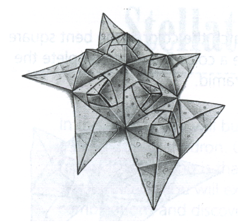
4) Pokračujte vytvářením třetího jehlanu, který dokončíte jednotkou jedné ze dvou nepoužitých barev.



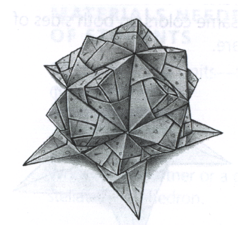
5) Dokončete zbývající dva jehlany při dodržení obou zmíněných pravidel.



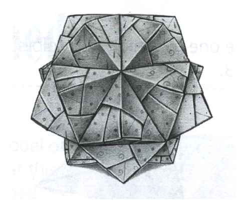
6) Nyní budete připojovat pás deseti jehlanů k „míse“ pěti jehlanů, které jste již vytvořili. První vytvářený jehlan dokončete základní jednotkou barvy, kterou jste zatím nepoužili.



7) Pokračujte při vytváření jehlanů, vždy dodržujte dvě zmíněná pravidla. Ta vám vždy napoví, jakou barvu mají mít připojované jednotky.



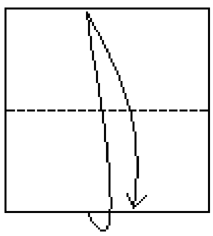
8) Na vytvořeném pásu deseti jehlanů vystavte dalších pět, které se setkají v jednom vrcholu. Nezapomeňte dodržovat pravidla o barevnosti. Složili jste hvězdicorohý dvacetistěn.



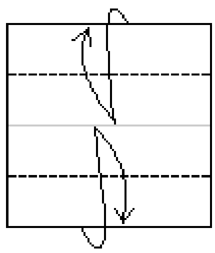
Dodatek F

Návod pro složení základní Sonobovy jednotky

Krok 1:

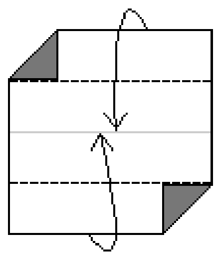


Krok 2:

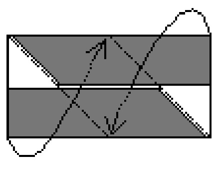


Krok 3:

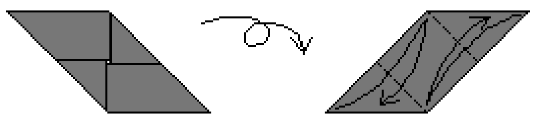
Krok 4:



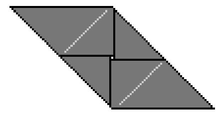
Krok 5:



Krok 6:

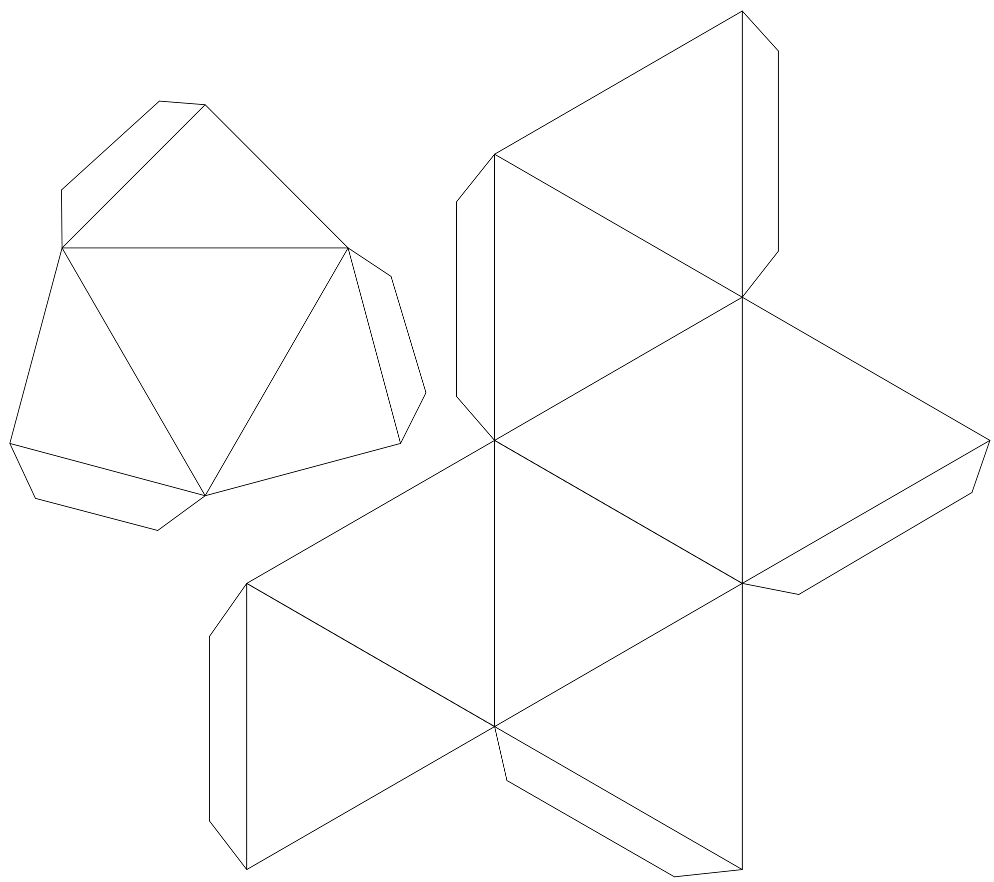


Krok 7:



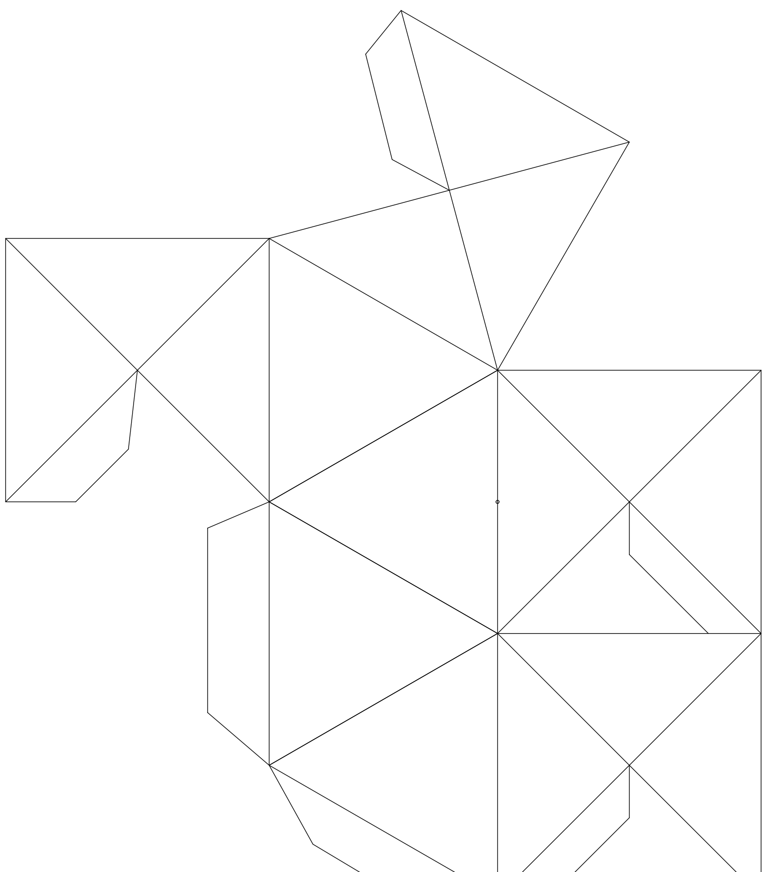
Dodatek G

Sítě pravidelného osmistěnu a trojbokého jehlanu



Dodatek H

Síť rozkládacího modelu krychle

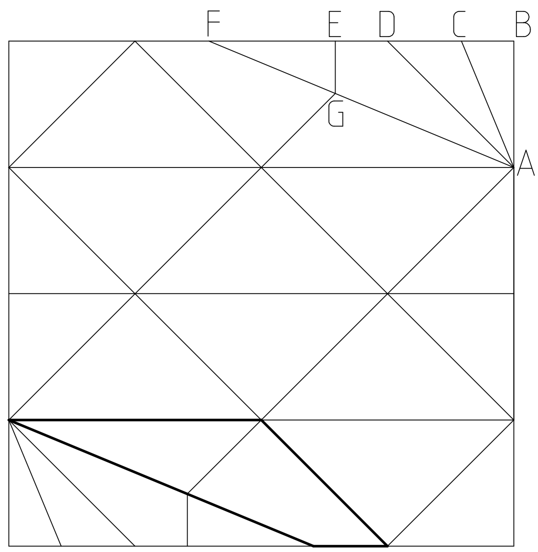


Dodatek I

Zadávací listy - základní jednotka

1) Jaký typ mnohoúhelníku představuje složená základní jednotka? Načrtněte jej a určete velikosti jeho vnitřních úhlů.

2) Rozložte jednu základní jednotku. Přehyby vzniklé skládáním vytvořily následující síť.



a) Vyznačte do této sítě různými barvami alespoň čtyři **nekonvexní** mnohoúhelníky.

b) Silněji vyznačený čtyřúhelník je .... (doplňte typ).

c) Určete typ trojúhelníků ABC, ABD a ADF.

d) Je čtyřúhelník $ADEG$ osově souměrný? Své tvrzení zdůvodněte.

e) Které z trojúhelníků ABC, ABD, ABF, GEF jsou podobné a proč?

f) Pokuste se bez provedení jakýchkoliv výpočtů zdůvodnit, zda jsou obsahy trojúhelníků ABC a ACD stejné, nebo různé. Pokud to nepůjde bez výpočtů, oba dva obsahy vypočítejte.

g) Pokud jste tak již neučinili v předchozí úloze, vypočítejte obsahy trojúhelníků ABC a ACD.

Dodatek J

Zadávací listy - dvojjehlan

1) Představte si, že váš kamarád má krabici s dvaceti různými mnohostěny, mezi nimiž je i ten, který jste právě složili. Napište co nejstručněji jeho slovní popis tak, aby onen kamarád z dvaceti mnohostěnů vybral právě ten váš. Pokuste se vymyslet pro složený mnohostěn název, který by vystihoval jeho vlastnosti.

Navržený název mnohostěnu je____

2) Vypočítejte **co nejjednodušším způsobem** (tj. provedením co nejméně výpočtů) povrch složeného mnohostěnu. Výchozí čtverec papíru měl délku 15 cm.

3) Výpočet objemu složeného mnohostěnu je podstatně složitější než výpočet jeho povrchu. Pokuste se vymyslet postup, jak by objem bylo možné určit a potom tento výpočet proveďte. Můžete jej provést buď obecně, tj. pro mnohostěn složený ze čtverce papíru libovolné velikosti (stranu tohoto čtverce pak označte a), nebo pro váš konkrétní mnohostěn.

4) Obdobou osové souměrnosti v prostoru je rovinová souměrnost, která se někdy označuje také jako zrcadlení. Řekneme, že těleso je rovinově souměrné, jestliže existuje rovina, podle níž se těleso zobrazí samo na sebe. Jinak řečeno, rovina souměrnosti tělesa rozřízne toto těleso na dvě části, které se vůči sobě mají jako vzor a obraz v zrcadle. Určete, kolik má složený mnohostěn rovin souměrnosti. Načrtněte mnohoúhelníky, které vzniknou řezem mnohostěnu těmito rovinami, určete délky jejich stran a vypočítejte jejich obsah.

Dodatek K

Dotazník

1) Základní jednotku jsem skládal podle psaného návodu - již složených základních jednotek - kombinace obojího (zakroužkujte), protože ______________________________

____

____

2) Ze všech úloh, na kterých jsme pracovali, mě nejvíce zaujalo ________________

____

protože ____

____

3) Řešit úlohy týkající se vlastnoručně vyrobeného modelu mnohostěnu mi přijde

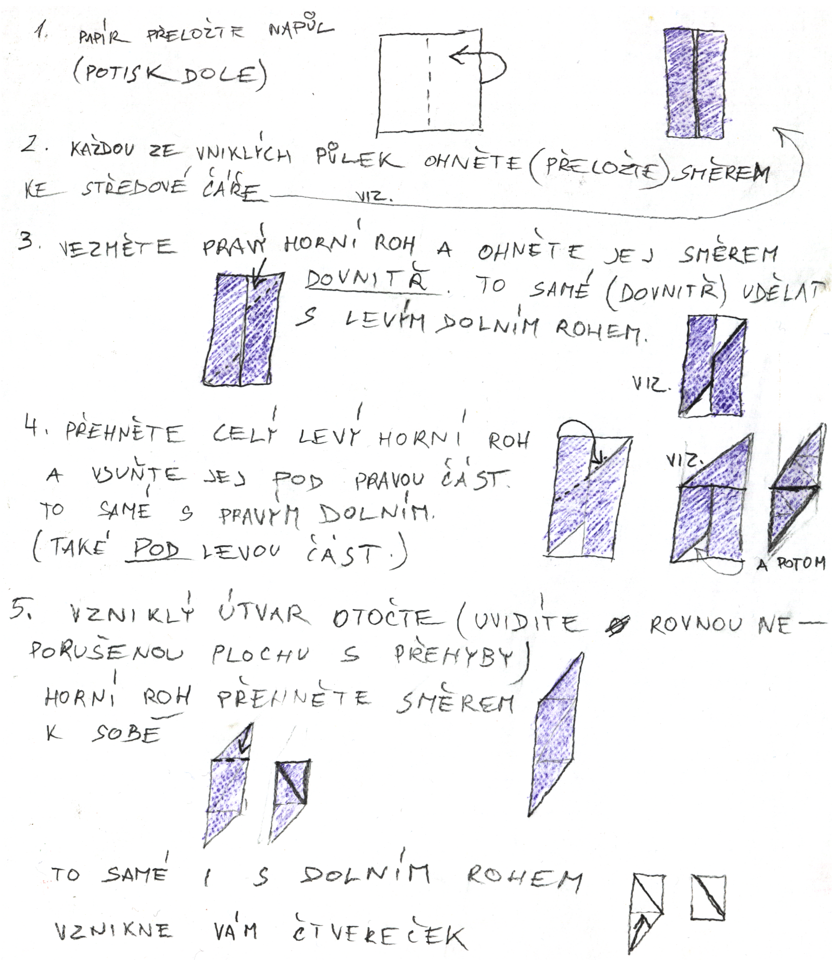
____

než řešit běžné úlohy z učebnice.

4) Zde prosím uveďte případné další poznámky, postřehy či doporučení. Děkuji.

Dodatek L

Ukázka žákovského návodu



Seznam obrázků

Literatura

[Baicker, 2004] Baicker, K. (2004). *Origami Math*. Scholastic, New York.

[Beatty, 2008] Beatty, V. (2008). Origami origins. `http://web.archive.org/web/20001008002845/http://ccwf.cc.utexas.edu/~vbeatty/exhibit_archive/origami1/history/origins.html`.

[Franco, 1999] Franco, B. (1999). *Unfolding Mathematics with Unit Origami*. Key Curriculum Press, Emeryville.

[Fuse, 2005] Fuse, T. (2005). *Unit Origami: Multidimensionla transformation*. Japan Publications, Tokyo.

[Gross, 2005] Gross, G. M. (2005). *Minigami: Great Projects Using Tea-bag, Iris Folding and Modular Origami*. Collins & Brown, London.

[Haga, 2002] Haga, K. (2002). Fold paper and enjoy math: origamics. In Hull, T., editor, *Origami: Third International Meeting of Origami Science, Math, and Education*, pages 307–328. A K Peters.

[Hatori, 2001] Hatori, K. (2001). `http://origami.ousaan.com/library/conste.html`.

[Hatori, 2008] Hatori, K. (2008). History of origami. `http://origami.ousaan.com/library/historye.html`.

[Hejný, 1989] Hejný, M. (1989). *Teória vyučovania matematiky 2*. Slovenské pedagogické nakladatelství, Bratislava.

[Historie 1, 2008] Historie 1 (2008). Historie origami. `http://origami.webz.cz/historie.htm`.

[Historie 2, 2002] Historie 2 (2002). Origami helps scientists solve problems. `http://www.sciencedaily.com/releases/2002/02/020219080203.htm`.

[Hull, 2006] Hull, T. (2006). *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics*. A K Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts.

[Hushimi, 1980] Hushimi, K. (1980). Trisection of angle. *Saiensu*, page 8.

[Huzita, 1992] Huzita, H. (1992). Understanding geometry through origami axioms. In Smith, J., editor, *Proceedings of the First International Conference on Origami in Education and Therapy*, pages 37–70. British Origami Society.

[Kasíková, 1997] Kasíková, H. (1997). *Kooperativní učení, kooperativní škola*. Portál, Praha.

[Kuřina, 1990] Kuřina, F. (1990). *Umění vidět v matematice*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha.

[Kuřina, 1996] Kuřina, F. (1996). *Deset pohledů na geometrii*. Matematický ústav AV ČR, Praha.

[Kuřina, 2001] Kuřina, F. (2001). *Geometrie a svět dětí: O vyučování geometrii na prvním stupni*. Pedagogické centrum Hradec Králové, Hradec Králové.

[Kuřina, 2003] Kuřina, F. (2002/2003). Porozumění matematice, matematické řemeslo a tvořivost. *Matematika-informatika–fyzika*, 12:1–13.

[Lang, 2003] Lang, R. J. (2003). Origami and geometric construction. `http://www.langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf`.

[Lister, 2005] Lister, D. (2005). History of origami: outline suggestions for a basic, essential history. `http://www.britishorigami.info/academic/lister/basichistory.php`.

[Lokšová, 1999] Lokšová, I. (1999). *Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole*. Portál, Praha.

[Messer, 1986] Messer, P. (1986). Problem 1054. *Crux Mathematicorum*, 12:284–285.

[Mitchell, 2001] Mitchell, D. (2001). *Exploring Mathematical Ideas with Origami*. Water Trade, Kendal.

[Pavelková, 2002] Pavelková, I. (2002). *Motivace žáků k učení*. UK PedF, Praha.

[Pearl, 2008] Pearl, B. (2008). *Math in Motion: Origami in the Classroom*. Yardley.

[Petty, 1996] Petty, G. (1996). *Moderní vyučování*. Portál, Praha.

[Wu, 2006] Wu, J. (2006). Origami: A brief history of the ancient art of paperfolding. http://www.origami.as/Info/history.php.

[Šternová, 2003] Šternová, H. (2003). Origami a překládaný papír ve výuce geometrie. Master's thesis, PedF UK, Praha.