Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Marek Tesař

Užití lineární algebry v kombinatorice

Katedra aplikované matematiky

Vedúci diplomovej práce: Prof. RNDr. Jan Kratochvíl, CSc.

Študijný program: Informatika, Diskrétní matematika a optimalizace

Chcel by som sa poďakovať svojmu vedúcemu, pánovi profesorovi Janovi Kratochvílovi, za jeho čas, ktorý mi venoval pri tvorbe tejto práce a tak isto za jeho postrehy a cenné rady.

Vyhlasujem, že som svoju diplomovú prácu napísal samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím s požičiavaním práce a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa 9.8.2007 Marek Tesař

Obsah

Názov práce: Použitie lineárnej algebry v kombinatorike
Autor: Marek Tesař
Katedra (ústav): Katedra aplikované matematiky
Vedúci diplomovej práce: Prof. RNDr. Jan Kratochvíl, CSc.
e-mail vedúceho: Jan.Kratochvil@mff.cuni.cz

Abstrakt:

Nakrytie grafu G do grafu H je "lokálny izomorfizmus": zobrazenie vrcholov grafu G na vrcholy grafu H také, že pre všetky $v \in V(G)$, okolie vrchola v je zobrazené bijektívne na okolie (v H) obrazu v. My študujeme výpočetnú zložitosť problému nakrytia na graf H (rozhodnútie či pre daný graf G existuje nakrytie do H), kde graf H je regulárny graf na 8 vrcholoch, jeho hrany majú dve farby, pričom hrany jednej farby tvoria dva disjunktné 4-cykly. Podávame tu plnú charakterizáciu problému nakrytia pre takéto 3 regulárne grafy. Polynomiálne prípady riešime pomocou prevodu na sústavu lineárnych rovníc a tiež ukážeme niektoré grafy, pre ktoré táto metóda nefunguje (napriek tomu, že problém nakrytia je polynomiálne riešiteľný).
Kľúčové slová: nakrytie, regulárny graf, lineárna algebra

Title: Combinatorial applications of linear algebra
Author: Marek Tesař
Department: Department of Applied Mathematics
Supervisor: Prof. RNDr. Jan Kratochvíl, CSc.
Supervisor's e-mail address: Jan.Kratochvil@mff.cuni.cz

Abstract:

A covering projection from graph G onto graph H is "local isomorphism": a mapping from the vertex set of G onto the vertex set of H such that, for every $v \in V(G)$, the neighborhood of v is mapped bijectively onto the neighborhood (in H) of the image of v. We study the computational complexity of the H-cover (deciding if a given graph G covers H), where G is a regular graph with 8 vertices and edges of two colors, where edges of one color create two disjoint 4-cycles. We present full characterization of H-cover problem for such 3-regular graphs. We solve polynomial cases by reduction to system of linear equations and we show some graphs for which this method doesn't work (even though H-cover is polynomial).
Keywords: cover projection, regular graph, linear algebra

Kapitola 1

Úvod a definície

1.1 Použíté značenie

Základnými kombinatorickými štruktúrami, ktorým sa budeme venovať v tejto práci budú grafy, pre ktoré budeme skúmať rôzne zobrazenia jedného grafu do druhého. Uveďmi si preto najprv formálnu definíciu grafu.

Definícia: *(jednoduchého grafu)* Jednoduchým grafom budeme rozumieť kombinatorickú štruktúru $G = (V, E)$, kde V bude množina vrcholov a množina hrán E bude podmnožina množiny $\binom{V}{2}$.

Potom ak G je jednoduchý graf, tak zápisom $V(G)$, resp. $E(G)$ budeme rozumieť množinu vrcholov, resp. hrán grafu G. Definícia jednoduchého grafu nám teda dovoľuje jedine neorientované hrany, ktoré spájajú dva rôzne vrcholy, pričom každé dva vrcholy môžu byť spojené maximálne jednou hranou. Túto definíciu si rozšírime tak, aby náš graf mohol obsahovať aj orientované hrany, slučky (orientované aj neorientované) a tiež viacnásobné hrany. Takémuto grafu už potom budeme hovoriť *multigraf*.

Definícia: *(multigrafu)* Multigrafom $G = (V, D \cup F \cup L, \mu)$ budeme obecne rozumieť kombinatorickú štruktúru na konečnej množine vrcholov V s množinou hrán $E = D \cup F \cup L$, kde D bude množina orientovaných hrán (včetne orientovaných slučiek), F bude množina neorientovaných hrán a L bude množina neorientovaných slučiek. Funkcia incidencie $\mu : E \to (V \times V) \cup \binom{V}{2} \cup V$ pre neorientovanú hranu $e \in F$ vráti $\mu(e) \in \binom{V}{2}$, dvojicu (rôznych) vrcholov spojených touto hranou, pre neorientovanú slučku $e \in L$ vráti vrchol $\mu(e) \in V$, v ktorom táto slučka začína aj končí a pre orientovanú hranu

$e \in D$ vráti $\mu(e) \in V \times V$, orientovanú dvojicu vrcholov spojených hranou e (v danom poradí).

Potom ak G bude multigraf tak zápismi $V(G)$, $D(G)$, $F(G)$, $L(G)$ a μ_G budeme postupne rozumieť množinu vrcholov, príslušných hrán a funkciu incidencie multigrafu G. Vidíme teda, že kým u jednoduchých grafov nám každú hranu jednoznačne určovali jej koncové vrcholy, tak u multigrafov na to musíme mať špeciálnu funkciu incidencie μ. Ďalším rozšírením grafov a multigrafov budú *ofarbené multigrafy (grafy)*.

Definícia: *(ofarbených multigrafov)* Nech M je množina farieb. Potom ofarbeným multigrafom budeme rozumieť kombinatorickú štruktúru $G = (V, D \cup F \cup L, \mu, C)$ takú, že $(V, D \cup F \cup L, \mu)$ je multigraf a $C : V \cup E \to M$ je funkcia, ktorá každému vrcholu a každej hrane priradí jednu z farieb z množiny M.

Ofarbený jednoduchý graf by sme už potom mohli definovať analogicky ako ofarbený multigraf. Pri ofarbení vrcholov pritom nepožadujeme aby ofarbenie splňovalo vlastnosť, že každé dva vrcholy spojené hranou musia mať rôznu farbu. Ak $d \in M$ bude farba tak, zápismi $V_d(G)$, $E_d(G)$, $D_d(G)$, $F_d(G)$ a $L_d(G)$ budeme rozumieť vrcholy a hrany grafu (multigrafu) G farby d a zápisom $M(G)$ budme rozumieť množinu farieb grafu G. Zápisom G_d pre farbu $d \in M$ budeme rozumieť graf s vrcholmi $V(G)$ a hranami $E_d(G)$ (ide teda o graf, ktorého všetky hrany majú rovnakú farbu).

Nech X je množina, potom v ďalšej časti budemem zápisom $C(X)$ rozumieť zápis množiny $C(X) = \{C(x), x \in X\}$. Keďže sme vždy schopný rozlíšiť vrchol a hranu, tak môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokldať, že množiny $C(V)$ a $C(E)$ sú navzájom disjunktné. A tiež sme schopný rozlišovať medzi orientovanými a neorientovanými hranami a teda môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že množiny $C(D)$ a $C(F \cup L)$ sú tiež disjunktné.

Potom si už ľahko uvedomíme, že obyčajný (neofarbený) multigraf zodpovedá ofarbenému multigrafu, kde $C(V)$, $C(D)$ a $C(F \cup L)$ sú (rôzne) jednoprvkové množiny.

Definujme si teraz pojem grafového homomorfizmu, o ktorého špeciálnej variante bude celá táto práca. Homorfizmus bude zobrazenie vrcholov jedného grafu na vrcholy druhého grafu zachovávajúce hrany. Formálne by sme homomorfizmus mohli definovať nasledujúcim spôsobom.

Definícia: *(homomorfizmu)* Nech G a H sú jednoduché ofarbené grafy. Zobrazenie $f : V(G) \to V(H)$ budeme nazývať homomorfizmus ak bude platiť, že $\forall x \in V(G); C(x) = C(f(x))$ a $\forall d \in M(G)$, $\forall (x, y) \in E_d(G)$; $(f(x), f(y)) \in E_d(H)$.

Problémom existencie homomorfizmu na grah H budeme nazývať problém, ktorý ako vstup dostane graf G a na výstupe vráti odpoveď *áno* ak existuje homomorfizmus $f : G \to H$, ináč vráti odpoveď *nie*. Tento problém pre graf H je už dobre známy a pre jednoduché grafy sa dokonca pozná úplná charakterizácia výpočetnej zložitosti tohoto problému, pre bipartitné grafy ide o polynomiálny problém a pre ostatné je tento problém *NP-úplný*. Dôkaz je možné nájsť v [5].

Vieme, že homomorfizmus nám vynucuje aby sa každá hrana grafu G zobrazila na hranu grafu H. Tiež sa však môže stať, že nejaká nehrana $(x, y) \notin E(G)$ sa zobrazí na hranu $(f(x), f(y)) \in E(H)$ a tiež sa môže stať, že dvaja susedia vrchola $u \in V(G)$ sa zobrazia na ten istý vrchol. Ukážme si teraz rozšírenie homomorfizmu, ktoré by zabránilo zobrazeniu nehrany na hranu a takisto zaručí aby sa dvaja susedia jedného vrchola zobrazili na rôzne vrcholy. Najprv si však pre $u \in V(G)$ označme $N_G(u) = \{x, (x, u) \in E(G)\}$ okolie vrchola u, potom môžeme definofať rozšírenie homomorfizmu nasledovne.

Definícia: *(nakrytia)* Nech G a H sú jednoduché grafy a nech $f : V(G) \to V(H)$ je homomorfizmus. Ak pre všetky $u \in V(G)$ platí, že restrikcia funkcie f na okolie vrchola u je bijekcia medzi množinami $N_G(u)$ a $N_H(f(u))$, tak f budeme nazývať nakrytie a budeme to značiť $f : G \to H$.

Nakrytie teda vyžaduje aby sa okolie vrchola zobrazovalo bijektívne na okolie svojho obrazu, preto sa takémuto zobrazeniu často hovorí aj *lokálne bijektívny homomorfizmus*. Mimo iné potom dostávame, že vrchol musí mať rovnaký stupeň ako svoj obraz.

Formálnu definíciu nakrytia pre multigrafy môžeme nájsť v [1] a [3], kde autori podávajú nielen definíciu nakrytia, ale tiež vrcholového nakrytia, ktoré je s ním ekvivalentné, ale vo väčšine prípadov sa s ním pracuje lepšie (viz [1]).

Pokiaľ nebude povedané inak, tak v ďalšej časti budeme grafom rozumieť multigraf $G = (V, D \cup F \cup L, \mu, C)$ taký, že V bude konečná množina vrcholov, $D = L = \emptyset$ budú prázdne množiny, $C(V)$ bude jednoprvková množina (bez ujmy na všeobecnosti nech obsahuje čiernu farbičku) a $\forall d \in C(E)$,

G_d je jednoduchý graf, t.j. bez násobných hrán. Potom je už každá hrana jednoznačne určená svojimi koncovými vrcholmi a farbou a pojem farbou, pričom pojmom farba už budeme rozumieť iba farbu hrán (a nie vrcholov). Pre $u \in V(G)$ a $d \in C(E(G))$ si označme $N_G(u,d) = \{x, (u,x) \in E(G_d)\}$ okolie farby d a vrcholy tejto množiny budeme nazývať susedov farby d (aj keď v skutočnosti túto farbu nemajú). Potom môžeme definíciu nakrytia na takéto grafy rozšíriť nasledovne.

Definícia: Majme dva grafy G a H. O zobrazení $f : V(G) \to V(H)$ povieme, že je to nakrytie ak $\forall d \in C(E(G))$ a $\forall u \in V(G)$ splňuje, že restrikcia zobrazenia f na množinu $N_G(u,d)$ je bijekciou medzi množinami $N_G(u,d)$ a $N_H(f(u),d)$.

1.2 Problém nakrytia

Problém nakrytia na graf H by sme už teraz mohli definovať ako problém, ktorý na vstup dostane graf G a odpovie nám, či existuje nakrytie $f : G \to H$ grafu G na graf H. Je známe, že pre niektoré grafy H je tento problém polynomiálne (efektívne) riešiteľný a pre niektré grafy je *NP-úplný* (nie je však zatiaľ známy žiadny prípad, ktorý by nezapadal do žiadnej z týchto tried). Pri hľadaní nakrytia je potom veľmi užitočný nasledujúci pojem.

Definícia: *(stupňového rozdelenia)* Nech G je (jednoduchý ofarbený) graf s prípadnými slučkami (t.j. $L(G)$ nie je nutne prázdna a $E(G) = F(G) \cup L(G)$), potom stupňovým rozdelením budeme rozumieť rozdelenie vrcholov do disjunktných (monochromatických) tried $B_1, B_2, \ldots, B_k$ takých, že pre $\forall i, j = 1, 2, \ldots k$ a $\forall d \in C(E(G))$ existuje číslo r_{ij}^d splňujúce:

$i)$ pre všetky i, j a každé $u \in B_i$:

$$|\{e \in F(G); u \in \mu(e), \mu(e) \setminus \{u\} \in B_j, C(e) = d\}| = r_{i,j}^d$$

$ii)$ pre každé i a každý $u \in B_i$:

$$|\{e \in F(G); u \in \mu(e), \mu(e) \setminus \{u\} \in B_i, C(e) = d\}| + \\ 2|\{e \in L(G); \mu(e) = u, C(e) = d\}| = r_{i,i}^d$$

Rovnosť $i)$ hovorí, že každý vrchol z B_i má rovnako veľa susedov v každej inej B_j a rovnosť $ii)$ potom dopĺňuje túto definíciu o to, aby každý vrchol v B_i mal v B_i rovnako vela susedov (príslušnej farby). Toto rozdelenie je jednoznačné v zmysle minimálneho k, resp. vzhľadom na inklúziu množín

$B_1, B_2, \ldots, B_k$. Navyše pre takéto rozdelenie existuje jednoznačné usporiadanie množín $B_1, B_2, \ldots, B_k$, závisiace len od hodnôt $r^c_{i,j}$. V ďalšej časti preto stupňovým rozdelením budeme rozumieť vždy toto minimálne usporiadané rozdelenie. Dá sa ukázať, že stupňové rozdelenie sme pre každý graf schopný nájsť v polynomiálnom čase. Hodnoty $r^d_{i,j}$ $(\forall i, j = 1, 2, \ldots, k; d \in C(F \cup L))$ budeme nazývať *stupňová charakteristika* a množiny B_i budeme nazývať bloky.

Potom ak existuje nakrytie $f : G \to H$, tak grafy G a H musia mať rovnakú stupňovú charakteristiku a navyše ak $B_1, B_2, \ldots, B_k$ sú bloky stupňového rozdelenia grafu G a $B'_1, B'_2, \ldots, B'_k$ sú bloky stupňového rozdelenia grafu H (také, že $\forall d \in C(G)$ a $\forall i, j = 1, 2, \ldots, k$ platí $r^d_{i,j} = r'^d_{i,j}$) tak, $f(B_i) \subseteq B'_i$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, k$ (pričom zápisom $F(B_i)$ rozumieme množinu $\{f(x), x \in B_i\}$).

V práci [1] autori ukázali, že na úplnú charakteristiku problému nakrytia nám stačí uvažovať multigrafy bez vrcholov s malým stupňom. Špeciálne teda môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že multigrafy G aj H budú mať minimálny stupeň aspoň 3.

V tejto práci je tiež dokázané to, že aby sme mohli podať úplnú charakteristiku problému nakrytia pre jednoduché ofarbené grafy je nutnou a postačujúcou podmienkou podať úplnú charakterizáciu problému nakrytia pre ofarbené multigrafy H s minimálnym stupňom aspoň 3.

Ďalším dôležitým výsledkom práce [1] je, že autori podali úplnú charakterizáciu problému nakrytia pre ofarbené multigrafy na 2 vrcholoch. Ukázali, že ak H je takýto graf, tak problém nakrytia je buď polynomiálny alebo *NP-úplný*. Dôkaz sa potom do značnej miery opieral o to, že v polynomiálnych prípadoch sa problém nakrytia dal previesť na *2-SAT*, čo je známy polynomiálny problém a pre dôkaz *NP-úplnosti* sa používala lemma, že problém nakrytia na graf H je *NP-úplný* práve vtedy ak existuje farba $d \in C(E(H))$, pre ktorú je *NP-úplný* problém nakrytia na graf H_d (toto je už neofarbený graf). Táto lemma však neplatí obecne, existujú dokonca už aj multigrafy na 3 vrcholoch, pre ktoré neplatí.

V práci [3] autori ukazujú triedu grafov, pre ktoré je problém nakrytia efektívne riešiteľný. Rozoberajú tu grafy H, pre ktoré všetky bloky stupňového rozkladu majú velkosť 1, 2 alebo 4 a grafy indukované vrcholmi jednostlivých blokov a bipartitné grafy indukované vrcholmi dvoch rôznych blokov sú izomorfné s niektorým z grafov popísaných v tomto článku. Dôkaz polynomiality sa potom robil pomocou toho, že sa každému bloku priradili premenné nad dvojprvkovým telesom $GF[2]$ a autori zostavili popis konštrukcie sústavy lineárnych rovníc (závisiacej na grafe H), ktorej riešenia boli v korešpondencii s nakrytiami grafu G na graf H.

Nech C_k^l je neorientovaný multigraf ($D(C_k^l) = \emptyset$) na vrcholoch $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ($k \geq 2$) s hranami $F(C_k^l) = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{k-1}, x_k), (x_k, x_1)\}$ a slučkou nad každým vrcholom. Graf C_k^l je teda cyklus dĺžky k so slučkou nad každým vrcholom. V článku [1] autori ukázali že problém nakrytia pre graf C_2^l je *NP-úplný* a v [4] bola doplnená charakterizácia zložitosti problému na grafy C_k^l. Ukázalo sa, že pre všetky $k \geq 3$ je tento problém tiež *NP-úplný* (pričom pre párne k sa tento problém previedol na problém existencie homomorfizmu na jednoduchý graf a pre nepárne k sa tento problém previedol na problém k-farebnosti).

Ďalším problémom rozobraným v [4] je problém nakrytia na k-2-cykly. Ide o grafy ktoré získame tak, že každú hranu cyklického grafu na k vrcholoch C_k nahradíme dvoma hranami ofarbenými dvoma farbičkami. Nie je ťažké ukázať, že tento problém je ekvivalentný problému nakrytia na k-hviezdu (ide o neofarbený graf, ktorý dostaneme z cyklu C_k tak, že každé dva susedné vrcholy pôvodného grafu spojíme cestičkou dĺžky 2).

Bolo známe, že ak k je násobok nepárneho prvočísla, tak je tento problém *NP-úplný* a tiež bolo známe, že ak je tento problém *NP-úplný* pre graf k-2-cyklus, tak je *NP-úplný* pre $2k$-2-cyklus. Nie je potom ťažké overiť, že problém nakrytia na graf 2-2-cyklus a na 4-2-cyklus je polynomiálne riešiteľný, mimo iné to plynie aj z [3]. V článku [4] je potom podaný pekný dôkaz (pomocou prevodu na 4 ofarbiteľnosť), že problém nakrytia na graf 8-2-cyklus je *NP-úplný* čo dopĺňuje úplnú charakterizáciu existencie nakrytia pre triedu k-2-cyklov.

Problém existencie nakrytia, však nie je jediný problém týkajúci sa nakrytia. Niekedy je zaujímavá otázka, či sme schopný takéto nakrytie nájsť (a nie len rozhodnúť o jeho existencii) alebo tiež zistiť koľko takýchto nakrytí existuje. V [2] pre ľubovoľný neofarbený regulárny 1-faktorizovateľný graf H ukazujú konštrukciu grafu G so špeciálnym vrcholom u, pre ktorý nielenže bude existovať nakrytie do grafu H. Ale ak si predpíšeme, kde chceme aby sa zobrazil vrchol u a okolie tohoto vrchola (okolie sa však musí zobraziť bijektívne na okolie obrazu), tak toto zobrazenie sa už bude dať dodefinovať na nakrytie. Analógiu takéhoto grafu s niekoľkými nakrytiami neskôr využijeme v kapitole 3.

Okrem skúmania lokálne bijektívnych homomorfizmov, má často veľký význam skúmať aj lokálne prosté homomorfizmy. V nich už nebudeme požadovať aby sa okolie vrcholu zobrazovalo bijektívne na okolie svojho obrazu, ale postačí nám aby sa okolie vrcholu zobrazovalo injektívne na okolie svojho obrazu. Takýmto zobrazeniam je venovaná veľká časť v [2] a my ho čiastočne vyžijeme pri zisťovaní vlastností nakrytia v podkapitole 2.4.

1.3 Problémy skúmané v tejto práci

V práci [3] autori popísali zaujímavý prístup k problému nakrytia, keď tento problém previedli na hľadanie riešenia sústavy lineárnych rovníc nad dvojprvkovým telesom $GF[2]$, ktorý je už efektívne riešiteľný napríklad Jordan-Gaussovou eliminačnou metódou, pričom samotná konštrukcia sústavy zabezpečovala, že veľkosť sústavy bude polynomiálna od veľkosti testovaného grafu G a teda problém nakrytia sa dal riešiť v čase polynomiálnom od veľkosti vstupu.

Tento prevod bol založený na tom, že pre daný graf H na 2^k vrcholoch (pre $k \leq 2$) sa zostrojili popis, ktorý každému vrcholu $x \in V(G)$ priradil vektor premenných nad $(GF[2])^k$ a pre premenné tohoto vrcholu a jeho okolia $N_G(u)$ sa do sústavy pridalo niekoľko lineárnych rovníc, pričom tieto rovnice boli symetrické pre každý vrchol (a závisely len od vrcholu a farby jeho susedov). Každému vrcholu grafu H potom autori priradili vektor z $(GF[2])^k$ tak, aby dostal každý vrchol iný vektor. Pre riešenie takto popísanej sústavy sa potom zostavilo zobrazenie $f : V(G) \to V(H)$, ktoré zobrazovalo každý vrchol grafu G na ten vrchol grafu H, ktorý mal rovnaký vektor ako bol jeho ohodnotený vektor premenných a ukázalo sa, že ide o korektné nakrytie.

Na konci tohto článku autori ešte ukázali, že ak sa vrcholom grafu H priradia vektory úplne ľubovoľne (ale tak aby každý vrchol dostal iný vektor) tak stále bude existovať popis, ktorý vytvorí sústavu, ktorej riešenia budú v korešpondencii so všetkými nakrytiami $f : G \to H$.

My sa v kapitole 2 budeme zaoberať 3-regulárnymi grafmi na 8 vrcholoch (pripomeňme, že 8 je ďalším kandidátom na existenciu takéhoto popisu), ktorých hrany budú ofarbené dvomi farbami, modrou m a červenou c, pričom graf G_m bude pozostávať z dvoch disjunktných 4-cyklov a graf G_c bude perfektné párovanie. Podáme úplnú charakterizáciu problému nakrytia pre tieto grafy a ukážeme, že všetky tieto prípady až na jeden graf H_{2b} (viz obrázok 2.7) sú polynomiálne (za predpokladu, že $P \neq NP$), hoci problém nakrytia pre grafy G_m aj G_c je polynomiálne riešiteľný (nebude už teda ďalej platiť lemma z [1], že problém nakrytia na graf H je *NP-úplný* práve vtedy, keď existuje farbička $d \in C(E(H))$, pre ktorú je problém nakrytia na graf

H_d *NP-úplný*).

Pre graf H_{2b} potom v kapitole 4 ukážeme, že popis takej sústavy ani nemôže existovať a mohlo by sa teda zdať, že problém nakrytia je polynomiálne riešiteľný práve vtedy, keď existuje popis symetrickej konštrukcie sústavy lineárnych rovníc, ktorej riešenia by boli v bijekcii so všetkými príslušnými nakrytiami.

V kapitole 3 však ukážeme graf $\widehat{H}$ (viz obrázok 3.1), pre ktorý popis takejto sústavy nebude existovať (viz kapitola 4), ale tento problém bude napriek tomu polynomiálne riešiteľný. Toto ukážeme opäť pomocou prevodu na sústavu lineárnych rovníc, ale túto sústavu už budeme konštruovať inak a hlavnou zmenou bude, že jednotlivé rovnice už nebudú symetrické.

Kapitola 4 potom už len ukáže niekoľko nutných podmienok na existenciu popisu symetrickej konštrukcie sústavy lineárnych rovníc a tiež neexistenciu takéhoto popisu pre grafy H_{2b} a $\widehat{H}$.

Kapitola 2

Nakrytia 3-regulárnych dvojfarebných grafov

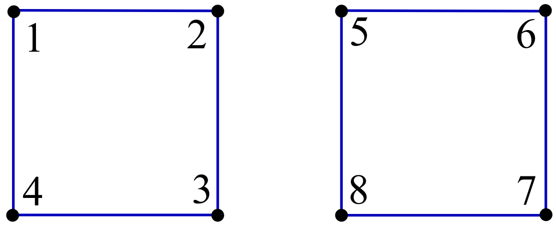
V tejto kapitole sa budeme zaoberať otázkou nakrytia pre špeciálne dvojfarebné 3-regulárne grafy na 8 vrcholoch a podáme úplnú charakterizáciu problému nakrytia pre tieto grafy.

2.1 3-regulárne grafy na 8 vrcholoch

Budeme sa venovať grafom H, ktoré sa budú skladať z dvoch modrých 4-cyklov a graf H_c bude perfektné párovanie na týchto ôsmich vrcholoch. Ukážeme, že existuje len 8 neizomorfných takýchto grafov. A pre všetky až na jeden typ ukážeme, že problém rozhodnúť, či pre daný graf G existuje nakrytie $f : G \to H$ je polynomiálne riešiteľný a pre posledný typ ukážeme, že tento rozhodovací problém je *NP-úplný*. Nasledujúca veta 2.1.1 popisuje, o ktoré grafy ide.

Veta 2.1.1 *Existuje práve 8 neizomorfných grafov H takých, že $|V(H)| = 8$, $M(H) = \{m, c\}$, $E(H) = E_m(H) \cup E_c(H)$, kde $E_m(H)$ je množina modrých hrán a $E_c(H)$ je množina červených hrán a graf H_m sa skladá z dvoch 4-cyklov a H_c je perfektné párovanie vrcholov $V(H)$ (platí teda, že H_m je 2-regulárny a H_c je 1-regulárny graf).*

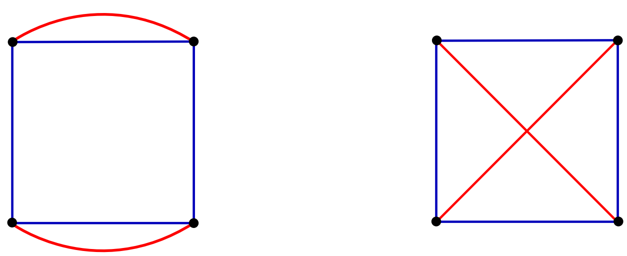
Dôkaz: Bez ujmy na všeobecnosti si môžeme vrcholi $V(H)$ označiť ako $1, 2, 3, \ldots, 8$ tak, aby jeden 4-cyklus obsahoval zaradom vrcholi $1, 2, 3, 4$ a druhý $5, 6, 7, 8$ tak, ako je to na nasledujúcom obrázku 2.1:



Obr. 2.1: Graf H_m zložený z dvoch modrých 4-cyklov

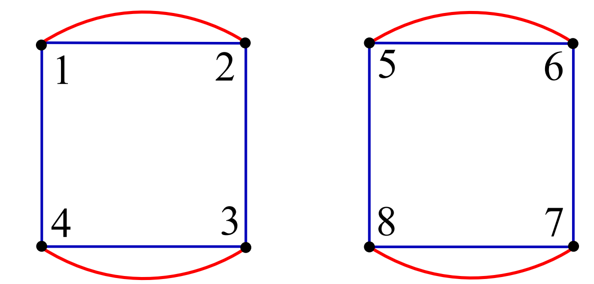
Je zrejmé, že medzi 4-cyklami $1, 2, 3, 4$ a $5, 6, 7, 8$ vedú buď $0, 2$ alebo 4 červené hrany, pretože ak by to tak nebolo tak si počet červených hrán idúcich z cyklu $1, 2, 3, 4$ do $5, 6, 7, 8$ označme ako x a počet červených hrán, ktorých oba konce sú v cykle $1, 2, 3, 4$ si označme ako y. Pretože každý z vrcholov $1, 2, 3$ a 4 má červený stupeň 1 musí platiť, že $4 = x + 2y$ z čoho priamo plynie, že $x \in \{0, 2, 4\}$. Rozoberme si teraz postupne všetky tri možnosti:

- 1.) uvažujme najprv grafy kde medzi jednotlivými modrými 4-cyklami nevedie ani jedna červená hrana. Potom graf H je nutne nesúvislý (v zmysle, že vrcholy sa dajú rozložiť do dvoch neprázdnych množín tak, že žiadna hrana nevedie medzi týmito množinami). Stačí nám teda zistiť ako môžu vyzerať jednotlivé komponenty a to budú nutne podgrafy na 4 vrcholoch. Potom si ľahko uvedomíme, že máme len dve možnosti, buď v takejto komponente existujú dva vrcholy, ktoré sú spojené modrou aj červenou hranou, alebo žiadne dva takéto vrcholy neexistujú. Nie je ťažké si rozmyslieť, že takáto komponenta už musí byť izomorfná s jedným z grafov na obrázku 2.2.

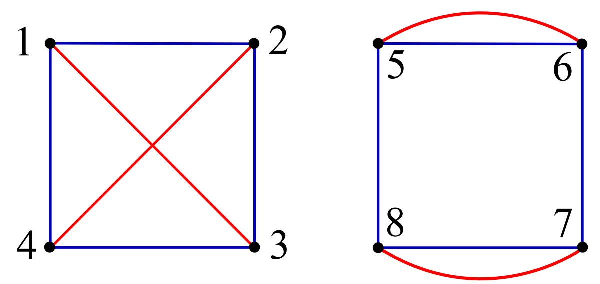


Obr. 2.2: Všetky neizomorfné grafy na 4 vrcholoch obsahujúce modrý 4-cyklus a červené perfektné párovanie

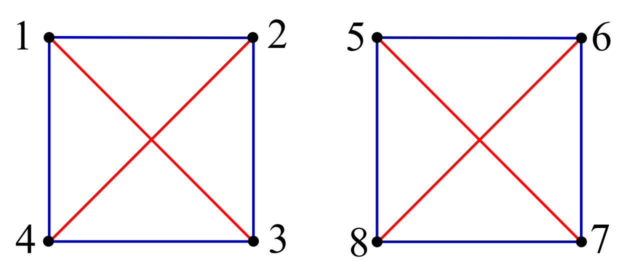
A potom je už zrejmé, že graf H musí byť izomorfný s jedným z grafov na obrázkoch 2.3, 2.4 a 2.5. Označme si tieto grafy postupne H_{1a}, H_{1b} a H_{1c}.



Obr. 2.3: Prvý typ dvojfarebného nesúvislého grafu na 8 vrcholoch - H_{1a}

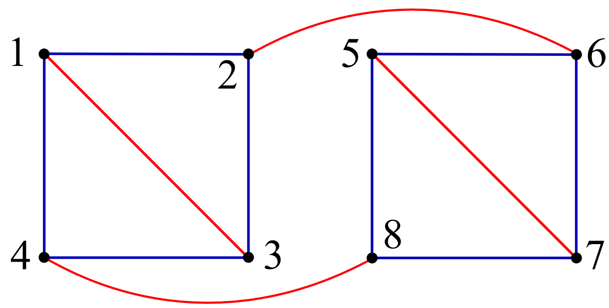


Obr. 2.4: Druhý typ dvojfarebného nesúvislého grafu na 8 vrcholoch - H_{1b}



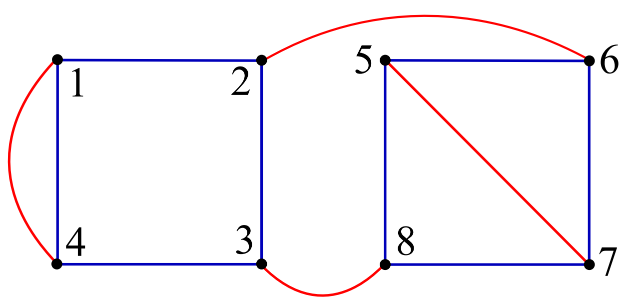
Obr. 2.5: Tretí typ dvojfarebného nesúvislého grafu na 8 vrcholoch - H_{1c}

- 2.) uvažujme teraz, že medzi 4-cyklami $1,2,3,4$ a $5,6,7,8$ vedú 2 hrany. Predpokladajme najprv, že neexistujú dva vrcholy $x,y \in V(H)$ také, že $(x,y) \in E_m(H)$ a $(x,y) \in E_c(H)$. Potom bez ujmy na všeobecnosti $(1,3) \in E_c(H)$ a $(5,7) \in E_c(H)$ a vzhľadom na izomorfizmus už potom môžeme predpokladať, že $(2,6) \in E_c(H)$ a $(4,8) \in E_c(H)$. Takto vzniknutý graf označme ako H_{2a} (viz obrázok 2.6).



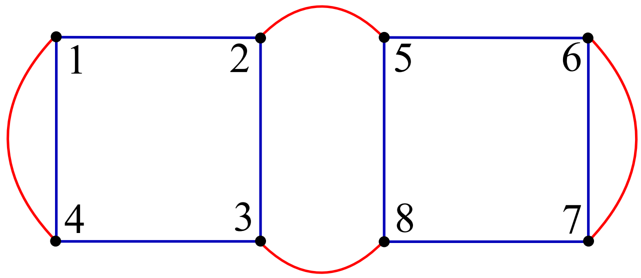
Obr. 2.6: Prvý typ dvojfarebného súvislého grafu na 8 vrcholoch - H_{2a}

V prípade, že existujú $x,y \in V(H)$, $(x,y) \in E_m(H)$ a $(x,y) \in E_c(H)$, tak bez ujmy na všeobecnosti $x = 1$ a $y = 4$. Potom máme dve možnosti buď existujú vrcholy $x',y' \in \{5,6,7,8\}$ také, že $(x',y') \in E_c(H)$ a $(x',y') \in E_m(H)$ alebo nie. V prípade, že neexistujú, tak bez ujmy na všeobecnosti dostávame graf izomorfný s grafom na obrázku 2.7. Tento graf si pomenujme ako H_{2b}.



Obr. 2.7: Druhý typ dvojfarebného súvislého grafu na 8 vrcholoch - H_{2b}

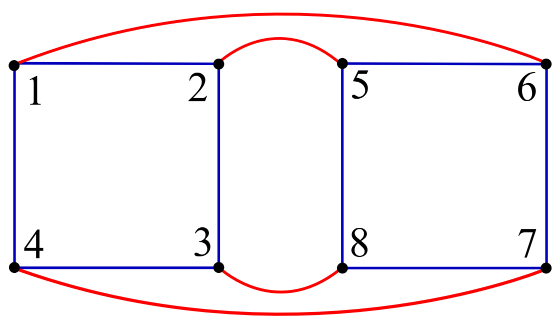
V prípade, že také vrcholy x' a y' existujú, tak bez ujmy na všeobecnosti $x' = 6$ a $y' = 7$ a potom dostávame, že posledný takýto typ je izomorfný s grafom na obrátku 2.8. Označme si tento graf ako H_{2c}.



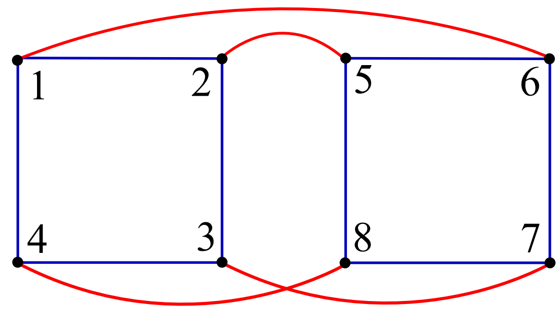
Obr. 2.8: Tretí typ dvojfarebného súvislého grafu na 8 vrcholoch - H_{2c}

- 3.) zostávame nám teda už len tretí typ a to ten, že všetky červené hrany vedú z množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ do množiny $\{5, 6, 7, 8\}$. Bez ujmy na všeobecnosti $(1, 6) \in C_c(H)$. Potom určite platí, že aspoň jeden z vrcholov $\{2, 4\}$ je spojený červenou hranou s nejakým z vrcholov $\{5, 7\}$. Potom existuje 4-cyklus s alternujúcimi hranami (striedajú sa v ňom červené a modré hrany) obsahujúci vrcholy 1 a 6 a bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že ide o cyklus $\{1, 2, 5, 6\}$ a teda $(2, 5) \in E_c(H)$. Potom je vrchol 4 spojený červenou hranou buď s vrcholom 7 a dostávame tak graf H_{3a} (viz obrázok 2.9) alebo je vrchol 4 spojený červenou hranou s vrcholom 8 a dostávame posledný typ H_{3b} (viz obrázok 2.10):

Rozobrali sme teda všetky možnosti a zistili sme, že existuje práve 8 neizomorfných grafov H na 8 vrcholoch takých, že H_m je tvorený dvoma 4-cyklami a C_m je perfektné párovanie, čo dokazuje našu vetu 2.1.1. ∎



Obr. 2.9: Štvrtý typ dvojfarebného súvislého grafu na 8 vrcholoch - H_{3a}



Obr. 2.10: Piaty typ dvojfarebného súvislého grafu na 8 vrcholoch - H_{3b}

2.2 Polynomiálne prípady

Nasledujúca veta 2.2.1 ukazuje, že pre všetky typy vyššie popísaných grafov až na graf H_{2b} vieme problém nakrytia rozhodnúť v polynomiálnom čase. Samotný dôkaz potom ukáže spôsob ako zostrojiť takéto zobrazenie.

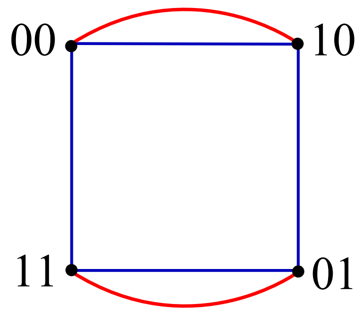
Veta 2.2.1 *Ak H je graf izomorfný s niektorým z grafov H_{1a}, H_{1b}, H_{1c}, H_{2a}, H_{2c}, H_{3a} alebo H_{3b}, tak problém existencie nakrytia $f : G \to H$, pre daný súvislý graf G vieme rozhodnúť v polynomiálnom čase.*

Pre nesúvislé grafy G stačí otázku nakrytia skúmať pre každú komponentu súvislosti a vetu 2.2.1 by sme potom mohli jednoducho rozšíriť aj na nesúvislé grafy G.

Všetky dôkazy polynomiality budeme robiť pomocou (polynomiálneho) prevodu na sústavu rovníc nad $GF[2]$, ktorá už je riešiteľná v polynomiálnom čase. Túto sústavu skonštrujeme tak, aby jej riešenia boli v bijekcii s nakrytiami. Keďže počet riešení sústavy lineárnych rovníc vieme zistiť v polynomiálnom čase, budeme dokonca schopný zostaviť efektívny algoritmus na hľadanie počtu korektných nakrytí. V prípade grafu H_{2b} neskôr ukážeme, že takúto sústavu zostaviť nevieme (aspoň nie toho typu ako je to u zvyšných grafov) a dokonca ukážeme, že problém rozhodnutia, či existuje nakrytie $f : G \to H_{2b}$ je *NP-úplný*.

Dôkaz: Nech G je graf, pre ktorý nás zaujíma, či existuje nakrytie $f : G \to H$ a nech H je najprv jeden z grafov H_{1a}, H_{1b} a H_{1c}. Potom H je nesúvislý a pre daný súvislý graf G stačí overiť, či existuje nakrytie do aspoň jednej komponenty súvislosti grafu H. Grafy H_{1a}, H_{1b} a H_{1c} však obsahujú iba dve neizomorfné komponenty súvislosti a teda stačí overiť, že otázka existencie nakrytia pre tieto dve komponenty je polynomiálna.

Uvažujme najprv komponentu, z ktorej dvoch kópií je zložený graf H_{1a} (viz obrázok 2.3). Označme si ju ako H' a jej vrcholy si označme dvoma bitmi (t.j. vektormi z $(GF[2])^2$) tak, ako je to na obrázku 2.11.



Obr. 2.11: Prvý typ komponenty súvislosti H' na 4 vrcholoch s ohodnotenými vrcholmi

Teraz každému vrcholu u grafu G priradíme dve premenné u_1 a u_2. Zrejme každý vrchol u má práve dvoch modrých susedov, označme si ich ako x, y a jedného červeného suseda, označme si ho ako v (ináč by žiadne nakrytie f určite nemohlo existovať).

Pre daný graf G a pre všetky jeho vrcholy u a príslušných susedov (všetky kombinácie príslušných susedov) pridajme do našej sústavy nasledujúce rovnice:

$$
\begin{aligned}
&i1) \quad u_1 + x_1 = 1\\
&i2) \quad x_2 + y_2 = 1\\
&i3) \quad u_1 + v_1 = 1\\
&i4) \quad u_2 + v_2 = 0
\end{aligned}
$$

Rovnica $i1$) hovorí, že každé dva vrcholy grafu G, ktoré sú spojené modrou hranou musia mať rôzne ohodnotenú prvú premennú (bit), pričom rovnosť $i2$) hovorí, že modrý susedia každého vrchola musia mať rôzny druhý bit. Z toho ale vyplýva, že bity u_1 a u_2 vrchola u už jednoznačne určujú aké bity budú mať modrý susedia tohoto vrchola (až na ich prípadnú zámenu). Rovnice $i3$) a $i4$) potom hovoria, že bity u_1 a u_2 tiež presne určia bity červeného suseda vrchola u.

Teraz ukážeme, že pokiaľ má táto sústava riešenie tak už existuje nakrytie $f : G \to H'$. Funkciu f budeme definovať nasledujúcim spôsobom:

$$\forall u \in V(G); \quad f(u) = (u_1, u_2) \in V(H')$$

Funkcia f teda vrcholom grafu G prideľuje dva bity z $GF[2]$ a teda obor hodnôt tejto funkcie je práve množina $V(H')$. Na to aby f bola nakrytím potrebujeme ukázať, že susedia každého vrcholu u sa zobrazia na rovnaké dva bity ako majú susedia vrchola $f(u)$ v grafe H'. Ale my vieme, že hodnoty u_1 a u_2 už jednoznačne určujú aké bity dostanú susedia vrcholu u a teda stačí overiť 4 možnosti, na ktoré sa vrchol u môže zobraziť a ukázať, že susedia už potom musia dostať rovnaké bity ako majú susedia vrchola $f(u)$ v grafe H' a toto vieme spraviť jednoducho, rozobraním všetkých prípadov. A teda každé riešenie hore popísanej sústavy, nám priamo definuje najkrytie $f : G \to H'$.

Predpokladajme teraz, že existuje nakrytie $f : G \to H'$. Pre každé $u \in V(G)$ potom definujme premenné u_1 a u_2 tak, že u_1 je prvý bit z $f(u)$ a u_2 je druhý bit z $f(u)$. Ukážeme, že toto ohodnotenie už splňuje všetky rovnice z našej sústavy. Na to nám ale opäť stačí rozobrať všetky štyri možnosti, na ktoré sa vrchol u môže zobraziť a pre každú z týchto možností už potom budeme z grafu H' vedieť ohodnotenie susedov vrchola u v G a potom už len stačí overiť, že platia rovnosti $i1$), $i2$), $i3$) a $i4$). Rozobrať týchto pár možností nie je zložité a dostávame teda, že ak existuje nakrytie $f : G \to H'$, tak existuje aj riešenie našej sústavy (dokonca všetky riešenia sústavy sú v jednoznačnej korešpondencii so všetkými korektnými nakrytiami).

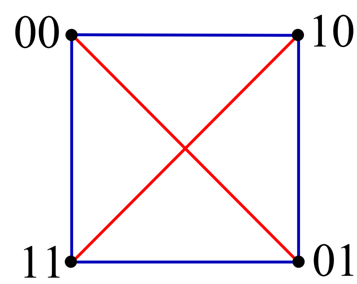
Pre daný graf G vieme hore popísanú sústavu zostaviť v čase polynomiálnom od veľkosti vstupu a zrejme aj vyriešiť ju vieme v polynomiálnom čase a tým pádom vieme v polynomiálnom čase povedať, či existuje nakrytie $f : G \to H'$.

Pozrime sa teraz ako to vyzerá s komponentou súvislosti, z ktorej dvoch kópií je zložený graf H_{1c} (viz obrázok 2.5). Označme si túto komponentu ako H'' a jednotlivé vrcholy označme dvoma bitmy (z $GF[2]$) tak, ako je to na obrázku 2.12.

Za pomoci grafu G potom opäť zostavíme sústavu rovníc ako to bolo v predchádzajúcom prípade. Tiež pre každý vrchol $u \in G$ a jeho modrých susedov x a y a červeného suseda v pridáme do našej sústavy rovnice $i1$) a $i2$) a namiesto rovníc $i3$) a $i4$) pridáme nasledujúce rovnosti:

$$i3') \quad u_1 + v_1 = 0$$

$$i4') \quad u_2 + v_2 = 1$$



Obr. 2.12: Druhý typ komponenty súvislosti H'' na 4 vrcholoch s ohodnotenými vrcholmi

Potom opäť platí, že bity u_1 a u_2 vrchola $u \in V(G)$ už definujú ohodnotenie príslušných susedov vrchola u. Dôkaz toho, že nakrytie $f : G \to H''$ existuje vtedy a len vtedy ak hore popísaná sústava má riešenie nad telesom $GF[2]$, by sme už potom robili anologicky ako v predchádzajúcom prípade (t.j. rozobraním jednotlivých možností, na ktoré sa vrchol u môže zobraziť).

Dokázali sme teda, že otázku existencie nakrytia na grafy H' a H'' vieme rozhodnúť v polynomiálnom čase a teda existenciu nakrytia vieme rozhodnúť aj pre grafy H_{1a}, H_{1b} a H_{1c}.

V ďalšej časti budeme uvažovať, že graf H bude súvislý graf na 8 vrcholoch (H bude postupne izomorfný s grafmi H_{2a}, H_{2c}, H_{3a} a H_{3b}). Dôkaz polynomiality budeme robiť obdobne ako sme to robili v predchádzajúcom prípade, t.j. zostavíme si sústavu lineárnych rovníc nad $GF[2]$ a ukážeme ekvivalenciu medzi existenciou riešenia tejto sústavy a existenciou nakrytia $f : G \to H$. Jedinou zmenou bude to, že vrcholy grafu H si označíme vždy pomocou troch bitov, tak aby každý vrchol dostal inú kombináciu týchto bitov (keďže týchto kombinácií je práve osem, tak je zrejmé, že využijeme všetky možné kombinácie) a všetkým vrcholom u grafu G priradíme tri premenné (nad dvojprvkovým telesom $GF[2]$) a budeme ich značiť u_1, u_2 a u_3.

Uvažujme teraz, že graf H je izomorfný s grafom H_{2a} (viz obrázok 2.6). A jeho vrcholy si označme tromi bitmi z $GF[2]$ tak, ako je to na obrázku 2.13.

Teraz opäť predpokladajme, že vrchol $u \in V(G)$ má dvoch modrých susedov x a y a červeného suseda v. Potom pre každý $u \in V(G)$ a všetky príslušné kombinácie susedov tohoto vrchola (t.j. možné zámeny vrcholov x a y) pridáme do našej sústavy nasledujúce rovnice:

$$ii1) \quad u_2 + x_2 = 1$$

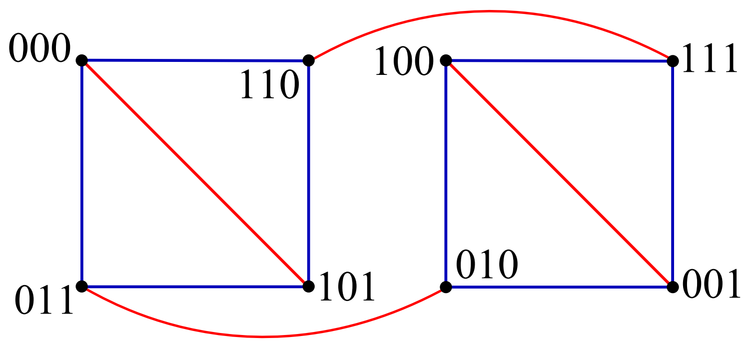
$$ii2) \quad x_3 + y_3 = 1$$

$$ii3) \quad u_1 + u_2 + u_3 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$ii4) \quad u_1 + u_2 + v_1 = 1$$

$$ii5) \quad u_2 + v_2 = 0$$

$$ii6) \quad u_3 + v_3 = 1$$

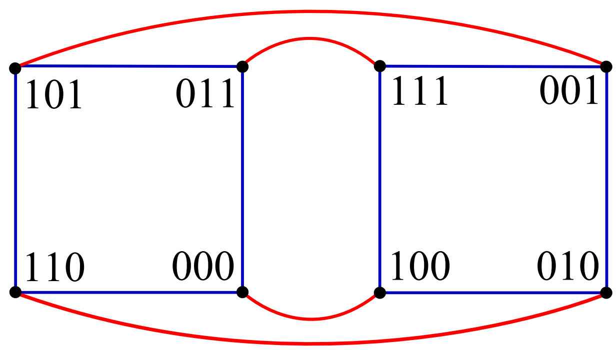


Obr. 2.13: Graf H_{2a} s označenými (ohodnotenými) vrcholmi

V rovnostiach $ii1$) a $ii3$) môžme zrejme 'x' nahradiť 'y', pretože mi tieto rovnice pridávame pre všetky kombinácie susedov. Potom ale z rovnosti $ii1$) vyplýva, že modrý susedia majú rôznu druhú premennú, z rovnosti $ii2$) potom plynie, že títo susedia majú rôzny tretí byt a rovnosť $ii3$) nám potom dáva, že každý dvaja modrý susedia majú rovnaký súčet všetkých troch premenných (teda ak existuje riešenie našej sústavy, tak všetky vrcholy v jednom modrom cykle musia mať rovnaký súčet svojich premenných). Rovnosti $ii1$), $ii2$) a $ii3$ potom dokopy dávajú, že ak už máme ohodnotený vrchol u tak ohodnotenia jeho modrých susedov sú už jednoznačné (až na prípadnú výmenu týchto vrcholov). Rovnako by sme si mohli všimnúť, že rovnosti $ii4$), $ii5$ a $ii6$) hovoria, že ohodnotenie vrchola u už jednoznačne určuje ohodnotenie jeho červeného suseda.

Zostáva nám teda ukázať, že táto sústava má riešenie práve vtedy keď existuje nakrytie grafu G na graf H. Predpokladajme teda, že riešenie existuje, potom pre všetky $u \in V(G)$ definujeme $f(u) = (u_1, u_2, u_3)$. Teda funkcia f bude zobrazovať vrcholy grafu G na vrcholy grafu H. Na to aby toto zobrazenie bolo nakrytie, stačí ukázať, že okolie každého vrcholu sa zobrazí bijektívne na okolie svojho obrazu a na to opäť stačí rozobrať jednotlivé prípady, aké hodnoty môže nadobudnúť $f(u)$. Rozobratím týchto 8 prípadov by sme sa ľahko presvedčili, že ide o nakrytie. V prípade, že už máme nakrytie $f : G \to H$ tak stačí pre každý $u \in V(G)$ definovať u_1 ako prvý bit $f(u)$ a u_2, resp. u_3 definovať ako druhý, resp. tretí bit $f(u)$. Potom už nie je ťažké overiť, že toto ohodnotenie je riešením našej sústavy. Tým pádom sme dokázali, že vieme v polynomiálnom čase rozhodnúť, či pre daný graf G existuje nakrytie na graf H_{2a}.

Uvažujme ďalej, že H je izomorfný s grafom H_{3a} a označme si jeho vrcholy tromi bitmi (prvky $GF[2]$) tak ako je to na obrázku 2.14:



Obr. 2.14: Graf H_{3a} s označenými (ohodnotenými) vrcholmi

Teraz opäť zostrojíme sústavu rovníc. Pre každý vrchol $u \in V(G)$ a jeho modrých susedov x a y a červeného suseda v pridáme do našej sústavy rovnosti $ii1$), $ii2$), $ii3$), $ii5$) a nasledujúce dve rovnosti:

$$ii4') \qquad u_1 + v_1 = 1$$

$$ii6') \qquad u_3 + v_3 = 0$$

Rovnvnosti $ii1$), $ii2$) a $ii3$) opäť ako v predchádzajúcom prípade hovoria, že pre pevné u_1, u_2 a u_3 je už ohodnotenie modrých susedov jednoznačné (až na ich výmenu) a rovnosti $ii4'$), $ii5$) a $ii6'$ jednoznačne určia ohodnotenie červeného suseda (tieto rovnosti mimo iné hovoria, že červený susedia majú rôzny prvý bit, resp. ohodnotenie prvej premennej a zvyšné dva bity sú zhodné).

Dôkaz toho, že táto sústava má riešenie práve vtedy keď existuje nakrytie $f : G \to H$ by sme mohli robiť úplne analogicky ako to bolo v predchádzajúcom prípade (rozborom prípadov) a teda rozhodnúť, že či pre graf G existuje nakrytie na graf H_{3a} vieme rozhodnúť v polynomiálnom čase (dokonca toto nakrytie vieme aj nájsť).

Rovnice definované pre grafy H_{2a} a H_{3a} nám zaručovali, že súčet všetkých troch bitov vrcholov jedného modrého cyklu grafu G bol invariantný, kým pre grafy H_{2c} a H_{3b} budeme požadovať aby vrcholy jedného modrého cyklu mali rovnako ohodnotenú prvú premennú. Na to budeme potrebovať pre každé $u \in V(G)$ a jeho modrých susedov x a y rovnosť:

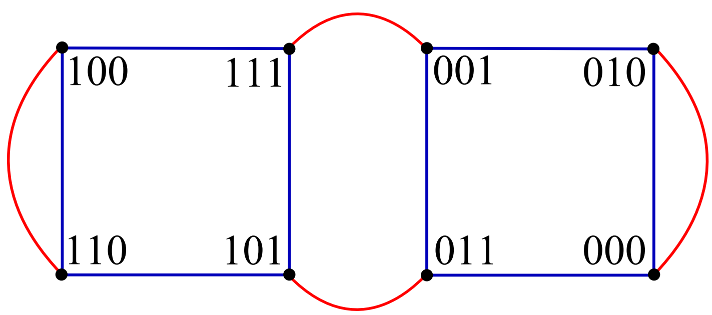
$$iii1) \quad u_1 + x_1 = 0$$

a ďalej, podobne ako to bolo v predchádzajúcich prípadoch, budeme požadovať, aby boli druhé premenné modrých susedov rôzne a takisto aby tretie premenné vrcholov, ktoré majú v grafe G_m vzdialenosť 2, boli rôzne. To môžeme zabezpečiť nasledujúcimi dvoma rovnicami:

$$iii2) \quad u_2 + x_2 = 1$$

$$iii3) \quad x_3 + y_3 = 1$$

Tieto rovnosti budú spoločné pre oba grafy H_{2c} a H_{3b}. Ďalej predpokladajme, že H je izomorfný s grafom H_{2c} a vrcholy grafu H si označme tak, ako je to na obrázku 2.15:



Obr. 2.15: Graf H_{2c} s označenými (ohodnotenými) vrcholmi

Tieto rovnice už potom podobne ako to bolo v predchádzajúcich prípadoch zaručujú, že pre pevné u_1, u_2 a u_3 je už ohodnotenie modrých susedov jednoznačné (až na ich permutáciu). Označme si červeného suseda vrchola $u \in V(G)$ ako v a do našej sústavy pridajme nasledujúce rovnosti:

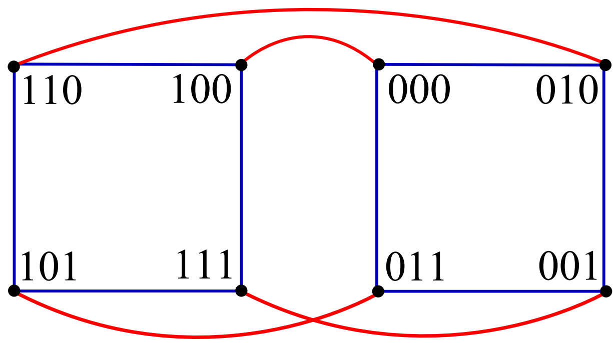
$$iii4) \quad u_1 + u_3 + v_1 = 0$$

$$iii5) \quad u_2 + v_2 = 1$$

$$iii6) \quad u_3 + v_3 = 0$$

Nie je ťažké nahliadnuť, že potom pre dané u_1, u_2 a u_3 sú už premenné vrchola v jednoznačne určené. Dokonca sa platí, že rovnosť $iii6$) je elementárnym dôsledkom dvoch rovností $iii4$) (sčítame túto rovnosť použitú pre vrcholy u a v, resp. v a u). Dôkaz toho, že pre daný graf G existuje nakrytie na graf H_{2c} práve vtedy, keď existuje riešenie tejto sústavy je analogický ako predchádzajúce prípady.

Zostáva nám už len rozobrať prípad, že graf H je izomorfný s grafom H_{3b}. Označme si potom vrcholy tohto grafu ako na obrázku 2.16.



Obr. 2.16: Graf H_{3b} s označenými (ohodnotenými) vrcholmi

Pre daný graf G potom opäť zostavíme sústavu lineárnych rovníc a pre každý vrchol $u \in V(G)$ do tejto sústavy pridáme rovnosti $iii1$), $iii2$) a $iii3$), ktoré sa týkajú modrých susedov a pre červeného suseda v pridáme rovnosť $iii6$) a nasledujúce dve rovnosti:

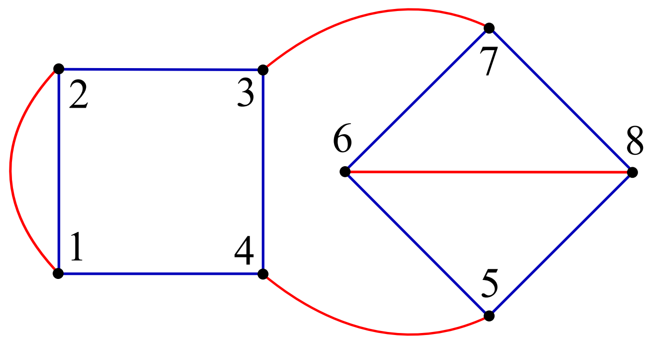
$$iii4') \quad u_1 + v_1 = 1$$

$$iii5') \quad u_2 + u_3 + v_2 = 0$$

Všetky tieto rovnosti znovu zabezpečia, že pre dané ohodnotenie u_1, u_2 a u_3 sú už premenné jednotlivých susedov vrchola u dané jednoznačne až na permutáciu modrých susedov (a to napriek tomu, že rovnosť $iii6$) je opäť redundantná, pretože plynie z dvoch vhodných rovností $iii5'$)). Dôkaz toho, že problém existencia nakrytia na graf H_{3b} vieme riešiť v polynomiálnom čase, by sme potom spravili rovnako ako to bolo pre všetky predchádzajúce prípady. ∎

2.3 Grafy s viacerými naktytiami na graf H_{2b}

Skôr ako sa pustíme do dôkazu, že problém nakrytia na graf H_{2b} je *NP-úplný*, ukážme si, že existuje graf, pre ktorý existuje až niekoľko nakrytí na graf H_{2b}. Tento graf, resp. jeho vlastnosti potom využijeme v redukcii na *NP-úplný* problém. Najprv si ale prečíslujme vrcholy grafu H_{2b} tak, ako je to na nasledujúcom obrázku 2.17. Toto značenie budeme používať až do konca tejto kapitoly.



Obr. 2.17: Graf H_{2b} s preoznačenými vrcholmi (oproti obr. 2.7)

Pre zjednodušenie zápisu budeme v nasledujúcom texte značiť graf H_{2b} len skrátene ako H. Nasledujúca veta 2.3.1 ukazuje existenciu grafu, pre ktorý existuje množstvo nakrytí pre príslušný graf a popisuje vlastnosti niektorých týchto nakrytí.

Veta 2.3.1 *Existuje graf G_u so špeciálnym vrcholom u a modrými susedmi $u_1, u_2 \in V(G)$ (v danom poradí) taký, že pre každé $x \in V(H)$ a jeho modrých susedov $x_1, x_2 \in V(H)$ (v ľubovoľnom poradí) bude existovať nakrytie $f_{x,x_1,x_2} : G \to H$, ktoré bude splňovať podmienky $f_{x,x_1,x_2}(u) = x$, $f_{x,x_1,x_2}(u_1) = x_1$ a $f_{x,x_1,x_2}(u_2) = x_2$.*

Táto lemma teda hovorí, že existuje graf G_u a jeho vrchol u taký, že ak pre ľubovoľný $x \in V(H)$ definujeme $f(u) = x$ a okolie vrchola u sa zobrazí zobrazením f (ľubovoľne) na okolie vrchola x, tak aby sa zachovali farby hrán (červený sused vrchola u je už vždy jednoznačne určený), tak zobrazenie f už vieme dodefinovať na korektné nakrytie. V práci [2] je toto tvrdenie zovšeobecnené, ale my si vystačíme s týmto znením. Ukážeme si konštrukciu takéhoto grafu, ale najprv si definujme grafovú operáciu *farebný súčin*.

Definícia: *(farebného súčinu)* Nech G_1 a G_2 sú dva k-regulárne grafy, ktorých hrany majú k farieb $\{1, 2, \ldots, k\}$ a každá z týchto farieb tvorí perfektné párovanie. Teda $E(G_1) = E_1(G_1) \cup E_2(G_1) \cup \ldots \cup E_k(G_1)$ a $E_i(G_1)$ sú všetky hrany jednej farby (analogicky aj pre graf G_2). Potom definujme *farebný súčin* grafov G_1 a G_2 ako $G_1 \otimes G_2 = G(V, E)$, kde $V = \{(x, y); x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}$ (t.j. V je kartézsky súčin množín $V(G_1)$ a $V(G_2)$) a $E = \bigcup_{i=1}^{k} E_i$, kde $E_i = \{((x, y), (x', y')); (x, y), (x', y') \in V, (x, x') \in E_i(G_1), (y, y') \in E_i(G_2)\}$.

Ľahko potom overíme, že E_i tvoria v grafe G perfektné párovanie pre všetky $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, takže graf G je opäť k-regulárny, jeho hrany majú k farieb a hrany jednej farby tvoria perfektné párovanie na vrcholoch $V(G)$. Tento graf však nemusí byť nutne súvislý na čo si niekedy treba dávať pozor.

Pozorovanie 2.3.2 *Nech G_1 a G_2 sú dva k-regulárne grafy, ktorých hrany majú k farieb a každá farba tvorí perfektné párovanie. Nech $G = G_1 \otimes G_2$. Potom existuje nakrytie $f : G \to G_1$ a tiež nakrytie $g : G \to G_2$.*

Dôkaz: Pre každý vrchol $(x, y) \in V(G)$, definujme $f(x, y) = x$ a $g(x, y) = y$. Potom zobrazenia f, resp. g zobrazujú graf G do grafu G_1, resp. do G_2, takže nám stačí overiť, že okolie každého vrchola (x, y) v G sa zobrazí bijektívne na okolie vrchola $f(x, y)$ v G_1, resp. okolie vrchola $g(x, y)$ v G_2 (samozrejme v príslušných farbách).

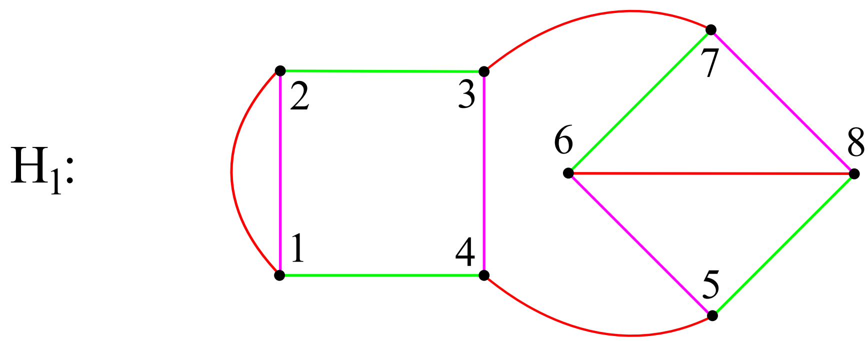
My ukážeme, že hrana farby $d \in M(G)$ sa zobrazí na hranu farby d a keďže každá farba v grafoch G, G_1 aj G_2 tvorila perfektné párovanie, tak to nám už zaručí, že okolie každého vrcholu sa zobrazí bijektívne na okolie svojho obrazu. Stačí nám teda ukázať, že ak $((x, y), (x', y')) \in E_i(G)$ tak $(f(x, y), f(x', y')) \in E_i(G_1)$, resp. $(g(x, y), g(x', y')) \in E_i(G_2)$, lenže $(f(x, y), f(x', y')) = (x, x')$ a $(g(x, y), g(x', y')) = (y, y')$ a naše tvrdenie už potom priamo plynie z definície *farebného súčinu* (definícia 2.3). ∎

Lemma 2.3.3 *Existuje 3-regulárny graf G_0 so špeciálnymi vrcholmi u_1, u_2, $\ldots$, u_8, ktorý má červené a modré hrany, pričom červené hrany tvoria perfektné párovanie a modré hrany tvoria disjunktné zjednotenie cyklov taký, že $\forall i \in V(H)$ nech x_i a y_i sú modrý susedia vrchola u_i v pevnom poradí a nech k a j sú modrý susedia vrchola i v grafe H (v pevnom poradí), potom existujú nakrytia $f_i : G_0 \to H$ a $g_i : G_0 \to H$ také, že $f_i(u_i) = g_i(u_i) = i$, $f_i(x_i) = j = g_i(y_i)$ a $f_i(x_i) = k = g_i(y_i)$.*

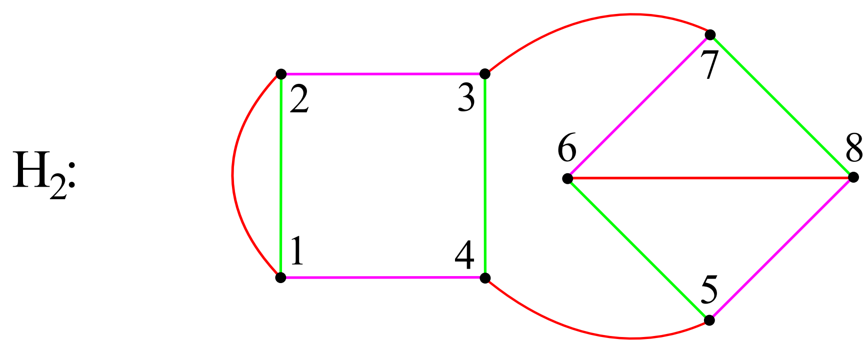
Táto lemma teda hovorí, že existuje graf G_0 taký, že pre každé $i \in V(H)$ existuje vrchol $u_i \in G_0$ taký, že keď si zoberieme ľubovoľné zobrazenie f :

$V(G_0) \to V(H)$ také, že $f(u_i) = i$ a okolie vrchola u_i sa týmto zobrazením zobrazí bijektívne na okolie vrchola i, pričom modrý susedia sa zobrazia na modrých susedov, tak toto zobrazenie už budeme vedieť rozšíriť na nakrytie $f : G_0 \to H$.

Dôkaz: Uvažujme dva 3-regulárne grafy H_1 a H_2 na obrázkoch 2.18 a 2.19, na množine vrcholov $V(H)$, ktoré majú hrany troch farieb (fialová, zelená a červená) a hrany každej farby pritom tvoria perfektné párovanie.



Obr. 2.18: Prvý typ prefarbenia hrán grafu H_{2b}



Obr. 2.19: Druhý typ prefarbenia hrán grafu H_{2b}

Ľahko si všimneme, že červené hrany grafov H_1 a H_2 zodpovedajú červeným hranám grafu H a fialové a zelené hrany grafov H_1 a H_2 zodpovedajú modrým hranám grafu H. Pre grafy H_1 a H_2 tiež platí, že zelené hrany H_1 zodpovedajú fialovým hranám H_2 a fialové hrany H_1 zodpovedajú zeleným hranám H_2.

Definujme teraz graf $G'_0 = H_1 \otimes H_2$. Z definície farebného súčinu potom plynie, že G'_0 je 3 regulárny graf, ktorého hrany majú 3 farby (opäť zelenú, fialovú a červenú) a hrany každej farby tvoria v grafe G'_0 perfektné párovanie. Definujme teraz špeciálne vrcholy u_i a to nasledovným spôsobom

$$\forall i \in V(H) : u_i = (i,i) \in V(G'_0)$$

Potom z pozorovania 2.3.2 dostávame, že funkcie $f : V(G'_0) \to V(H)$ a $g : V(G'_0) \to V(H)$ definované ako $f(x,y) = x$ a $g(x,y) = y$, kde $x, y \in V(H)$, sú nakrytia grafu G'_0 na graf H_1 resp. H_2. Kedže tieto zobrazenia zachovávajú farby hrán, tak si ľahko všimneme, že $f(u_i) = g(u_i) = i$ a ak sú x, resp. y zelený, resp. fialový sused vrcholu u_i v grafe G'_0 tak platí, že $f(x) = g(y)$ a $f(y) = g(x)$.

Potom definujme $G_0(V(G'_0), E)$, kde E obsahuje modré a červené hrany definované nasledujúcim spôsobom $E_m = \{(x,y); (x,y)$ je fialová alebo zelená hrana v $G'_0\}$ a $E_c = \{(x,y), (x,y)$ je červená hrana v grafe $G'_0\}$. Graf G_0 je 3-regulárny graf s červenými a modrými hranami, pričom červené hrany tvoria perfektné párovanie a modré hrany tvoria 2-faktor. Graf G_0 ďalej obsahuje 8 špeciálnych vrcholov $u_1, u_2, \ldots, u_8$.

Uvažujme teraz pevné $i \in V(H)$. Nech v, resp. w je zelený, resp. fialový sused vrchola u_i v grafe G'_0 a nech j a k sú modrý susedia vrchola i v grafe H (j a k sú teda fialový a zelený susedia vrchola i v H_1 aj v H_2). Vieme, že existujú nakrytia f a g grafu G'_0 do H_1, resp. H_2, ktoré (bez ujmy na všeobecnosti) splňujú $f(u_i) = g(u_i) = i$, $f(v) = g(w) = k$ a $f(w) = g(v) = j$. Keď však použijeme zobrazenia f a g na graf G_0, tak ľahko zistíme, že ide o nakrytia grafu G_0 do H, ktoré presne splňujú to, čo tvrdí lemma 2.3.3. A to, že takéto zobrazenia existujú pre všetky $i \in V(H)$, dokazuje našu lemmu. ∎

Ešte predtým ako sa pustíme do samotného dôkazu vety 2.3.1, rozšírme si definíciu farebného súčinu pre viac ako dva grafy.

Definícia: *(rozšíreného farebného súčinu)* Pre m prirodzené uvažujme k-regu-lárne grafy $G_1, G_2, \ldots, G_m$, ktorých hrany majú k farieb $\{1, 2, \ldots, k\}$ a každá z týchto farieb tvorí perfektné párovanie. Teda $E(G_j) = E_1(G_j) \cup E_2(G_j) \cup \ldots \cup E_k(G_j)$ a $E_i(G_j)$ sú všetky hrany farby i grafu G_j, kde $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Potom definujme *farebný súčin* grafov $G_1, G_2, \ldots, G_m$ ako $G_1 \otimes G_2 \otimes \ldots \otimes G_m = G(V, E)$, kde $V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m); \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}, x_j \in V(G_j)\}$ (t.j. V je rozšírený kartézsky súčin množín $V(G_1)$,

$V(G_2), \ldots, V(G_m))$ a $E = \bigcup_{i=1}^{k} E_i$, kde $E_i = \{((x_1, x_2, \ldots, x_m), (y_1, y_2, \ldots, y_m)); \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}; x_j, y_j \in V(G_j); (x_j, y_j) \in E_i(G_j)\}$.

Ľahko overíme, že ak G je takýto farebný súčin tak G je k-regulárny a hrany tohoto grafu majú k-farieb, pričom každá farba tvorí perfektné párovanie. Tiež nie je ťažké overiť, že ak si pre $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ zoberie funkciu $f_j : V(G) \to V(G_j)$ definovanú predpisom $f_j(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_j$, $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in V(G)$ tak toto zobrazenie bude nakrytie grafu G na graf G_j (dôkaz by bol analogický ako dôkaz pozorovania 2.3.2). Teraz sa už môžeme pustiť do dôkazu vety 2.3.1.

Dôkaz: *(vety 2.3.1)* Definujme najskôr graf G'_u nasledujúcim spôsobom:

$$G'_u = \underbrace{G'_0 \otimes G'_0 \otimes \ldots \otimes G'_0}_{8\ \textit{krát}}$$

kde G'_0 je graf z dôkazu lemmy 2.3.3 (t.j. $G'_0 = H_1 \otimes H_2$, kde H_1 a H_2 sú grafy z obrázkou 2.18 a 2.19). a zoberme vrchol $u \in V(G_u)$ ako $u = (u_1, u_2, \ldots, u_8)$, kde $u_i \in V(G'_0), \forall i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ sú špeciálne vrcholy jednotlivých grafov G'_0. Graf G'_u je 3-regulárny a s fialovými, zelenými a červenými hranami, pričom hrany všetkých farieb tvoria perfektné párovanie. Definujme potom graf $G_u = (V(G'_u), E)$ podobne ako to bolo v dôkaze lemmy 2.3.3, t.j. $E = E_c \cup E_m$ kde $E_c = \{(x, y), (x, y)$ je červená hrana grafu $G'_u\}$ a $E_m = \{(x, y), (x, y)$ je zelená alebo fialová hrana grafu $G'_u\}$. Graf G_u je potom 3-regulárny, s červenými a modrými hranami a pritom červené hrany tvoria perfektné párovanie, kým modré hrany tvoria disjunktné zjednotenie cyklov (resp. 2-faktor).

Nech sú v a w modrý susedia vrchola u v grafe G_u. Nech i je ľubovoľný vrchol grafu H a nech sú j a k jeho dvaja modrý (rôzny) susedia. Potom k dokázaniu vety 2.3.1 stačí ukázať, že ak si zoberieme funkciu $f : V(G_u) \to V(H)$, ktorá splňuje $f(u) = i$, $f(v) = j$ a $f(w) = k$, tak táto funkciu sa už dá rozšíriť na nakrytie grafu G_u na graf H.

Vieme, že zobrazenie $f_i : V(G_u) \to V(G_0)$ definované ako $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_8) = x_i$ je nakrytie grafu G_u na graf G_0 splňujúce $f_i(u) = u_i \in G_0$ a vrcholy v a w sa zobrazia na dvoch rôznych modrých susedov $f_i(v)$ a $f_i(w)$ vrcholu u_i. Z lemmy 2.3.3 ale esistuje nakrytie $g : G_0 \to H$, ktoré splňuje $g(u_i) = i$, $g(f_i(v)) = j$ a $g(f_i(w)) = k$. Kedže zložením dvoch nakrytí dostávame opäť nakrytie, tak zobrazenie $f : V(G_u) \to V(H)$ definujme ako:

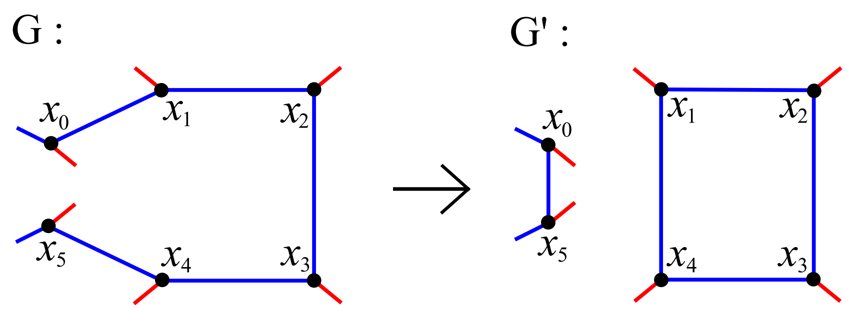
$$\forall x \in V(G_u) : f(x) = g(f_i(x))$$

Zobrazenie f je potom nakrytie grafu G_u na graf H, ktoré navyše splňuje $f(u) = i$, $f(v) = j$ a $f(w) = k$. Graf G_u so špeciálnym vrcholom u teda dokazuje našu vetu 2.3.1. ∎

Graf G_u z nášho dôkazu má 2^{48} vrcholov, takže nejde o "najmenší" graf. Pri konštrukcii grafu, ktorý by dokazoval vetu 2.3.1 by sme napríklad mohli využiť rôzne symetrie grafu H a takisto aj to, že my budeme v ďalšom texte požadovať iba to aby sa vrchol u zobrazoval do množiny $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\} \subset V(H)$. Graf G_u navyše nemusí byť súvislý, v tomto prípade nám stačí za G_u zobrať komponentu súvislosti obsahujúcu vrchol u.

Nasledujúce pozorovanie potom ukazuje ďalší spôsob, ktorého viacnásobný aplikovaním môžeme "zjednodušiť" graf G_u tak, aby aj naďalej spĺňoval znenie vety 2.3.1.

Pozorovanie 2.3.4 *Nech G je graf taký, že existuje nakrytie $f : G \to H$, ktoré zobrazuje graf G na H. Potom všetky cykly grafu G_m majú dĺžku deliteľnú 4. Ak graf G obsahuje 6 rôznych vrcholov $x_0, x_1, \ldots, x_5$, takých, že $\forall i \in \{0, 1, \ldots, 4\}$, $(x_i, x_{i+1}) \in E_m(G)$ tak definujme $G' = (V(G), E'_m \cup E_c(G))$, kde $E'_m = E_m(G) \cup \{(x_0, x_5), (x_1, x_4)\}$ - $\{(x_0, x_1), (x_4, x_5)\}$ (viz obrázok 2.20). Potom f je tiež nakrytie grafu G' na graf H.*



Obr. 2.20: Eliminácia modrých cyklov dlhších ako 4

Aplikovaním tohoto pozorovania potom môžeme graf G_u upraviť tak, aby naďalej splňoval podmienky vety 2.3.1 a všetky modré cykly tohoto grafu mali dĺžku 4.

Dôkaz: Nech $f : G \to H$ je nakrytie a nech $y_1, y_2, \ldots, y_n$ je modrý cyklus grafu G (keďže existuje nakrytie, tak G_m musí byť 2-faktor). Potom už platí, že $\{f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_n)\} \subseteq \{1,2,3,4\}$ alebo $\{f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_n)\} \subseteq \{5,6,7,8\}$ a kedže vrcholy y_{i-1} a y_{i+1} sa musia zobraziť na dvoch rôznych modrých susedov vrchola $f(y_i)$ pre $\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$ (kde $y_{n+1} \equiv y_1$ a $y_0 = y_n$) tak je zrejmé, že vrcholy $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sa musia zobraziť cyklicky na vrcholy $1,2,3,4$ alebo $5,6,7,8$ (resp. na vrcholy $4,3,2,1$ alebo $8,7,6,5$) a platí $f(y_i) = f(y_{i+4})$ (kde indexy počítame modulo n). Ale to je možné iba vtedy ak n je delitelné štyrmi.

Nech $x_0, x_1, \ldots, x_5$ sú vrcholy zo znenia pozorovania. A nech tieto vrcholy patria do modrého cyklu $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Kedže $f(x_i) = f(x_{i+4})$ (pre $i = 1,2$) tak nutne $f(x_0) = f(x_4)$ a $f(x_1) = f(x_5)$. Zobrazenie f nám zobrazí vrcholy grafu G' do množiny vrcholov grafu H. Na to aby išlo o nakrytie nám stačí overiť, že okolie každého vrcholu sa zobrazí bijektívne na okolie svojho obrazu. Pre všetky vrcholy z množiny $V(G') - \{x_0, x_1, x_4, x_5\}$ to ale platí, pretože tieto vrcholy sa zobrazujú rovnako ako to robily vrcholy grafu G a podľa predpokladu f bolo nakrytie G do H. Každému z vrcholov x_0, x_1, x_4, x_5 sa však zmenil jeden sused, ale ľahko overíme, že nový modrý sused každého z týchto vrcholov sa zobrazuje na rovanký vrchol ako pôvodný sused a teda okolia týchto vrcholov sa v skutku zobrazia bijektívne na okolia svojich obrazov a teda f je aj nakrytie grafu G' do H. ∎

2.4 Vlastnosti $(6-8)-cyklov$

Je zrejmé, že každý vrchol grafu H má jednoznačne určeného červeného suseda a takisto má jednoznačne určený vrchol, ktorý od neho má v grafe H_m vzdialenosť 2. Ak pre graf G existuje nakryztie $f : G \to H$, tak vrcholy grafu G musia splňovať podobnú vlastnosť, mimo iné, že pre každý vrchol sa všetky vrcholy vo vzdialenosti 2 v G_m musia zobraziť na ten istý vrchol. A pokiaľ by sme uvažovali, že graf G_m obsahuje iba 4-cykly znamenalo by to, že každý vrchol má jednoznačne určeného červeného suseda a modrého suseda vo vzdialenosti 2. Potom pre každý vrchol máme dva význačné vrcholy a keďže ide o symetrickú vlastnosť, tak tieto vrcholy sa rozdelia do akýchsi disjunktných "súvislých" množín (cyklov) a my si v tejto časti ukážeme niekoľko vlastností týchto cyklov, ale najprv si ukážme formálnu definíciu $(6-8)-cyklov$.

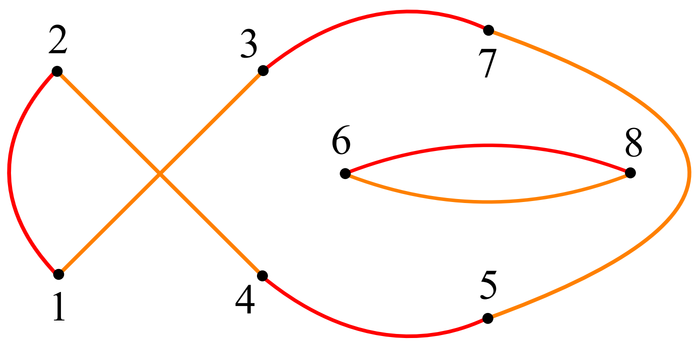
Definícia: Nech G je graf taký, že existuje nakrytie $f : G \to H$ a G_m obasahuje iba 4-cykly. Definujme potom množinu E_o oranžových hrán ako

$$E_o = \{(x,y); x,y \in V(G), d_m(x,y) = 2\}$$

kde d_m značí vzdialenosť vrcholov v grafe G_m. Definujme potom graf $\overline{G}$ ako

$$\overline{G} = (V(G), E_o \cup E_c)$$

Keďže G obsahoval modré cykly iba dĺžky 4, tak je zrejmé, že oranžové hrany tvoria pefektné párovanie a graf $\overline{G}$ je teda 2-regulárny. Z toho ale vyplýva, že sa skladá z disjunktného zjednotenia alternujúcich cyklov. V týchto cykloch sa zaradom striedajú oranžové a červené hrany a teda dĺžky týchto cyklov musia byť delitelné dvomi. Ľahko nahliadneme, že v grafe $\overline{H}$ dostávame dva takéto cykly (viz obrázok 2.21), pričom jeden z nich má dĺžku práve 2 (ide teda o dvojitú hranu).



Obr. 2.21: $(6-8)-cykly$ grafu H_{2b}

Definícia: *((6 - 8)-cyklov)* Nech G je graf, pre ktorý existuje nakrytie $f : G \to H$ a G_m sa skladá zo samých 4-cyklov. Cykly, cesty a sledy grafu $\overline{G}$ budeme nazývať $(6-8)-cykly$, $(6-8)-cesty$ a $(6-8)-sledy$.

Pozorovanie 2.4.1 *Nech G je graf, pre ktorý existuje nakrytie $f : G \to H$ a G_m pozostáva len zo 4-cyklov. Potom f je aj nakrytie grafu $\overline{G}$ na graf $\overline{H}$ a platí, že každý $(6-8)-cyklus$ grafu $\overline{G}$ sa zobrazí na $(6-8)-cyklus$ grafu $\overline{H}$.*

Dôkaz: Grafy $\overline{G}$ a $\overline{H}$ sú oba 2 regulárne a ich hrany majú dve farby (červenú a oranžovú), pričom hrany každej farby tvoria perfektné párovanie. Ak f je nakrytie G do H, tak zobrazenie $f : V(\overline{G}) \to V(\overline{H})$ zrejme zobrazuje červených susedov grafu $\overline{G}$ na červených susedov grafu $\overline{H}$ a aby f bolo nakrytie $\overline{G}$ na $\overline{H}$ nám stačí ukázať, že $(x, y) \in E_o(\overline{G}) \Rightarrow (f(x), f(y)) \in E_o(\overline{H})$.

Nech $(x, y) \in E_o(\overline{G})$. To znamená, že vrcholy x a y sa nachádzajú v jednom modrom 4-cykle grafu G a keďže ich modrá vzdialenosť je 2, tak sa tieto vrcholy nachádzajú v danom 4 cykle "oproti seba". Ale potom aj vrcholy $f(x)$ a $f(y)$ sa musia zobraziť do jedného modrého 4-cyklu a navyše musia byť "oproti seba". To ale znamená, že $(f(x), f(y)) \in E_0(\overline{H})$.

Zobrazenie f je teda aj nakrytie grafu $\overline{G}$ na graf $\overline{H}$. Nech potom $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ je $(6-8)-$*cyklus* grafu $\overline{G}$, bez ujmy na všeobecnosti $(x_{2i}, x_{2i+1}) \in E_o(\overline{G})$ a $(x_{2i+1}, x_{2i+2}) \in E_c(\overline{G})$ pre $\forall i \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$, pričom všetky indexy počítame modulo $2n$. Ale potom nutne $(f(x_{2i}), f(x_{2i+1})) \in E_o(\overline{H})$ a $(f(x_{2i+1}), f(x_{2i+2})) \in E_c(\overline{H})$ a teda vrcholy $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{2n})$ tvoria $(6-8)-$*cyklus* grafu $\overline{H}$ (resp. *uzavretý* $(6-8)-$*sled*). ■

Pozorovanie 2.4.2 *Nech G je graf, pre ktorý existuje nakrytie $f : G \to H$ a G_m obsahuje iba 4-cykly. Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je $(6-8)-$cyklus grafu $\overline{G}$. Potom $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $f(x_i) = f(x_{i+6})$, pričom všetky indexy počítame modulo n.*

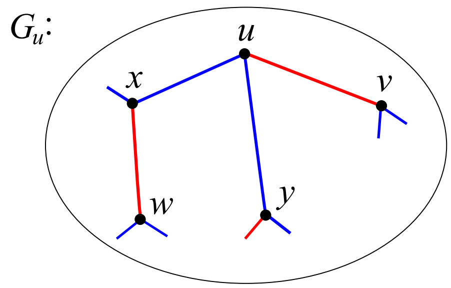
Dôkaz: Keďže každý $(6-8)-$*cyklus* grafu $\overline{G}$ sa musí zobraziť na $(6-8)-$*cyklus* grafu $\overline{H}$, tak cyklus $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sa zobrazí buď na $(6-8)$*cyklus* $1, 2, 4, 5, 7, 3$ (resp. $3, 7, 5, 4, 2, 1$) alebo na cyklus $6, 8$. Najmenší spoločný násobok dĺžok týchto cyklov je 6 a teda bez ohľadu na to, na ktorý z týchto cyklov sa bude cyklus $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zobrazovať, bude platiť, že vrcholy vo vzdialenosti 6 (v grafe $\overline{G}$) sa musia zobraziť na ten istý vrchol. ■

Dôsledok 2.4.3 *Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je $(6-8)-$cyklus grafu $\overline{G}$ a nech existuje nakrytie $f : G \to H$. Potom ak n nie je deliteľné tromi, tak tento cyklus sa nemôže zobrazovať na $(6-8)-$cyklus $1, 2, 4, 5, 7, 3$ (resp. $3, 7, 5, 4, 2, 1$) a nutne $\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\} = \{6, 8\}$.*

Keďže každá $(6-8)$*cesta* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sa dá rozšíriť na $(6-8)$*cyklus* $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m$. Tak je zrejmé, že pre $n > 6$ platí, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n-6\}$, $f(x_i) = f(x_{i+6})$ (kde f je nakrytie G na H).

$(6-8)$*cykly* a $(6-8)$*cesty* sme zatiaľ mali definované, len v grafoch $\overline{G}$, ale ich definíciu by sme mohli rozšíriť aj na grafy G. V tomto prípade $(6-8)$*cykly* vyzerajú ako cykly, v ktorých sa cyklycky striedajú dve modré hrany a jedna červená. $(6-8)$*cesty* v grafe G potom môžeme definovať ako ľubovoľný úsek z $(6-8)$*cyklu*. Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je takýto cyklus, resp. cesta. Potom už ale obecne neplatí tvrdenie, že $f(x_i) = f(x_{i+6})$. Problémom sú vrcholy x_i, ktoré sú v tejto ceste, resp. cykle incidentné s dvomi modrými hranami (platí teda $(x_{i-1}, x_i), (x_i, x_{i+1}) \in E_m(G)$), pre ostatné vrcholy ale tvrdenie platí naďalej.

Uvažujme teraz pevný súvislý graf G_u so špeciálnym vrcholom u, ktorý bude splňovať vetu 2.3.1 a jeho modré cykly budú mať dĺžku 4. Potom si modrých susedov vrchola u označme ako x a y, červeného suseda vrchola u si označme ako v a červeného suseda vrchola x si označme ako w, tak ako je to na obrázku 2.22.



Obr. 2.22: Značenie rozšíreného okolia vrchola u v grafe G_u

Ľahko si uvedomíme, že vrchol u musí byť rôzny od vrcholov x, y a v, pretože inak by G_u obsahoval slučku (čo by vynucovalo aj slučku v grafe H, čo je spor) a vrchol u musí byť rôzny od vrchola w, pretože inak by platilo, že $(x, u) \in E_m(G_u)$ a $(x, u) \in E_c(G_u)$. Lenže my vieme, že existuje nakrytie $f : G_u \to H$ a potom by muselo platiť $(f(x), f(u)) \in E_m(H)$ a $(f(x), f(u)) \in E_c(H)$ a to by znamenalo, že nutne $f(u) \in \{1, 2\}$. Ale my vieme, že pre každé $z \in V(H)$ existuje nakrytie grafu G_u na H také, že vrchol u sa zobrazí na z. No ale to nie je možné v prípade, že by $w = u$ a teda nutne platí $u \notin \{x, y, v, w\}$.

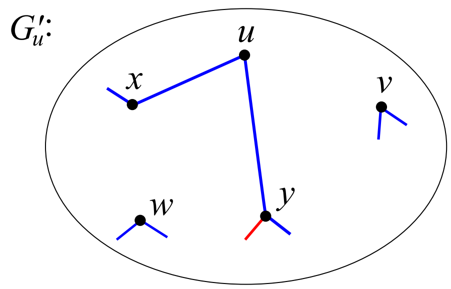
Vrchol x je určite rôzny od vrchola w (a tiež u) pretože sú to susedia. V prípade, že by $x = v$, znamenalo by to, že $(x, u) \in E_m(G_u)$ a $(x, u) \in E_c(G_u)$ a teda opäť by sme dostali, že pre každé nakrytie $f : G_u \to H$ platí $f(u) \in \{1, 2\}$, čo je spor s výberom grafu G_u a teda nutne $x \neq v$. Vrchol x je tiež rôzny od vrchola y, pretože graf G_u by obsahoval dvojitú modrú hranu, ktorú by následne musel obsahovať aj graf H, čo je spor. Platí teda, že $x \notin \{u, y, v, w\}$

Vieme teda už, že vrchol y je rôzny od vrcholov u a x. Ak by $y = v$, tak opäť dostávame, že medzi vrcholmi u a y vedie modrá aj červená hrana a teda by muselo platiť $f(u) \in \{1, 2\}$, čo je spor a preto $y \neq v$. V prípade, že by platilo $y = w$, znamenalo by to, že v grafe $\overline{G_u}$ existuje $(6-8)$*cyklus* x, y.

Tento cyklus by mal dĺžku dva a teda podľa dôsledku 2.4.3 by pre ľubovoľné nakrytie platilo $\{f(x), f(y)\} \in \{6, 8\}$. Ale potom by sme nutne mali, že $f(u) \in \{5, 7\}$, čo je spor s voľbou grafu G_u.

Na to aby sme dokázali, že všetky vrcholy u, x, y, z a v sú navzájom rôzne, nám stačí už len dokázať, že $v \neq w$. Keby platilo $v = w$, znamenalo by to, že v má červeného suseda vrchol u ale tiež vrchol x a teda by muselo platiť, že $x = u$, čo je spor a teda nutne $v \neq w$. Zistili sme teda, že všetky vrcholy u, x, y, z a v sú si navzájom rôzne.

Definícia: Definujme graf G'_u ako $G'_u = G_u - \{(x, w), (u, v)\}$, teda graf G_u po odstránení červených hrán (x, w) a (u, v) (viz obrázok 2.23).



Obr. 2.23: Graf G_u po odstránení červených hrán (x, w) a (u, v)

Pozorovanie 2.4.4 *Nech G je graf, pre ktorý existuje nakrytie $f : G \to H$ a nech G'_u je podgraf tohoto grafu (teda G'_u vieme dostať z grafu G pomocou mazania hrán a vrcholov). Potom ak f je ľubovoľné nakrytie grafu G na H tak $(f(x), f(w)), (f(u), f(v)) \in E_c(H)$.*

Toto pozorovanie teda hovorí, že napriek vymazaniu hrán (x, w) a (u, v) bude stále platiť, že vrcholy x a w, resp. u a v sa zobrazia na červených susedov grafu H. Ak si zoberieme restrikciu nakrytia f na vrcholy grafu G'_u, tak f bude vlastne homomorfismus s vlastnosťou, že okolie každého vrchola zobrazí *proste* na vrcholy svojho obrazu. Takže toto pozorovanie sme mohli definovať aj pomocou takéhoto lokálne prostého homomorfizmu.

Dôkaz: Je zrejmé, že vrcholy x a w sa v grafe G_u nachádzajú na jednom $(6-8)cykle$. Ďalej vieme, že pre každé $z \in V(H)$ existuje nakrytie $f' : G_u \to H$ také, že $f'(u) = z$, takže pre $z = 1$, existuje nakrytie $f_1 : G_u \to H$ také, že

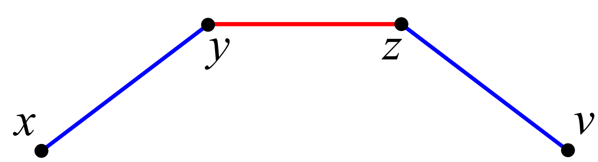
$f_1(u) = 1$. Potom ale $f_1(x) \in \{2, 4\}$ a teda existuje nakrytie, že $(6-8)$*cyklus* obsahujúci vrcholy x a w sa zobrazí na $(6-8)$*cyklus* $1, 2, 4, 5, 7, 3$ alebo $3, 7, 5, 4, 2, 1$ (resp. sa niekoľkokrát cyklicky zobrazí na tento cyklus). No ale potom z dôsledku 2.4.3, musí platiť, že $(6-8)$*cyklus* obsahujúci vrcholy x a w má dĺžku deliteľnú šiestimi. V grafe G'_u potom musí existovať $(6-8)$*cesta* $x = x_1, x_2, \ldots, x_{6k+5}, x_{6k+6} = w$ (táto cesta existuje za podmienky, že $(6-8)$*cyklus* obsahujúci vrcholy x a w neobsahuje vrcholy u a v a to si ukážeme neskôr). Graf G však obsahuje vrchol w' taký, že (w, w') je červená hrana. Kedže $(6-8)$*cestu* $x_1, x_2, \ldots, x_{6k+6}$ vieme predĺžiť o tento vrchol $(x_{6k+7} = w')$, tak nutne pre každé nakrytie $f : G \to H$ platí, že $f(w') = f(x_{6k+7}) = f(x_1) = f(x)$. Ale keďže $(w, w') \in E_c(G)$ tak potom nutne aj $(f(w), f(w')) \in E_c(H)$ a teda $(f(w), f(x))$ je červená hrana grafu H.

Úplne analogicky by sme mohli dokázať, že pre každé nakrytie $f : G \to H$ platí $(f(u), f(v)) \in E_c(H)$.

Pre úplnú korektnosť tohoto dôkazu ešte musíme ukázať, že $(6-8)$*cyklus* grafu G_u obsahujúci vrcholy x a w je rôzny od $(6-8)$*cyklu* obsahujúceho vrcholy u a v. My vieme, že existuje nakrytie $f_5 : G_u \to H$, také že $f_5(u) = 5$ a navyše $f_5(x) = 6$. Potom už nutne $f_5(v) = 4$ a teda $(6-8)$*cyklus* obsahujúci vrcholy x a w sa bude zobrazovať na $(6-8)$*cyklus* $6, 8$ a $(6-8)$*cyklus* obsahujúci vrcholy u a v sa bude zobrazovať na $(6-8)$*cyklus* $1, 2, 4, 5, 7, 3$ a teda nemôže ísť o ten istý $(6-8)$*cyklus*. ∎

Definícia: Definujme množiny A, B, C nasledujúcim spôsobom: $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 4\}$ a $C = \{6, 8\}$.

Definícia: Pre graf G obsahujúci modré a červené hrany definujme *modro-červeno-modrú cestu (sled)* ako cestu (sled) obsahujúcu vrcholy x, y, z, v, pričom platí $(x, y), (z, v) \in E_m(G)$ a $(y, z) \in E_c(G)$ (viz obrázok 2.24).



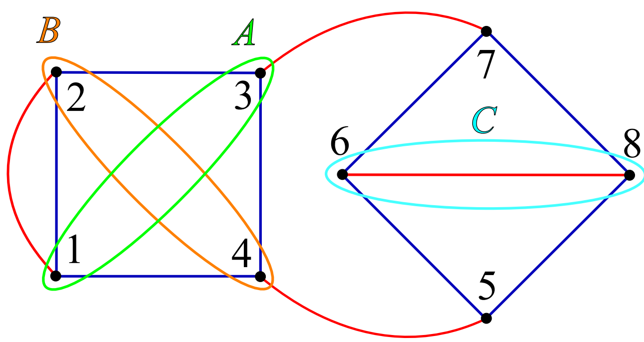
Obr. 2.24: Modro-červeno-modrá cesta x, y, z, v

Pozorovanie 2.4.5 *Nech G je graf, pre ktorý existuje nakrytie $f : G \to H$. Nech $x, y, z, v \in V(G)$ sú vrcholy modro-červeno-modrej cesty grafu G (viz obrázok 2.24). Potom platí:*

- *i) ak $f(x) \in A$ tak nutne $f(v) \in B \cup C$*
- *ii) ak $f(x) \in B$ tak nutne $f(v) \in A \cup C$*
- *iii) ak $f(x) \in C$ tak nutne $f(v) \in A \cup B$*

A navyše ak X je ľubovoľná množina z A, B a C, tak pre každý vrchol $x' \in V(G)$, $f(x') \in X$ a vrchol $v'' \in (A \cup B \cup C) - X$ existujú vrcholy y', z' a v' také, že x', y', z', v' je $(6-8)$cesta v grafe G, pričom $(x', y'), (z', v') \in E_m(G)$ a $(y', z') \in E_c(G)$ a navyše $f(v') = v''$.

Dôkaz: Keďže cesta x, y, z, v sa musí zobrazením f zobraziť na sled $f(x)$, $f(y)$, $f(z)$, $f(v)$, tak stačí overiť, že všetky sledy, ktoré sa skladajú (postupne) z modrej, červenej a modrej hrany a začínajú v množine A končia v množine B alebo C a to vieme ľahko nahliadnuť z grafu H (viz obrázok 2.25). Analogicky to vieme ukázať aj keď začíname vo vrchole z možiny B, resp. C.



Obr. 2.25: Graf H_{2b} s vyznačenými množinami A, B a C

Druhá časť pozorovania tiež plynie z predchádzajúceho obrázku a stačí overiť, že ak X je niektorá (ľubovoľná) množina z A, B alebo C a $x''' \in X$, tak pre každý $v''' \in (A \cup B \cup C) - X$ už existujú vrcholy $y''', z''' \in V(H)$ také, že $(x''', y'''), (z''', v''') \in E_m(H)$ a $(y''', z''') \in E_c(H)$ a to vieme ľahko urobiť rozobraním všetkých možností. ∎

Analogicky by sme si mohli definovať množinu $D = \{5, 7\}$ a ľahko by sme sa presvedčili, že každý modro-červeno-modrý sled začínajúci v množine D končí v jednom z vrcholov množiny D (dokonca ak $x, z \in D$ tak vždy existuje takýto sled začínajúci v x a končiaci v z).

2.5 Zložitosť problému nakrytia na graf H_{2b}

V nasledujúcej časti budeme dokazovať, že problém existencie nakrytia na graf H je *NP-úplný*. Základnú časť bude tvoriť prevod na dobre známy problém 3-farebnosti, ktorý je *NP-úplný* problém a práve pozorovanie 2.4.5 bude hrať v tomto prevode veľkú rolu, pretože vrcholom budeme pridelovať tri farby A, B a C pomocou vlastností našej modro-červeno-modrej $(6-8)cesty$ potom budeme schopný dosiahnuť toho, aby vrcholy spojené hranou dostali rôznu farbu a na druhej strane, ak dostaneme korektné tri ofarbenie budeme schopný dodefinovať korektné nakrytie. Prezentujme teda najdôležitejšiu vetu tejto kapitoly.

Veta 2.5.1 *Problém rozhodnúť, či pre daný súvislý graf G existuje nakrytie na graf H je NP-úplný.*

My budeme všetky nasledujúce dôkazy robiť pre súvislé grafy, ale nie je tažké si rozmyslieť, že by sme to mohli urobiť aj pre nesúvislé grafy, len by sme sa v každom prípade museli zaoberať každou komponentou súvislosti zvlášť. Na dôkaz samotnej vety 2.5.1 potom budeme potrebovať nasledujúce dve lemmy.

Lemma 2.5.2 *Pre problém existencie nakrytia daného grafu G na graf H existuje polynomiálny certifikát. Tento problém je teda riešiteľný nedeterministickým polynomiálnym Turingovým strojom a tým pádom patrí do triedy NP.*

Lemma 2.5.3 *Problém rozhodnutia, či sa daný graf G dá korektne ofarbiť 3 farbami je polynomiálne prevoditeľný na problém existencie nakrytia na graf H.*

Dôkaz: *(vety 2.5.1)* Z lemmy 2.5.2 dostávame, že náš problém patrí do triedy *NP* a z lemmy 2.5.3 dostávame, že existuje *NP-úplný* problém prevoditeľný na problém existencie nakrytia na graf H a z definície *NP-úplnosti* plynie, že náš problém patrí medzi *NP-úplné* problémy. ∎

Dôkaz: *(lemmy 2.5.2)* Ak dostaneme funkciu $f : V(G) \to V(H)$, tak vieme v čase polynomiálnom od veľkosti grafu G (a teda aj veľkosti vstupu) rozhodnúť, či je zobrazenie f aj nakrytie v grafu G na graf H a to je náš polynomiálny certifikát. ∎

Dôkaz: *(lemmy 2.5.3)* Predpokladajme, že pre daný graf G' už vieme rozhodnúť, že či existuje nakrytie $f : G' \to H$. Nech je G graf, pre ktorý chceme zistiť či je 3-ofarbiteľný (chceme teda zistiť, či sa jeho vrcholy dajú ofarbiť 3-farbami tak, aby žiadne dva vrcholy, ktoré majú rovnakú farbu neboli spojené hranou). Pomocou tohoto grafu G v polynomiálnom čase zostrojíme graf G' taký, že graf G je 3-ofarbiteľný práve vtedy, keď existuje nakrytie grafu G' na graf H a to už bude dokazovať existenciu redukcie problému 3-ofarbiteľnosti na problém existencie nakrytia na graf H.

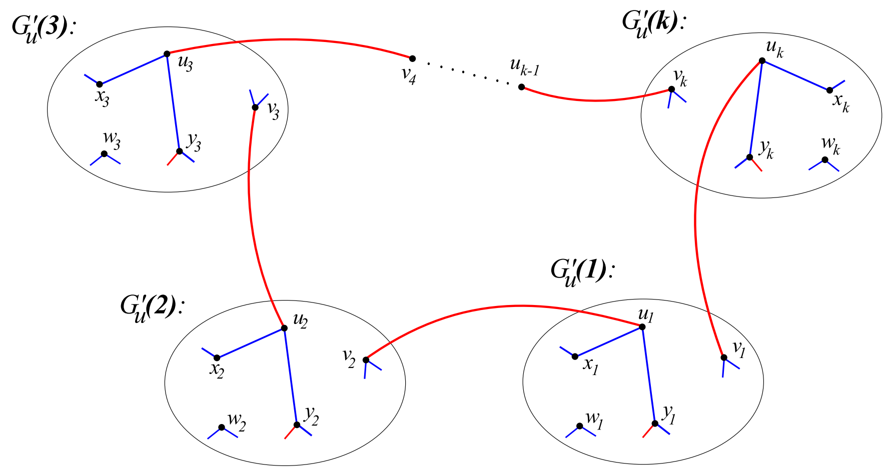
Hlavná myšlienka prevodu bude tá, že každému vrcholu y grafu G priradíme jeden vrchol $u(y)$ grafu G' a v prípade, že existuje nakrytie $f : G' \to H$, tak ukážeme, že vždy $f(u(y)) \in A \cup B \cup C$ a podľa toho, do ktorej z množín A, B a C hodnota $f(u(y))$ padne, priradíme farbu vrcholu y (použijeme teda práve 3 farbičky). V prípade, že x a y sú susedia v grafe G, tak príslušné vrcholy $u(x)$ a $u(y)$ spojíme modro-červeno-modrou cestou, čo zaručí, že ich ofarbíme rôznymi farbičkami. A keďže každý vrchol grafu G môže mať stupeň väčší ako jedna, tak mi v skutočnosti budeme musieť vytvoriť pre každý $y \in V(G)$ niekoľko kópií vrcholu $u(y)$ a zabezpečiť, aby každá kópia dostala zobrazením f rovnakú hodnotu.

Popíšme si teda ako budeme konštruovať graf G'. Základnou stavebnou jednotkou bude graf G'_u. Nech y je vrchol grafu G stupňa k. Potom zoberieme k kópií grafu G'_u a označme ich $G'_u(1), G'_u(2), \ldots, G'_u(k)$ a vrcholy grafu $G'_u(i)$ indexujme skrátka indexom i (teda ak $t \in V(G'_u)$ tak $t_i \in V(G'_u(i))$. Vytvorme potom graf M_y tak aby obsahoval všetky kópie $G'_u(1), G'_u(2), \ldots, G'_u(k)$ a pre všetky $i = 1, 2, \ldots, k$ pridáme do grafu M_y červené hrany (u_i, v_{i+1}), pričom všetky indexy počítame modulo k (viz obrázok 2.26).

Nech teraz G' je graf, ktorý obsahuje M_y ako podgraf (y je vrchol G stupňa k) a nech existuje nakrytie $f : G' \to H$. Predpokladajme teraz, že $f(u_i) = q \in V(H)$ pre nejaké $i = 1, 2 \ldots, k$ a nech p je červený sused q v grafe H. Potom nutne platí, že $f(v_{i+1}) = p$. Z pozorovania 2.4.4 vieme, že $(f(v_{i+1}), f(u_{i+1})) \in E_c(H)$ a teda vrchol u_{i+1} sa musí nakrytím f zobraziť do červeného suseda vrchola p v grafe H a teda platí $f(u_{i+1}) = q = f(u_i)$. Indukciou už potom ľahko dostávame:

$$f(u_1) = f(u_2) = \ldots = f(u_k)$$

Vrcholy u_i sa potom všetky musia zobraziť do jedného vrcholu. Definujme potom $f(M_y) = f(u_1)$. K dokončeniu konštrukcie grafu G' nám už ostáva iba prepojiť jednotlivé kópie vrcholov $u(y)$, v prípade ak v grafe G existovala



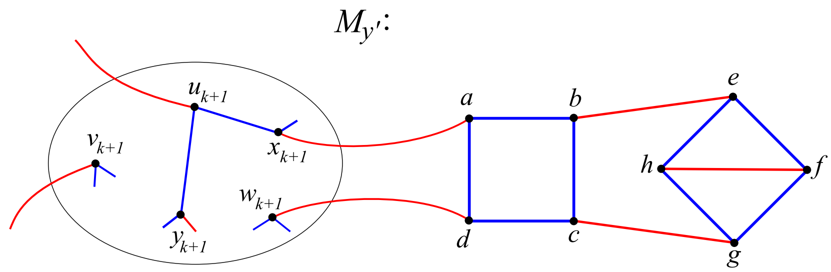
Obr. 2.26: Konštrukcia grafu M_y

hrana a zabezpečiť aby $\forall y \in M_y, f(M_y) \in A \cup B \cup C$.

Ak budeme vrcholy 'u' spájať modro-červeno-modrými $(6-8)$*cestami*, tak podľa pozorovania 2.4.5 bude stačiť zabezpečiť to, aby pre aspoň jeden vrchol y' grafu G vynucoval $f(M_{y'}) \in A \cup B \cup C$. Pretože G je súvislý graf, tak ak by pre nejaký vrchol $y'' \in V(G)$ platilo $f(M_{y''}) \notin A \cup B \cup C$ museli by existovať dva susedné vrcholy grafu G, z ktorých jeden by sa zobrazoval do množiny vrcholov $A \cup B \cup C$ a druhý nie (pričom ich vrcholy "u" by boli spojené modro-červeno-modrou cestou), no ale to je spor s pozorovaním 2.4.5.

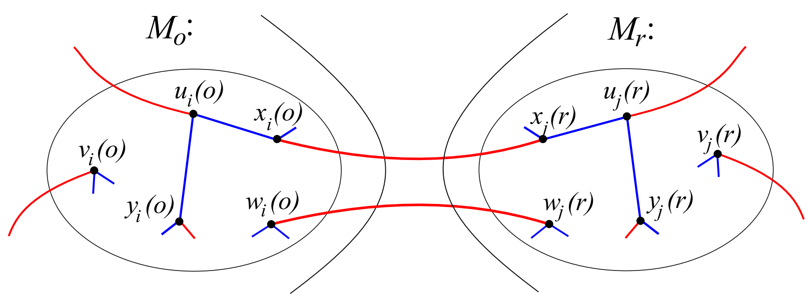
Takže nám stačí vybrať si ľubovoľný vrchol $y' \in V(G)$ a zabezpečiť pre neho, aby pre každé G' také, že $M_{y'}$ je jeho podgraf a pre každé nakrytie $f : G' \to H$ už nutne platilo, že $f(M_{y'}) \in A \cup B \cup C$. Predpokladajme, že vrchol y' má v grafe G stupeň k. Potom $M_{y'}$ zostrojíme rovnako ako sme predtým konštruovali grafy M_y až na to, že použijeme $k+1$ kópií grafu G'_u a k vrcholom x_{k+1} a w_{k+1} pridáme nasledujúce vrcholy a hrany ako je to na obrázku 2.27.

Keby sme to chceli zapísať formálnejšie, tak $M_{y'}$ sa skladá z $k+1$ kópií grafu G'_u, ktoré by sme pospájali ako predtým plus obsahuje 8 špeciálnych vrcholov a, b, c, d, e, f, g a h (pričom v tomto prípade zápisom f myslíme vrchol a nie nakrytie) a obsahuje navyše modré hrany (a, b), (b, c), (c, d), (d, a), (e, f), (f, g), (g, h), (h, e) a červené hrany (x_{k+1}, a), (w_{k+1}, d), (b, e), (c, g) a (h, f). Dôkaz toho, že potom už nutne pre každé nakrytie platí $f(M_{y'}) \in A \cup B \cup C$ si necháme na neskôr.



Obr. 2.27: Graf $M_{y'}$ s pridanými vrcholmi zaručujúcimi, že pri každom na- krytí sa vrchol u_{k+1} bude zobrazovať do množiny $A \cup B \cup C$

Ukážme si teraz ako budeme z grafu G konštruovať samotný graf G'. Graf G' bude obsahovať zjednotenie grafov M_y pre všetky vrcholy $y \in V(G)$. K tomuto (nesúvislému) grafu potom pridáme hrany nasledujúcim spôsobom. Postupne si budeme brať hrany (o, r) grafu G. V grafe M_o, resp. M_r zvolíme prvý nepoužitý vrchol 'u' (nepoužitý v zmysle, že sme ho ešte neuvažovali pre žiadnu hranu), nech je to $u_i(o)$, resp. $u_j(r)$ a pridáme červené hrany $(x_i(o), x_j(r))$ a $(w_i(o), w_j(r))$ (viz obrázok 2.28). Keďže grafy M_y majú toľko vrcholov 'u' ako je stupeň vrchola y (až na vrchol y', ale ten má vrcholov 'u' o jedna viac ako stupeň vrchola y' ale jeden vrchol 'u' už je obsadený), tak je zrejmé, že také indexy i a j budú vždy existovať a nakoniec sa minú všetky (takže všetky vrcholy 'x' a 'w' budú incidentné s práve jednou červenou hranou). Ľahko sa potom presvedčíme, že graf G' je už 3-regulárny, jeho hrany sú ofarbené dvomi farbami, pričom červené hrany tvoria perfektné párovanie a hrany modrej farby tvoria disjunktné zjednotenie cyklov (na to nám stačí overiť, že to platí pre jednotlivé vrcholy v, u, x, y, pretože pre ostatné vrcholy je to zrejmé z konštrukcie grafu G'_u).



Obr. 2.28: Prepojenie grafov Mr a M_o ((r, o) je hrana grafu G)

Zostáva nám už len dokázať, že graf G je 3-ofarbiteľný $\Leftrightarrow$ existuje nakrytie $f : G' \to H$. Predpokladajme najprv, že existuje nakrytie $f : G' \to H$. Potom vrcholom grafu G priradíme práve jednu z množín A, B a C (tieto množiny budú predstavovať jednotlivé 3 farby, ktorými chceme ofarbiť vrcholy). Pričom farbu vrchola y budeme definovať ako $X \in \{A, B, C\}$, $f(M_y) \in X$. Na to aby táto definícia bola korektná potrebujeme najprv ukázať, že $\forall y \in V(G), f(M_y) \in A \cup B \cup C$. Ako už vieme tak na to nám stačí ukázať, že $f(M_{y'}) \in A \cup B \cup C$.

Graf $M_{y'}$ obsahuje $k+1$ kópií grafu G'_u, pričom ku kópii $G'_u(k+1)$ sú pridané špeciálne vrcholy a, b, c, d, e, f, g, h. Pozrime sa teraz lepšie na to, že kde sa mohli zobraziť tieto špeciálne vrcholy. Vrcholy e, f, g a h tvoria modrý 4-cyklus (pričom to či zápisom f myslíme nakrytie alebo špeciálny vrchol vyplýva z kontextu), takže vrcholy $f(e), f(f), f(g)$ a $f(h)$ musia tvoriť modrý 4 cyklus grafu H. Ale tiež platí, že $(h, f) \in E_c(G) \Rightarrow (f(h), f(f)) \in E_c(H)$. Takže modrý cyklus $f(e), f(f), f(g), f(h)$ obsahuje červenú priečku $(f(h), f(f))$, no ale to je možné iba v prípade, že $\{f(h), f(f)\} = \{6, 8\}$. Potom ale už nutne $\{f(e), f(g)\} = \{5, 7\}$ a teda $\{f(b), f(c)\} = \{3, 4\}$ a keďže vrcholy b a c, resp. $f(b)$ a $f(c)$ sú modrý susedia v grafe G, resp. H tak nutne $\{f(a), f(d)\} = \{1, 2\}$. Potom je ale už zrejmé, že $f(x_{k+1}(y')) \in \{1, 2\}$ a odtiaľ už priamo plynie, že $f(u_{k+1}(y')) \in \{1, 2, 3, 4\} = A \cup B$. Keďže $f(u_1(y')) = f(u_2(y')) = \ldots = f(u_{k+1}(y')) = f(M_{y'})$ dostávame $f(M_{y'}) \in A \cup B \cup C$ a teda $\forall y \in V(G), f(M_y) \in A \cup B \cup C$.

Nakrytie f nám teda definuje ofarbenie vrcholov tromi farbami. Predpokladajme teraz, že toto ofabenie nie je korektné, t.j. existujú dva vrcholy $y_1, y_2 \in V(G)$ také, že $(y_1, y_2) \in E(G)$ a $f(M_{y_1}) = f(M_{y_2})$. Potom musia existovať vhodné indexy i a j také, že vrcholy $u_i(y_1)$ a $u_j(y_2)$ sú spojené modro-červeno-modrou cestou. Ale tým dostávame spor s pozorovaním 2.4.5 a naše ofarbenie je preto korektné 3-ofarbenie grafu G.

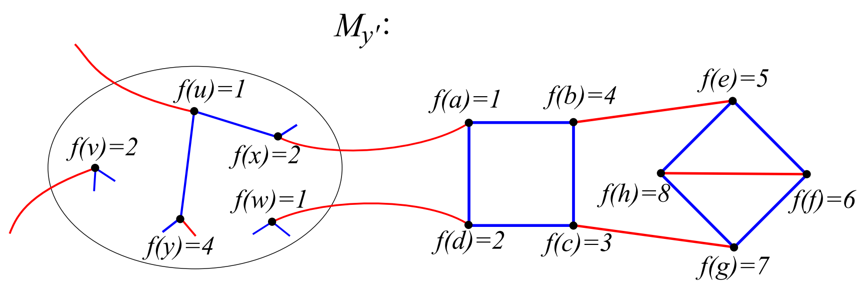
Predpokladajme teraz, že graf G je 3-ofarbiteľný a nech $g : V(G) \to \{1, 2, 3\}$ je korektné 3-ofarbenie tohoto grafu. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $g(y') = 1$, inak si len vymeníme úlohu našich farieb. Potom budeme definovať zobrazenie $f : V(G') \to H$ tak aby f nakoniec splňovalo podmienky lokálne bijektívneho homomorfizmu grafu G' na graf H.

Najprv definujeme zobrazenie f pre všetky vrcholy 'u'. Nech teda $y \in V(G)$ a nech M_y obsahuje k kópií grafu G'_u. Vieme, že nutne musí platiť $f(u_1(y)) = f(u_2(y)) = \ldots = f(u_k(y)) = f(M_y)$. Potom ak $g(y) = 1$ tak definujme $f(M_y) = 1 \in A$, ak $g(y) = 2$, tak definujme $f(M_y) = 2 \in B$ a inak definujme $f(M_y) = 6 \in C$.

Potom už máme jednoznačne určené zobrazenie f aj na vrcholoch 'v', pretože vieme, že $(f(u_i(y)), f(v_i(y)) \in E_c(H)$, pre všetky vrcholy $y \in V(G)$ a príslušné indexy i.

Uvažujme teraz dva vrcholy $y_1, y_2 \in V(G)$ také, že $(y_1, y_2) \in E(G)$. Potom existujú indexy i a j také, že vrcholy $u_i(y_1)$ a $u_j(y_2)$ sú spojené modro-červeno-modrou cestou. Z pozorovania 2.4.5 vieme, že existujú vrcholy $x_1, x_2 \in V(H)$, také že $f(u_i(y_1)), x_1, x_2, f(u_j(y_2))$ je modro-červeno-modrý sled (resp. ťah) grafu H. Vrcholy x_1 a x_2 sú už potom dokonca jednoznačne určené. Potom môžeme definovať $f(x_i(y_1)) = x_1 = f(w_j(y_2))$ a $f(x_j(y_2)) = x_2 = f(w_i(y_1))$.

Ukážme, že teraz už vieme f korektne dodefinovať v každom podgrafe G'_u (teda okrem posledného špeciálneho podgrafu pridaného do grafu $M_{y'}$). V každom G'_u už totiž, máme predpísané kde sa zobrazia vrcholy u, v, w a x. Keďže $f(v)$ je červený sused $f(u)$ a $f(x)$ je modrý sused vrchola $f(u)$, tak z definície grafu G_u už plynie, že existuje nakrytie $f' : G_u \to H$ také, že $f'(x) = f(x)$, $f'(u) = f(u)$ a $f'(v) = f(v)$ (a zrejme tiež $f'(w) = f(w)$). A pre všetky vrcholy t príslušného grafu G'_u už potom dodefinujeme $f(t) = f'(t)$.



Obr. 2.29: Prípustné ohodnotenie umelo pridaných vrchol ku grafu $M_{y'}$

Ľahko potom overíme, že okolie každého vrchola sa zobrazí bijektívne na okolie svojho obrazu. Pre vrcholy rôzne od u, v, x, w je to zrejmé a pre tieto štyri vrcholy to plynie z pozorovania 2.4.4. Zostáva nám už len ukázať, že vieme dodefinovať aj špeciálny podgraf G'_u v grafe $M_{y'}$ aj s pridanými vrcholmi. Keďže $g(y') = 1$ platí $f(u) = 1 \in V(H)$ a dodefinujme $f(x) = 2$ (pričom vrcholy podgrafu $G'_{y'}(k+1)$ už píšeme bez príslušných indexov). Potom už môžeme opäť ako v predchádzajúcom prípade dodefinovať všetky vrcholy vnútri podgrafu G'_u. Určite nám potom víde, že $f(w) = 1$ a potom už len dodefinujeme zobrazenie f na zvyšné vrcholy a to nasledujúcim spôsobom $f(a) = 1$, $f(b) = 4$, $f(c) = 3$, $f(d) = 2$, $f(e) = 5$, $f(f) = 6$, $f(g) = 7$ a

$f(h) = 8$ (viz obrázok 2.29).

Potom už nie je problém overiť, že zobrazenie f spĺňa všetky podmienky nakrytia a teda platí, že ak G je 3-ofarbiteľný, tak existuje nakrytie G' do H.

Pre úplnosť dôkazu by sme ešte mali dodať, že prevod z G na G' je polynomiálny, pretože my v podstate každú hranu grafu G nahradíme dvomi kópiami grafu G'_u ktoré majú fixný počet vrcholov a teda celý prevod z G na G' vieme robiť v čase polynomiálnom od velkosti vstupu. Týmto sme teda dokázali vetu 2.5.1. ∎

Kapitola 3

Nakrytia 4-regulárnych dvojfarebných grafov

3.1 4-regulárne grafy na 8 vrcholoch

V predchádzajúcej kapitole 2 sme podali úplnú charakterizáciu zložitosti problému existencie nakrytia pre 3-regulárne dvojfarebné grafy na 8 vrcholoch, ktoré splňovali, že hrany jednej farby tvorili dva disjunktné 4-cykly a hrany druhej farby tvorili perfektné párovanie. V polynomiálnych prípadoch sme dokonca ukázali postup ako nájsť korektné nakrytie a takisto sme ukázali postup ako vyčísliť počet korektných nakrytí.

Dôkazy polynomiality problému nakrytia v predchádzajúcej kapitole sme vždy robili pomocou popisu symetrickej konštrukcie sústavy lineárnych rovníc (pričom každému vrcholu grafu G sme priraďovali tri premenné, viz dôkaz vety 2.2.1). Táto konštrukcia bola charakteristická tým, že rovnice si pre každý vrchol vynucovali jednoznačné ohodnotenie svojich susedov (až na prípadnú permutáciu susedov po hranách jednej farby). Takýto popis sme nezostrojili iba pre graf H_{2b}, o ktorom sme ukázali, že otázka nakrytia pre tento graf je *NP-úplná*. V kapitole 4 neskôr ukážeme, že pre tento graf takýto popis ani existovať nemôže. Vynára sa teda otázka, že či problém zožitosti nakrytia je polynomiálny práve vtedy, keď sa dá riešiť pomocou symetrickej konštrukcie sústavy lineárnych rovníc.

Odpoveď na túto otázku je, ale záporná. Existuje totiž graf $\widehat{H}$ (viz obrázok 3.1), pre ktorý otázku nakrytia nevieme riešiť symetrickou konštrukciou sústavy lineárnych rovníc analogickou ako to bolo v dôkaze vety 2.2.1 (viz. veta 4.3.2), ale tento problém je napriek tomu efektívne riešiteľný.

V tejto kapitole si ukážeme polynomiálny algoritmus, ktorý bude rozhodovať o existencii nakrytia na graf $\widehat{H}$. Tento algoritmus bude opäť založený na prevode hľadania nakrytia na hľadanie riešenia sústavy lineárnych rovníc. Túto sústavu však budeme konštruovať inak ako sme to robili doteraz a hlavným rozdielom bude to, že jednotlivé rovnice nebudú symetrické pre všetky vrcholy.

Podobne ako to bolo v predchádzajúcej kapitole aj tento algoritmus nebude len schopný rozhodnúť, či dané nakrytie existuje, ale v prípade, že existuje je schopný aj nájsť jedno takéto riešenie a tiež zistiť počet korektných nakrytí (tiež bude schopný popísať všetky korektné nakrytia ako afínny podpriestor, takže budeme schopný vypísať, všetky korektné nakrytia v čase $\mathrm{O}(P(|V(G)|).M)$, kde P je polynóm a M je počet príslušných nakrytí).

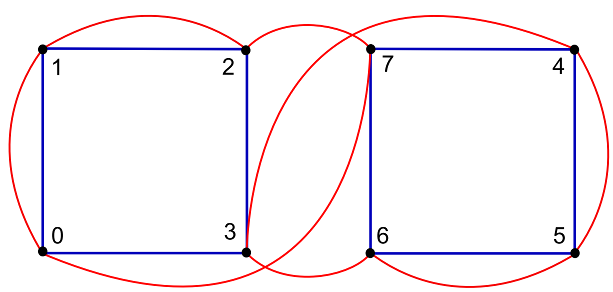
3.2 Algoritmus pre problém nakrytia na $\widehat{H}$

Ukážme si polynomiálny algoritmus, ktorý na vstup dostane súvislý graf G a odpovie *áno* alebo *nie*. V podkapitole 3.3 neskôr ukážeme, že odpoveď bude kladná práve vtedy, keď bude existovať (aspoň jedno) nakrytie grafu G do $\widehat{H}$, pričom $\widehat{H}$ je graf z nasledujúcej definície:

Definícia: Nech $\widehat{H} = (V, E)$ je 4-regulárny graf s hranami ofarbenými modrou a červenou farbou (viz obrázok 3.1), pričom platí:

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$E_c = \{(0,1), (1,2), (2,7), (7,0), (3,4), (4,5), (5,6), (6,3)\}$$
$$E_m = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,0), (4,5), (5,6), (6,7), (7,4)\}$$



Obr. 3.1: Graf $\widehat{H}$

Nie je ťažké overiť, že graf $\widehat{H}$ je bipartitný v zmysle, že vrcholy sa dajú rozdeliť do dvoch množín (viz nasledujúca definícia) tak, že každá hrana (ľubovoľnej farby) obsahuje vrcholy vždy z rôznych množín. Potom ak pre graf G existuje nakrytie do grafu $\widehat{H}$, tak aj graf G musí byť bipartitný, čo ukazuje pozorovanie 3.2.1.

Definícia: Definujme množinu $V_0(\widehat{H}) = \{x; x \in V(\widehat{H}), x \equiv 0(mod\ 2)\}$ a $V_1(\widehat{H}) = \{x; x \in V(\widehat{H}), x \equiv 1(mod\ 2)\}$.

Pozorovanie 3.2.1 *Ak existuje nakrytie $f : G \to \widehat{H}$, tak G je nutne bipartitný graf.*

Dôkaz: Ak $f : G \to \widehat{H}$ je nakrytie, tak definujme množiny A a B nasledovne $A = \{x; x \in V(G), f(x) \in V_0(\widehat{H})\}$ a $B = \{x; x \in V(G), f(x) \in V_1(\widehat{H})\}$. Tieto dve množiny sú určite disjunktné a kedže každý vrchol z G leží v aspoň jednej z týcho množín, je zrejmé, že tvoria rozklad množiny $V(G)$. Keby existovala hrana medzi vrcholmi $x, y \in A$ alebo $x, y \in B$ znamelo by to, že $f(x) \equiv f(y)$ (mod 2) a $(f(x), f(y)) \in E(\widehat{H})$. To ale nie je možné, pretože pre všetky hrany $(x', y') \in E(\widehat{H})$ platí, že $x' \neq y'$(mod 2) a teda graf G je nutne bipartitný a množiny A a B, sú jeho partity. ∎

Popíšme si teraz samotný polynomiálny algoritmus. Algoritmus bude z veľkej časti založený na tom, že pre vstupný graf G zadefinujeme sústavu lineárnych rovníc nad $GF[2]$ a podľa toho, že či exisuje riešenie tejto sústavy rozhodneme, či existuje nakrytie $f : G \to \widehat{H}$. Pre daný súvislý graf G pre každý vrchol $x \in V(G)$ definujme premenné (bity) x_1, x_2 a x_3. O týchto premenných budeme niekedy hovoriť aj ako o stĺpcovom vektore $(x_1, x_2, x_3)^T$ priradenému vrcholu x. Všetky premenné ako aj všetky operácie budeme uvažovať nad dvojprvkovým telesom $GF[2]$.

V prípade, že graf G nie je 4-regulárny s hranami modrej a červenej farby a taký, že hrany každej farby tvoria 2-faktor, tak algoritmus odpovie *nie*. V danom grafe G potom rozdelíme všetky vrcholy do partít A a B. V prípade, že G nie je bipartitný graf, tak podľa pozorovania 3.2.1 nakrytie na $\widehat{H}$ neexistuje a algoritmus nám opäť odpovie *nie*. Ak je graf G bipartitný, tak máme dve možnosti, buď sa vrcholy z A zobrazia do $V_0(\widehat{H})$ a vrcholy B do $V_1(\widehat{H})$ alebo to bude naopak (vďaka súvislosti grafu G, žiadne iné možnosti nepripadajú v úvahu). Stačí teda vyskúšať obe tieto možnosti. Ak pre aspoň jednu nájdeme riešenie bude to znamenať, že nakrytie existuje, inak nakrytie nebude existovať.

Predpokladajme teda, že vrcholy množiny B sa budú zobrazovať na vrcholy $V_1(\widehat{H})$ a vrcholy z A sa zobrazia na $V_0(\widehat{H})$. Potom pre všetky vrcholy z G budeme definovať nasledujúce rovnosti:

i) Pre všetky $x \in A$ definujme rovnosť

$$i1) \qquad x_3 = 0$$

a pre všetky $y \in B$ definujme

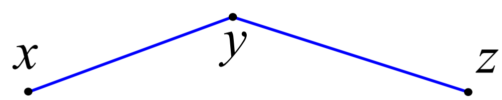
$$i2) \qquad y_3 = 1$$

Tretí (posledný) bit každého vrcholu teda bude hovoriť o tom, do ktorej partity grafu G daný vrchol patrí.

ii) Pre všetky $x, y, z \in V(G)$ také, že $(x, y) \in E_m(G)$ a $(y, z) \in E_m(G)$ (viz obrázok 3.2) definujeme rovnosti:

$$ii1) \qquad x_1 = y_1$$

$$ii2) \qquad x_2 + z_2 = 1$$



Obr. 3.2: Modrá cesta x, y, z v grafe $\widehat{H}$

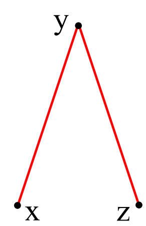
Rovnosť $ii1$) hovorí, že vrcholy, ktoré sa budú zobrazovať do jedného modrého 4-cyklu z $\widehat{H}$, budú mať rovnaký prvý bit, kým rovnosť $ii2$) hovorí, že vrcholy ktoré majú v grafe G_m vzdialenosť dva dostanú rôzny druhý bit.

iii) Pre všetky $x, y, z \in V(G)$ také, že $y \in B$, $x, z \in A$ a $(x, y) \in E_c(G)$ a $(z, y) \in E_c(G)$ (viz obrázok 3.3) definujeme rovnosti:

$$iii1) \qquad x_2 + z_2 = 1$$

$$iii2) \qquad y_1 + y_2 = x_1$$

Prvá rovnosť hovorí, že vrcholy z A, ktoré majú v grafe G_c vzdialenosť dva dostanú rôzny druhý bit, kým rovnosť $iii2$) hovorí, že prvý bit každého vrchola z A je jednoznačne určený prvými dvoma bitmi (každého) jeho červeného suseda. Mimo iné potom platí, že vrcholy x a z musia mať rovnaký prvý bit.

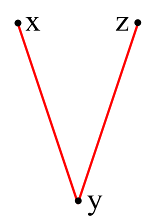


Obr. 3.3: Červené okolie vrchola $y \in B$

iv) Pre všetky $x, y, z \in V(G)$ také, že $y \in A$, $x, z \in B$ a $(x, y) \in E_c(G)$ a $(z, y) \in E_c(G)$ (viz obrázok 3.4) definujeme rovnosti:

$$iv1) \qquad x_1 + z_1 = 1$$

$$iv2) \qquad x_2 + z_2 = 1$$



Obr. 3.4: Červené okolie vrchola $y \in A$

Rovnosti $iv1$) a $iv2$) teda hovoria, že vrcholy z množiny B, ktoré majú v grafe G_c vzdialenosť dva musia mať rôzny prvý aj druhý bit. Rovnosti $iii1$) a $iv2$) spolu mimo iné vynucujú, že všetky vrcholy, ktoré majú v G_c vzdialenosť dva musia mať rôzny druhý bit (teda nezáleží na tom či sú z A alebo B), obdobnú vlastnosť nám zaručuje aj rovnosť $ii2$) ale pre modré hrany. Tiež si môžeme uvedomiť, že rovnosť $iv2$) je lineárne závislá na (vhodných) rovnostiach $iii2$) a $iv1$ (takže je úplne zbytočné ju tu uvádzať, ale pri dôkaze korektnosti algoritmu nám zjednoší zápis).

Celý algoritmus sa teda skladá z dvoch častí v prvej sa vrcholy rozdelia do partít A a B a v druhej časti potom vytvoríme sústavu. V prípade, že vytvorená sústava má riešenie, algoritmus vráti odpoveď *áno* (existuje korektné nakrytie grafu G na graf $\widehat{H}$). V prípade, že riešenie neexistuje, tak vymeníme úlohu množín A a B a opäť popíšeme novú sústavu. V prípade, že bude existovať riešenie tejto sústavy vráti náš algoritmus odpoveď *áno*, ináč vracia *nie*. Takto popísaný algoritmus je zjavne polynomiálny, kedže rozdelovať vrcholy do partít aj hľadať riešenia sústavy lineárnych rovníc vieme robiť v čase polynomiálnom od veľkosti vstupu (veľkosť sústavy je zrejme tiež polynomiálna od veľkosti vstupného grafu G).

3.3 Zložitosť nakrytia grafu $\widehat{H}$

Skôr ako sa pustíme do dôkazu toho, že algorimus definovaný v predchádzajúcej podkapitole 3.2 nám pre graf G vráti odpoveď *áno* práve vtedy, keď existuje nakrytie grafu G na graf $\widehat{H}$, zapíšme si formálne hlavný výsledok tejto kapitoly.

Veta 3.3.1 *Problém či pre daný súvislý graf G existuje nakrytie na graf $\widehat{H}$ vieme rozhodnúť v polynomiálnom čase.*

Táto veta bude platiť aj pre nesúvislé grafy. Jediný rozdiel v dôkaze by bol len to, že by sme každú komponentu súvislosti museli rozobrať zvlášť. Pre jednoduchosť si túto vetu dokážeme len pre súvislé grafy.

Dôkaz: Dôkaz priamo plynie z nasledujúcej lemmy 3.3.2. ∎

Lemma 3.3.2 *Pre daný súvislý graf G existuje korektné nakrytie $f : G \to \widehat{H} \Leftrightarrow$ algoritmus popísaný v podkapitole 3.2 odpovie áno.*

Pri dôkaze lemmy 3.3.2 ukážeme, že riešenia sústav lineárnych rovníc vytvorenej našim algoritmom (v skutočnosti ide o dve sústavy) sú v bijekcii so všetkými nakrytiami grafu G do $\widehat{H}$. Takže nie sme schopný len rozhodovať o existencii nakrytia, ale dokonca sme schopný nájsť v polynomiálnom čase takéto nakrytie.

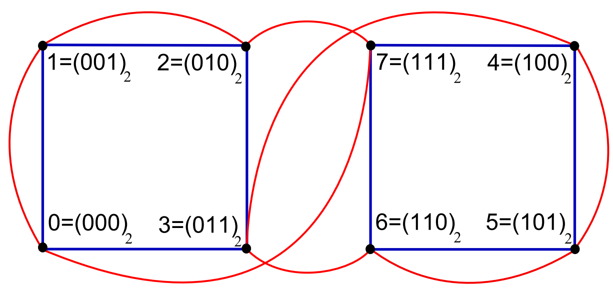
Keďže množinu riešení sústavy lineárnych rovníc tvorí afinná množina, tak je zrejmé, že počet riešení bude mocnina 2, pričom túto mocninu nie je ťažké určiť v polynomiálnom čase. A preto ak chceme vedieť počet všetkých nakrytí grafu G na $\widehat{H}$ tak stačí zostaviť si príslušné dve sústavy (jednu pre partity A a B a druhú po výmene týchto partít) a spočítať počet riešení týchto sústav. Keďže riešenie sústavy lineárnych rovníc vieme popísať pomocou bázy, tak nie je ťažké si rozmylieť, že my dokonca vieme popísať všetky korektné nakrytia.

Skôr ako sa pustíme do samotného dôkazu lemmy 3.3.2 definujme si ešte akúsi negáciu nad telesom $GF[2]$, ktorá nám v samotnom dôkaze uľachčí zápis.

Definícia: Pre každé $q \in GF[2]$ definujme q' ako $q' = q + 1$.

Dôkaz: V prípade, že existuje nakrytie $f : G \to H$, tak ohodnotenie premenných môžeme definovať nasledovným spôsobom: Nech pre dané $x \in V(G)$ je $(y_1y_2y_3)_2$ binárny zápis čísla $f(x)$ (toto číslo je v intervale od 0 do 7, takže sa dá v dvojkovej sústave jednoznačne popísať pomocou troch cifier) a položme $x_i = y_i$, pre $i = 1, 2, 3$. Zostáva nám potom overiť, že platia všetky naše rovnosti:

Zobrazenie f nám rozdelí vrcholy na tie, ktoré sa zobrazia do $V_0(\widehat{H})$ a do $V_1(\widehat{H})$. Položme potom $A = f^{-1}(V_0(\widehat{H}))$ a $B = f^{-1}(V_1(\widehat{H}))$. Potom už ľahko nahliadneme, že pre daný rozklad množiny $V(G)$ na A a B platia rovnosti $i)$.



Obr. 3.5: Korektné ohodnotenie vrcholov grafu $\widehat{H}$

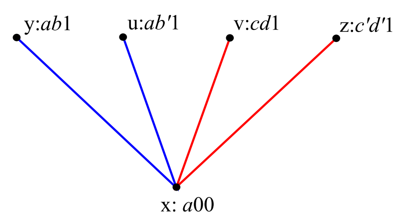
Na obrázku 3.5 máme ohodnotenie premenných pre graf $\widehat{H}$ (resp. jedno z možných korektných ohodnotení). Ľahko overíme, že všetky rovnosti $i), ii), iii)$ aj $iv)$ tu platia. Ak f je nakrytie grafu G na $\widehat{H}$, tak ohodnotenie okolia každého vrcholu $x \in V(G)$ je rovnaké ako ohodnotenie okolia vrcholu $f(x)$ na obrázku 3.5, no a odtiaľ vidíme, že potom už musia byť všetky rovnosti $ii), iii)$ a $iv)$ pri tomto ohodnotení splnené. A teda implikácia z ľava doprava platí.

Predpokladajme teraz, že náš algoritmus nám vráti odpoveď áno. Potom máme rozdelené vrcholy grafu G do množín A a B. Definujme potom zobrazenie $f : V(G) \to V(\widehat{H})$ nasledujúcim spôsobom:

$$f(x) = (x_1x_2x_3)_2, x \in V(G)$$

Túto operáciu môžeme prepísať ako $f(x) = 4 * x_1 + 2 * x_2 + x_3$ pričom v tomto prípade sčitujeme nad množinou celých čísiel. Teraz postupne rozoberieme všetky vrcholy a ukážeme, že ich susedia sa bijektívne zobrazujú na susedov v grafe $\widehat{H}$. Vždy budeme rozoberať vrchol $x \in V(G)$, jeho susedov si označme ako $y, z, u, v \in V(G)$ a nech platí $(x, y), (x, u) \in E_m(G)$ a $(x, v), (x, z) \in E_c(G)$ (teda y a u sú susedia po modrých hranách a v a z sú susedia po červených hranách).

Uvažujme $x \in f^{-1}(0) \cup f^{-1}(4)$, potom $x_1 = a, x_2 = 0, x_3 = 0$, kde $a \in GF[2]$ (viz obrázok 3.6). Určite teda platí $x \in A$.



Obr. 3.6: Ohodnotenie okolia vrchola $x \in f^{-1}(0) \cup f^{-1}(4)$ v grafe $\widehat{H}$

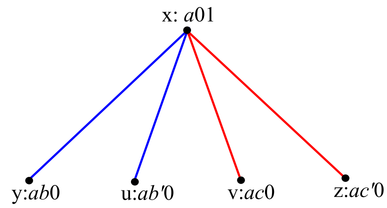
Potom nutne y, u, v a $z \in B$ a z rovností $i2)$ máme $y_3 = u_3 = v_3 = z_3 = 1$. Z rovnosti $ii1)$ dostávame, že $y_1 = u_1 = a$. A z rovnosti $ii2)$ plynie, že vrcholy y a u majú rôzny druhý bit a teda môžeme písať $y_2 = b$ a $u_2 = b'$, kde $b \in GF[2]$. Z rovnosti $iii2)$ dostávame, že $v_1 + v_2 = x_1 = z_1 + z_2$ a z rovností $iv1)$ a $iv2)$ potom môžeme písať $v_1 = c, v_2 = d, z_1 = c', z_2 = d'$, kde $c, d \in GF[2]$ a $c + d = a$.

Potom ak $a = 0$, tak $f(x) = 0$ a ľahko zistíme, že nutne $\{f(y), f(u)\} = \{1, 3\}$ a $\{f(v), f(z)\} = \{1, 7\}$. A to je presne to čo potrebujeme, pretože okolie vrchola 0 v grafe $\widehat{H}$ obsahuje vrcholy 1 a 3 po modrých hranách a vrcholy 1 a 7 po červených hranách a teda susedia vrchola x sú v bijekcii so susedmi vrchola $f(x)$.

V prípade, že $a = 1$, analogicky dostaneme, že $f(x) = 4$, $\{f(y), f(u)\} = \{5, 7\}$ a $\{f(v), f(z)\} = \{3, 5\}$. A teda opäť vidíme, že susedia vrcholu x sú v bijekcii so susedmi vrchola $f(x)$.

V prípade, že $x \in f^{-1}(1) \cup f^{-1}(5)$, tak $x_1 = a, x_2 = 0, x_3 = 1$, kde $a \in GF[2]$ (viz obrázok 3.7).

Potom už nutne $x \in B$ a y, u, v a $z \in A$ a z rovností $i1)$ máme $y_3 = u_3 = v_3 = z_3 = 0$. Z rovnosti $ii1)$ dostávame, že $y_1 = u_1 = a$. A z rovnosti $ii2)$ plynie, že vrcholy y a u majú rôznu druhú súradnicu a teda môžeme písať $y_2 = b$ a $u_2 = b'$, kde $b \in GF[2]$. Z rovnosti $iii2)$ dostávame, že $v_1 = z_1 = x_1 + x_2 = a + 0$ a z rovnosti $iii1)$ dostávame $v_2 = c$ a $z_2 = c'$, kde $c \in GF[2]$.

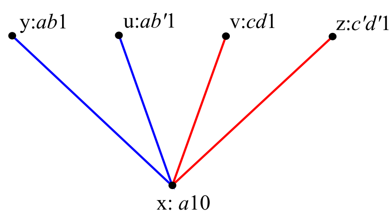


Obr. 3.7: Ohodnotenie okolia vrcholu $x \in f^{-1}(1) \cup f^{-1}(5)$ v grafe $\widehat{H}$

Potom ak $a = 0$, tak $f(x) = 1$ a ľahko zistíme, že nutne $\{f(y), f(u)\} = \{0, 2\}$ a $\{f(v), f(z)\} = \{0, 2\}$. Takže vidíme, že susedia vrcholu x sú opäť v bijekcii (v príslušnej farbe) so susedmi vrchola $f(x)$.

V prípade, že $a = 1$, analogicky dostaneme, že $f(x) = 5$, $\{f(y), f(u)\} = \{4, 6\}$ a $\{f(v), f(z)\} = \{4, 6\}$. A teda opäť vidíme, že susedia vrcholu x sú v bijekcii so susedmi vrchola $f(x)$.

Ak $x \in f^{-1}(2) \cup f^{-1}(6)$, tak $x_1 = a, x_2 = 1, x_3 = 0$, kde $a \in GF[2]$ (viz obrázok 3.8).

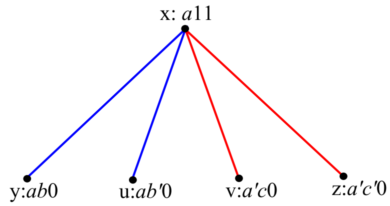


Obr. 3.8: Ohodnotenie okolia vrcholu $x \in f^{-1}(2) \cup f^{-1}(6)$ v grafe $\widehat{H}$

Potom už nutne $x \in A$ a tiež nutne y, u, v a $z \in B$ a z rovností $i2$) máme $y_3 = u_3 = v_3 = z_3 = 1$. Z rovnosti $ii1$) dostávame, že $y_1 = u_1 = a$. A z rovnosti $ii2$) plynie, že vrcholy y a u majú rôznu druhú súradnicu a teda môžeme písať $y_2 = b$ a $u_2 = b'$, kde $b \in GF[2]$. Z rovností $iv1$) a $iv2$) dostávame, že $v_1 + z_1 = 1$ a $v_2 + z_2 = 1$ (teda prvé aj druhé bity vrcholov v a z sú rôzne). Môžeme teda písať $v_1 = c, v_2 = d, z_1 = c'$ a $z_2 = d'$, kde $c, d \in GF[2]$. A navyše z $iii2$) dostávame $c + d = a$.

Potom ak $a = 0$, tak $f(x) = 2$ a ľahko zistíme, že nutne $\{f(y), f(u)\} = \{1, 3\}$ a $\{f(v), f(z)\} = \{1, 7\}$. Takže vidíme, že susedia vrcholu x sú opäť v bijekcii so susedmi vrchola $f(x)$. V prípade ak $a = 1$, tak analogicky dostaneme, že $f(x) = 6$, $\{f(y), f(u)\} = \{5, 7\}$ a $\{f(v), f(z)\} = \{3, 5\}$. A teda opäť vidíme, že susedia vrcholu x sú v bijekcii so susedmi vrchola $f(x)$.

Zostáva nám už len prebrať posledný prípad a to, že $x \in f^{-1}(3) \cup f^{-1}(7)$, teda $x_1 = a, x_2 = 1, x_3 = 1$, kde $a \in GF[2]$ (viz obrázok 3.9).



Obr. 3.9: Ohodnotenie okolia vrchola $x \in f^{-1}(3) \cup f^{-1}(7)$ v grafe $\widehat{H}$

Vrchol x potom leží v množine B a nutne y, u, v a $z \in A$ a z rovností $i1)$ máme $y_3 = u_3 = v_3 = z_3 = 0$. Z rovnosti $ii1)$ dostávame, že $y_1 = u_1 = a$. A z rovnosti $ii2)$ plynie, že vrcholy y a u majú opäť rôzny druhý bit a teda môžeme písať $y_2 = b$ a $u_2 = b'$, kde $b \in GF[2]$. Z rovnosti $iii2)$ dostávame, že $v_1 = z_1 = x_1 + x_2 = a + 1$ a z rovnosti $iii1)$ dostávame $v_2 = c$ a $z_2 = c'$, pre vhodné $c \in GF[2]$.

Potom ak $a = 0$, tak $f(x) = 3$ a ľahko zistíme, že nutne $\{f(y), f(u)\} = \{0, 2\}$ a $\{f(v), f(z)\} = \{4, 6\}$. Takže vidíme, že susedia vrcholu x sú opäť v bijekcii so susedmi vrchola $f(x)$. V prípade, že $a = 1$, tak analogicky dostaneme, že $f(x) = 7$, $\{f(y), f(u)\} = \{4, 6\}$ a $\{f(v), f(z)\} = \{0, 2\}$. A teda opäť vidíme, že susedia vrcholu x sú v bijekcii so susedmi vrchola $f(x)$.

Spolu sme teda dokázali, že nech sa vrchol $x \in V(G)$ zobrazí kdekoľvek, tak jeho susedia budú vždy v bijekcii so susedmi vrchola $f(x) \in V(\widehat{H})$. Z toho ale plynie, že ak náš algoritmus vráti odpoveď *áno*, tak existuje aj ohodnotenie našich premenných (a tiež rozdelenie množiny $V(G)$ do množín A a B) tak aby splňovali všetky rovnice $i1), ii1), iii1)$ a $iv1$ a pomocou tohoto ohodnotenia potom môžeme definovať funkciu $f : V(G) \to V(\widehat{H})$, ktorá bude navyše aj nakrytie grafu G na graf $\widehat{H}$, čo sme potrebovali k dôkazu našej lemmy 3.3.2. $\blacksquare$

Kapitola 4

Existencia popisu pomocou sústavy lineárnych rovníc

4.1 Vlastnosti popisu symetrickej konštrukcie sústavy

Zatiaľ sme stále pracovali s regulárnymi grafmi na ôsmich vrcholoch, ktoré sa skladali z dvoch modrých 4-cyklov a červené hrany tvorili buď perfektné párovanie alebo dva 4-cykly. V 2. kapitole sme si rozobrali všetky prípady takýchto 3-regulárnych grafov. Ukázali sme, že pre všetky tieto grafy až na graf H_{2b} vieme v polynomiálnom čase rozhodnúť, či pre daný graf G existuje nakrytie z G do príslušného grafu (a tiež vieme nájsť jedno takéto riešenie, zistiť počet všetkých nakrytí a popísať všetky takéto nakrytia). Dôkaz sme potom robili pomocou toho, že sme všetkým vrcholom priradili 3 premenné a popísali sme symetrickú konštrukciu sústavy lineárnych rovníc nad $GF[2]$, ktorá mala riešenie práve vtedy ak existovalo požadované nakrytie (resp. riešenia sústavy boli v bijekcii s príslušnými nakrytiami).

Pri konštrukcii sústavy v kapitole 2 sme vždy museli každému vrcholu grafu G priradiť tri bity a potom sme museli pre každý vrchol $u \in V(G)$ popísať niekoľko lineárnych rovníc tak, aby ohodnotenie premenných u_1, u_2 a u_3 už jednoznačne (až na permutáciu susedov po rovnako ofarbených hranách) určovalo ohodnotenie všetký premenných susedov vrchola u a ďalej sme museli zaručiť, že existuje ohodnotenie vrcholov grafu H, ktoré bude splňovať všetky tieto rovnosti a pre všetky rôzne dvojice u a v vrcholov tohoto grafu bude platiť, že trojica (u_1, u_2, u_3) bude rôzna od trojice (v_1, v_2, v_3)

(alebo inými slovami, pre každú trojicu premenných z $GF[2]$ bude existovať práve jeden vrchol z $V(G)$ ktorý dostane takéto ohodnotenie).

V kapitole 3 sme už sústavu konštruovali trošku inak. Hlavným rozdielom bolo to, že jednotlivé rovnosti neboli symetrické pre všetky vrcholy, ale pre vrcholy rôznych partít sme do sústavy pridali rôzne rovnosti.

V tejto kapitole si ukážeme dva dôkazy toho, že pre graf H_{2b} nevieme zostaviť sústavu anologickú ako to bolo pre ostatné grafy v kapitole 2 a tiež ukážeme, že takúto sústavu nevieme zostrojiť ani pre graf $\widehat{H}$ definovaný v kapitole 3 (viz. obrázok 3.1).

4.2 Neexistencia sústavy rovníc pre graf H_{2b}

Veta 4.2.1 *Pre graf H_{2b} nevieme definovať symetrickú konštrukciu sústavy lineárnych rovníc, ako to bolo v dôkaze vety 2.2.1 tak, aby táto sústava mala riešenie práve vtedy, keď existuje príslušné nakrytie.*

Dôkaz: Pre spor predpokladajme, že popis konštrukcie takejto sústavy existuje. Označme si potom jedno pevné ohodnotenie grafu H_{2b}, ktoré bude splňovať všetky rovnice zo sústavy (prislúchajúcej grafu H) ako g (t.j. funkcia g priraďuje premenným grafu H_{2b} ohodnotenie 0 alebo 1). Potom už pre daný graf G a jemu prislúchajúcu sústavu bude platiť, že pomocou každého korektného ohodnotenia splňujúceho túto sústavu môžeme definovať nakrytie $f : G \to H$ tak, že $\forall u \in V(G)$ nech $x \in V(H)$ je taký, že $(g(x_1), g(x_2), g(x_3)) = (u_1, u_2, u_3)$, potom $f(u) = x$. A pre každé nakrytie f, môžeme definovať ohodnotenie premenných grafu G ako $u_i = g(f(u)_i)$.

Preto nám stačí ukázať, že akonáhle budeme mať pre graf H_{2b}, pre každý vrchol u definované rovnosti, ktoré by už zaručovali jednoznačnosť ohodnotenia príslušných susedov vrchola u (až na permutáciu modrých susedov) a tiež to že všetky vektory premenných príslušných vrcholov budú rôzne, tak nebude existovať ohodnotenie premenných vrcholov grafu H_{2b} ktoré by splňovalo všetky rovnosti, alebo inými slovami neexistuje žiadna funkcia g z predchádzajúceho odstavca.

Pre vrchol $u \in V(G)$ teraz definujme $\widetilde{u}$ trojprvkový stĺpcový vektor premenných $(u_1, u_2, u_3)^T$. Modrých susedov vrchola u označme ako x, y a červeného ako v. Potom rovnosti definované pre vrchol u môžeme zapísať ako:

$$i) \qquad A.\widetilde{u} + B.\widetilde{x} + C.\widetilde{y} + D.\widetilde{v} = E$$

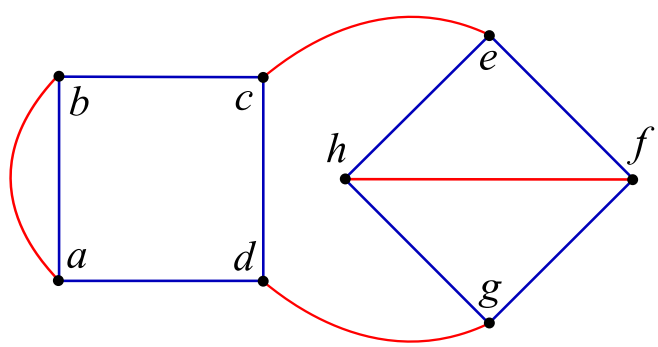
kde A, B, C a D sú vhodné matice s rozmermi $k \times 3$ nad $GF[2]$, E je k-prvkový (stĺpcový) vektor nad $GF[2]$ a k je počet rovností definovaných pre každý vrchol u.

Nech $\widetilde{u}$, $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ a $\widetilde{v}$ sú 3-prvkové stĺpcové vektory prislúchajúce jednotlivým vrcholom. Potom zápisom $(\widetilde{u}, \widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{v})^T$ budeme rozumieť 12-prvkový vektor $(u_1, u_2, u_3, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, v_1, v_2, v_3)^T$. Ak si potom definujeme maticu F s rozmermi $k \times 12$ ako $F = (A|B|C|D)$, tak rovnosť $i)$ môžeme písať ako:

$$ii) \qquad F \,.\, (\widetilde{u}, \widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{v}) = E$$

Potom ale nutne všetky riešenia rovnosti $ii)$ musia tvoriť afinnú množinu M. Tiež vieme, že pre každú trojicu bitov w_1, w_2 a w_3 existujú práve dva vektory z M, ktoré začínajú prvkami w_1, w_2 a w_3 (pretože každý vrchol si vynucuje jednoznačné ohodnotenie svojich susedov až na ich príslušnú permutáciu). Tieto dva vektory musia mať potom rovnaké posledné tri bity (červeného suseda) a líšia sa iba tým, že majú navzájom vymenenú trojicu bitov začínajúcu 4., resp 7. prvkom.

Predpokladajme teraz, že existuje ohodnotenie vrcholov grafu H_{2b} tromi bitmy nad $GF[2]$, ktoré by splňovalo rovnosť $ii)$ pre všetky $u \in V(H_{2b})$ a také, že každý vrchol má inú trojicu bitov. Potom bez ujmy na obecnosti môžeme predpokladať, že ohodnotenie bude ako na obrázku 4.1.



Obr. 4.1: Ohodnotenie vrcholov grafu H_{2b} vektormi z $(GF[2])^3$

Množina M potom musí obsahovať nasledujúcich 16 vektorov (a žiaden iný):

$$\begin{aligned} v_1 &= (a, b, d, b) & v_9 &= (e, h, f, c) \\ v_2 &= (a, d, b, b) & v_{10} &= (e, f, h, c) \\ v_3 &= (b, a, c, a) & v_{11} &= (f, e, g, h) \end{aligned}$$

$$v_4 = (b, c, a, a) \qquad v_{12} = (f, g, e, h)$$
$$v_5 = (c, b, d, e) \qquad v_{13} = (g, f, h, d)$$
$$v_6 = (c, d, b, e) \qquad v_{14} = (g, h, f, d)$$
$$v_7 = (d, a, c, g) \qquad v_{15} = (h, e, g, f)$$
$$v_8 = (d, c, a, g) \qquad v_{16} = (h, g, e, f)$$

Vieme, že pre všetky $i, j, l \in \{1, 2, \ldots 16\}$ platí $F.v_i = F.v_j = F.v_l = E$ a keďže pracujeme nad dvojprvkovým telesom $GF[2]$ tak musí platiť:

$$F.(v_i + v_j + v_l) = F.v_i + F.v_j + F.v_l = E + E + E = E$$

a teda súčet ľubovoľných troch vektorov z množiny M musí opäť ležať v množine M. Z toho plynie, že $t = v_1 + v_2 + v_3 = (a + a + b, b + d + a, d + b + c, b + b + a) = (b, b + d + a, d + b + c, a) \in M$. Vektor t začína tromi bitmy b, z čoho plynie, že buď $t = v_3$ alebo $t = v_4$. Keby platilo $t = v_3$ tak by sme dostali $b + d + a = a$ odkiaľ by plynulo $b + d = 0$, alebo ináč $b = d$, čo je spor, pretože my predpokladáme, že každý vrchol grafu H_{2b} bol ohodnotený inou trojicou bitov a teda nutne $t = v_4$. Potom dostávame $b + d + a = c \Leftrightarrow a + b + c + d = 0$.

Ak by sme za t zvolili súčet vektorov v_9, v_{10} a v_{11} dostali by sme, že $t = v_9 + v_{10} + v_{11} = (e + e + f, h + f + e, f + h + g, c + c + h) = (f, h + f + e, f + h + g, h) \in M$. Vzhľadom na prvé tri prvky vektora t máme opäť dve možnosti, buď $t = v_{11}$ alebo $t = v_{12}$. Keby platilo $t = v_{11}$, tak by sme zo štvrtého až šiesteho bitu vektora t vyčítali, že $h + f + e = e$ a teda $h = f$, čo je spor. Dostávame teda $t = v_{12}$ odkiaľ dostávame, že $h + f + e = g \Leftrightarrow e + f + g + h = 0$.

Zistili sme teda, že súčet vektorov v každom z modrých štvorcyklov musí byť nula. Zoberme teraz t ako súčet vektorov v_1, v_{10} a v_{13}. Dostávame potom $t = v_1 + v_{10} + v_{13} = (a+e+g, b+f+f, d+h+h, b+c+d) = (a+e+g, b, d, b+c+d)$ a využitím toho, že $a+b+c+d = 0$ dostávame $t = (a+e+g, b, d, a)$. V množine M sa však nenachádza žiadny vektor ktorý by končil takýmito 9 bitmi a teda dostávame spor s existenciou požadovaného ohodnotenia grafu H_{2b} $\Rightarrow$ otázku nakrytia pre graf H_{2b} nevieme riešiť popísaním analogickej symetrickej konštrukcie sústavy lineárnych rovníc ako to bolo v prípade ostatných 3-regulárnych dvojfarebných grafov na 8 vrcholoch. $\blacksquare$

4.3 Neexistencia sústavy rovníc pre graf $\widehat{H}$

Z dôkazu predchádzajúcej vety 4.2.1 vyplynul elementárny dôsledok, že súčet vektorov v každom jednofarebnom 4-cykle grafu H_{2b} by musel byť nulový. Nasledujúca lemma 4.3.1 dokazuje toto tvrdenie pre väčšiu množinu grafov a dokonca ho rozširuje tým, že tvrdí že ak si zoberieme 4 cykly jednej farby, tak súčet dvoch protiľahlých vrcholov (resp. ich vektorov) je invariantný.

Lemma 4.3.1 (o uhlopriečkach) *Nech H je regulárny graf na 8 vrcholoch s ofarbenými hranami taký, že každá farba tvorí regulárny graf. Nech d je farba taká, že graf H_d sa skladá z dvoch disjunktných 4-cyklov. Predpokladajme, že pre tento graf existuje popis symetrickej konštrukcie sústavy lineárnych rovníc, analogický ako to bolo v dôkaze vety 2.2.1. Potom pre ľubovoľné ohodnotenie premenných grafu H, splňujúce túto sústavu, bude existovať stĺpcový vektor $D \in (GF[2])^3$ taký, že pre všetky $x, y \in V(H)$, $d_d(x, y) = 2$ bude súčet vektorov prislúchajúcich vrcholom x a y rovný D ($\widetilde{x} + \widetilde{y} = D$).*

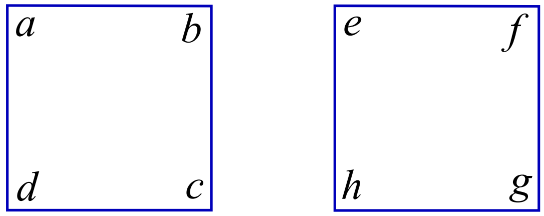
Dôkaz: Predpokladajme, že existuje popis symetrickej konštrukcie sústavy lineárnych rovníc analogický ako v dôkaze vety 2.2.1. Uvažujme teraz vrchol $u \in V(H)$ a jeho susedov x a y takých, že $(u, x), (u, y) \in E_d(H)$. Vieme, že naše lineárne rovnice musia pre dané hodnoty u_1, u_2 a u_3 vynucovať jednoznačné ohodnotenie premenných vrcholov x a y (až na príslušnú permutáciu). Preto musí existovať matica F' o rozmeroch $k \times 9$ a stĺpcový vektor $E' \in (GF[2])^k$ také, že platí:

$$iii) \qquad F'.(\widetilde{u}, \widetilde{x}, \widetilde{y}) = E'$$

kde k je vhodné prirodzené číslo. Definujme $M' = \{z \in (GF[2])^9; F'.z = E'\}$ množinu riešní sústavy iii). Táto množina je zrejme afínny podpriestor s vlastnosťou, že pre každú kombináciu troch bitov, existujú v M' práve dva vektory začínajúce týmito troma bitmi a navyše tieto dva vektory sa musia líšiť iba tým, že 4. až 6. bit jedného vektora sa rovná 7. až 9. bitu druhého vektora a naopak.

Predpokladajme teraz, že pre graf H existuje riešenie našej sústavy, ktoré ohodnotí každý vrchol grafu H inou trojicou bitov. Bez ujmy na všeobecnosti si toto riešenie označme tak, ako je to na obrázoku 4.2. Potom musí platiť $\{a, b, c, d, e, f, g, h\} = GF[2] \times GF[2] \times GF[2]$ (pričom zápisom $\times$ myslíme kartézsky súčin množín).

Dostávame potom, že množina M' musí obsahovať práve nasledujúcich 16 vektorov:



Obr. 4.2: Dva 4-cykly z ohodnotenými vrcholmi vektormi z $(GF[2])^3$

$$\begin{aligned}
v_1 &= (a,b,d) & v_9 &= (e,h,f)\\
v_2 &= (a,d,b) & v_{10} &= (e,f,h)\\
v_3 &= (b,a,c) & v_{11} &= (f,e,g)\\
v_4 &= (b,c,a) & v_{12} &= (f,g,e)\\
v_5 &= (c,b,d) & v_{13} &= (g,f,h)\\
v_6 &= (c,d,b) & v_{14} &= (g,h,f)\\
v_7 &= (d,a,c) & v_{15} &= (h,e,g)\\
v_8 &= (d,c,a) & v_{16} &= (h,g,e)
\end{aligned}$$

Analogicky ako to bolo v dôkaze vety 4.2.1, potom musí platiť, že súčet ľubovoľných troch vektorov z množiny M' musí opäť ležať v množine M'. Definujme teraz vektor t ako súčet vektorov v_1, v_2 a v_3. Dostávame, že $t = v_1 + v_2 + v_3 = (a+a+b, b+d+a, d+b+c) = (b, b+d+a, d+b+c) \in M'$. Vzhľadom na prvé tri bity vektora t musí platiť, že $t = v_3$ alebo $t = v_4$. Keby platilo $t = v_3$ znamenalo by to, že musí platiť $b+d+a = a$, čo je ekvivalentné s $b = d$, čo je spor a teda nutne $t = v_4$ a potom už nutne musí platiť $a+b+c+d = 0$.

Keby sme zvolili $t = v_9 + v_{10} + v_{11}$, tak by sme úplne analogicky dostali, že $e+f+g+h = 0$. Zvolme teraz t ako súčet vektorov v_1, v_2 a v_9. Potom dostávame $t = v_1 + v_2 + v_9 = (a+a+e, b+d+h, d+b+f) = (e, b+d+h, d+b+f) \in M'$. Potom nutne $t = v_9$ alebo $t = v_{10}$. Nie je ťažké overiť, že možnosť $t = v_9$ by viedla k spornej rovnosti $b = d$ a teda musí platiť $t = v_{10}$. Keď si túto rovnosť rozpíšeme po zložkách, tak dostávame:

$$b + d + h = f \Leftrightarrow b + d = h + f$$

a z rovností $a+b+c+d = 0$ a $e+f+g+h = 0$ už potom priamo plynie:

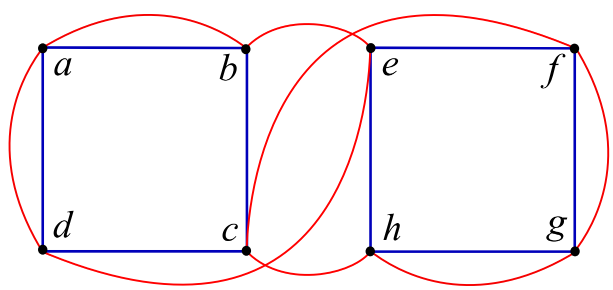
$$a + c = b + d = h + f = e + g = D$$

a teda ľubovoľné ohodnotenie vrcholov spĺňajúce našu sústavu vynucuje, že súčet vektorov priradených vrcholom vo vzdialenosti 2 (v grafe H_d) je konštantný. ∎

Pomocou lemmy o uhlopriečkach už nie je problém ukázať, že popis symetrickej konštrukcie sústavy lineárnych rovníc analogický ako v dôkaze vety 2.2.1 pre graf $\widehat{H}$ neexistuje.

Veta 4.3.2 *Pre graf $\widehat{H}$ neexistuje popis symetrickej konštrukcie sústavy lineárnych rovníc (analogický ako v dôkaze vety 2.2.1), ktorej riešenia by boli v bijekcii s príslušnými nakrytiami na tento graf.*

Dôkaz: Ak by takýto popis existoval, muselo by existovať ohodnotenie (troch) premenných vrcholov grafu $\widehat{H}$, ktoré by splňovalo túto sústavu a navyše všetky vrcholy by boli ohodnotené inou trojicou bitov. Predpokladajme, že takéto ohodnotenie existuje a bez ujmy na všeobecnosti označme ohodnotenie vrcholov tak ako je to na obrázku 4.3.



Obr. 4.3: Ohodnotenie grafu $\widehat{H}$ vektormi z $(GF[2])^3$

Keďže vrcholy ohodnotené vektormi a, b, c a d, ležia na jednom modrom 4-cykle, z lemmy 4.3.1 dostávame $a+c = b+d$. Vrcholy ohodnotené vektormi a, b, e a d ležia na jednom červenom 4-cykle a teda platí $a+e = b+d$. Dokopy teda dostávame $a+c = b+d = a+e$ čo už nutne vynuvuje $c = e$, čo je spor a teda hľadaný popis sústavy lineárnych rovníc pre graf $\widehat{H}$ neexistuje. ∎

4.4 Druhý dôkaz neexistencie sústavy pre H_{2b}

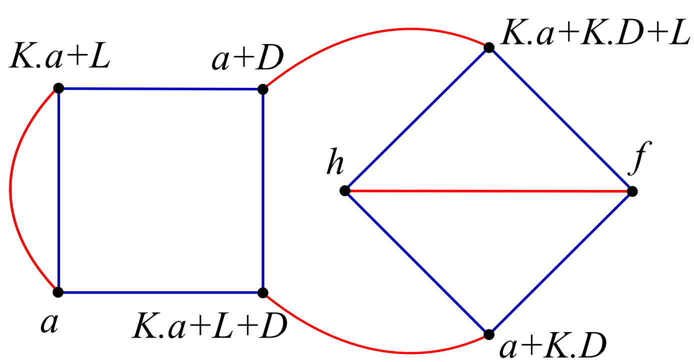
Ukážme si teraz ešte jeden dôkaz, že popis sústavy pre graf H_{2b} neexistuje. Tento dôkaz bude vo veľkej miere využívať najmä dôsledky lemmy 4.3.1.

Dôkaz: *(vety 4.2.1)* Uvažujme, že existuje popis symetrickej konštrukcie sústavy lineárnych rovníc (analogický ako v dôkaze vety 2.2.1) pre graf H_{2b}. Vieme, že potom ohodnotenie vrchola u už musí jednoznačne určovať ohdnotenie premenných svojho červeného suseda a teda musí existovať matica K s rozmermi 3×3 a vektor $L \in (GF[2])^3$ taký, že pre každých dvoch červených susedov u a v platí $K.\widetilde{u} + L = \widetilde{v}$. Potom nutne $\widetilde{u} = K.\widetilde{v} + L = K.(K.\widetilde{u} + L) + L = K^2.\widetilde{u} + K.L + L$. Ak si potom označíme I_3 jednotkovú maticu 3×3 tak dostávame

$$iv) \qquad (K^2 + I_3).\widetilde{u} = (K + I_3).L$$

My však vieme, že $\widetilde{u}$ môže nadobúdať všetky možné hodnoty z $(GF[2])^3$ a teda aj vektor $(0,0,0)^T$. Potom je ale zrejmé, že $(K + I_3).L = 0$ (pričom zápisom 0 myslíme nulový vektor). Navyše keby matica $(K^2 + I_3) = (K + I_3)^2$ obsahovala nenulový stĺpec, tak pre aspoň jeden z vekorov $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$ a $(0,0,1)^T$ by súčin tejto matice a príslušného vektora vyšiel nenulový a teda matica $(K + I_3)^2$ musí byť nutne nulová a platí $K^2 = I_3$ (to mimochodom plynie aj z toho, že 0 je vlastné číslo matice $K^2 + I_3$ a pre toto vlastné číslo existje 8 navzájom rôznych vlastných vektorov, z čoho plynie, že táto matica je podobná nulovej matici).

Ďalej vieme, že musí existovať ohodnotenie vrcholov grafu H_{2b} splňujúce našu sústavu a také, že každý vrchol dostane iný vektor. Označme si jedno takéto riešenie rovnako ako na obrázku 4.1. Z lemmy 4.3.1 vieme, že existuje vektor $D \in (GF[2])^3)$ taký, že súčet ľubovoľných dvoch vektorov, ktoré prislúchajú vrcholom v modrej vzdialenosti 2, sa rovná D.



Obr. 4.4: Závislosti pri ohodnotení grafu H_{2b}

Vieme, že vrcholy s vektormi a a c sú v modrej vzdialenosti 2 a teda $c = a + D$ (viz obrázok 4.4). Vrcholy s vektormi a a b sú červený susedia a teda $b = K.a+L$. Potom už nutne $d = K.a+L+D$ pretože podľa lemmy 4.3.1 musí byť súčet vektorov a, b, c a d rovný nulovému vektoru (a tiež preto, že ide o vektor vrcholu, ktorý je v modrej vzdialenosti 2 od vrcholu s vektorom b).

Vrchol s vektorom e, resp. g je červeným susedom vrchola ohodnoteného vektorom c, resp. d a preto musí platiť, že $e = K.a + K.D + L$, resp. $g = K^2.a + K.L + K.D + L$ a s vyžitím toho, že $(K + I_3).L = 0$ a $K^2.a = a$ dostávame $g = a + K.D$ (viz obrázok 4.4). Vrcholy s vekormi e a g majú modrú vzdialenosť 2 a teda platí $D = e + g = K.a + K.D + L + a + K.D = K.a + L + a$. Odtiaľ dostávame, že $b = K.a + L = a + D = c$, čo je spor, pretože my sme predpokladali, že vektory b a c sú rôzne. ∎

Kapitola 5

Záver

V tejto práci sme ukázali, že lineárna algebra a špeciálne sústavy lineárnych rovníc majú často v matematike (a teda aj v samotnej kombinatorike) nezastupiteľné miesto. Našli sme totiž spôsob ako môžme nakrytia jednotlivých grafov hľadať pomocou jednoduchého prevodu na problém riešenia sústavy lineárnych rovníc nad dvojprvkovým telesom $GF[2]$, čo je známy polynomiálny problém riešiteľný napríklad Jordan-Gaussovou eliminačnou metódou.

V kapitole 2 sme podali úplnú charakterizáciu problému existencie nakrytia pre 3-regulárne grafy na 8 vrcholoch, ktorých hrany sú ofarbené dvomi farbami, pričom hrany jednej farby tvoria dva disjunktné 4-cykly a hrany druhej farby tvoria perfektné párovanie. Nech H je takýto graf, potom nie je ťažké overiť, že problém nakrytia pre graf H_m aj H_c vieme riešiť v polynomiálnom čase (čo plynie napr. z [3]). Preto by sa dalo čakať, že tento problém by mohol byť efektívne riešiteľný aj pre graf H. Vo vete 2.2.1 sme ukázali, že pre všetky takéto grafy okrem grafu H_{2b} (viz obrázok 2.7) to platí.

Pre graf H_{2b} sme vo vete 2.5.1 ukázali, že problém existencie nakrytia na tento graf je *NP-úplný*, čo ešte priamo nezaručuje, že nie je polynomiálny, ale každopádne je to nepravdepodobné. V článku [1] autori podali plnú charakterizáciu problému nakrytia na ofarbených grafoch na dvoch vrcholoch a ukázali, že tento problém je *NP-úplný* práve vtedy, keď existuje farba, pre kotrú je *NP-úplný* problém existencie nakrytia na podgraf indukovaný hranami danej farby. Pre graf H_{2b} teda nič podobného neplatí, pretože problém nakrytia na príslušné podgrafy je efektívne riešiteľný, kým pre celý graf je tento problém *NP-úplný*.

To však nie je žiadny prevratný výsledok, pretože sa vie, že takúto vlastnosť majú už aj niektoré ofarbené multigrafy na 3 vrcholoch. Každopádne by bolo určite zaujímavé pokúsiť sa charakterizovať grafy, pre ktoré táto vlastnosť platí a pre ktoré nie.

V kapitole 3 sme ukázali ďalšiu možnosť prevodu problému existencie nakrytia na sústavu lineárnych rovníc, ktorá sa líšila od tej použitej v kapitole 2 a v [3]. Tento nový typ prevodu bol založený na tom, že sme rovnice do sústavy nepridávali symetricky pre každý vrchol, ale vrcholy sme si rozdelili do dvoch množín a pre každú z týchto množín sme potom do sústavy pridali iné rovnice. Tu sa potom vynára otázka, jednak či sa dajú nejak popísať grafy, pre ktoré sme takýto postup schopný urobiť a takisto otázka, že či sme schopný vrcholy rozdeliť do viac ako dvoch množín a pre každú množinu potom definovať samostaný typ rovníc, ktoré potom budeme pridávať do samotnej sústavy (pričom rozdelením vrcholov myslíme iné rozdelenia ako do tried blokového rozkladu).

V kapitole 4 sme potom ukázali niekoľko nutných podmienok na existenciu popisu symetrickej konštrukcie a ich aplikovaním sme dokázali, že takýto popis neexistuje pre graf H_{2b} (*NP-úplný* prípad) a ani pre graf $\widehat{H}$ (ktorý vieme riešiť pomocou popisu nesymetrickej konštrukcie sústavy lineárnych rovníc).

Literatúra

[1] J. Kratochvíl, Andrzej Proskurowski, Jan Arne Telle: *Complexity of Colored Graph Covers I. Colored Directed Multigraphs*

[2] J. Kratochvíl, Andrzej Proskurowski, Jan Arne Telle: *Covering Regular Graphs*

[3] J. Kratochvíl, Jan Arne Telle: *Complexity of colored graph cover II. When 2-SAT helps*, KAM-DIMATIA Series 97-354, Praha, 1997

[4] Jiří Fiala: *Computational complexity of covering cyclic graphs*

[5] P. Hell, J. Nešetřil: *Graphs and Homomorphisms*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, Oxford University Press, 2004, ISBN 0-19-852817-5