

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

# DIPLOMOVÁ PRÁCE



Petra Maierová

## **Odhad reologických parametrů ledových měsíců na základě pozorovaných deformací povrchu**

Katedra geofyziky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

Studijní program: Geofyzika

2008

Chtěla bych poděkovat vedoucímu práce doc. Ondřeji Čadkovi a všem dalším, kdo přispěli ke vzniku této práce, ať už radou, nezávislým názorem, materiální nebo psychickou podporou. Práce byla vytvořena za podpory grantu GAUK 280/2006/B-GEO/MFF.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a s jejím zveřejněním.

V Praze dne 15. 4. 2008

Petra Maierová

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Ledové měsíce velkých planet</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Matematický model</b>	<b>10</b>
3.1	Fyzikální předpoklady . . . . .	10
3.2	Rovnice pro viskózní a viskoelastický materiál . . . . .	10
3.3	Škálovací vztahy . . . . .	12
3.4	Sférické harmonické funkce . . . . .	14
3.5	Studium relaxace ve spektrální oblasti . . . . .	19
3.6	Rotace elementu kontinua . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Program</b>	<b>22</b>
<b>5</b>	<b>Parametry modelu</b>	<b>24</b>
<b>6</b>	<b>Výsledky</b>	<b>26</b>
6.1	Srovnání viskózního a viskoelastického případu . . . . .	26
6.2	Relaxace topografie pro různé parametry modelu . . . . .	27
6.3	Deformace pod kráterem . . . . .	37
6.4	Obrácená úloha na syntetických datech . . . . .	40
6.5	Obrácená úloha na reálných datech . . . . .	48
<b>7</b>	<b>Diskuze</b>	<b>55</b>
<b>8</b>	<b>Závěr</b>	<b>57</b>

Název práce: Odhad reologických parametrů ledových měsíců na základě pozorovaných deformací povrchu

Autor: Petra Maierová

Katedra: Katedra geofyziky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

e-mail vedoucího: oc@karel.troja.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci zkoumáme relaxaci topografie ledových měsíců. Relaxaci modelujeme programem pro deformaci radiálně symetrické kulové slupky, která představuje svrchní ledovou vrstvu měsíce. Vliv dalších vrstev zahrnujeme ve formě hraniční podmínky. Předpokládáme viskoelastickou reologii materiálu — maxwellovské těleso — a výsledky pro tuto reologii srovnáváme s výsledky pro newtonovskou kapalinu. Analyticky a numericky zkoumáme vliv různých parametrů na relaxaci, nejvíce se věnujeme vlivu viskozitní struktury modelované vrstvy. Pracujeme ve spektrální oblasti, získané výsledky proto nejsou vztaženy ke konkrétní topografii a mohou být aplikovány na libovolná topografická data. Výsledky obrácené úlohy na syntetických datech naznačují, že z pozorované relaxace topografie nelze jednoznačně určit průběh viskozity s hloubkou. Za dodatečných předpokladů však můžeme vybrat několik přípustných modelů a srovnat je s modely používanými jinými autory nebo odvozenými jinými metodami. Tento přístup je aplikován pro model s parametry měsíce Europa. Relaxaci jeho topografie odhadujeme na základě publikovaných topografických dat. Profil viskozity získaný obrácenou úlohou je ve shodě s modelem konvekce v ledové vrstvě Evropy za předpokladu viskozity na povrchu  $10^{23}$  až  $10^{24}$  Pa s.

Klíčová slova: ledové měsíce, relaxace, topografie, viskozita

Title: Estimating the rheology parameters of icy satellites from observed surface deformations

Author: Petra Maierová

Department: Department of Geophysics

Supervisor: Doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

Supervisor's e-mail address: oc@karel.troja.mff.cuni.cz

Abstract: In this work we study relaxation of the topography of an icy satellite. We model deformation in the outer icy shell of a satellite. The influence of the inner parts of the satellite is included in terms of a boundary condition. The icy satellite is approximated by a radially symmetrical viscoelastic body. Relaxation in the case of a linear viscoelastic rheology is compared with the one obtained for a Newtonian fluid. We study the dependence of the relaxation on various parameters, in particular, we focus on the influence of the viscosity structure of the modelled layer. The problem is treated in the spectral domain so that the derived results are independent of a particular topography. Solving an inverse problem for viscosity, we find a class of models for which the relaxation is similar, although they have different viscosity structures. Using additional physical constraints, several successful models can be selected. We apply this approach to an Europa-like model. We use the data published for several craters and we find them consistent with the viscosity structure obtained for a convection model of Europa provided that the surface viscosity is between  $10^{23}$  and  $10^{24}$  Pa s.

Keywords: icy satellites, relaxation, topography, viscosity

# 1 Úvod

Od 70. let 20. století, kdy byly vyslány první sondy Pioneer za dráhu Marsu, mapují vesmírné sondy vzdálené oblasti Sluneční soustavy. V 80. letech navázaly na průzkum v rámci programu Pioneer sondy Voyager 1 a 2, které přinesly první detailní záběry planet Jupiter a Saturn a jejich měsíců. Měsíce velkých planet, které jsou pro vysoký obsah ledu nazývány ledové měsíce, se staly jedním z hlavních cílů sondy Galileo v letech 1989 až 2003 a sondy Cassini, která operuje ve vesmíru od roku 1997. Sonda Cassini se zaměřila na měsíce a prstence planety Saturn, které zkoumá různými metodami. Díky bohatému přístrojovému vybavení pořídila sonda Cassini detailní snímky ledových měsíců ve viditelné, infračervené a ultrafialové oblasti, zkoumala jejich magnetické pole a částice v jejich okolí.

Výsledky pozorování sondami ukazují, že ledové měsíce mají velmi různorodý vzhled a pravděpodobně i stavbu a evoluci. Některé ledové měsíce jsou zřejmě aktivními světy, ve kterých probíhá řada procesů — konvekce, ledový vulkanismus, obnovování povrchu a jeho deformace a praskání. Modelováním těchto dějů se zabývá řada prací, které mají za cíl vysvětlit pozorovanou aktivitu ledových měsíců a zároveň prohloubit znalost jejich vnitřní stavby a dynamiky. Výzkum ledových měsíců vyvolal i zájem veřejnosti, protože na některých ledových měsících je zřejmě kapalná voda, která je základním předpokladem pro rozvoj života a která nebyla nalezena na žádné planetě Sluneční soustavy kromě Země.

Důležitým vstupem pro modelování jsou reologické parametry materiálu, v případě ledových měsíců hlavně reologické parametry ledu. Ty jsou často voleny především na základě teoretických úvah a nejsou přímo podloženy pozorováním. Vzhledem k nedostatečné znalosti reologie ledu v podmínkách, jaké panují v ledových měsících, jsou informace o reologických parametrech plynoucí z pozorování cenné. Jedním z pozorovatelných jevů, který je přímo závislý na reologických parametrech, je relaxace topografie. Relaxace topografie se projevuje například zploštěním nebo vydutím dna impaktních kráterů a je především závislá na viskozitě materiálu. Viskozita materiálu pod silně relaxovanou topografií bude zřejmě nižší, než pod topografií, která prakticky nerelaxovala. Může však studium relaxace přinést nejen takovéto kvalitativní závěry, ale také kvantitativní informaci o viskozitní struktuře ledových měsíců?

Cílem této práce je posoudit, co lze z pozorovatelné relaxace topografie říct o viskozitě materiálu pod povrchem. Nejprve analyticky a numericky zkoumáme vliv různých parametrů na relaxaci. Relaxaci modelujeme ve spektrální oblasti, takže získané relaxační křivky nejsou vztaženy ke konkrétní topografii a mohou být aplikovány na libovolná topografická data. Za účelem posouzení citlivosti relaxace topografie na průběh viskozity s hloubkou formulujeme obrácenou úlohu na syntetických datech. Pro reálná data hledáme obrácenou úlohou průběh viskozity v ledové vrstvě na měsíci Europa. Na závěr práce diskutujeme možnosti a omezení zvoleného přístupu.

## 2 Ledové měsíce velkých planet

Ledové měsíce jsou měsíce velkých planet Sluneční soustavy – Jupiteru, Saturnu, Uranu a Neptunu, které jsou charakteristické vysokým obsahem vodního ledu ve svém nitru. Mezi ledové měsíce patří například měsíce Jupiteru Europa, Ganymed a Callisto, měsíce Saturnu Titan, Mimas a Enceladus a mnohé další. Průměrné hustoty ledových měsíců jsou velmi nízké, obvykle jsou nižší než  $2000 \text{ kg m}^{-3}$  a jen zřídka dosahují  $3500 \text{ kg m}^{-3}$ . Některé měsíce jsou vnitřně diferencované, takže jejich svrchní vrstvu tvoří prakticky čistý led, v jiných je led promíchán s dalšími horninami. Rozměry ledových měsíců jsou velmi proměnlivé, od průměru několika desítek kilometrů až po průměr 5262 km v případě měsíce Ganymedu, největšího měsíce ve Sluneční soustavě. Ve velkých měsících se led ve větších hloubkách pravděpodobně vyskytuje ve vysokotlakých modifikacích. V některých měsících je zřejmě přítomna také kapalná voda ve formě podpovrchového oceánu.

Vzhledem k teplotním podmínkám panujícím ve vzdálených oblastech Sluneční soustavy bychom předpokládali, že ledové měsíce budou dávno vychladlé a neměnné jako náš Měsíc. Některé ledové měsíce tuto představu splňují a jsou Měsíci podobné svým povrchem pokrytým impaktními krátery, viz obrázek 1. (Všechny obrázky v této kapitole jsou převzaty z <http://www.jpl.nasa.gov>.) Jiné jeví překvapivou aktivitu — ačkoliv byly kdysi bombardovány dopadajícími asteroidy stejně jako Měsíc, impaktní krátery z jejich povrchu prakticky zmizely. Mizení kráterů lze přičítat pozvolné relaxaci topografie a v některých případech také obnovování povrchu. Na povrchu aktivních měsíců pak najdeme namísto kráterů jen jejich zpoštělé obrysy a na jiných místech praskliny připomínající pozemské oceánské hřbety nebo jen rozlámání a nepravidelný povrch, viz obrázky 2 až 4.

Pozorovaná aktivita některých měsíců ukazuje na procesy probíhající v jejich nitru — na zahřívání materiálu a v některých případech na konvekci. Zdrojem energie způsobující zahřátí materiálu a případně pohánějící konvekci je pravděpodobně slabá síla deformující měsíc a následná disipace energie třením. Alternativním zdrojem energie může být radioaktivní rozpad, který zřejmě hrál významnější roli v počátečních fázích evoluce měsíců. Studium zdrojů energie a vysvětlení pozorované aktivity některých ledových měsíců ale není předmětem této práce. V této práci se zaměřujeme na jeden z projevů aktivity — relaxaci topografie — a její souvislost s reologickými parametry materiálu ledového měsíce. Zkoumáme možnost využití pozorovatelných deformací povrchu ledových měsíců pro odhad reologických parametrů jejich svrchní ledové vrstvy, speciálně pro odhad průběhu viskozity s hloubkou. Abychom mohli porovnat námi určené hodnoty viskozity s hodnotami používanými nebo vypočtenými v jiných studiích, budeme používat rozměry a další parametry modelu odpovídající konkrétním ledovým měsícům. Přednostně se budeme zabývat měsíci Enceladem a Europou, jakožto příklady aktivních měsíců, jejichž vnitřní stavba a evoluce je předmětem četných prací. Základní údaje o Enceladu a Europě jsou uvedeny v tabulce 1.

Tabulka 1: Parametry měsíců [1, 8]

	poloměr $r$ (km)	střední hustota $\bar{\rho}$ (kg m <sup>3</sup> )	gravitační zrychlení na povrchu $g$ (m s <sup>-2</sup> )
Enceladus	252	1610	0,113
Europa	1565	3010	1,32

## Europa

Měsíc Europa patří mezi velké ledové měsíce. Na základě jeho momentu setrvačnosti a střední hustoty lze usoudit, že je diferencovaný na vnitřní převážně železné jádro, vnější silikátové jádro a ledový plášť. Ledový plášť je pravděpodobně oddělen od silikátového jádra vrstvou kapalné vody – podpovrchovým oceánem [1]. Hypotéza existence podpovrchového oceánu je podpořena měřeními magnetického pole v okolí Europy. Kromě silného magnetického pole Jupiteru bylo naměřeno i indukované magnetické pole, jež lze vysvětlit jako odezvu podpovrchového oceánu z vodivého materiálu [2]. Měsíc Europa je velmi zajímavý z hlediska astrobiologie – pokud by pod jeho svrchní ledovou vrstvou skutečně byl oceán, dotýkal by se přímo silikátového jádra. Byly by tím splněny tři základní podmínky pro vznik mikrobiálního života: přítomnost vody a uhlíkatých sloučenin a zdroj energie.

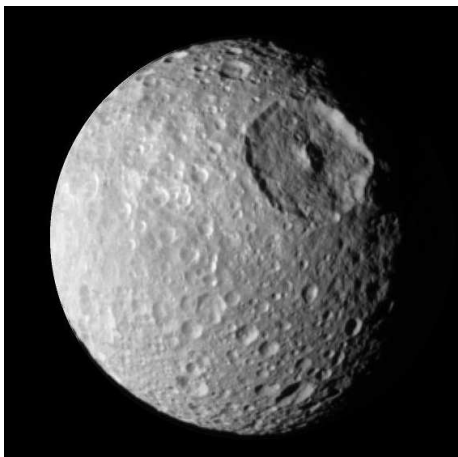
Povrch Europy se pravděpodobně stále obnovuje a podle statistiky četnosti kráterů se odhad stáří povrchu pohybuje přibližně mezi 30 až 70 My [3]. Na povrchu bylo identifikováno méně než 30 kráterů o průměru 20 km a větším. Modelováním vzniku těchto kráterů byla tloušťka ledové vrstvy na Europě odhadnuta na 10 až 15 km [4]. G. Tobie [1] odhaduje na základě modelování konvekce a slapového zahřívání tloušťku ledové vrstvy na přibližně 20 až 25 km, přičemž ve spodních části probíhá konvekce a svrchních 35 až 50% ledové vrstvy je v konduktivním režimu.

## Enceladus

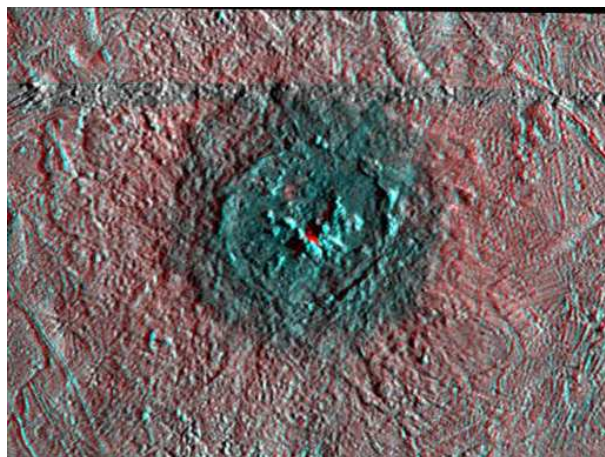
Měsíc Enceladus je pozoruhodný svojí dichotomií. Zatímco oblast u severního pólu Enceladu je velmi chladná (teplota povrchu je přibližně 70 K) a hustě pokrytá impaktními krátery, jižní pól je výrazně teplejší a má hladký povrch s několika paralelními prasklinami (obrázky 5, 6, 7). Nad jižním pólem byla navíc pozorována atmosféra tvořená pravděpodobně vodní párou; jejím zdrojem by mohl být teplejší materiál odhalený v prasklinách (obrázek 8). Zdrojem energie způsobující aktivitu v oblasti jižního pólu je pravděpodobně slapové zahřívání, ale prozatím není jasné, proč je aktivita soustředěna jen u jižního pólu. Nejasnosti jsou stále ohledně vnitřní diferenciace Enceladu. Tvar měsíce je nejlépe ve shodě s homogenním vnitřkem [5], naproti tomu aktivní oblast jižního pólu implikuje vnitřní diferenciaci na silikátové jádro a ledový plášť. V souvislosti s prasklinami a atmosférou, která je nad nimi pozorovatelná, se dokonce uvažuje o kapalné vodě pod ledovou vrstvou [6].

Stáří povrchu určené ze statistiky četnosti kráterů se liší pro různé typy povrchů na Enceladu. Stáří oblastí hustě pokrytých krátery je 1 až 4 Gy. Hladké oblasti jsou naopak velmi mladé, odhad jejich stáří je 10 až 400 My pro nejmladší povrch v okolí prasklin na jižním pólu a maximálně 2 Gy pro relativně hladké oblasti okolo rovníku [7]. Krátery v rovníkových a ve středních šířkách jsou v různé míře relaxované.





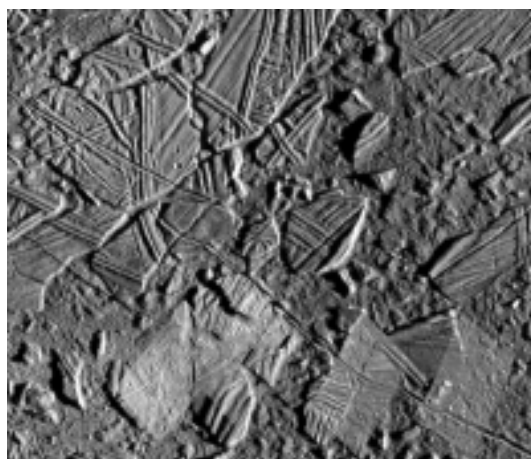
Obrázek 1: *Mimas* – kráter *Herschel*  
*S* průměrem 140 km a hloubkou přes 10 km je kráter *Herschel* nejvýraznějším povrchovým útvarem na měsíci *Mimas*. Stejně jako ostatní krátery na tomto měsíci je zřejmě zachován ve tvaru, jaký nabyl krátce po svém vzniku.



Obrázek 2: *Europa* – kráter *Pwyll*  
*Kráter Pwyll* je příkladem silně relaxovaného kráteru. Jeho průměr je přibližně 26 km, ale jeho obvodový val je vysoký sotva 300 metrů. Při použití červeného a modrého filtru (na pravé a levé oko) se obrázek jeví trojdimenzionální.

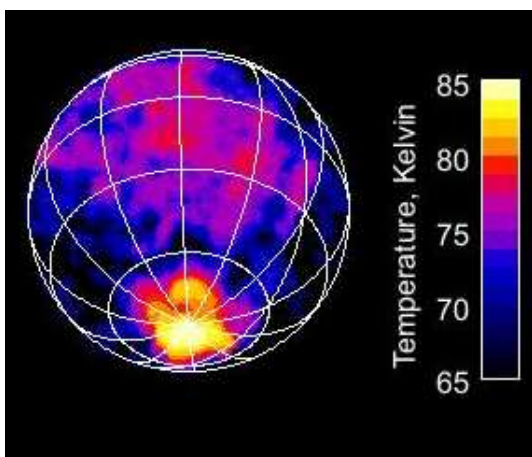


Obrázek 3: *Europa*  
 Složitě zvrásněný povrch měsíce *Europa* ukazuje, že byl mnohokrát zdeformován silami, jejichž zdroj je pravděpodobně v nitru měsíce. Dvojitý hřbet dominující obrázku je přibližně 2,6 km široký a 300 metrů vysoký.

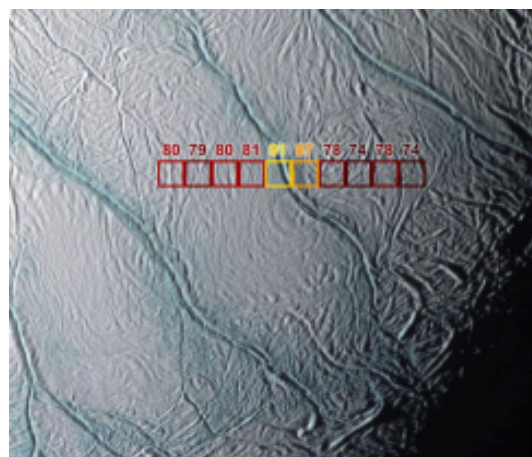


Obrázek 4: *Europa* – chaotický terén  
 V této oblasti lze vidět nepravidelné ledové kry vylámané z ledové kůry *Europy*, které svědčí o nedávném obnovení povrchu. Kry se vzájemně překrývají a jsou znovu srostlé do kompaktní ledové vrstvy.

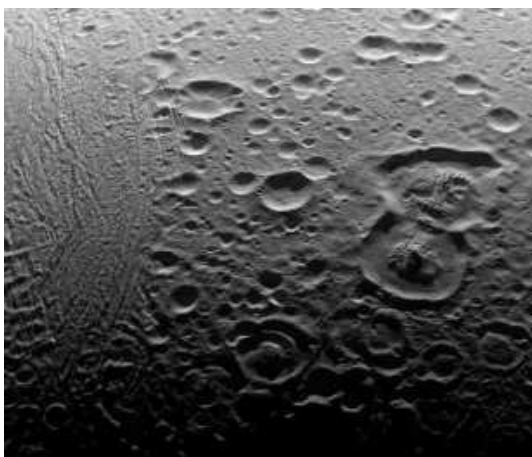




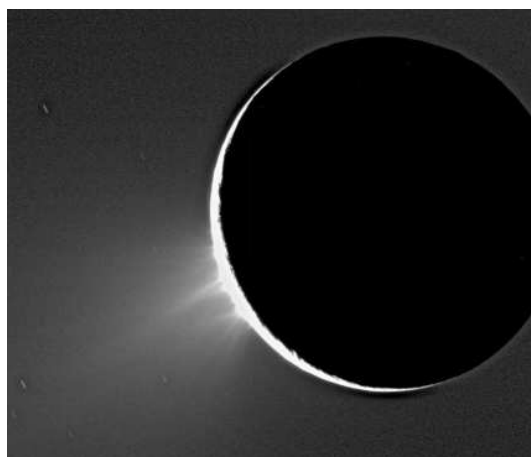
Obrázek 5: *Enceladus* – teplota  
 Mapa ukazuje teplotu na straně Enceladu právě přivracené ke Slunci. V rovníkové oblasti přibližně ve středu snímku dopadají sluneční paprsky nejvíce — pozorovaná teplota je kolem 75 K. V okolí jižního pólu teplota přesahuje 80 K. Vysvětlení takto anomálně vysoké teploty je nutno hledat ve vnitřní aktivitě měsíce.



Obrázek 6: *Enceladus* – jižní pól  
 Výrazná soustava prasklin, která se nachází v oblasti jižního pólu Enceladu. V okolí prasklin teplota dosahuje 90 K, a přímo v nich ještě o desítky stupňů více. Pravděpodobně v nich vystupuje na povrch materiál z hlubších vrstev ledového pláště Enceladu. Namodralá barva svědčí o různé struktuře ledu v prasklinách a v jejich okolí.



Obrázek 7: *Enceladus* – krátery  
 Krátery na Enceladu jsou v různé míře relaxované. V pravé dolní části obrázku vidíme velké silně relaxované krátery s vyklenutým dnem. Ve střední části obrázku je skupina méně relaxovaných kulovitých krátery. Vlevo začíná rozsáhlá oblast bez kráterů.



Obrázek 8: Gejzír vodní páry  
 Oblast nad jižním pólem Enceladu podsvícená slunečním světlem. Ve vhodném osvětlení je jasně vidět oblak jemné páry unikající pravděpodobně z prasklin.

## 3 Matematický model

### 3.1 Fyzikální předpoklady

Pro studium relaxace topografie aproximujeme měsíc sféricky symetrickým tělesem, které je vnitřně diferencované a jehož vnější vrstvu tvoří vodní led. Jako modelovanou oblast uvažujeme kulovou slupku představující tuto vnější ledovou vrstvu. Topografii v našem modelu aproximujeme plošnou hustotou, která může být libovolně rozložená po povrchu. Gravitační účinek topografie zanedbáváme a materiál považujeme za nestlačitelný. Předpokládáme, že vektor gravitačního zrychlení má na celém povrchu tělesa konstantní velikost a radiální směr. Vzhledem k pozvolnému charakteru relaxace topografie zanedbáváme setrvačnou sílu působící na materiál v průběhu deformace. V celé práci předpokládáme malé deformace materiálu.

Zajímavým problémem je volba vhodného popisu materiálu — v případě ledových měsíců tedy reologie ledu. Ta je obecně nelineární a při deformaci ledu se uplatňuje řada mechanismů. Různé mechanismy dominují v různých podmínkách — teplotě, napětí a dalších. Hranice malých měřených napětí dostupných při laboratorních experimentech je přibližně  $10^{-2}$  MPa a pro nižší napětí vychází extrapolací lineární závislost deformace na napětí [1, 9]. Relaxaci topografie považujeme za velmi pomalý proces a jako první přiblížení pro daný problém jsme zvolili lineární popis.

Pro zátěž působící po určitou dobu  $t_z$  můžeme odhadnout vhodný materiálový popis na základě relaxačního času, definovaného jako poměr viskozity  $\eta$  a modulu torze  $\mu$ . Pro  $t_z \gg \eta/\mu$ , je vhodný viskózní popis. Pro  $t_z$  srovnatelné s tímto poměrem není už viskózní model dostačující a je potřeba použít viskoelastický model. Pro  $t_z \ll \eta/\mu$  je vhodnou volbou elastická reologie. V případě relaxující topografie působí zátěž dlouhodobě a uplatní se tedy převážně viskózní deformace. Pro led se poměr  $\eta/\mu$  pohybuje v širokém rozmezí od dnů po miliardy let. Abychom mohli posoudit vhodnost viskózní resp. viskoelastické reologie, studovali jsme relaxaci při použití obou těchto modelů materiálu. Za konkrétní reologické modely jsme zvolili newtonovskou kapalinu pro viskózní případ a maxwellovské těleso pro viskoelastický případ.

### 3.2 Rovnice pro viskózní a viskoelastický materiál

#### Viskózní materiál

Pro popis deformace viskózního materiálu používáme eulerovskou formulaci a proměnné rychlosti ( $\vec{v}$ ) a napětí ( $\boldsymbol{\sigma}$ ). Pro rychlost  $\vec{v}$  plyne ze zákona zachování hmoty rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0, \quad (1)$$

kde  $\rho$  je hustota kontinua. Pro proměnné  $\vec{v}$  a  $\boldsymbol{\sigma}$  a vnější objemovou sílu  $\vec{f}$  plyne ze zákona zachování hybnosti pohybová rovnice pro kontinuum

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}. \quad (2)$$

Pro nestlačitelný materiál a pokud je setrvačná síla  $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$  na pravé straně rovnice (2) zanedbatelná vzhledem k objemové síle, redukují se rovnice kontinuity a pohybová

rovnice na tvar

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{v} &= 0, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} &= 0,\end{aligned}\tag{3}$$

který používáme v dalších výpočtech. Dále uvažujeme reologickou rovnici pro nestlačitelnou newtonovskou kapalinu

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \eta(\nabla\vec{v} + \nabla^T\vec{v}),\tag{5}$$

kde  $p$  je tlak. Hraniční podmínku na spodním rozhraní volíme podle předpokládaného charakteru tohoto rozhraní. Pokud předpokládáme, že se pod vrstvou ledu nachází silikátové jádro s výrazně vyšší viskozitou než je viskozita ledu, předepisujeme nulovou rychlost

$$\vec{v} = 0.\tag{6}$$

Pokud jde o rozhraní pevné látky a kapaliny předepisujeme volný prokluz a nulovou rychlost v radiálním směru

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{e}_r - ((\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r &= 0, \\ \vec{v} \cdot \vec{e}_r &= 0,\end{aligned}\tag{7}$$

kde  $\vec{e}_r$  je jednotkový radiální vektor. Hraniční podmínka na svrchním rozhraní vyplývá z rovnováhy sil na tomto rozhraní:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \vec{e}_r = \rho\vec{g} \left( h(0) + \int_0^t \vec{v}(a) \cdot \vec{e}_r da \right),\tag{8}$$

kde  $h(0)$  je výška topografie v čase nula, tedy při jejím vzniku, a  $\vec{g}$  je vektor gravitačního zrychlení. Veličinu  $h(0) + \int_0^t \vec{v}(a) \cdot \vec{e}_r da$  budeme dále označovat jako topografii v čase  $t$

$$h(t) = h(0) + \int_0^t \vec{v}(a) \cdot \vec{e}_r da.\tag{9}$$

### Viskoelastický materiál

Rovnice pro viskoelastický materiál jsou formulovány v proměnné posunutí ( $\vec{u}$ ) a napětí ( $\boldsymbol{\sigma}$ ). Používáme eulerovskou formulaci. Zatímco pohybová rovnice pro zanedbatelnou setrvačnou sílu (4) v těchto proměnných tvar nezmění,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} = 0,\tag{10}$$

rovnice kontinuity pro nestlačitelný materiál (3) přejde na tvar

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0.\tag{11}$$

Pokud tenzor napětí rozložíme na stopovou část  $-p\mathbf{I}$  a deviatorickou část  $\mathbf{D}$ ,

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{D},\tag{12}$$

můžeme reologickou rovnici pro maxwellovské těleso zapsat ve tvaru [10]

$$\mathbf{D}(t) = \mu(\nabla\vec{u}(t) + \nabla^T\vec{u}(t)) - \int_0^t \frac{\mu}{\eta} \mathbf{D}(a) da, \quad (13)$$

přičemž v čase  $t < 0$  předpokládáme, že těleso je v hydrostatické rovnováze a deviatorické napětí je v něm nulové. Hraníční podmínku na spodním rozhraní volíme podle charakteru tohoto rozhraní. Pokud předpokládáme, že modul torze má pod modelovanou vrstvou výrazně vyšší hodnotu než v modelované vrstvě, předepisujeme nulové posunutí

$$\vec{u} = 0. \quad (14)$$

Podmínka nulového posunutí je vhodná, když se jedná o rozhraní mezi ledovou vrstvou a silikátovým jádrem. V případě rozhraní mezi pevnou látkou a kapalinou předpokládáme, že skok hustoty na rozhraní je zanedbatelný, což je dobře splněno pro rozhraní mezi ledem a vodou. Za tohoto předpokladu předepisujeme nulovou sílu

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{e}_r = 0. \quad (15)$$

Hraníční podmínka na svrchním rozhraní je stejná jako ve viskózním případě, ale topografii v čase  $t$  tentokrát nehledáme integrací rychlosti, ale počítáme ji přímo z posunutí,  $h(t) = h(0) + \vec{u} \cdot \vec{e}_r$ ,

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{e}_r = \rho \vec{g} h(t). \quad (16)$$

### 3.3 Škálovací vztahy

Z řešených rovnic lze odvodit vztahy popisující škálování hledaných proměnných podle některých parametrů modelu. Za tímto účelem formulujeme řešené rovnice bezrozměrně.

#### Viskózní materiál

Nejprve se podívejme na soustavu rovnic pro relaxaci viskózního materiálu (3)-(8) s nulovou objemovou silou  $\vec{f} = 0$ . Zavedme bezrozměrné veličiny  $t'$ ,  $r'$ ,  $\vec{u}'$ ,  $h'(0)$ ,  $\vec{v}'$  a  $\boldsymbol{\sigma}'$  splňující následující vztahy

$$\begin{aligned} t &= \frac{\tilde{\eta}}{\rho g r_0} t', \\ r &= r_0 r', \\ \vec{u} &= r_0 \vec{u}', \\ h(0) &= r_0 h'(0), \\ \vec{v} &= \frac{r_0^2 \rho g}{\eta} \vec{u}', \\ \boldsymbol{\sigma} &= \rho g r_0 \boldsymbol{\sigma}', \end{aligned} \quad (17)$$

kde  $r_0$  je veličina o rozměru délky a pro viskozitu platí  $\eta(r) = \tilde{\eta} \eta_0(r')$ . Rovnice (3)-(5) lze za pomoci těchto veličin zapsat ve tvaru

$$\nabla' \cdot \vec{v}' = 0, \quad (18)$$

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{\sigma}' = 0, \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\sigma}' - \frac{1}{3} Tr(\boldsymbol{\sigma}') \mathbf{1} = \eta_0 (\nabla' \vec{v}' + \nabla'^T \vec{v}'). \quad (20)$$

Hraniční podmínka na spodním rozhraní má v případě rozhraní s tuhým jádrem (7) v bezrozměrné formulaci tvar

$$\vec{v}' = 0 \quad (21)$$

a pro případ rozhraní pevné látky a kapaliny (7) má tvar

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}' \cdot \vec{e}_r - ((\boldsymbol{\sigma}' \cdot \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r &= 0, \\ \vec{v}' \cdot \vec{e}_r &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Hraniční podmínka na svrchním rozhraní je v bezrozměrné formulaci

$$\boldsymbol{\sigma}'(t') \cdot \vec{e}_r = -\vec{e}_r \left( h'(0) + \int_0^{t'} \vec{v}'(a) \cdot \vec{e}_r da \right). \quad (23)$$

V těchto rovnicích vystupuje jako parametr pouze průběh viskozity s hloubkou  $\eta_0(r)$ . Závislost relaxace na ostatních parametrech je vyjádřena ve škálovacích vztazích (17). Máme-li dva různé modely A a B se shodným průběhem viskozity  $\eta_0(r')$ , pak ze škálovacích vztahů vyplývá

$$\frac{h_j^A(t)}{h_j^A(0)} = \frac{h_j^B \left( \frac{\tilde{\eta}^B}{\rho^B g^B r_0^B} \frac{\rho^A g^A r_0^A}{\tilde{\eta}^A} t \right)}{h_j^B(0)}. \quad (24)$$

### Viskoelastický materiál

Obdobně převedeme na bezrozměrný tvar soustavu rovnic pro relaxaci pro viskoelastický materiál (11)-(16) s nulovou objemovou silou  $\vec{f} = 0$ . Následujícími vztahy definujeme bezrozměrné veličiny  $t'$ ,  $r'$ ,  $\vec{u}'$ ,  $h'(0)$ ,  $\vec{v}'$ ,  $\mathbf{D}'$  a  $\boldsymbol{\sigma}'$ .

$$\begin{aligned} t &= \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\mu}} t', \\ r &= r_0 r', \\ \vec{u} &= r_0 \vec{u}', \\ h(0) &= r_0 h'(0), \\ \boldsymbol{\sigma} &= \rho g r_0 \boldsymbol{\sigma}', \\ \mathbf{D} &= \rho g r_0 \mathbf{D}', \end{aligned} \quad (25)$$

kde  $r_0$  je veličina o rozměru délky, pro viskozitu platí  $\eta(r) = \tilde{\eta} \eta_0(r')$  a pro modul torze platí  $\mu(r) = \tilde{\mu} \mu_0(r')$ . Rovnice (11)-(13) lze za pomoci těchto veličin zapsat ve tvaru

$$\nabla' \cdot \vec{u}' = 0, \quad (26)$$

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{\sigma}' = 0, \quad (27)$$

$$\mathbf{D}'(t') = \frac{\mu}{\rho g r_0} (\nabla \vec{u}'(t')) + \nabla^T \vec{u}'(t') - \int_0^{t'} \frac{\mu_0}{\eta_0} \mathbf{D}'(a) da. \quad (28)$$

Hraniční podmínka na spodním rozhraní v bezrozměrné formulaci je v případě rozhraní s tuhým jádrem (14)

$$\vec{u}' = 0 \quad (29)$$

a v případě rozhraní mezi pevnou látkou a kapalinou (15)

$$\boldsymbol{\sigma}' \cdot \vec{e}_r = 0. \quad (30)$$

A konečně hraniční podmínku na svrchním rozhraní (16) lze zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma}' \cdot \vec{e}_r = -\vec{e}_r (h'(0) + \vec{u}' \cdot \vec{e}_r). \quad (31)$$

Ve srovnání s viskózním případem vystupuje v bezrozměrné formulaci řešených rovnic více parametrů, jejichž vliv nevyplývá ze škálovacích vztahů (25). Kromě průběhu viskozity s hloubkou  $\eta_0(r')$  vystupuje v rovnicích také průběh modulu torze s hloubkou  $\mu(r')$  a parametr  $(\rho g r_0)$ . Pro speciální případ dvou modelů A a B se shodným průběhem  $\mu(r)$  a  $\eta_0(r)$  a parametrem  $(\rho g r_0)$  platí

$$\frac{h_j^A(t)}{h_j^A(0)} = \frac{h_j^B\left(\frac{\bar{\eta}^B}{\eta^A} t\right)}{h_j^B(0)}. \quad (32)$$

### 3.4 Sférické harmonické funkce

Rovnice pro relaxaci viskózního materiálu a pro relaxaci viskoelastického materiálu budeme řešit na kulové slupce. Budeme používat sférické souřadnice, tedy vzdálenost od středu  $r \in \langle r_{\text{bot}}, r_{\text{top}} \rangle$ , šířku  $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$  a délku  $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ . Veličiny v řešených rovnicích vyjádříme formou rozvoju do zobecněných sférických harmonických funkcí zavedených v [11, 12, 13].

Skalární funkci  $f(r, \theta, \phi)$  lze za poměrně obecných podmínek [11] rozložit do úplné ortonormální báze sférických harmonických funkcí  $Y_{jm}(\theta, \phi)$

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j f_{jm}(r) Y_{jm}(\theta, \phi), \quad (33)$$

kde funkce  $f_{jm}(r)$  nazýváme koeficienty rozvoje. Skalární sférické harmonické funkce jsou definovány jako

$$\begin{aligned} Y_{jm}(\theta, \phi) &= (-1)^m \sqrt{\frac{(2j+1)(j-m)!}{4\pi(j+m)!}} P_j^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad \text{pro } m \geq 0, \\ Y_{jm}(\theta, \phi) &= (-1)^m Y_{j|m|}^*(\theta, \phi) \quad \text{pro } m < 0, \end{aligned} \quad (34)$$

kde  $P_j^m(\cos \theta)$  jsou přidružené Legendreovy funkce a symbol \* znamená komplexní sdružení, takže je splněna podmínka ortonormality

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{j_1 m_1}(\theta, \phi) Y_{j_2 m_2}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\phi d\theta = \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2}, \quad (35)$$

kde  $\delta$  je Kroneckerovo delta. Analogicky k rovnici (33) lze vektorové a tenzorové veličiny rozložit do vektorových a tenzorových sférických harmonických funkcí.

Pomocí kanonické eukleidovské báze  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  sestrojíme cyklickou vektorovou bázi  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_{-1}, \vec{e}_0\}$

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{-1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + i\vec{e}_y), \\ \vec{e}_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - i\vec{e}_y), \\ \vec{e}_0 &= \vec{e}_z, \end{aligned} \quad (36)$$

a definujeme vektorové sférické harmonické funkce  $\vec{Y}_{jm}^l(\theta, \phi)$ ,

$$\vec{Y}_{jm}^l(\theta, \phi) = \sum_{u=-1}^1 \sum_{v=-l}^l C_{lv1u}^{jm} Y_{lv}(\theta, \phi) \vec{e}_u, \quad (37)$$

kde  $C_{lv1u}^{jm}$  jsou Clebsh-Gordanovy koeficienty zavedené v [13]. Dále sestrojíme komplexní tenzorovou bázi  $\{\mathbf{e}_{kw}\}$ ,

$$\mathbf{e}_{kw} = \sum_{u=-1}^1 \sum_{v=-1}^1 C_{1u1v}^{kw} \vec{e}_u \vec{e}_v, \quad (38)$$

a definujeme tenzorové sférické harmonické funkce  $\mathbf{Y}_{jm}^{lk}(\theta, \phi)$ ,

$$\mathbf{Y}_{jm}^{lk}(\theta, \phi) = \sum_{u=-l}^l \sum_{v=-k}^k C_{lukv}^{jm} Y_{lu}(\theta, \phi) \mathbf{e}_{kv}. \quad (39)$$

Vektorovou funkci  $\vec{f}(r, \theta, \phi)$ , resp. tenzorovou funkci  $\mathbf{f}(r, \theta, \phi)$ , lze potom za poměrně obecných podmínek rozložit do řady

$$\vec{f}(r, \theta, \phi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{l=|j-1|}^{j+1} f_{jm}^l(r) \vec{Y}_{jm}^l(\theta, \phi), \quad (40)$$

respektive

$$\mathbf{f}(r, \theta, \phi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{l=|j-k|}^{j+k} \sum_{k=0}^2 f_{jm}^{lk}(r) \mathbf{Y}_{jm}^{lk}(\theta, \phi). \quad (41)$$

Skalární funkce  $f_{jm}^l(r)$ , resp.  $f_{jm}^{lk}(r)$ , nazýváme koeficienty rozvoje vektorové funkce  $\vec{f}(r, \theta, \phi)$ , resp. tenzorové funkce  $\mathbf{f}(r, \theta, \phi)$ , do sférických harmonických funkcí.

Když do soustavy parciálních diferenciálních rovnic (3)–(8), resp. (11)–(16), v proměnných  $r$ ,  $\theta$  a  $\phi$  dosadíme všechny veličiny ve tvaru sférických harmonických rozvoju, získáme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic v proměnné  $r$ . Pokud viskozita a modul torze závisí pouze na  $r$  (zanedbáváme laterální změny reologických parametrů), můžeme tuto soustavu dále rozložit podle  $j$  a  $m$  na vzájemně nezávislé soustavy rovnic, z nichž každá obsahuje pouze sférické harmonické koeficienty příslušející danému stupni  $j$  a řádu  $m$ . Při sestavování diferenciálních rovnic pro koeficienty rozvoje jednotlivých veličin se uplatní některé vlastnosti sférických harmonických funkcí:

1) V rozvoji osově symetrické funkce, tj. například  $f = f(r, \theta)$ , se vyskytují pouze členy s  $m = 0$ .

2) Index  $k = 0, 1, 2$  u tenzorové báze funkce  $\mathbf{Y}_{jm}^{lk}(\theta, \phi)$  odpovídá rozdělení libovolného tenzoru  $\mathbf{T}$  na (po řadě) stopovou, antisymetrickou a deviatorickou část

$$T_{ij} = T_{ii} \delta_{ij} + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) + \left[ \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) - T_{ii} \delta_{ij} \right]. \quad (42)$$

Pokud tedy v reologické rovnici vystupuje symetrický tenzor  $(\nabla \vec{v} + \nabla^T \vec{v})$ , vyjádříme tento člen pouze pomocí koeficientů s  $k = 2$ .

3) Vektorová báze funkce  $\vec{Y}_{jm}^j$  je toroidální, tj.  $\nabla \cdot \vec{Y}_{jm}^j = 0$  a  $\vec{Y}_{jm}^j \cdot \vec{e}_r = 0$  pro všechna přípustná  $j, m$ . Báze funkce  $\vec{Y}_{jm}^{j\pm 1}$  jsou sferoidální, tj.  $(\nabla \times \vec{Y}_{jm}^{j\pm 1}) \cdot \vec{e}_r = 0$ . Rozvojem vektoru do sférických harmonických funkcí dostaneme tedy přímo rozklad



tohoto vektoru na sferoidální a toroidální část. Jelikož zdrojovými členy v našich rovnicích jsou gravitační síly, které mají nulovou toroidální složku ( $\nabla \times \vec{g} = 0$ ), a viskozita a modul torze závisí pouze na  $r$ , lze ukázat [14], že toroidální část řešení rovnic (3)-(8), resp. (11)-(16), bude identicky rovna nule ( $v_{jm}^j = \sigma_{jm}^{j\pm 1} = 0$ ).

### Viskózní materiál

Rozvineme-li rovnice popisující relaxaci topografie pro viskózní materiál do sférických harmonických funkcí, získáme rovnice pro koeficienty rozvoje jednotlivých veličin. Rovnice kontinuity (3) přejde pro každé  $j$ ,  $m$  na rovnici pro koeficienty rozvoje rychlosti  $v_{jm}^{j-1}(r)$  a  $v_{jm}^{j+1}(r)$

$$\sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left( \frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) v_{jm}^{j-1}(r) - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \left( \frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) v_{jm}^{j+1}(r) = 0. \quad (43)$$

Koeficienty rozvoje rychlosti jsou stejně jako koeficienty rozvoje dalších veličin funkcemi  $r$  a  $t$ . Pro přehlednost čas v argumentu neuvádíme, jestliže to není nutné pro platnost vzorce. Vektorová pohybová rovnice (4) sestává ze tří skalárních rovnic, nicméně pro případ bez laterálních variací viskozity je toroidální část napětí nulová. Pro každé  $j$  a  $m$  tedy řešíme dvě skalární rovnice pro koeficienty rozvoje tenzoru napětí  $\sigma_{jm}^{j,0}(r)$ ,  $\sigma_{jm}^{j,2}(r)$ ,  $\sigma_{jm}^{j-2,2}(r)$  a  $\sigma_{jm}^{j+2,2}(r)$  a vnější objemové síly  $f_{jm}^{j-1}(r)$  a  $f_{jm}^{j+1}(r)$

$$\begin{aligned} -\sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}} \left( \frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) \sigma_{jm}^{j,0}(r) + \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left( \frac{d}{dr} - \frac{j-2}{r} \right) \sigma_{jm}^{j-2,2}(r) - \\ - \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left( \frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) \sigma_{jm}^{j,2}(r) = -f_{jm}^{j-1}(r), \\ \sqrt{\frac{j+1}{3(2j+1)}} \left( \frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) \sigma_{jm}^{j,0}(r) + \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+3)(2j+1)}} \left( \frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) \sigma_{jm}^{j,2}(r) - \\ - \sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \left( \frac{d}{dr} + \frac{j+3}{r} \right) \sigma_{jm}^{j+2,2}(r) = -f_{jm}^{j+1}(r). \end{aligned} \quad (44)$$

Stejně tak reologická rovnice (5) přejde pro každé  $j$ ,  $m$  na tři skalární rovnice

$$\begin{aligned} \sigma_{jm}^{j+2,2}(r) + 2\eta(r) \sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \left( \frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r} \right) v_{jm}^{j+1}(r) = 0, \\ \sigma_{jm}^{j-2,2}(r) - 2\eta(r) \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left( \frac{d}{dr} + \frac{j}{r} \right) v_{jm}^{j-1}(r) = 0, \\ \sigma_{jm}^{j,2}(r) + 2\eta(r) \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left( \frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) v_{jm}^{j-1}(r) - \\ - 2\eta(r) \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+3)(2j+1)}} \left( \frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) v_{jm}^{j+1}(r) = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Hraniční podmínka na spodním rozhraní, tedy pro  $r = r_{\text{bot}}$ , pro případ tuhého jádra (6) má pro každé  $j, m$  tvar

$$\begin{aligned} v_{jm}^{j-1}(r_{\text{bot}}) &= 0, \\ v_{jm}^{j+1}(r_{\text{bot}}) &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

a hraniční podmínka pro případ rozhraní pevné látky a kapaliny (7) má pro každé  $j, m$  tvar

$$\begin{aligned} \sqrt{j} v_{jm}^{j-1}(r_{\text{bot}}) - \sqrt{j+1} v_{jm}^{j+1}(r_{\text{bot}}) &= 0, \\ \frac{j+1}{2j+1} \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \sigma_{jm}^{j-2,2}(r_{\text{bot}}) - \frac{1}{2j+1} \sqrt{\frac{j(j+1)(j+2)}{2j+3}} \sigma_{jm}^{j+2,2}(r_{\text{bot}}) - \\ - \sqrt{\frac{3(j+1)}{2(2j-1)(2j+1)(2j+3)}} \sigma_{jm}^{j,2}(r_{\text{bot}}) &= 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Na svrchním rozhraní, tedy pro  $r = r_{\text{top}}$ , předepisujeme pro každé  $j, m$  podmínku

$$\begin{aligned} \frac{j+1}{2j+1} \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \sigma_{jm}^{j-2,2}(r_{\text{top}}) - \frac{1}{2j+1} \sqrt{\frac{j(j+1)(j+2)}{2j+3}} \sigma_{jm}^{j+2,2}(r_{\text{top}}) - \\ - \sqrt{\frac{3(j+1)}{2(2j-1)(2j+1)(2j+3)}} \sigma_{jm}^{j,2}(r_{\text{top}}) &= 0, \\ \sqrt{\frac{j(j-1)}{(2j+1)(2j-1)}} \sigma_{jm}^{j-2,2}(r_{\text{top}}, t_n) + \sqrt{\frac{(j+1)(j+2)}{(2j+1)(2j+3)}} \sigma_{jm}^{j+2,2}(r_{\text{top}}, t_n) - \\ - \sqrt{\frac{2j(j+1)}{3(2j-1)(2j+3)}} \sigma_{jm}^{j,2}(r_{\text{top}}, t_n) + \frac{-1}{\sqrt{3}} \sigma_{jm}^{j,0}(r_{\text{top}}, t_n) &= h_{jm}(t_n) g_{\text{top}} \rho, \end{aligned} \quad (48)$$

kde

$$h_{jm}(t_n) = h_{jm}(0) + \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_{i=1}^n \left\{ \left( \sqrt{j} v_{jm}^{j-1}(r_{\text{top}}, t_i) - \sqrt{j+1} v_{jm}^{j+1}(r_{\text{top}}, t_i) \right) \Delta t_i \right\}. \quad (49)$$

Časovou integraci v rovnici (8) jsme nahradili sčítáním přes časové kroky  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ .

### Viskoelastický materiál

Pro viskoelastický materiál získáme z pohybové rovnice stejnou sadu rovnic pro koeficienty rozvoje tenzoru napětí a vnější síly jako ve viskózním případě (44). Rovnice kontinuity a hraniční podmínky se oproti rovnicím (43), (47) a (48) změní pouze přechodem na proměnnou posunutí místo rychlosti. Rovnice kontinuity (11) pro jednotlivé koeficienty rozvoje posunutí  $u_{jm}^{j-1}(r)$  a  $u_{jm}^{j+1}(r)$  je tedy

$$\sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left( \frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) u_{jm}^{j-1}(r) - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \left( \frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) u_{jm}^{j+1}(r) = 0. \quad (50)$$

Hraniční podmínka na spodním rozhraní pro případ dvou pevných látek (14) je

$$\begin{aligned} u_{jm}^{j-1}(r_{\text{bot}}) &= 0, \\ u_{jm}^{j+1}(r_{\text{bot}}) &= 0 \end{aligned} \quad (51)$$

a pro případ pevné látky a kapaliny (7) je

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \sigma_{jm}^{j,0}(r_{\text{bot}}) + \sqrt{\frac{j(j-1)}{(2j+1)(2j-1)}} \sigma_{jm}^{j-2,2}(r_{\text{bot}}) + \\ & + \sqrt{\frac{(j+1)(j+2)}{(2j+1)(2j+3)}} \sigma_{jm}^{j+2,2}(r_{\text{bot}}) - \sqrt{\frac{2j(j+1)}{3(2j-1)(2j+3)}} \sigma_{jm}^{j,2}(r_{\text{bot}}) = 0, \\ & \frac{j+1}{2j+1} \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \sigma_{jm}^{j-2,2}(r_{\text{bot}}) - \frac{1}{2j+1} \sqrt{\frac{j(j+1)(j+2)}{2j+3}} \sigma_{jm}^{j+2,2}(r_{\text{bot}}) - \\ & - \sqrt{\frac{3(j+1)}{2(2j-1)(2j+1)(2j+3)}} \sigma_{jm}^{j,2}(r_{\text{bot}}) = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Hraniční podmínka na svrchním rozhraní (16) vyjádřená pomocí koeficientů rozvoje topografie a posunutí se liší od (48) jen ve výrazu pro  $h_{jm}(t_n)$

$$h_{jm}(t_n) = h_{jm}(0) + \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \left( \sqrt{j} u_{jm}^{j-1}(r_{\text{top}}, t_n) - \sqrt{j+1} u_{jm}^{j+1}(r_{\text{top}}, t_n) \right). \quad (53)$$

Jedinou rovnicí, jejíž tvar je pro viskoelastický a viskózní materiál výrazně odlišný, je reologická rovnice. V případě viskoelastické reologie v ní integrujeme deviatorickou část tenzoru napětí, přičemž integraci nahradíme sčítáním přes časové kroky  $\Delta t_i$ :

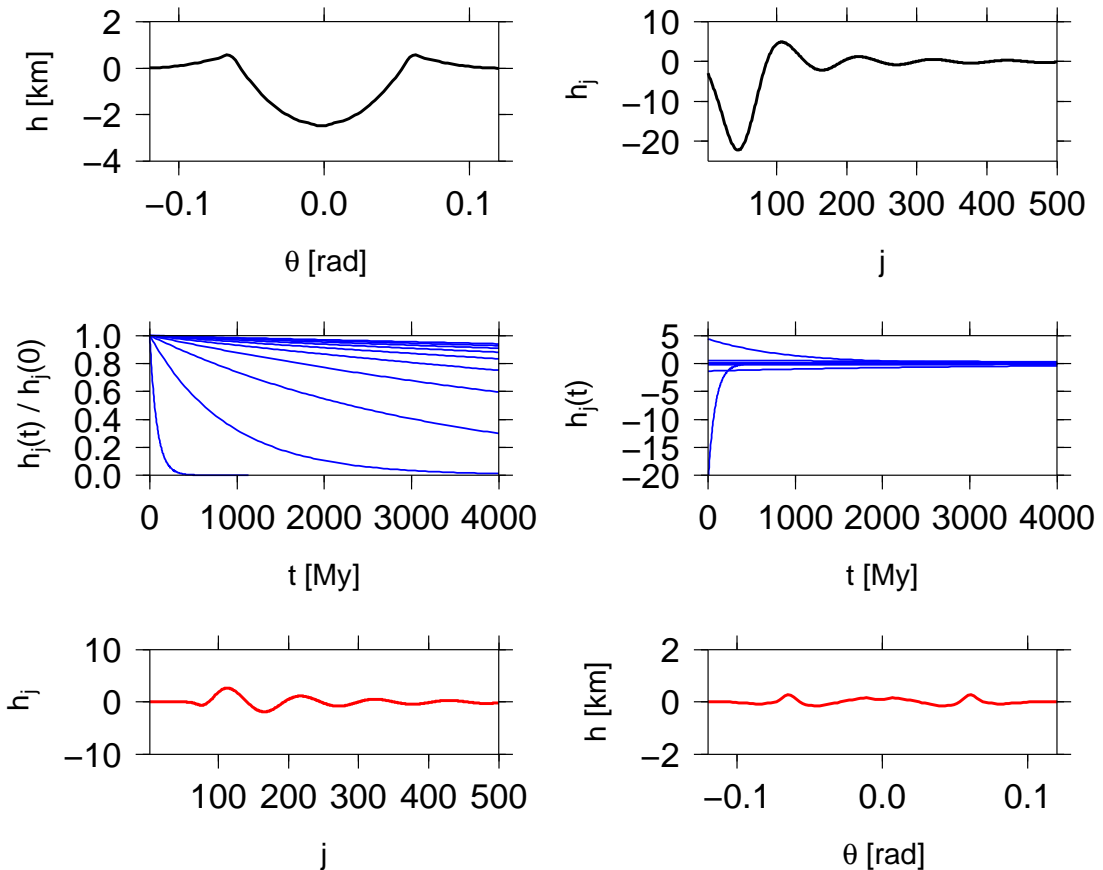
$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{jm}^{j+2,2}(r, t_n) + 2\mu(r) \sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \left( \frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r} \right) u_{jm}^{j+1}(r, t_n) &= \frac{\mu(r)}{\eta(r)} \sum_{i=1}^n \mathbf{D}_{jm}^{j+2,2}(r, t_i) \Delta t_i, \\ \mathbf{D}_{jm}^{j-2,2}(r, t_n) - 2\mu(r) \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left( \frac{d}{dr} + \frac{j}{r} \right) u_{jm}^{j-1}(r, t_n) &= \frac{\mu(r)}{\eta(r)} \sum_{i=1}^n \mathbf{D}_{jm}^{j-2,2}(r, t_i) \Delta t_i, \\ \mathbf{D}_{jm}^{j,2}(r, t_n) + 2\mu(r) \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left( \frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) u_{jm}^{j-1}(r, t_n) - \\ - 2\mu(r) \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+3)(2j+1)}} \left( \frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) u_{jm}^{j+1}(r, t_n) &= \frac{\mu(r)}{\eta(r)} \sum_{i=1}^n \mathbf{D}_{jm}^{j,2}(r, t_i) \Delta t_i. \end{aligned} \quad (54)$$

Odvození vzorců uvedených v této kapitole lze nalézt v [12].

### 3.5 Studium relaxace ve spektrální oblasti

Relaxaci topografie můžeme studovat zadáním konkrétní topografie, geometrie a materiálových parametrů modelu a porovnáváním zrelaxované topografie v různém čase a pro různé modely. Protože nemáme k dispozici dostatečně přesná reálná data, zvolíme obecnější postup nezávislý na konkrétní topografii, jehož výsledky mohou být později aplikovány na reálná topografická data.

V rovnicích pro koeficienty sférického harmonického rozvoje (43)-(48) a (50)-(54) vystupuje vždy pouze jeden stupeň  $j$  a tvar rovnic nezávisí na řádu  $m$ . Díky tomu lze danou topografii rozložit do sférických harmonických funkcí, pro každé  $j$  a  $m$  ji nechat relaxovat zvlášť a na závěr v určitém čase opět složit. Ještě obecněji můžeme studovat průběh relaxace pro každý stupeň  $j$  bez ohledu na danou topografii, kterou můžeme v čase nula zvolit pro jednoduchost jednotkovou na všech stupních. Relaxaci topografie na stupni  $j$  pro daný model pak charakterizuje jedna relaxační křivka, tedy závislost topografie na stupni  $j$  na čase, která je pro dané  $j$  stejná pro všechna  $m$ . Tento postup je názorně popsán v obrázku 9.



Obrázek 9: Příklad spektrálního přístupu – relaxace kráteru

Původní tvar kráteru (vlevo nahoře) rozložíme do sférických harmonických funkcí a získáme jeho spektrum (vpravo nahoře). Relaxační křivky pro jednotlivé stupně  $j$  (vlevo uprostřed) pro daný model vypočteme nezávisle na topografii a pro danou topografii přenásobíme hodnotami  $h_j(0)$  (vpravo uprostřed). Hodnoty takto přenásobených relaxačních křivek v čase  $t$  dávají spektrum kráteru v tomto čase (vlevo dole). Složením spektra získáme tvar relaxovaného kráteru (vpravo dole).

### 3.6 Rotace elementu kontinua

Pro bližší zkoumání deformace kontinua se zaměříme na tenzor  $\nabla^T \vec{u}$ , který charakterizuje změnu polohy dvou blízkých bodů v kontinuu. Jako každý obecný tenzor druhého řádu jej můžeme rozložit na symetrickou a antisymetrickou část. Pracujeme-li pro jednoduhost v kartézské bázi, lze rozklad zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (55)$$

kde symetrický tenzor  $\frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$  představuje vlastní deformaci kontinua. Antisymetrický tenzor  $\frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j - \partial u_j/\partial x_i)$  představuje rotaci elementu kontinua; nazveme jej tenzorem rotace  $\omega$ ,

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (56)$$

Tenzoru rotace můžeme přiřadit axiální vektor  $\vec{\omega}$ ,

$$\vec{\omega} = (\omega_{32}, \omega_{13}, \omega_{21}). \quad (57)$$

Předpokládáme-li osově symetrické pole posunutí, lze rotaci materiálu v daném bodě popsat jediným číslem  $\Omega$  — úhlem otočení v rovině procházející osou symetrie. Velikost  $\Omega$  bude shodná s velikostí vektoru  $\vec{\omega}$  (a zároveň i s průmětem tohoto vektoru do roviny kolmé na osu symetrie), znaménko  $\Omega$  je dáno orientací vektoru  $\vec{\omega}$ .

Pro výpočet  $\Omega$  nejprve vyjádříme koeficienty rozvoje antisymetrické části tenzoru  $\nabla \vec{u}$  do sférických harmonických funkcí [13]

$$[\nabla u_{jm}^{j-1} \vec{Y}_{jm}^{j-1}]^{k=1} = \sqrt{\frac{j+1}{2(2j+1)}} \left( \frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) u_{jm}^{j-1} \mathbf{Y}_{jm}^{j,1}, \quad (58)$$

$$[\nabla u_{jm}^{j+1} \vec{Y}_{jm}^{j+1}]^{k=1} = \sqrt{\frac{j}{2(2j+1)}} \left( \frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) u_{jm}^{j+1} \mathbf{Y}_{jm}^{j,1}. \quad (59)$$

Toroidální část posunutí je pro sféricky symetrickou viskozitu a plošné zatížení nulová a bude tedy nulový i její gradient

$$0 = [\nabla u_{jm}^j \vec{Y}_{jm}^j]^{k=1} = \sqrt{\frac{j}{2(2j+1)}} \left( \frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) u_{jm}^j \mathbf{Y}_{jm}^{j+1,1} + \sqrt{\frac{j+1}{2(2j+1)}} \left( \frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) u_{jm}^j \mathbf{Y}_{jm}^{j-1,1}. \quad (60)$$

Antisymetrická část tenzoru  $\nabla \vec{u}$  v tomto případě obsahuje pouze členy s bázovým tenzorem  $\mathbf{Y}_{jm}^{j,1}$

$$[\nabla \vec{u}]^{k=1} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \left\{ \sqrt{\frac{j+1}{2(2j+1)}} \left( \frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) u_{jm}^{j-1} + \right. \quad (61)$$

$$\left. + \sqrt{\frac{j}{2(2j+1)}} \left( \frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) u_{jm}^{j+1} \right\} \mathbf{Y}_{jm}^{j,1}. \quad (62)$$

Díky antisymetrii platí

$$[\nabla \vec{u}]^{k=1} = -[\nabla^T \vec{u}]^{k=1}, \quad (63)$$

tedy

$$\boldsymbol{\omega} = [\nabla^T \vec{u}]^{k=1} = -[\nabla \vec{u}]^{k=1}. \quad (64)$$

Ve zvoleném bodě v prostoru přejdeme od báze (38) zpět do kartézské báze a vypočteme složky  $\boldsymbol{\omega}$ . Konečně podle rovnice (57) určíme složky vektoru  $\vec{\omega}$  a úhel otočení  $\Omega$ .

## 4 Program

Program používá spektrální metodu ve sférických proměnných  $\theta$  a  $\phi$ , tedy rozvoj všech veličin do sférických harmonických funkcí, jak bylo popsáno v kapitole 3.4. Řešíme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic (43-48), resp. (44-54), v proměnné  $r$ . Obyčejné diferenciální rovnice řešíme metodou posunutých sítí [14], ve které popisujeme sférické těleso  $n$  vrstvami se vzájemnou vzdáleností  $\Delta$ . Na středech těchto vrstev zadáváme koeficienty rozvoje objemové síly, hustoty a rychlosti, resp. posunutí, na hranicích mezi vrstvami zadáváme koeficienty rozvoje napětí, viskozity a modulu torze. Derivace v radiálním směru jsou aproximovány diferencemi mezi středy vrstev nebo hranicemi vrstev, například derivaci vektoru posunutí podle  $r$  na hranici mezi  $i$ -tou a  $i+1$  vrstvou lze aproximovat jako

$$\frac{du_{jm}^l}{dr} = \frac{u_{jm}^l(r_{i+1}) - u_{jm}^l(r_i)}{\Delta}, \quad (65)$$

kde  $u_{jm}^l(r_i)$ , resp.  $u_{jm}^l(r_{i+1})$ , jsou koeficienty rozvoje posunutí na středu vrstvy  $i$ , resp.  $i+1$ .

Koeficienty v soustavě rovnic uspořádáme do pásové matice  $\mathbf{A}$ . Koeficienty této matice jsou funkcemi  $r$  a stupně  $j$  a nezávisí na řádu sférického harmonického rozvoje  $m$ . Do vektoru pravé strany  $\vec{b}$  sestavíme plošnou hustotu na svrchní hranici tělesa a pro viskoelastický materiál také integrální paměťový člen v rovnici (13). Objemové síly jsme ve výpočtu položili rovné nule, protože jejich vliv na výsledek lze díky linearitě rovnic v případě potřeby přičíst dodatečně. Časový vývoj relaxace je způsoben změnou topografie a tedy plošné zátěže na svrchní hranici modelu v jednotlivých časových krocích. Pro viskoelastický materiál se navíc s časem mění integrální paměťový člen v rovnici (13). Vektor řešení  $\vec{x}$  splňující podmínku  $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$  obsahuje hledané koeficienty rozvoje napětí a rychlosti, resp. posunutí. Vektor řešení získáme inverzí matice  $\mathbf{A}$ ,  $\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b}$ .

Konečným výstupem z programu je topografie ve zvoleném čase  $t$ , uvedená v rovnici (8), resp. (16). Dalším výstupem je posunutí  $\vec{u}$  v daném čase a místě a úhel otočení materiálu  $\Omega$  v daném čase a místě, jak byl specifikován v kapitole 3.6. Pro výpočet lokálních hodnot veličin byly použity podprogramy vyvinuté Z. Martincem a O. Čadkem na Katedře geofyziky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

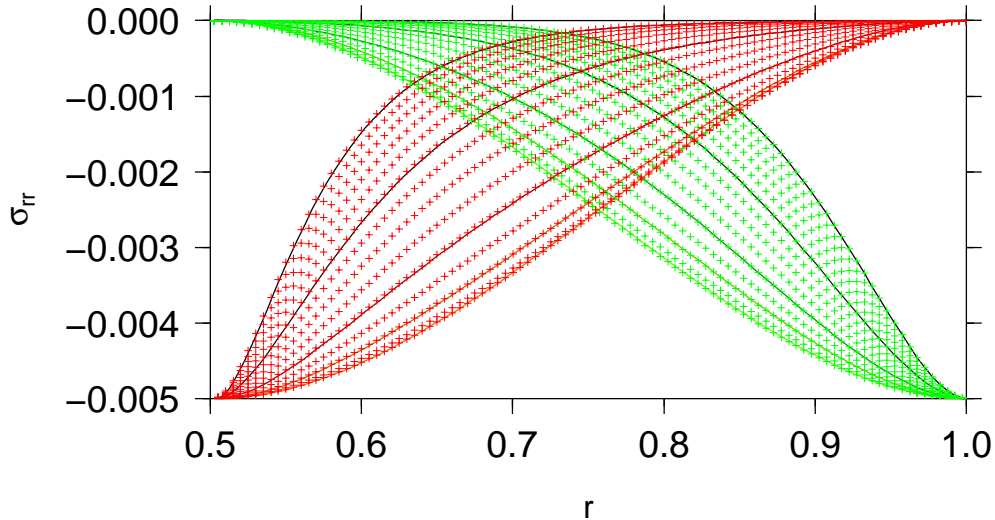
Program pro výpočet relaxace pro viskózní materiál byl testován srovnáním se spektrálním programem vyvinutým O. Čadkem. Srovnávaným výstupem byla radiální komponenta trakční síly  $\sigma_{rr}$  na hranicích modelované kulové slupky při zátěži na vrstvě s danou tloušťkou a s poloměrem  $r$ . Zátěž předepisujeme jednotkovou na stupni harmonického rozvoje  $j$  a výstupem je  $\sigma_{rr}$  na stejném stupni (obrázek 10).

Program pro výpočet relaxace viskoelastického materiálu byl testován na případě postglaciálního výzdvihu; zadání a srovnávané výsledky poskytl O. Čadek v osobním sdělení. Zadaným problémem byl zjednodušený model deformace zemského povrchu v důsledku pozvolného růstu a později rychlého tání ledovce. Byl použit jednoduchý osově symetrický model polárního ledovce — ledový válec na severním pólu o průměru osm stupňů, jehož výška lineárně narůstala 90 tisíc let a poté se během deseti tisíc let opět snížila na nulu. Modelem Země bylo třívrstvé kulové těleso, jehož svrchní elastická vrstva představovala zemskou litosféru, střední vrstva přibližně odpovídala hustotou a viskozitou zemskému plášti a vnitřní vrstva zemskému jádru. Srovnávaným výstupem programu byla radiální komponenta posunutí  $u_r$  osm tisíc let po úplném odtání ledovce



v závislosti na zeměpisné šířce  $\theta$  (obrázek 11).

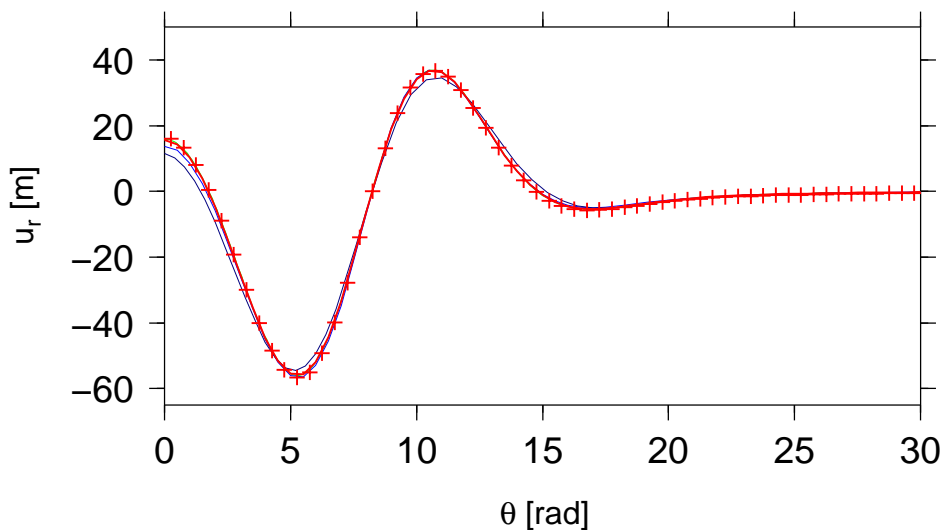
Provedené testy potvrzují, že přesnost obou našich programů je srovnatelná s jinými numerickými nástroji používanými pro modelování viskózní a viskoelastické deformace.



Obrázek 10: Funkce odezvy na jednotkovou zátěž ve vrstvě o poloměru  $r$

$\sigma_{rr}$  na svrchní hranici: červené čáry – referenční řešení pro stupeň 2, 4, 6, 10 a 15, červené křížky – naše řešení pro stupeň 2 až 15

$\sigma_{rr}$  na spodní hranici: zelené čáry – referenční řešení pro stupeň 2, 4, 6, 10 a 15, zelené křížky – naše řešení pro stupeň 2 až 15



Obrázek 11: Postglaciální výzdvih

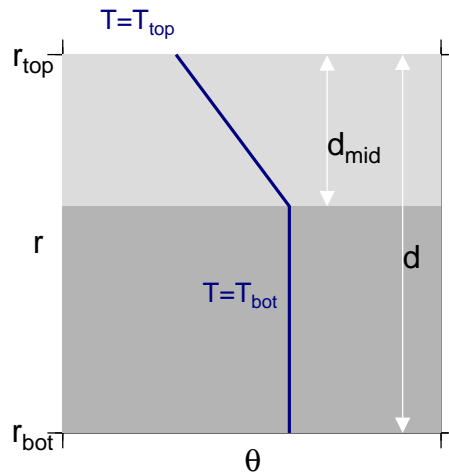
Srovnání našeho řešení (červené křížky) s řešením analytickým (červená čára) [15] a dalšími numerickými řešeními. Spektrální řešení (zelená čára) [6], řešení metodou konečných elementů v axisymetrické geometrii – francouzský komerční program Zebulon (modrá čára) [16], řešení metodou konečných elementů ve 3D – komerční program Marc (tmavě modrá čára) [17].

## 5 Parametry modelu

Relaxaci topografie studujeme pro modely pláště ledových měsíců s různými parametry. Předpokládáme, že ve skutečném ledovém měsíci je teplota na povrchu nižší než na spodu ledové vrstvy a že se ledová vrstva skládá ze svrchní části, ve které se teplo šíří převážně kondukcí, a ze spodní části, ve které probíhá konvekce. Teplota ve svrchní části pak narůstá přibližně lineárně s hloubkou a ve spodní části je (pomineme-li hraniční vrstvy) přibližně konstantní. Tato představa vychází z prací [18] a [19]. V práci [19] je zkoumán vliv slapového zahřívání na konvekci v ledové vrstvě Evropy. Profily horizontálně průměrované teploty uvedené v této práci přibližně odpovídají našemu popisu. Uváděná výsledná teplota v ledové vrstvě není sice závislá jen na hloubce, ale materiál s výrazně odlišnou teplotou je soustředěn do úzkých oblastí. V případě studie konvekce v ledovém plášti Enceladu [18] je slapové zahřívání předepsané konstantní v celé ledové vrstvě, čímž jistě dochází ke zkreslení. Průběh teploty pro tento model nicméně opět odpovídá našemu popisu a detailnější studie vlivu slapového zahřívání na konvekci v nitru Enceladu není prozatím dostupná.

V našem modelu aproximujeme průběh teploty dvěma vrstvami. Ve svrchní vrstvě klesá teplota lineárně s hloubkou a ve spodní vrstvě se teplota s hloubkou nemění. Pro popis průběhu teploty potom stačí čtyři parametry: tloušťka modelované ledové vrstvy  $d$ , hloubka rozhraní mezi konduktivní a konvektivní částí  $d_{\text{mid}}$ , teplota na povrchu  $T_{\text{top}}$  a teplota konvektivní vrstvy (a zároveň teplota na spodu konduktivní vrstvy)  $T_{\text{bot}}$ , viz obrázek 12. Jako speciální případ uvažujeme model s teplotou konstantní v celé kulové slupce a modely s teplotou lineárně klesající s hloubkou.

V tomto zjednodušeném průběhu teploty je na rozhraní mezi svrchní a spodní částí nespojitá derivace teploty. Při výpočtu ale ledovou vrstvu diskretizujeme na vrstvy s konstantní teplotou a konstantní viskozitou. Samotný výpočet tedy v sobě zahrnuje zanedbání fyzikálního předpokladu spojitosti teploty a její derivace a toto zanedbání nelze v dané metodě odstranit.



Obrázek 12: Průběh teploty v modelu

Pro přechod od teploty k viskozitě v daném místě používáme vztah

$$\eta(r) = \eta_m \exp \left[ A \left( \frac{T_m}{T(r)} - 1 \right) \right], \quad (66)$$

uvedený například v práci [1]. Modul torze považujeme za konstantní v celé ledové vrstvě. Konstanty v řešených rovnicích jsou uvedeny v tabulce 2. Pro některé z těchto konstant uvádíme dvě hodnoty indexované čísly 1 a 2. Konstanty volíme tak, aby jejich hodnoty zhruba odpovídaly měsícům Enceladus (index 1) a Europa (index 2).

Výpočet relaxace provádíme i pro některé modely, které jsou fyzikálně nepřipustné, protože mají příliš nízké Rayleighovo číslo v části, kterou považujeme za konvektivní. Škálováním výsledků a parametrů těchto modelů podle rovnic (24) a (32) lze získat výsledky platné pro fyzikálně přípustné modely.

Tabulka 2: Parametry v řešených rovnicích

$\rho_{\text{ICE}}$	$\mu$	$A$	$\eta_{\text{m}}$	$T_{\text{m}}$	$g_1$	$r_{\text{top},1}$	$r_{\text{bot},1}$	$g_2$	$r_{\text{top},2}$	$r_{\text{bot},2}$
920	$3 \cdot 10^9$	22	$10^{14}$	273	0,113	250	150	1,32	1565	1505
$\text{kg m}^{-3}$	Pa		Pa s	K	$\text{m s}^{-2}$	km	km	$\text{m s}^{-2}$	km	km

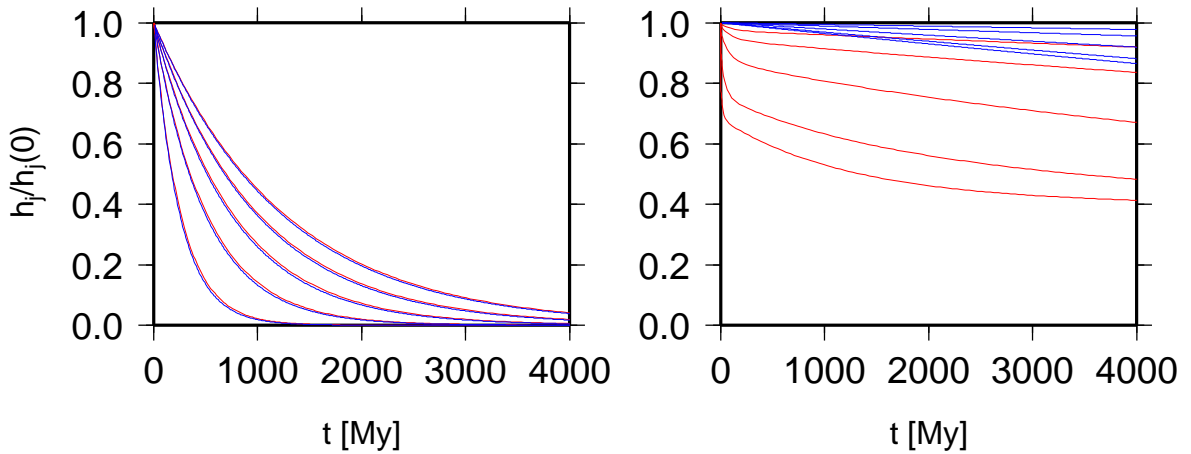
## 6 Výsledky

### 6.1 Srovnání viskózního a viskoelastického případu

Relaxaci topografie studujeme pro viskózní a viskoelastický materiál. Visokelastický popis považujeme za lepší přiblížení skutečného chování materiálu a výsledky z programu pro viskózní materiál jsou uvedeny pouze pro zhodnocení potřebnosti viskoelastického popisu.

Pro viskózní materiál se relaxační křivky pro jednotlivé stupně ukázaly být exponenciální. To lze odůvodnit nezávislostí viskózní relaxace na historii relaxace. Změna topografie za každý časový krok  $\Delta t$  závisí přímo úměrně na výšce topografie na začátku tohoto kroku, neboť předpokládáme, že ostatní parametry modelu se nemění. Viskózní relaxaci topografie na daném stupni  $h_j(t)$  lze tedy charakterizovat jediným číslem  $\tau_j$ ,  $h_j(t) = h_j(0) \exp(-t/\tau_j)$ .

Pro viskoelastický materiál už tato úvaha neplatí, protože změnu topografie ovlivňuje integrální paměťový člen (viz rovnice 13). Pokud srovnáváme průběh relaxace vypočtený pro viskózní a viskoelastický materiál, zjistíme významné odlišnosti obzvláště pro modely s velkým kontrastem mezi viskozitou na povrchu a na spodu ledové vrstvy. V těchto modelech se projeví elasticita svrchní vrstvy s vysokou viskozitou, takže ani v měřítku několika miliard let nebude topografie relaxovat k nule, jak dokládá obrázek 13. Ze srovnání relaxačních křivek v obrázku 13 vyplývá, že volba viskoelastické reologie je pro studium relaxace kráterů i na dlouhých časových škálách nezbytná, pokud se viskozita materiálu mění výrazně s hloubkou. Za výraznou změnu přitom považujeme změnu o několik řádů. Výsledky uvedené v dalších částech této studie jsou vypočteny programem pro relaxaci viskoelastického materiálu.



Obrázek 13: Relaxační křivky pro viskózní a viskoelastický materiál

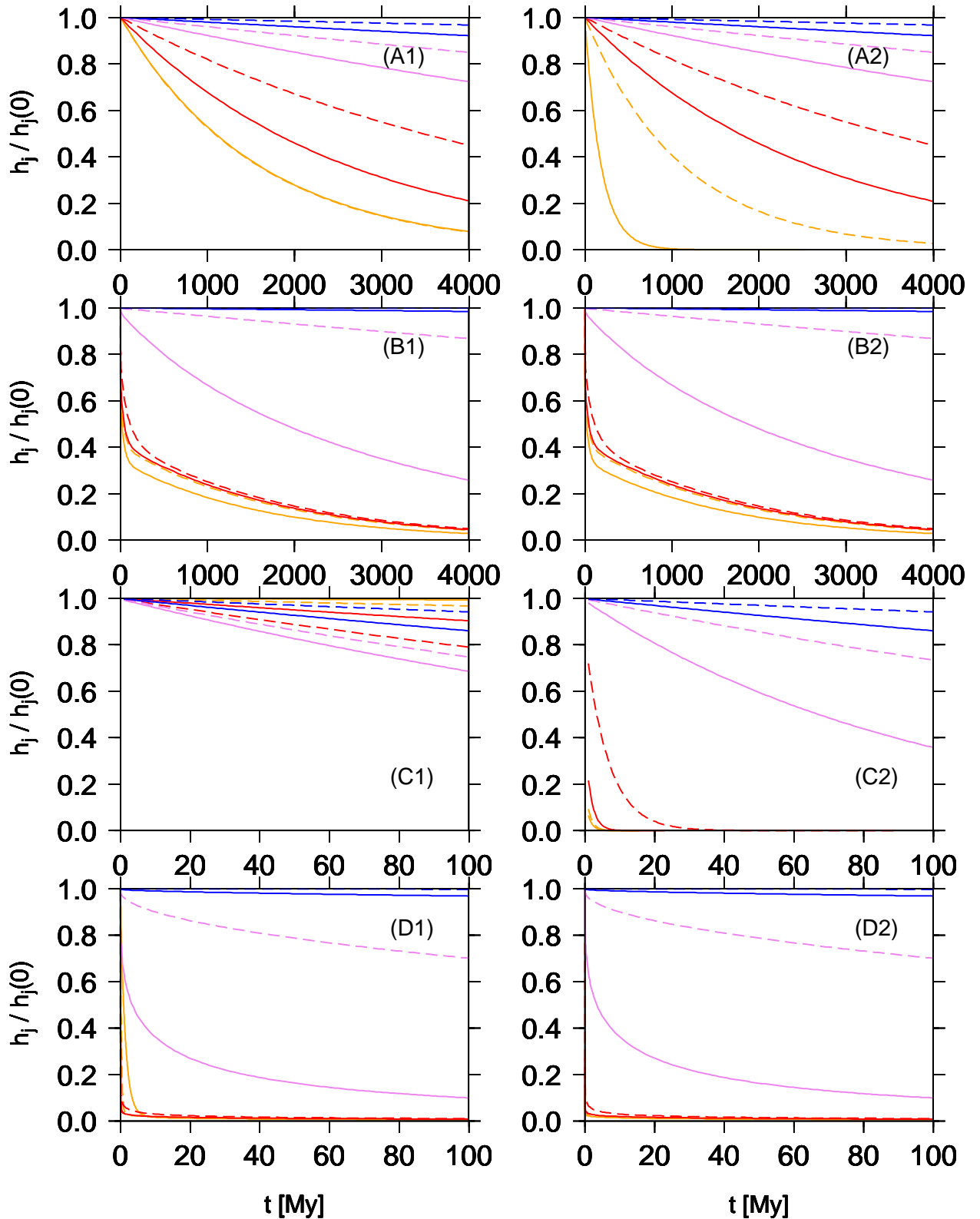
Relaxační křivky  $h_j(t)$  pro stupeň  $j = \{10, 20, 30, 40, 50\}$  pro viskózní (modrá barva) a viskoelastický (červená barva) případ. Vyšší stupeň  $j$  vždy odpovídá pozvolnější relaxaci. Vypočteno pro model  $r_{\text{top}} = r_{\text{top},1}$ ,  $r_{\text{bot}} = r_{\text{bot},1}$ ,  $g = g_1$ ; graf nalevo pro viskozity  $\eta_{\text{top}} = \eta_{\text{bot}} = 10^{22}$  Pa.s, graf napravo pro viskozity  $\eta_{\text{top}} = 10^{28}$  Pa.s a  $\eta_{\text{bot}} = 10^{16}$  Pa.s,  $d_{\text{mid}} = 10$  km.

## 6.2 Relaxace topografie pro různé parametry modelu

Provedli jsme výpočty relaxačních křivek pro modely odpovídající svou geometrií a gravitačním zrychlením měsícům Enceladu ( $r_{\text{top}} = r_{\text{top},1}$ ,  $r_{\text{bot}} = r_{\text{bot},1}$ ,  $g = g_1$ ) a Evropy ( $r_{\text{top}} = r_{\text{top},2}$ ,  $r_{\text{bot}} = r_{\text{bot},2}$ ,  $g = g_2$ ). Pro oba tyto případy zkoumáme tvar relaxačních křivek v závislosti na průběhu viskozity s hloubkou, tj. na parametrech  $\eta_{\text{top}}$ ,  $\eta_{\text{bot}}$ ,  $d_{\text{mid}}$ , a na hraniční podmínce na spodním rozhraní. V grafech jsou vyneseny relaxační křivky pro stupně  $j = 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200$  a  $500$ . Tyto relaxační křivky jsou vykresleny oranžovou čarou ( $j = 2$ ), oranžovou čárkovanou čarou ( $j = 5$ ), červenou čarou ( $j = 10$ ), červenou čárkovanou čarou ( $j = 20$ ), fialovou čarou ( $j = 50$ ), fialovou čárkovanou čarou ( $j = 100$ ), modrou čarou ( $j = 200$ ) a modrou čárkovanou čarou ( $j = 500$ ). Křivky pro modely s parametry Enceladu vykreslujeme pro  $t \in \langle 0, 4\text{Gy} \rangle$ , tedy v maximálním intervalu času, který má vzhledem ke stáří Sluneční soustavy smysl uvažovat. Křivky pro modely s parametry Evropy vykreslujeme v časovém intervalu  $t \in \langle 0, 100\text{My} \rangle$ , který přibližně odpovídá hornímu odhadu stáří povrchu Evropy [3].

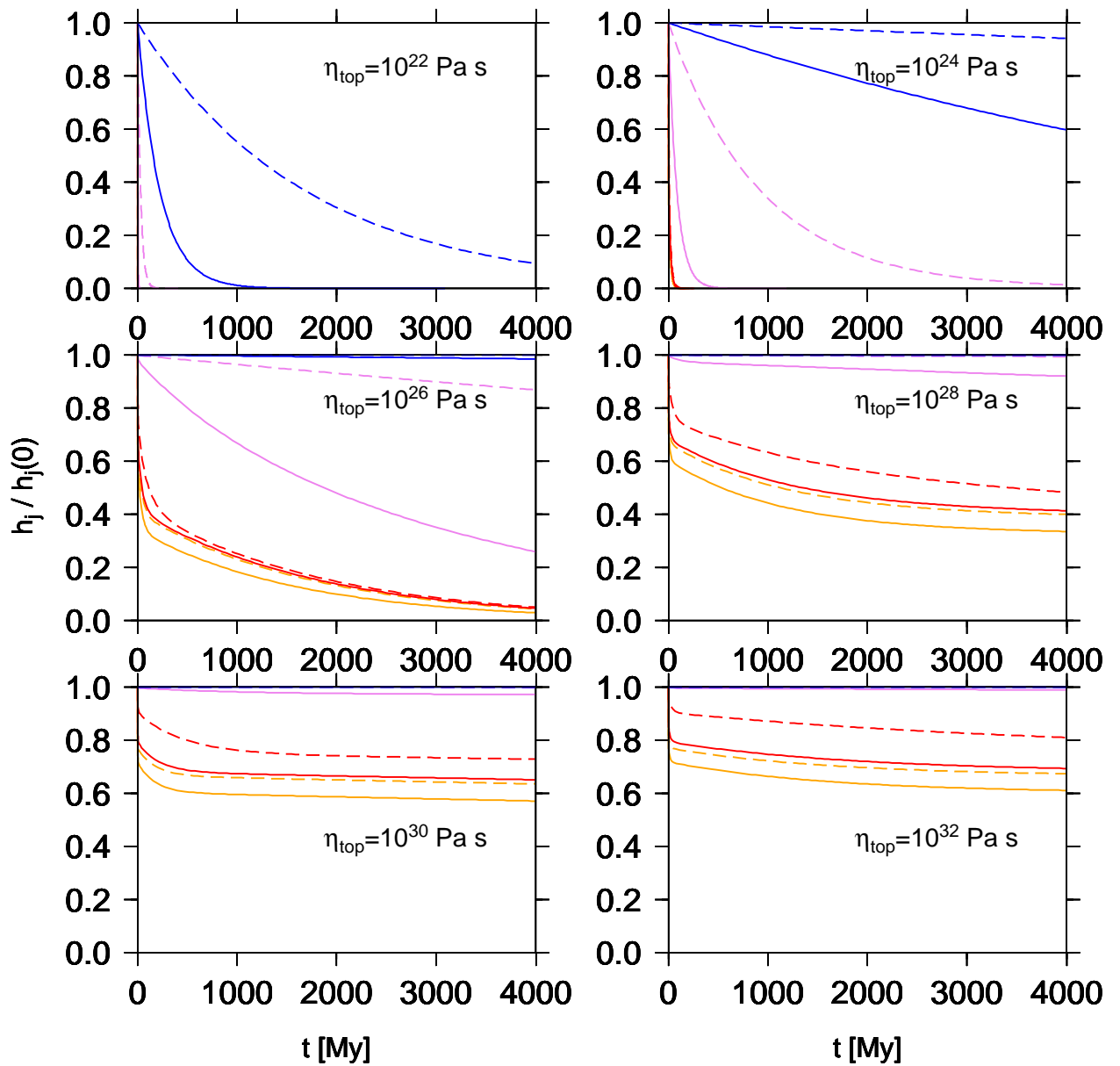
Nejprve zkoumáme vliv hraniční podmínky na spodním rozhraní na relaxaci topografie (obr. 14). V levé části jsou vždy vyneseny relaxační křivky vypočtené s hraniční podmínkou (14) a v pravé části s hraniční podmínkou (15). Relaxační křivky pro modely, které se liší pouze hraniční podmínkou, jsou si velmi blízké. Jistý rozdíl je patrný u modelů s konstantní viskozitou A1 a A2 na stupních 2 a 5 a pro modely C1 a C2 přibližně do stupně 50. Pokud předpokládáme výraznější pokles viskozity s hloubkou (modely B a D), volba hraniční podmínky se projeví ještě méně – rozdíl je patrný jen mezi modely D1 a D2 na stupních 2 a 5. Zavedeme-li vlnovou délku topografie na stupni  $j$  jako  $\lambda_j = \pi r_{\text{top}}/j$ , lze říct, že na volbu hraniční podmínky na spodním rozhraní jsou citlivé jen stupně, kterým přísluší vlnová délka srovnatelná nebo větší než tloušťka ledové vrstvy. Pro modely A a B je  $r_{\text{top}} = 250$  km a tloušťka ledové vrstvy je 100 km, čemuž přibližně odpovídá stupeň 8. Pro modely C a D je  $r_{\text{top}} = 1565$  km a tloušťka ledové vrstvy je 60 km, čemuž přibližně odpovídá stupeň 80. Topografie na stupních  $j$ , které jsou nižší než tyto mezní stupně, může být na volbu hraniční podmínky citlivá, ale pro viskozitu klesající s hloubkou se volba hraniční podmínky téměř neprojeví ani pro topografii na těchto stupních. Relaxaci topografie proto pokládáme za málo citlivou na volbu hraniční podmínky a v dalších grafech předepisujeme pro modely typu Enceladus podmínku (14), tedy nulové posunutí, a pro modely typu Europa naopak předepisujeme podmínku (15), tedy nulovou sílu. Tato volba odráží představu kontaktu ledové vrstvy se silikátovým jádrem v případě Enceladu a naopak podpovrchového oceánu mezi ledovou vrstvou a silikátovým jádrem v případě Evropy.

Relaxační křivky pro různou volbu parametrů  $\eta_{\text{top}}$ ,  $\eta_{\text{bot}}$  a  $d_{\text{mid}}$  jsou uvedeny v obrázcích 15 až 17 pro modely typu Enceladus a v obrázcích 19 až 21 pro modely typu Europa. V obrázku 18 a 22 se zabýváme vlivem tloušťky ledové vrstvy na průběh relaxace, protože tento parametr není přímo pozorovatelný a jeho odhady se různí v případě Enceladu i v případě Evropy. Další informace k jednotlivým obrázkům jsou uvedeny v popiskách pod obrázky.



Obrázek 14: Vliv hraniční podmínky na spodním rozhraní

Zvolené parametry modelu: (A1) Enceladus, pevné rozhraní,  $\eta_{\text{top}} = \eta_{\text{bot}} = 10^{23}$  Pa s; (A2) Enceladus, rozhraní s kapalinou,  $\eta_{\text{top}} = \eta_{\text{bot}} = 10^{23}$  Pa s; (B1) Enceladus, pevné rozhraní,  $\eta_{\text{top}} = 10^{26}$  Pa s,  $\eta_{\text{bot}} = 10^{16}$  Pa s,  $d_{\text{mid}} = d$ ; (B2) Enceladus, rozhraní s kapalinou,  $\eta_{\text{top}} = 10^{26}$  Pa s,  $\eta_{\text{bot}} = 10^{16}$  Pa s,  $d_{\text{mid}} = d$ ; (C1) Europa, pevné rozhraní,  $\eta_{\text{top}} = \eta_{\text{bot}} = 10^{23}$  Pa s; (C2) Europa, rozhraní s kapalinou,  $\eta_{\text{top}} = \eta_{\text{bot}} = 10^{23}$  Pa s; (D1) Europa, pevné rozhraní,  $\eta_{\text{top}} = 10^{26}$  Pa s,  $\eta_{\text{bot}} = 10^{16}$  Pa s,  $d_{\text{mid}} = d$ ; (D2) Europa, rozhraní s kapalinou,  $\eta_{\text{top}} = 10^{26}$  Pa s,  $\eta_{\text{bot}} = 10^{16}$  Pa s,  $d_{\text{mid}} = d$

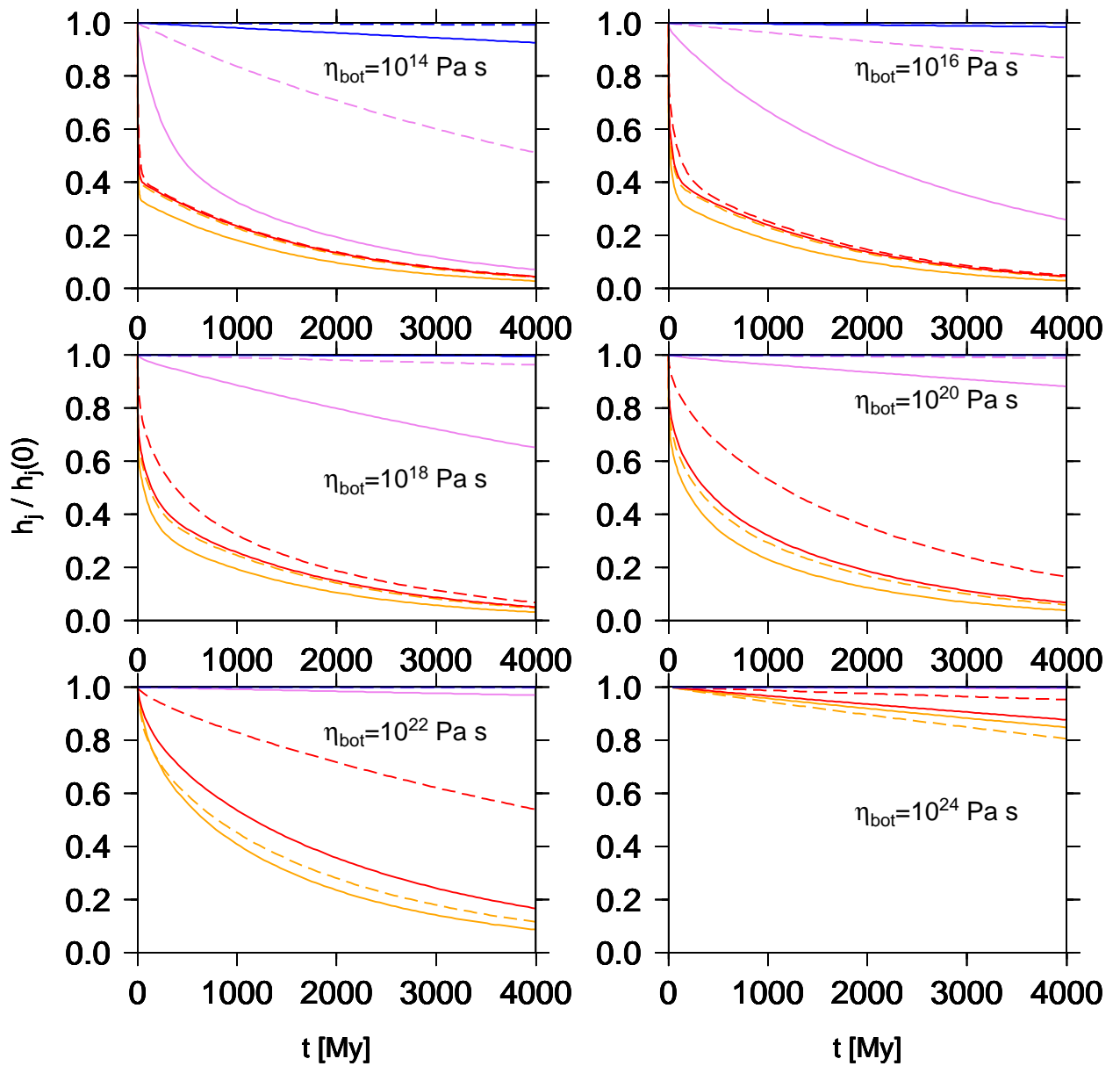


Obrázek 15: *Enceladus* – vliv viskozity na povrchu  $\eta_{\text{top}}$

Zvolené parametry modelu:  $\eta_{\text{bot}} = 10^{16} \text{ Pa s}$ ,  $d_{\text{mid}} = 0,1 d = 10 \text{ km}$

Volba  $\eta_{\text{top}}$  významně ovlivňuje relaxaci topografie na všech stupních  $j$ . Pro vysokou hodnotu  $\eta_{\text{top}}$  (grafy dole) topografie na vysokých stupních v časové škále miliard let nerelaxuje a na nízkých stupních nejprve relaxuje velmi rychle a poté zůstává prakticky konstantní.

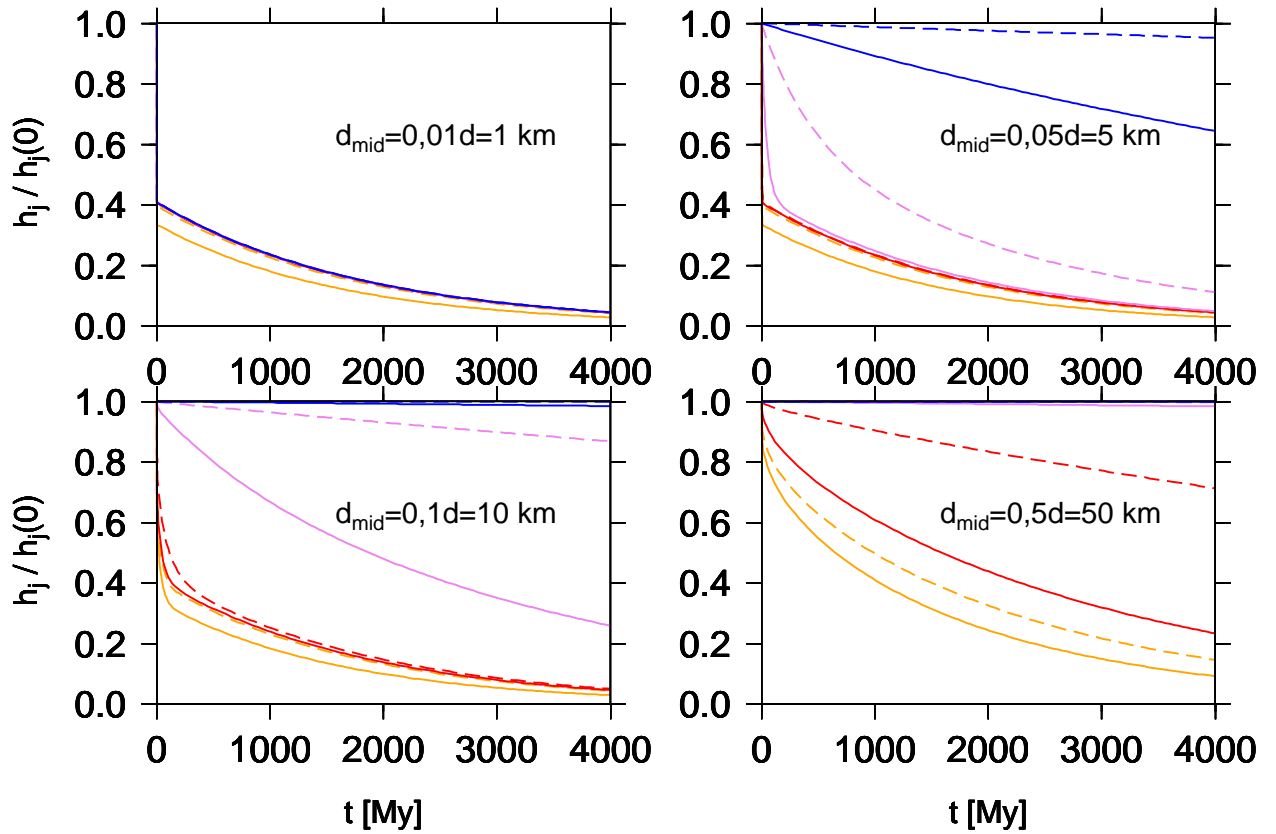




Obrázek 16: *Enceladus* – vliv viskozity konvektivní části  $\eta_{\text{bot}}$

Zvolené parametry modelu:  $\eta_{\text{top}} = 10^{26}$  Pa s,  $d_{\text{mid}} = 0,1 d = 10$  km

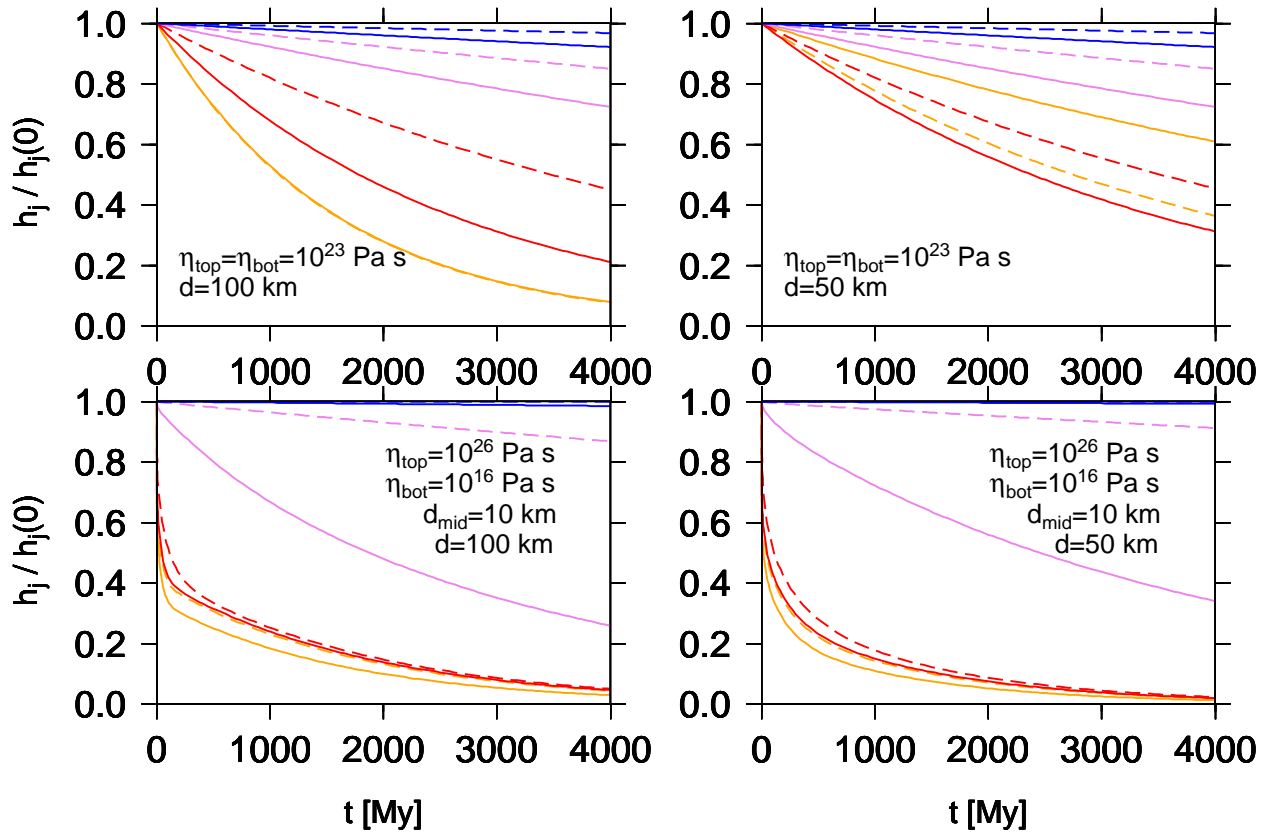
Vliv  $\eta_{\text{bot}}$  se projeví zejména v relaxaci topografie na nižších stupních. Pro tenkou konduktivní část  $d_{\text{mid}} = 0,1 d = 10$  km je na viskozitu konvektivní části viditelně citlivá už relaxace topografie na stupních 50 a 100. Je dobré zdůraznit, že volba  $\eta_{\text{bot}}$  ovlivňuje nejen viskozitu v konvektivní části, ale také gradient viskozity v konduktivní části. Topografie na nízkých stupních nejprve relaxuje velmi rychle, tím rychleji, čím je  $\eta_{\text{bot}}$  nižší. Poté se relaxace zvolní a její rychlost je dále určena hlavně parametrem  $\eta_{\text{top}}$ .



Obrázek 17: *Enceladus* – vliv tloušťky konduktivní části  $d_{\text{mid}}$

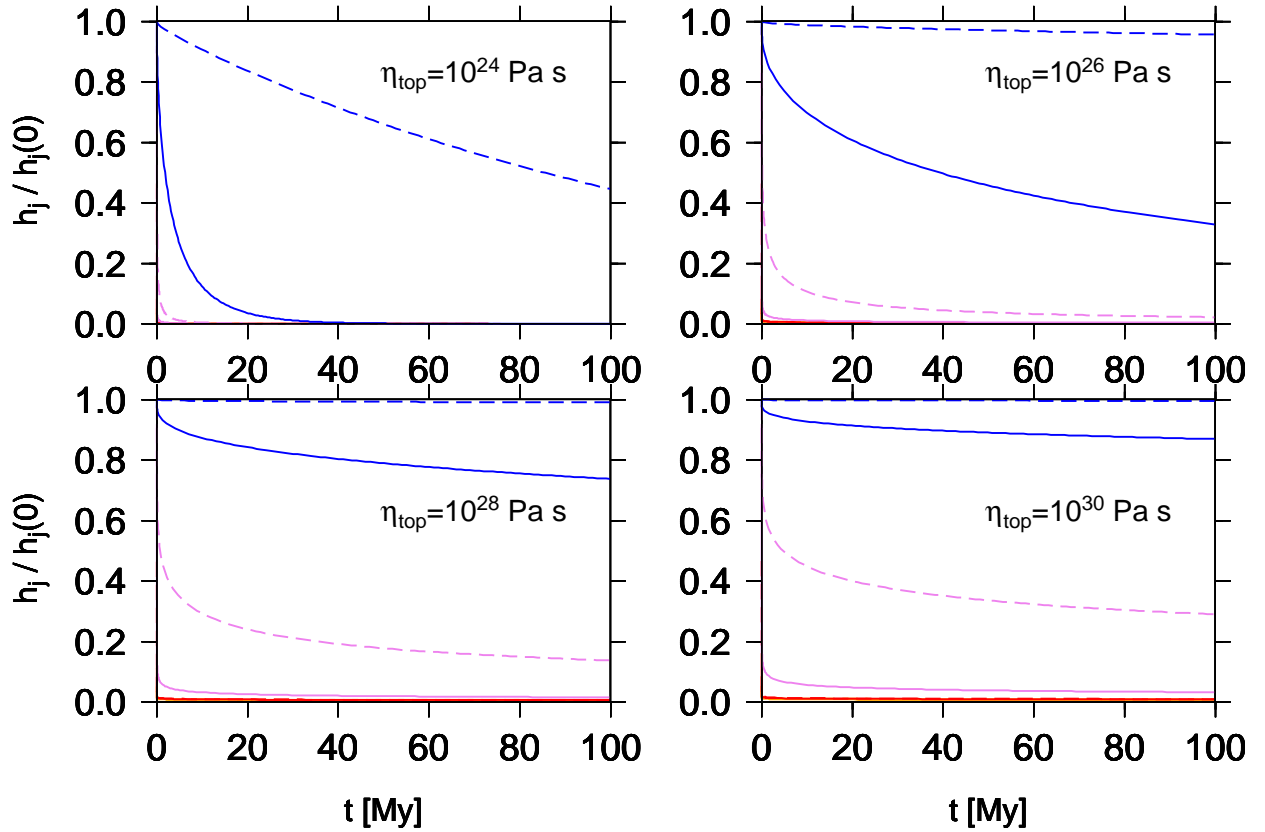
Zvolené parametry modelu:  $\eta_{\text{top}} = 10^{26}$  Pa.s,  $\eta_{\text{bot}} = 10^{16}$  Pa.s

Pokud nezměníme  $\eta_{\text{top}}$  a  $\eta_{\text{bot}}$ , znamená ztenčení konduktivní části pokles viskozity v některých hloubkách a tedy zrychlení relaxace. Změna  $d_{\text{mid}}$  se projeví na stupních, jejichž vlnová délka je srovnatelná s  $d_{\text{mid}}$ . Například do stupně 20 probíhá relaxace téměř stejně pro  $d_{\text{mid}} = 1$  km až 10 km a liší se až pro  $d_{\text{mid}} = 50$  km, přičemž  $\lambda_{10} \approx 40$  km.



Obrázek 18: *Enceladus* – vliv tloušťky ledové vrstvy  $d$

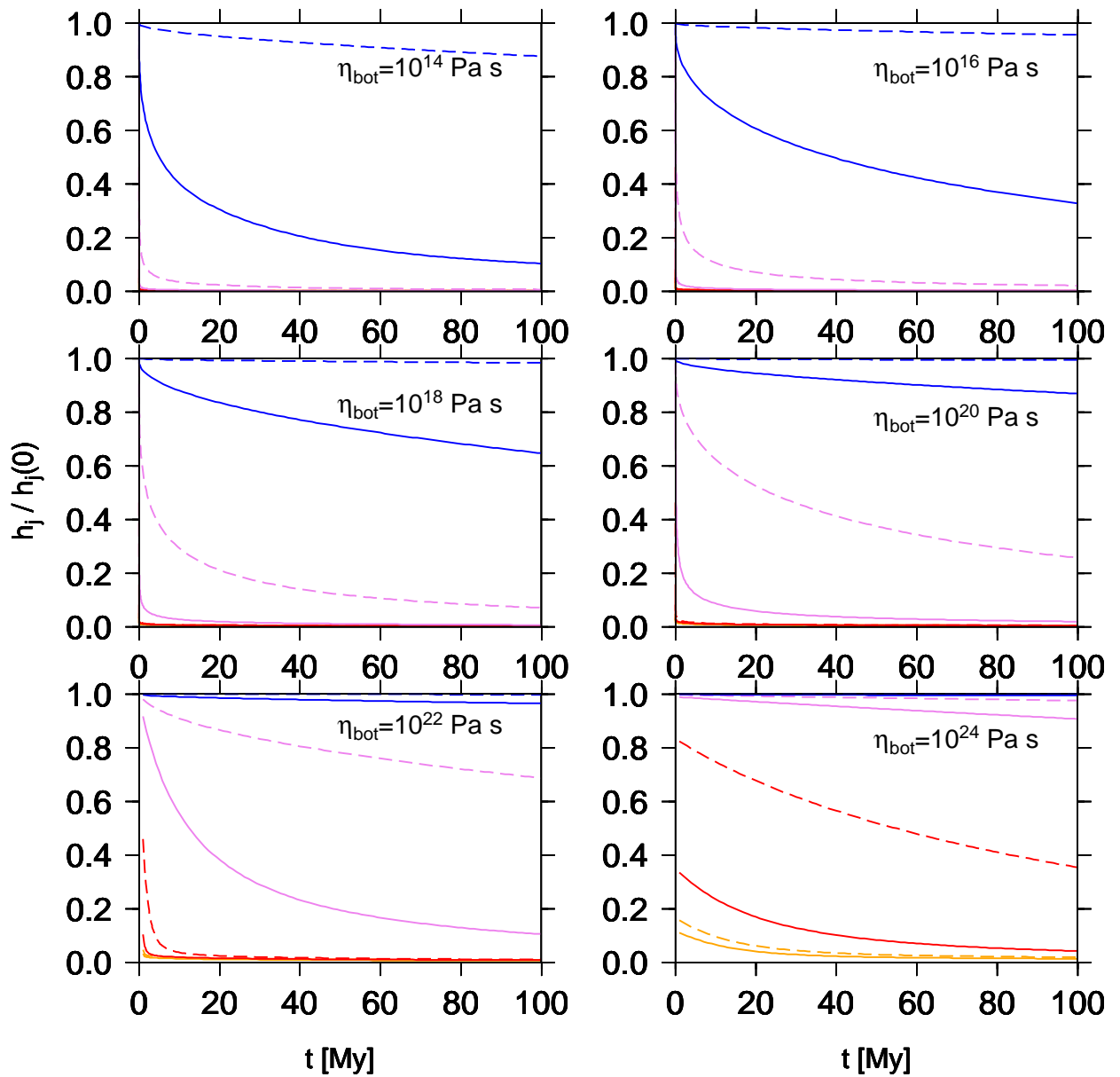
Pro studium vlivu tloušťky ledové vrstvy uvažujeme případ s konstantní viskozitou v ledové vrstvě (grafy nahoře), a případ, kdy viskozita klesá s hloubkou (grafy dole). Zkoumáme průběh relaxace pro výrazně odlišné hodnoty tloušťky ledové vrstvy  $d = 100$  km a  $d = 50$  km. Tloušťka ledové vrstvy významně ovlivňuje rychlost relaxace pro vrstvu s konstantní viskozitou (grafy nahoře) pro stupně  $j \leq 20$ , ale pro vrstvu s viskozitou klesající s hloubkou se téměř neprojeví (grafy dole). Pokles viskozity s hloubkou je fyzikálně opodstatněným předpokladem, a proto můžeme malé nejistoty v tloušťce  $d$  jakožto vstupním parametru pro ostatní zkoumané modely zanedbat.



Obrázek 19: Europa – vliv viskozity na povrchu  $\eta_{\text{top}}$

Zvolené parametry modelu:  $\eta_{\text{bot}} = 10^{16}$  Pa s,  $d_{\text{mid}} = 0,25 d = 15$  km

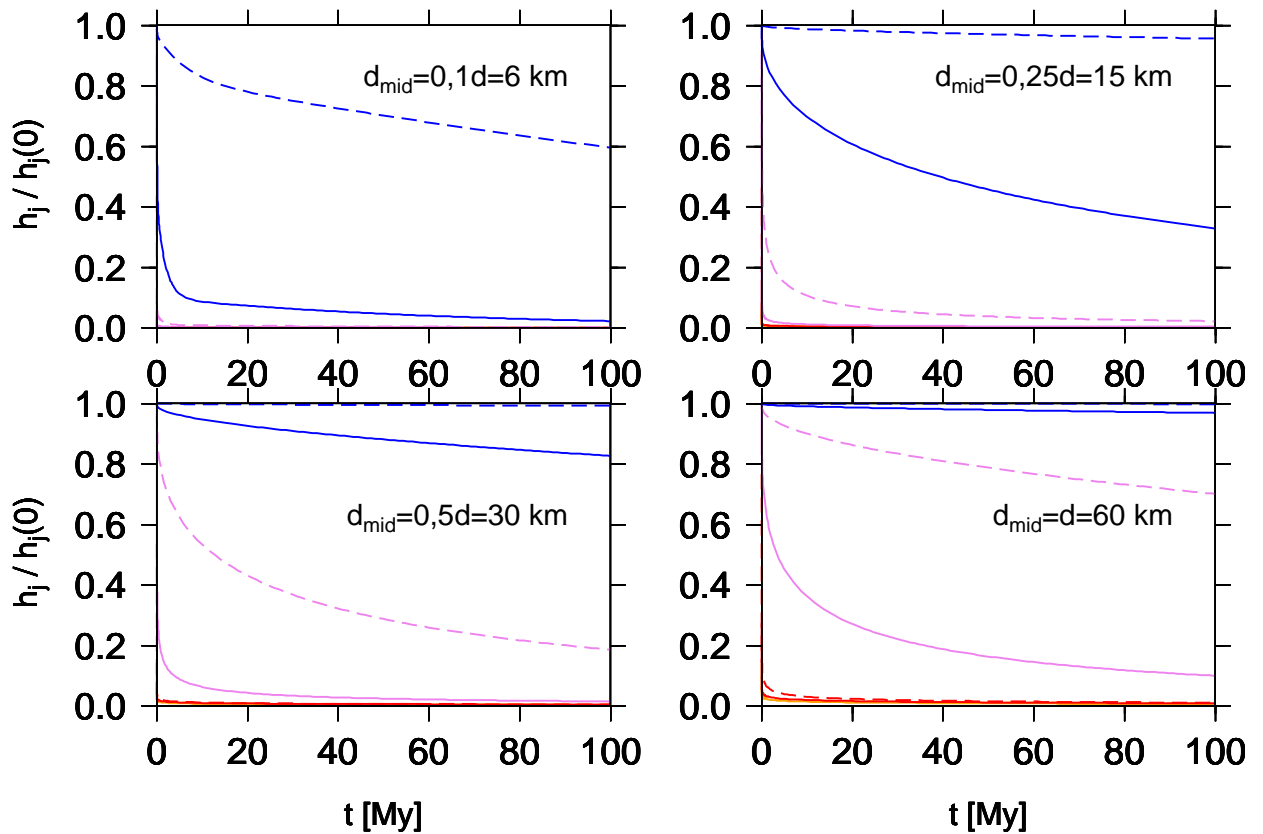
Změna viskozity na povrchu má v případě modelů typu Europa podobný vliv jako pro modely typu Enceladus. Její zvýšení vede ke zpomalení relaxace topografie na všech stupních. Pro  $\eta_{\text{top}} \approx 10^{30}$  Pa s probíhá relaxace jen zpočátku a později zůstává topografie téměř konstantní. Srovnání s obrázkem 15 ukazuje, že relaxace topografie je pro obdobný průběh viskozity výrazně rychlejší pro model typu Europa než pro model typu Enceladus. Tento rozdíl je způsoben především větším poloměrem  $r_{\text{top}}$  a větším gravitačním zrychlením na povrchu  $g$ . Pokud bychom uvažovali viskózní materiál a modely se stejným průběhem viskozity a stejným  $d/r_{\text{top}}$ , platil by pro relaxaci topografie v těchto modelech vztah (24). Relaxace topografie pro model s poloměrem a gravitačním zrychlením odpovídajícím Europě by v tomto přiblížení byla více než 70krát rychlejší než pro model s poloměrem a gravitačním zrychlením odpovídajícím Enceladu. Přestože uvažujeme viskoelastický materiál, kde vztah (24) neplatí přesně, můžeme z něj získat představu o přibližné závislosti rychlosti relaxace na gravitačním zrychlení na povrchu a na rozměru modelu.



Obrázek 20: *Europa* – vliv viskozity konvektivní části  $\eta_{\text{bot}}$

Zvolené parametry modelu:  $\eta_{\text{top}} = 10^{26}$  Pa s,  $d_{\text{mid}} = 0,25 d = 15$  km

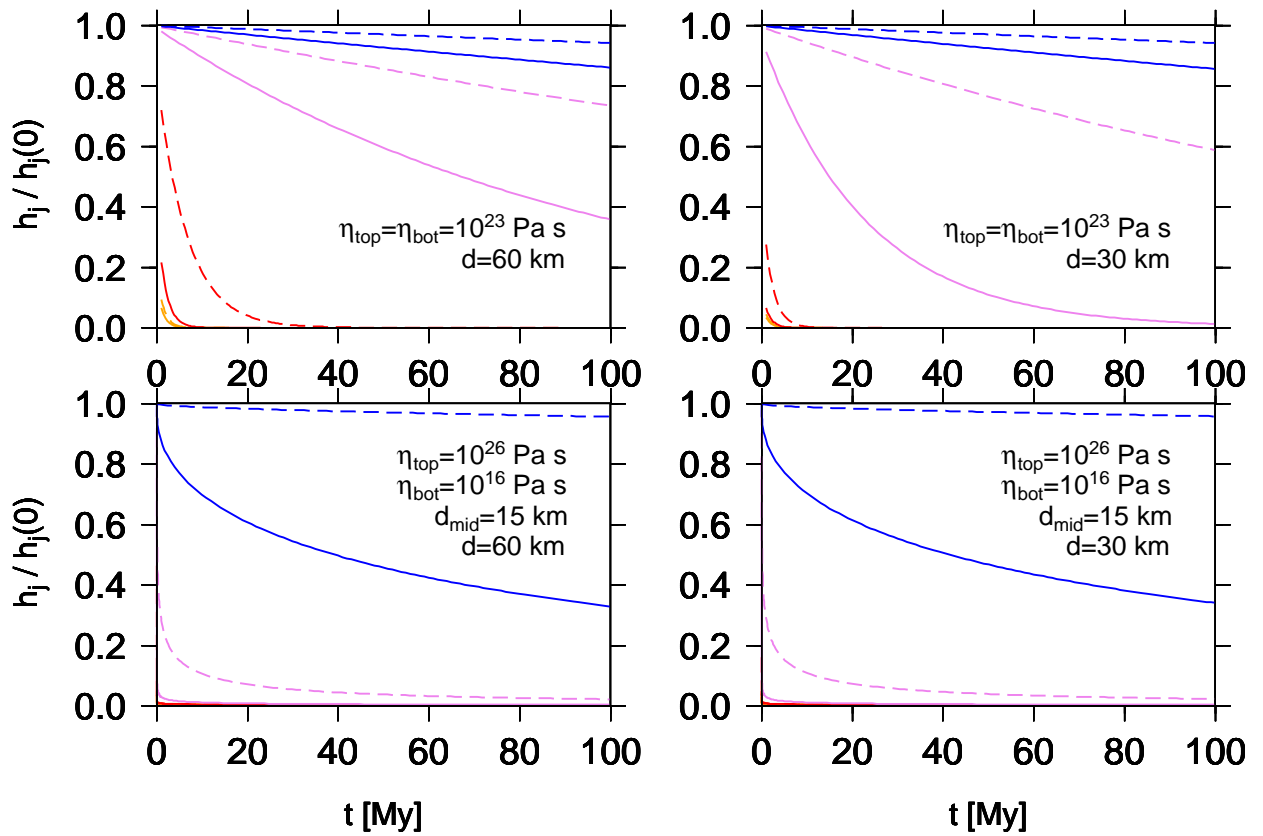
Podobně jako pro model typu *Enceladus* (graf 16) se relaxace topografie zpomaluje s rostoucím  $\eta_{\text{bot}}$ .



Obrázek 21: *Europa* – vliv tloušťky konduktivní části  $d_{\text{mid}}$

Zvolené parametry modelu:  $\eta_{\text{top}} = 10^{26}$  Pa.s,  $\eta_{\text{bot}} = 10^{16}$  Pa.s

Volba tloušťky konduktivní části významně ovlivňuje rychlost relaxace. Pro  $d_{\text{mid}} = 0,1d$  (graf vlevo nahoře) bude po 100 My výrazně zrelaxovaná topografie na stupních  $j \leq 200$ . Pokud předpokládáme, že se teplota v celé ledové vrstvě mění lineárně, tj.  $d_{\text{mid}} = d$  (graf vpravo dole), nebude topografie na stupni  $j \approx 200$  významně zrelaxovaná ani po čtyřech miliardách let.



Obrázek 22: Europa – vliv tloušťky ledové vrstvy  $d$

Pro studium vlivu tloušťky ledové vrstvy uvažujeme dva případy – s konstantní viskozitou v ledové vrstvě (grafy nahoře) a s viskozitou klesající s hloubkou (grafy dole). Stejně jako pro model typu Enceladus (obrázek 18), je patrný rozdíl mezi křivkami pro vrstvu s konstantní viskozitou a různým  $d$  (grafy nahoře), ale křivky pro vrstvu s viskozitou klesající s hloubkou a různým  $d$  (grafy dole) jsou téměř stejné.



### 6.3 Deformace pod kráterem

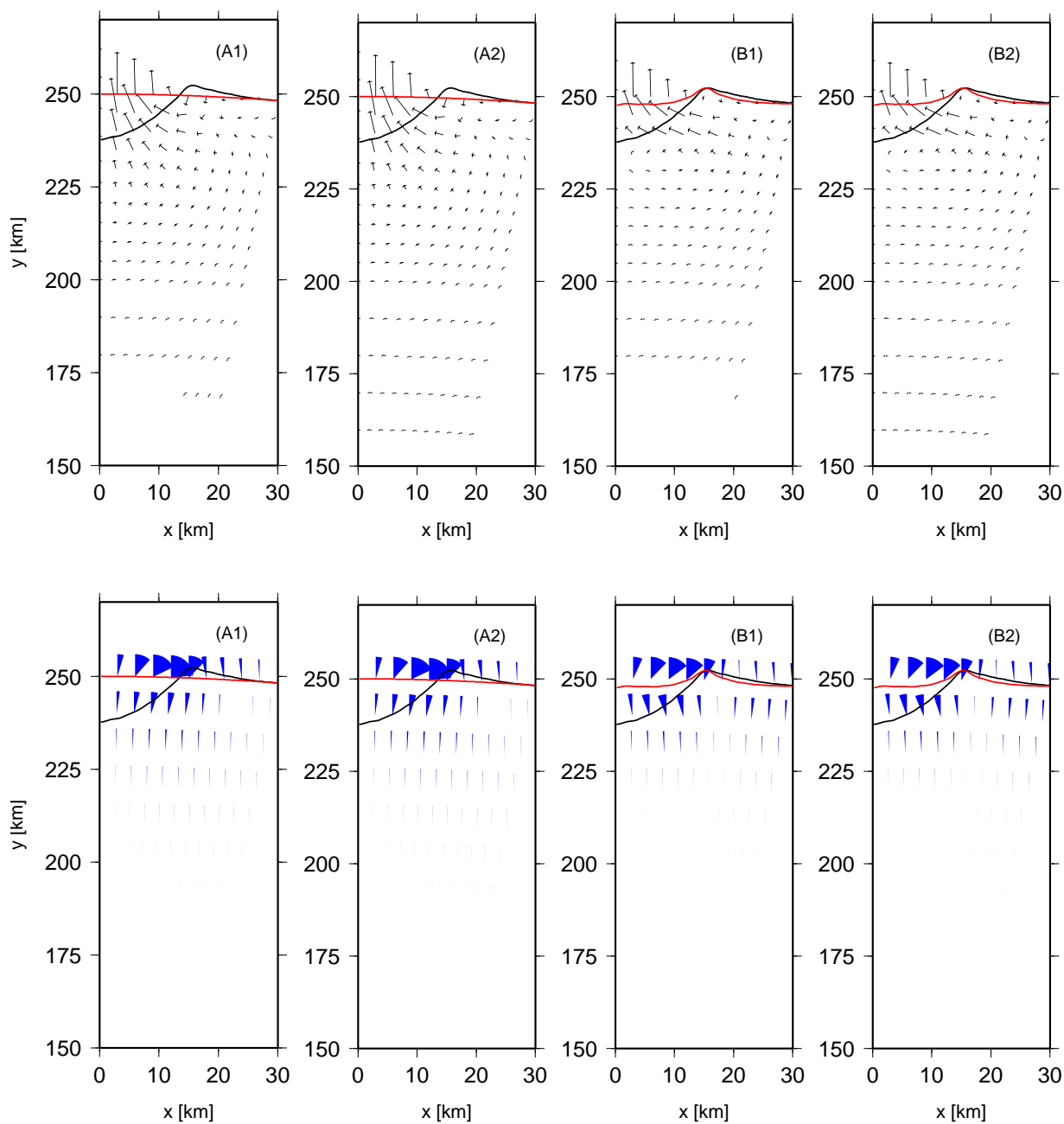
Pro model s parametry Enceladu zkoumáme posunutí  $\vec{u}$  a úhel otočení  $\Omega$  materiálu v ledové vrstvě při relaxaci topografie. Jako topografii předpokládáme osově symetrický kráter, jehož tvar po určitou dobu relaxoval. Zvolíme konkrétní tvar kráteru, který přibližně odpovídá tvaru typického menšího nerelaxovaného kráteru, tzv. jednoduchého kráteru [20]. Průměr kráteru od valu k valu zvolíme 30 km. Krátery s tímto průměrem se na Enceladu vyskytují, ačkoliv nejsou četné. Velký průměr kráteru jsme zvolili, abychom mohli odhadnout maximální hloubku, do které zasahuje vliv relaxace kráteru.

Uvažujeme dva modely ledové vrstvy s různým průběhem viskozity. V modelu A je viskozita v celé ledové vrstvě konstantní, v modelu B viskozita klesá s hloubkou a kontrast viskozit  $\eta_{\text{top}}$  a  $\eta_{\text{bot}}$  je  $10^{10}$ . V obrázku 23 srovnáváme  $\vec{u}$  a  $\Omega$  pro tyto dva typy modelů. Pro každý z nich vykreslujeme případ s hraniční podmínkou (14), tedy na nulové posunutí, a s hraniční podmínkou (15), tedy na nulovou sílu. Je vidět, že v obou modelech se relaxace kráteru projeví posunutím jen ve svrchní části ledové vrstvy. Relaxace topografie je tedy spíše lokální jev. Pro modely B je tento efekt výraznější než pro modely A, a proto se volba hraniční podmínky v modelech B projeví méně, jak bylo konstatováno už na základě relaxačních křivek na obrázku 14.

V obrázku 24 vykreslujeme posunutí a otočení materiálu pro modely se stejným průběhem viskozity jako v obrázku 23 a s hraniční podmínkou nulového posunutí na spodním rozhraní. V tomto obrázku zkoumáme vliv tloušťky ledové vrstvy, kterou pro modely A1 a B1 volíme 100 km a pro modely A2 a B2 50 km. Posunutí i otočení je prakticky nezávislé na tloušťce ledové vrstvy, protože relaxace kráteru způsobí posunutí především ve svrchní části vrstvy.

V obrázcích 23 i 24 jsou vidět rozdíly v úhlu otočení  $\Omega$  mezi modely A a B. V modelech A se má  $\Omega$  v jednom místě v různých hloubkách stejné znaménko a v modelech B má  $\Omega$  opačné znaménko na povrchu než na spodu konduktivní vrstvy.

Přímou aplikací studia úhlu  $\Omega$  pro různě relaxované krátery je studium změny magnetizace povrchu Marsu vznikem a následnou relaxací kráteru [21]. Tato aplikace se netýká reologie ledových měsíců, a proto zde není dále diskutována.



Obrázek 23: *Enceladus* – vliv hraniční podmínky na spodním rozhraní

Vykresleno posunutí  $\vec{u}$  (nahore), úhel otočení  $\Omega$  (dole) a profil kráteru (červená barva) v čase  $t = 4$  Gy a profil kráteru v čase  $t = 0$  Gy (černá barva). Profil kráteru, posunutí i úhel otočení jsou pětikrát zvětšeny.

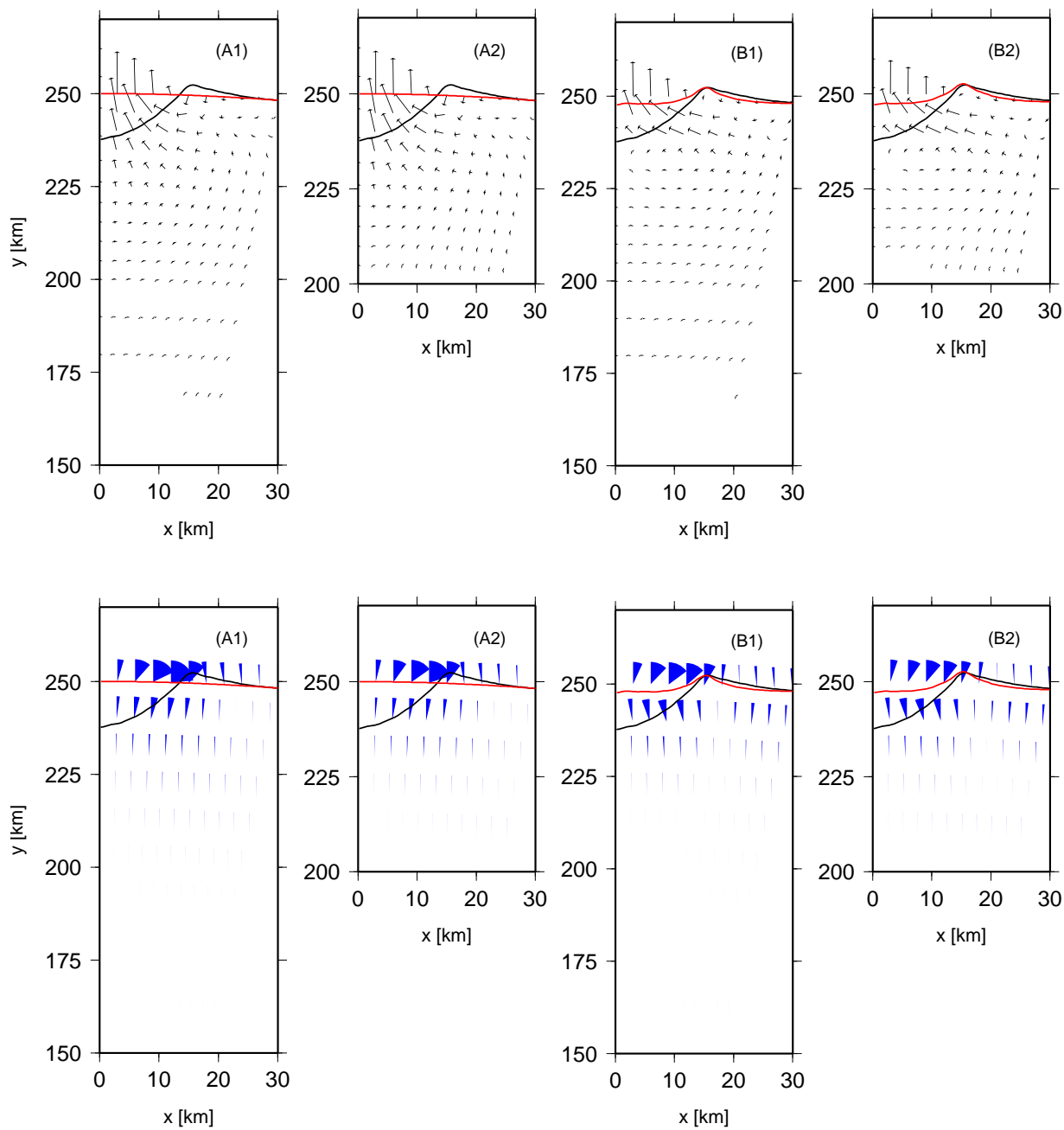
Zvolené parametry modelu:

(A1) pevné rozhraní,  $\eta_{\text{bot}} = \eta_{\text{top}} = 10^{21}$  Pa s

(A2) rozhraní s kapalinou,  $\eta_{\text{bot}} = \eta_{\text{top}} = 10^{21}$  Pa s

(B1) pevné rozhraní,  $\eta_{\text{bot}} = 10^{16}$  Pa s,  $\eta_{\text{top}} = 10^{26}$  Pa s,  $d_{\text{mid}} = 0, 1d$

(B2) rozhraní s kapalinou,  $\eta_{\text{bot}} = 10^{16}$  Pa s,  $\eta_{\text{top}} = 10^{26}$  Pa s,  $d_{\text{mid}} = 0, 1d$



Obrázek 24: Enceladus – vliv tloušťky ledové vrstvy  $d$

Vykresleno posunutí  $\vec{u}$  (nahore), úhel otočení  $\Omega$  (dole) a profil kráteru (červená barva) v čase  $t = 4$  Gy a profil kráteru v čase  $t = 0$  Gy (černá barva). Profil kráteru, posunutí i úhel otočení jsou pětikrát zvětšené.

Zvolené parametry modelu:

(A1)  $d = 100\text{km}$ ,  $\eta_{\text{bot}} = \eta_{\text{top}} = 10^{21}$  Pa s

(A2)  $d = 50\text{km}$ ,  $\eta_{\text{bot}} = \eta_{\text{top}} = 10^{21}$  Pa s

(B1)  $d = 100\text{km}$ ,  $\eta_{\text{bot}} = 10^{16}$  Pa s,  $\eta_{\text{top}} = 10^{26}$  Pa s,  $d_{\text{mid}} = 0,1d$

(B2)  $d = 50\text{km}$ ,  $\eta_{\text{bot}} = 10^{16}$  Pa s,  $\eta_{\text{top}} = 10^{26}$  Pa s,  $d_{\text{mid}} = 0,1d$

## 6.4 Obrácená úloha na syntetických datech

Citlivost relaxace topografie na parametry modelu ilustrují relaxační křivky v kapitole 6.2. Pro větší názornost formulujeme obrácenou úlohu na syntetických topografických datech. Syntetickými daty je topografie kráteru relaxovaná po určitou dobu  $t$ . Tvar kráteru předpokládáme stejný jako v předchozí kapitole. Parametry modelu  $r_{\text{top}}$ ,  $r_{\text{bot}}$ ,  $g$  a  $\mu$  volíme tak, aby odpovídaly měsíci Enceladu, viz tabulka 2. Tloušťku modelované vrstvy  $d = r_{\text{top}} - r_{\text{bot}}$  tedy volíme pevně, protože je pro ledové měsíce poměrně dobře známá a na malé chyby v jejím určení není průběh relaxace citlivý. Na spodním rozhraní předepisujeme nulové posunutí (14). Obrácenou úlohou tedy hledáme pouze parametry  $\eta_{\text{top}}$ ,  $\eta_{\text{bot}}$  a  $d_{\text{mid}}$ . Vzhledem k malému počtu parametrů můžeme zvolit metodu přímého přebírání modelů, ve které s určitým krokem měníme volné parametry a posuzujeme shodu dat a topografie predikované pro tyto parametry. Kritériem shody je vzdálenost dat  $h^{\text{obs}}(\theta, \phi)$  a predikované topografie  $h^{\text{pred}}(\theta, \phi)$  v  $\mathcal{L}_2$  normě

$$\begin{aligned} S_2 &= \sqrt{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi (h^{\text{obs}}(\theta, \phi) - h^{\text{pred}}(\theta, \phi))^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi} = \\ &= \sqrt{\sum_{j=0}^{\infty} (h_j^{\text{obs}} - h_j^{\text{pred}})^2}. \end{aligned} \quad (67)$$

Abychom mohli lépe srovnávat shodu pro různá data, dělíme vzdálenost  $S_2$  normou dat

$$X_2 = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^{j_{\text{max}}} (h_j^{\text{obs}}(t) - h_j^{\text{pred}}(t))^2}{\sum_{j=0}^{j_{\text{max}}} (h_j^{\text{obs}}(t))^2}}, \quad (68)$$

kde nesčítáme nekonečnou sumu, ale sčítáme pouze do maximálního stupně rozvoje do sférických harmonických funkcí  $j_{\text{max}}$ , který je v našem případě 500. Shoda dat a predikce je tím lepší, čím blíže je  $X_2$  nule. V obrázcích 25 až 30 vykreslujeme  $X_2$  v závislosti na  $\eta_{\text{bot}}$  a  $\eta_{\text{top}}$  v řezech s konstantním  $\eta_{\text{top}}$ . V horní části obrázku vykreslujeme tvar kráteru (vpravo) a jeho spektrum (vlevo) před začátkem relaxace (černá barva) a v čase  $t$  (červená barva).

Nejprve předpokládáme dokonalou znalost spektra topografie před začátkem relaxace  $\{h_j^{\text{obs}}(0)\}_{j=0}^{j_{\text{max}}}$  i po ní  $\{h_j^{\text{obs}}(t)\}_{j=0}^{j_{\text{max}}}$  a doby relaxace  $t$ . Rozlišení obrácené úlohy zkoumáme pro dva průběhy viskozity. V obou případech předpokládáme dobu relaxace 100 My, ale v jednom je po této době kráter znatelně relaxovaný (obr. 25) a v druhém případě se tvar kráteru prakticky nezměnil (obr. 26). Pro znatelně relaxovaný kráter lze obrácenou úlohou vyloučit modely, ve kterých relaxace probíhá příliš rychle nebo příliš pomalu. Zůstane určitá skupina modelů, pro které je  $X_2$  poměrně malé a ze kterých prakticky nelze vybrat jeden nejlepší model, protože dochází k přelévání zejména mezi  $\eta_{\text{bot}}$  a  $d_{\text{mid}}$ . Pro málo relaxovaný kráter lze obrácenou úlohou pouze vyloučit modely, ve kterých relaxace probíhá příliš rychle.

V obrázku 27 studujeme vliv chyb v datech. Předokládáme dokonalou znalost  $\{h_j^{\text{obs}}(t)\}_{j=0}^{j_{\text{max}}}$  a doby relaxace  $t$ , ale topografii před relaxací  $\{h_j^{\text{obs}}(t)\}_{j=0}^{j_{\text{max}}}$  známe s určitou relativní chybou. Tento způsob zašumění dat se projeví zploštěním minim  $X_2$  ve srovnání s obrázkem 25. Celkový tvar  $X_2$  se jinak nedeformuje, protože používáme náhodný šum.

Vliv chyby v délce relaxace  $t$  popisuje škálovací vztah (32), pro větší názornost jej znovu zkoumáme i numericky. Předpokládáme, že skutečná doba relaxace dat  $t$  je desetkrát kratší (obr. 28), respektive desetkrát delší (obr. 29), než doba relaxace použitá při výpočtu predikované topografie. Minima  $X_2$  nalezneme pro modely s viskozitou desetkrát vyšší, respektive desetkrát nižší, než je viskozita materiálu v modelu, pro který jsou napočítaná data.

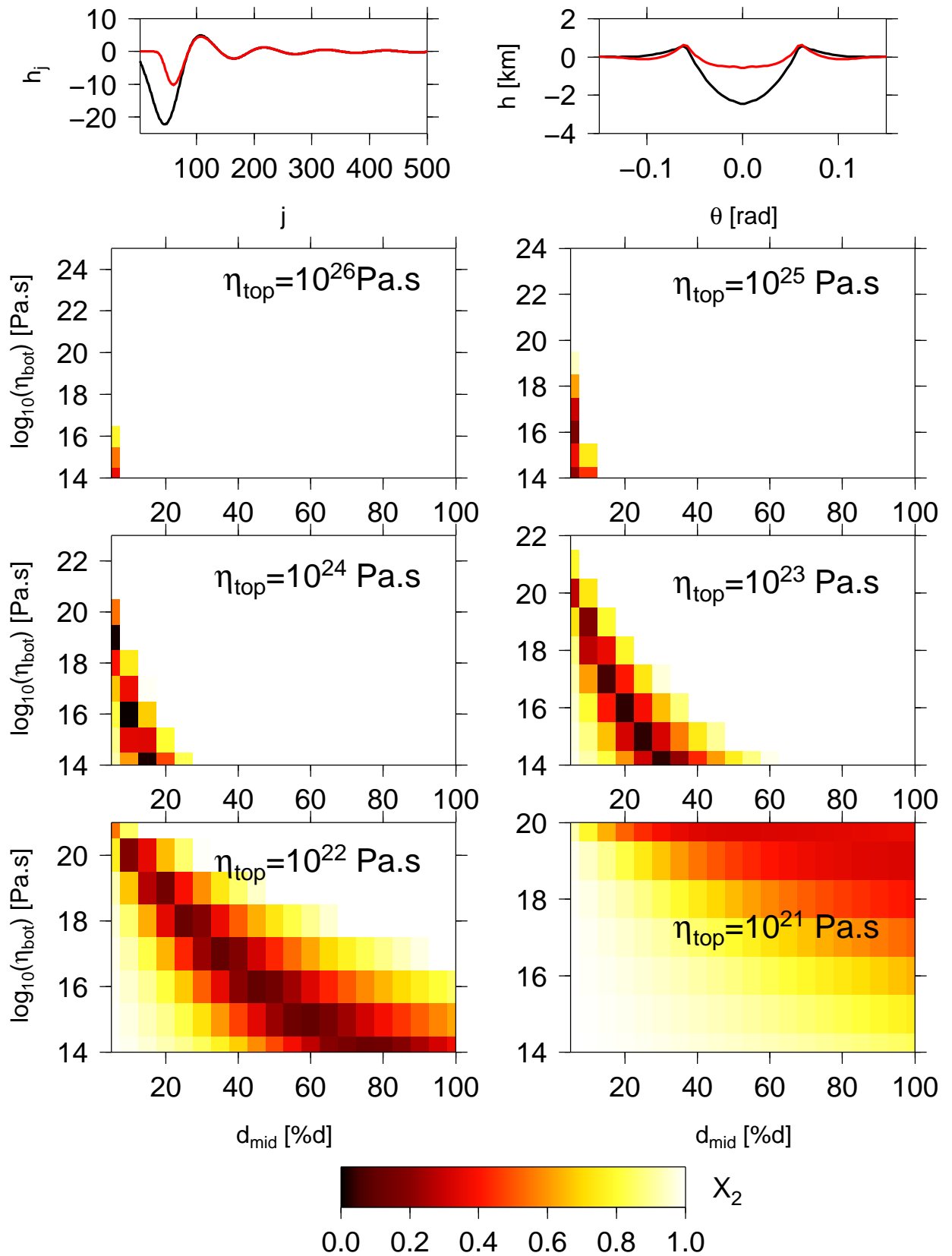
Protože topografie na nízkých stupních  $j$  relaxuje rychleji než na vysokých stupních, posílíme vliv nízkých stupňů úpravou kritéria shody dat a predikce

$$\tilde{S}_2 = \sqrt{\sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{h_j^{\text{obs}} - h_j^{\text{pred}}}{j} \right)^2} \quad (69)$$

a zkoumáme rozlišení pro toto kritérium. V obrázku 30 vykresluje hodnotu

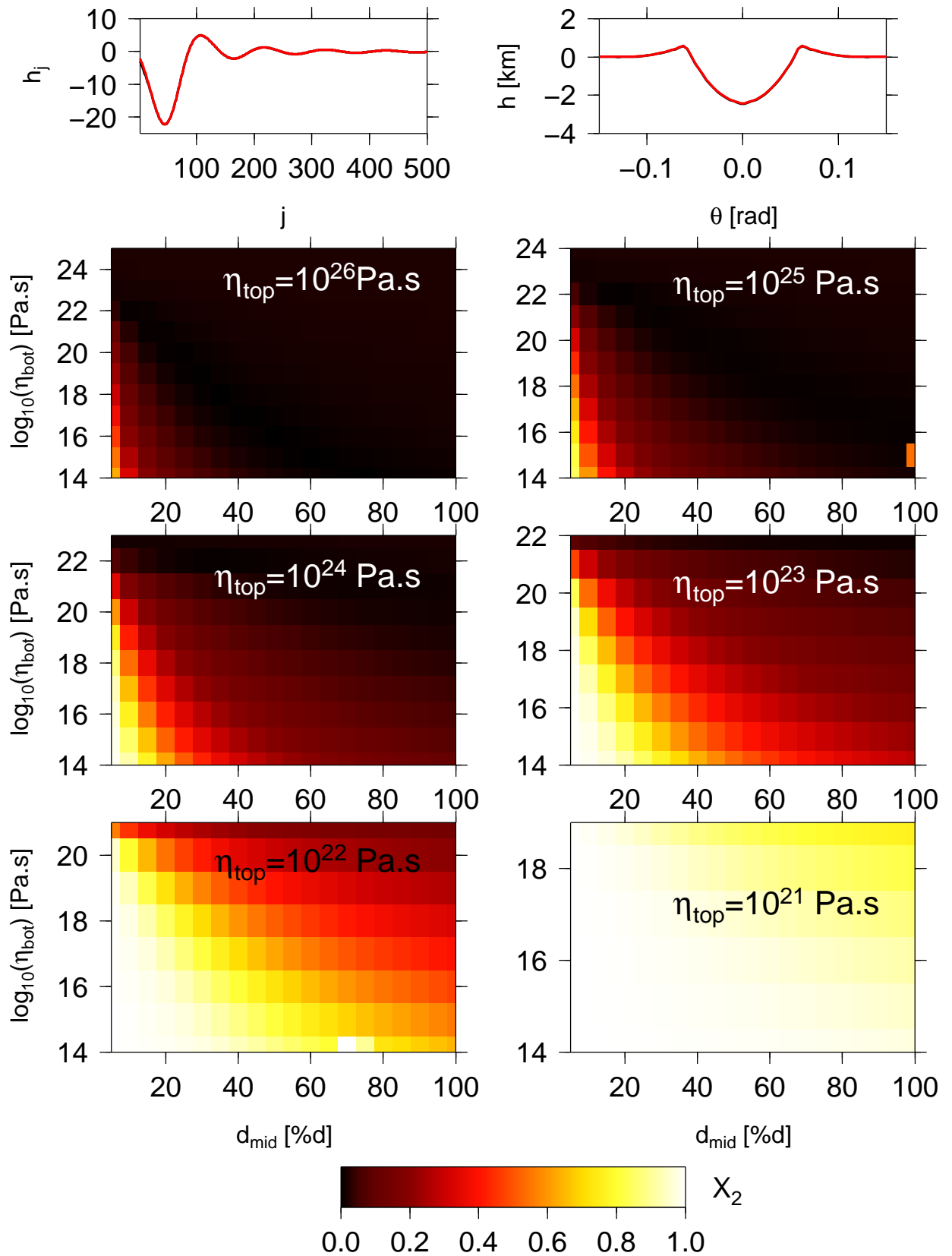
$$\tilde{X}_2 = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^{j_{\text{max}}} \left( \frac{h_j^{\text{obs}}(t) - h_j^{\text{pred}}(t)}{j} \right)^2}{\sum_{j=0}^{j_{\text{max}}} \left( \frac{h_j^{\text{obs}}(t)}{j} \right)^2}}, \quad (70)$$

pro stejná data jako v obrázku 25. Posílením vlivu nízkých stupňů se minima zúžila, ale přelévání mezi jednotlivými parametry se odstranit nepodařilo.



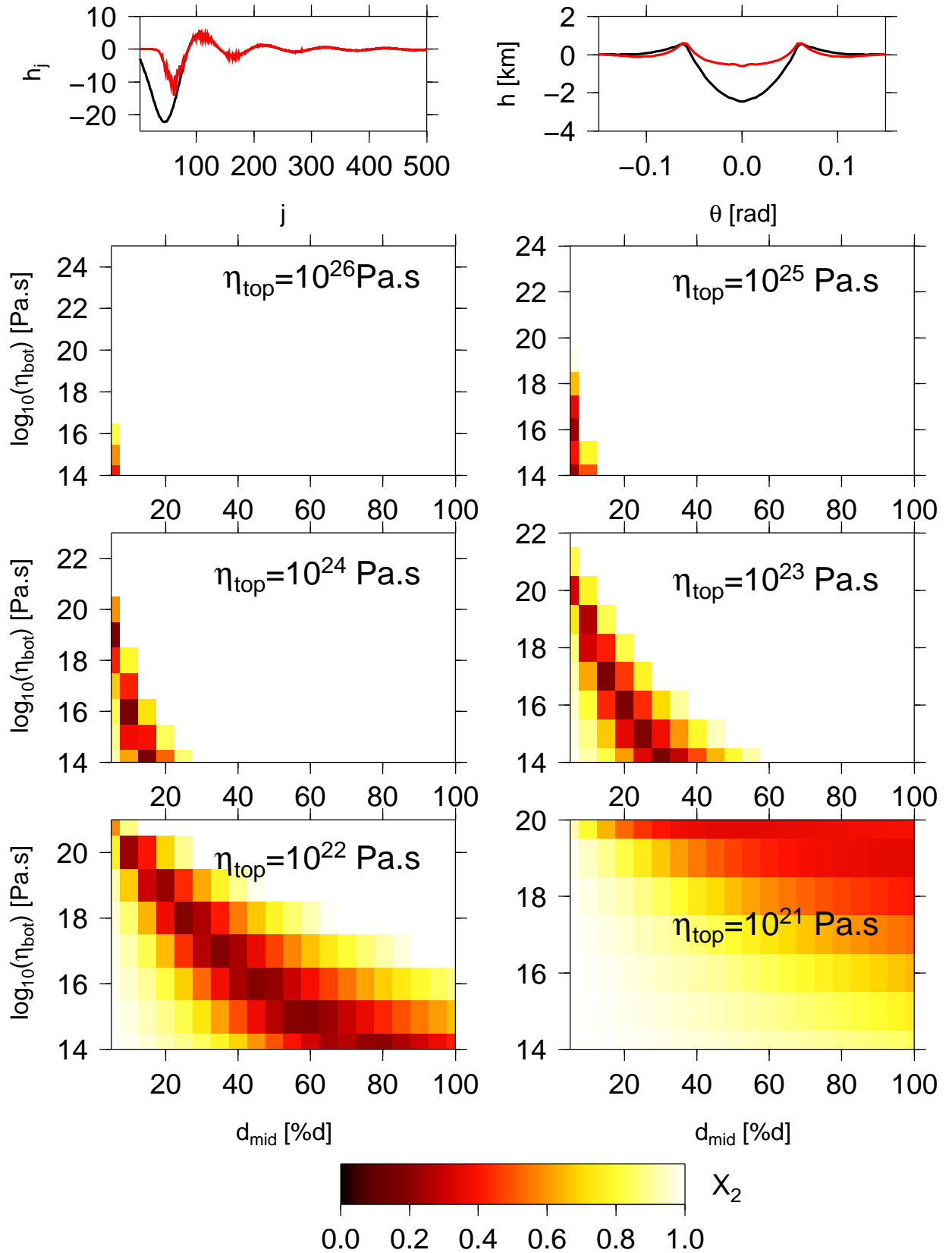
Obrázek 25: Obrácená úloha – relaxovaný kráter

Parametry modelu:  $\eta_{\text{top}} = 10^{24}$  Pa.s,  $\eta_{\text{bot}} = 10^{16}$  Pa.s,  $d_{\text{mid}} = 0,1$   $d = 10$  km,  $t = 100$  My



Obrázek 26: Obrácená úloha – nerelaxovaný kráter

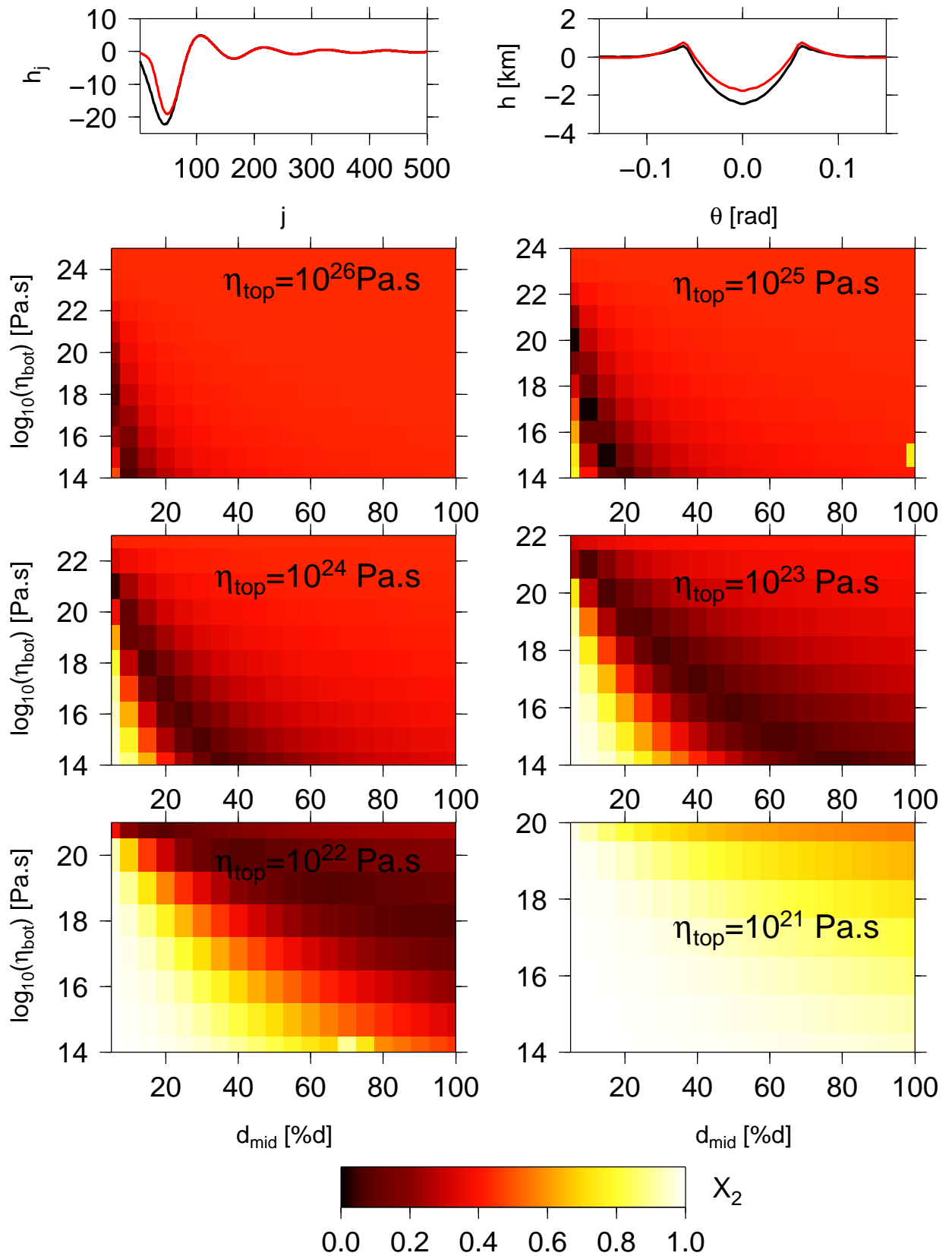
Parametry modelu:  $\eta_{\text{top}} = 10^{26}$  Pa.s,  $\eta_{\text{bot}} = 10^{16}$  Pa.s,  $d_{\text{mid}} = 0,5 d = 50\text{km}$ ,  $t = 100\text{My}$



Obrázek 27: Obrácená úloha – relativní chyba v  $\{h_j^{\text{obs}}(t)\}_{j=0}^{j_{\text{max}}}$

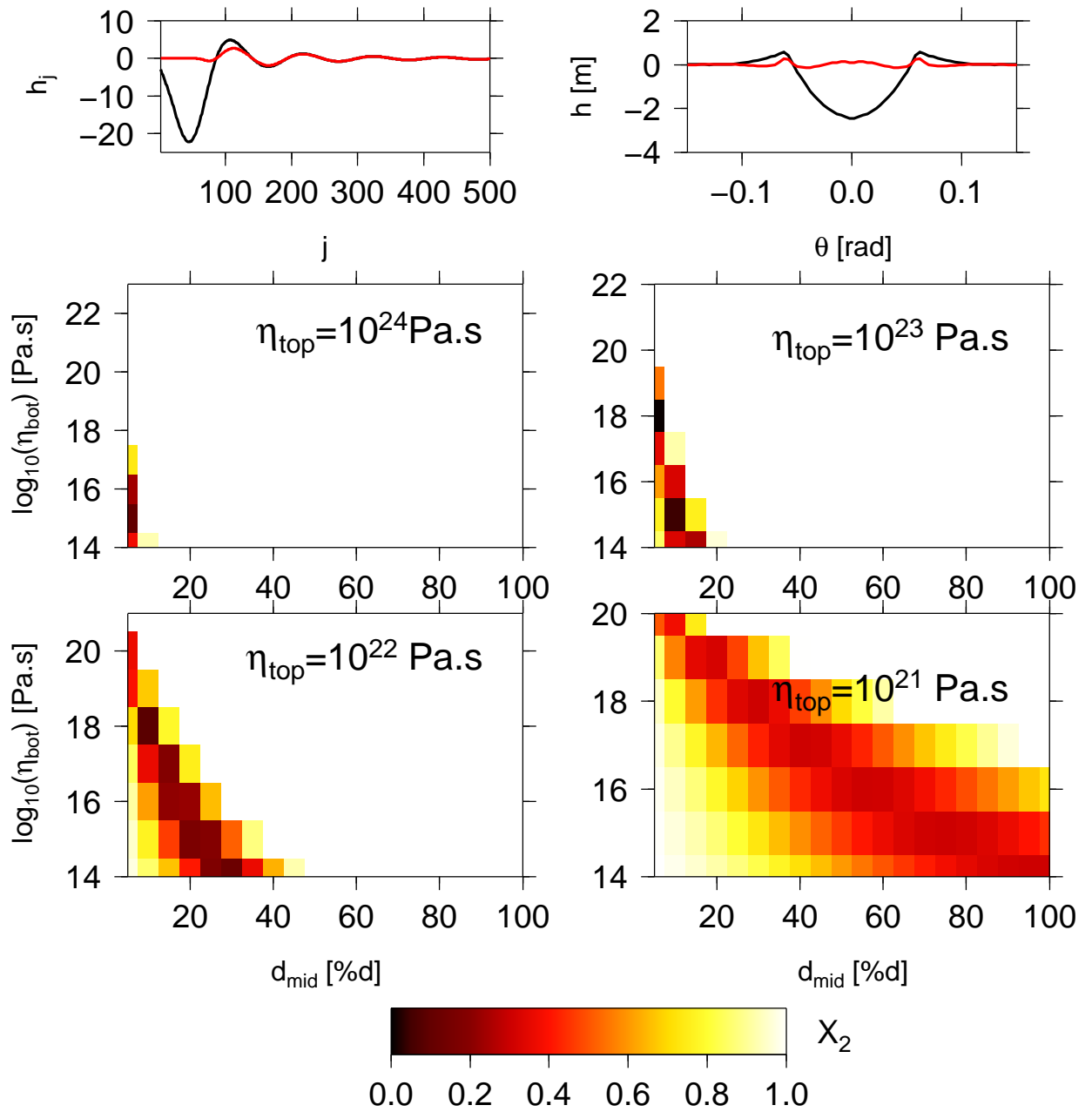
Parametry modelu:  $\eta_{\text{top}} = 10^{24}$  Pa.s,  $\eta_{\text{bot}} = 10^{16}$  Pa.s,  $d_{\text{mid}} = 0,1 d = 10\text{km}$ ,  $t = 100\text{My}$





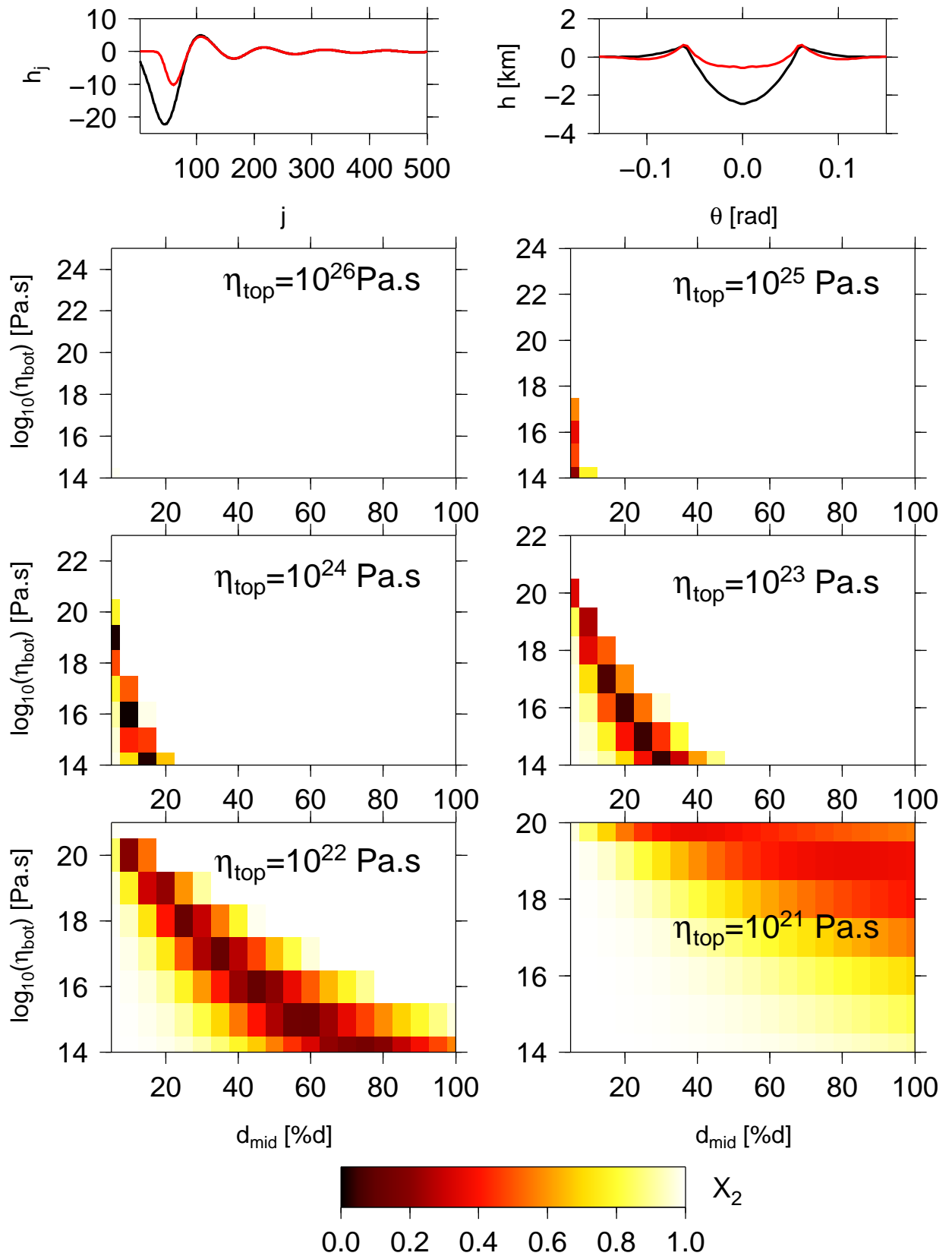
Obrázek 28: Obrácená úloha – desetkrát kratší čas relaxace

Parametry modelu:  $\eta_{\text{top}} = 10^{24}$  Pa.s,  $\eta_{\text{bot}} = 10^{16}$  Pa.s,  $d_{\text{mid}} = 0,1 d = 10\text{km}$ ,  $t_{\text{obs}} = 10\text{My}$ ,  $t_{\text{pred}} = 100\text{My}$



Obrázek 29: Obrácená úloha – desetkrát delší čas relaxace

Parametry modelu:  $\eta_{\text{top}} = 10^{24}$  Pa.s,  $\eta_{\text{bot}} = 10^{16}$  Pa.s,  $d_{\text{mid}} = 0,1 d = 10\text{km}$ ,  $t_{\text{obs}} = 1\text{Gy}$ ,  $t_{\text{pred}} = 100\text{My}$



Obrázek 30: Obrácená úloha – posílení nízkých stupňů

Parametry modelu:  $\eta_{\text{top}} = 10^{24}$  Pa.s,  $\eta_{\text{bot}} = 10^{16}$  Pa.s,  $d_{\text{mid}} = 0,1$   $d = 10$  km,  $t = 100$  My

## 6.5 Obrácená úloha na reálných datech

Obdobný postup jako v předchozí kapitole použijeme ke zpracování reálných topografických dat. Využijeme závěrů studie [4, 22], ve které je uvedeno, kolikrát je poměr průměru kráteru  $D_k$  k hloubce kráteru  $h_k$  pro vybrané krátery na Europě větší než pro srovnatelně velké krátery na měsících Ganymed a Callisto. Relaxaci kráterů na Ganymedu a Callistu považujeme za zanedbatelnou a zároveň předpokládáme, že krátery na nich vznikaly za podobných podmínek jako na Europě a měly proto původně podobný tvar. Srovnáním  $D_k : h_k$  pro daný kráter na Europě s  $D_k : h_k$  pro krátery se stejným průměrem na Ganymedu a Callistu získáme veličinu  $h_j(t)/h_j(0)$  pro stupeň  $j$  odpovídající vlnové délce  $\lambda_j = D_k$ . Dobu relaxace odhadujeme pomocí předpokládaného stáří povrchu 30 až 70 My [3]. Předpokládáme, že doba relaxace je kratší než stáří povrchu, a za konkrétní hodnoty volíme  $t = 10$  My a  $t = 50$  My. Tloušťku ledové vrstvy předepisujeme 30 km a na spodním rozhraní předpokládáme nulovou sílu.

Speciálně jsme se zaměřili na krátery Govannan, Mannann'an a Pwyll. Průměr kráteru Govannan je přibližně 10 km a  $D_k : h_k \approx 30$ , což je čtyřikrát více než pro srovnatelně velké krátery na Ganymedu a Callistu. Stupeň  $j$  odpovídající vlnové délce 10 km je pro Europu přibližně 500, takže předpokládáme, že platí  $h_{j=500}(t) = 0,25 h_{j=500}(0)$ . Obdobný postup použijeme pro kráter Mannaann'an, jehož průměr je 20 km ( $j \approx 250$ ) a  $D_k : h_k \approx 200$  což je dvacetkrát více než pro krátery na Ganymedu a Callistu. Předpokládáme tedy, že platí  $h_{j=250}(t) = 0,05 h_{j=250}(0)$ . Kráter Pwyll má průměr mírně větší než kráter Mannaann'an, přibližně 25 km ( $j \approx 200$ ), a  $D_k : h_k \approx 100$ . Kráter Pwyll je tedy pravděpodobně méně relaxovaný než kráter Mannaann'an, ačkoliv je větší; vychází  $h_{j=200}(t) = 0,1 h_{j=200}(0)$ . Vysvětlením může být nízké stáří kráteru, kterému napovídají pozorované paprsky hmoty vyvržené při impaktu, které jsou typické pro velmi mladé krátery [4]. Na Europě je mnoho malých sekundárních kráterů a dalších útvarů, které nejsou příliš relaxované. Příkladem málo relaxované topografie je centrální masiv v kráteru Pwyll, jehož rozměr 8 krát 4 km odpovídá přibližně stupni  $j = 1000$ . Topografii na tomto stupni proto předpokládáme málo relaxovanou,  $h_{j=1000}(t) = (0,5 \div 1) h_{j=1000}(0)$ .

V obrázcích (31) až (34) vykreslujeme modifikovanou sumu  $X_2$

$$X_2 = \sqrt{\frac{\sum_j (h_j^{\text{obs}}(t) - h_j^{\text{pred}}(t))^2}{\sum_j (h_j^{\text{obs}}(t))^2}}, \quad (71)$$

ve které sčítáme přes stupně  $j$ , pro které známe  $h_j(t)/h_j(0)$  na základě pozorování.

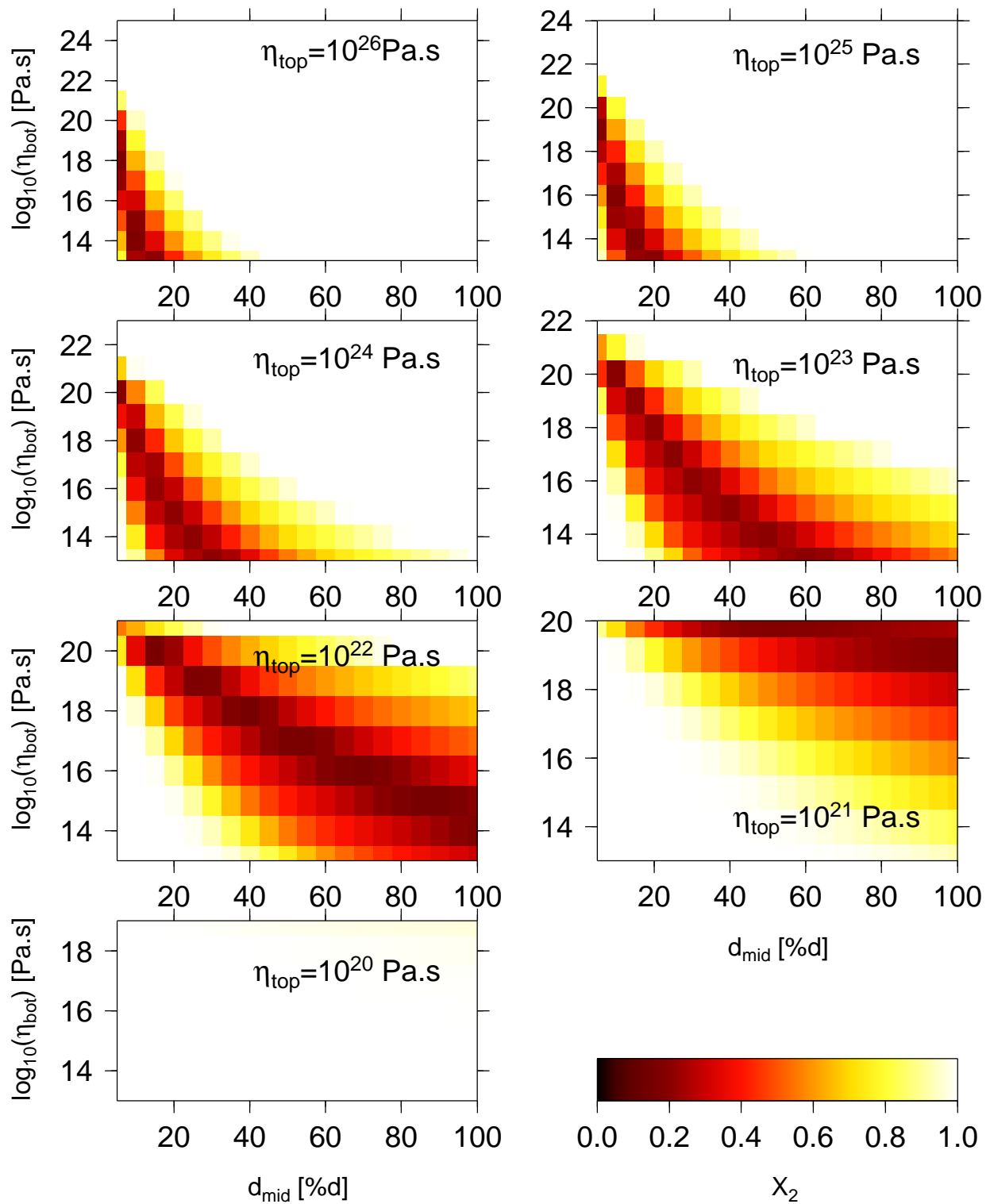
Některé modely, pro které jsme formálně vypočetli relaxaci a pro které vykreslujeme  $X_2$ , nejsou fyzikálně přípustné, protože mají příliš nízké Rayleighovo číslo v části, kterou považujeme za konvektivní. Aby v ledové vrstvě na Europě probíhala konvekce, musí být viskozita na spodu vrstvy nižší než  $10^{15}$  Pa s pro tloušťku vrstvy  $d \approx 25$  km [1]. Za přípustné proto pokládáme pouze modely s  $\eta_{\text{bot}} \leq 10^{16}$  Pa s a s dostatečnou tloušťkou  $d - d_{\text{mid}}$ .

V obrázku 31 je vykresleno  $X_2$  pro dobu relaxace  $t = 10$  My a v obrázku 32 pro dobu relaxace  $t = 50$  My. Data  $h_j(t)/h_j(0)$  předepisujeme pro stupně  $j = 200, 250, 500$  a 1000, přestože data pro stupně 200 a 250 pravděpodobně odpovídají různým dobám relaxace. Výsledek obrácené úlohy srovnáváme s modelem ledové vrstvy na Europě [1], který předpokládá silnou konvektivní vrstvu ( $d_{\text{mid}} = (0,35 \div 0,50)d$ ) nad konvektivní

vrstvou s viskozitou menší než  $10^{15}$  Pa s. Model s malým  $X_2$ ,  $\eta_{\text{bot}} \leq 10^{15}$  Pa s a silnou konduktivní vrstvou jsme našli pro  $\eta_{\text{top}} = 10^{23}$  Pa s při  $t = 10$  My a pro  $\eta_{\text{top}} = 10^{24}$  Pa s při  $t = 50$  My.

Malé hodnoty  $X_2$  dále najdeme pro konduktivní model s  $\eta_{\text{top}} = 10^{22}$  Pa s a  $\eta_{\text{bot}} = 10^{15}$  Pa s při  $t = 10$  My a pro model s  $\eta_{\text{top}} = 10^{23}$  Pa s a  $\eta_{\text{bot}} = 10^{14}$  Pa s při  $t = 50$  My. Další konduktivní modely s malým  $X_2$  mají viskozitu na spodní hranici výrazně vyšší než je viskozita tání ledu, což je v rozporu s předpokladem vodního oceánu pod ledovou vrstvou.

V obrázcích 33 až 35 zkoumáme vliv znalosti relaxace topografie na jednotlivých stupních na výsledek obrácené úlohy. Nejprve předpokládáme pouze znalost relaxace na stupních  $j = 250, 500$  a  $1000$ . Vyřadíme tedy stupeň 200, který odpovídá relaxaci kráteru Pwyll, jehož stáří je pravděpodobně nižší než stáří ostatních kráterů. Výsledný obrázek 33 se příliš neliší od obrázku 32, který je vypočtený pro stejné parametry a se znalostí relaxace topografie na stupni 200. Dále zkoumáme vliv různých odhadů relaxace topografie na stupni 1000. Ze srovnání obrázků 33, 34 a 35 je vidět, že významný rozdíl je v hloubce minim  $X_2$ . Předpokládáme-li větší relaxaci na stupni 1000 (obr. 33), nelze data vystihnout námi předepsaným průběhem viskozity.



Obrázek 31: Obrácená úloha — doba relaxace 10 My

Použitá data:

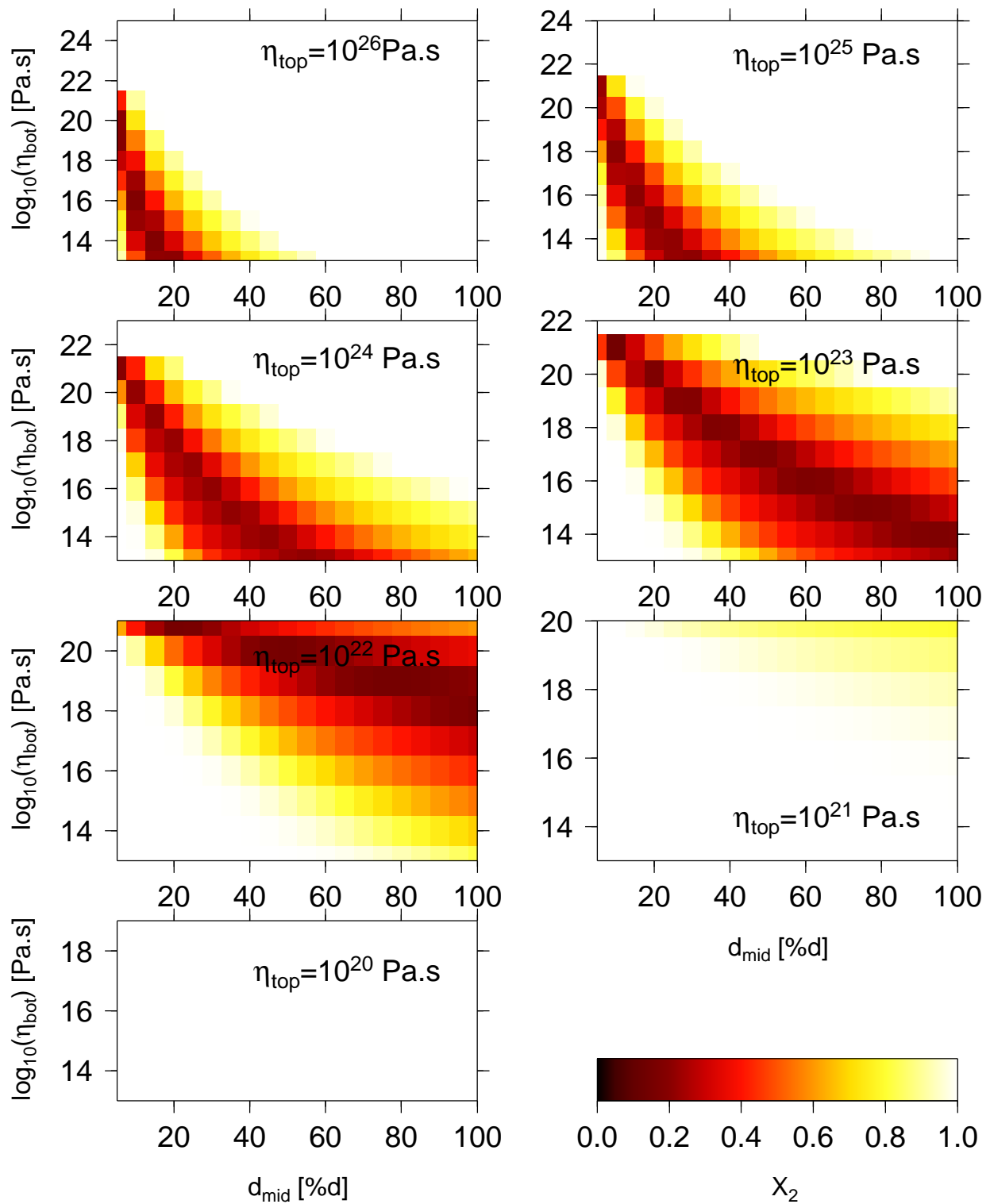
$t = 10 \text{ My}$

$h_{j=200}(t) = 0, 1h_{j=200}(0)$

$h_{j=250}(t) = 0, 05h_{j=250}(0)$

$h_{j=500}(t) = 0, 25h_{j=500}(0)$

$h_{j=1000}(t) = 0, 75h_{j=1000}(0)$



Obrázek 32: Obrácená úloha — doba relaxace 50 My

Použitá data:

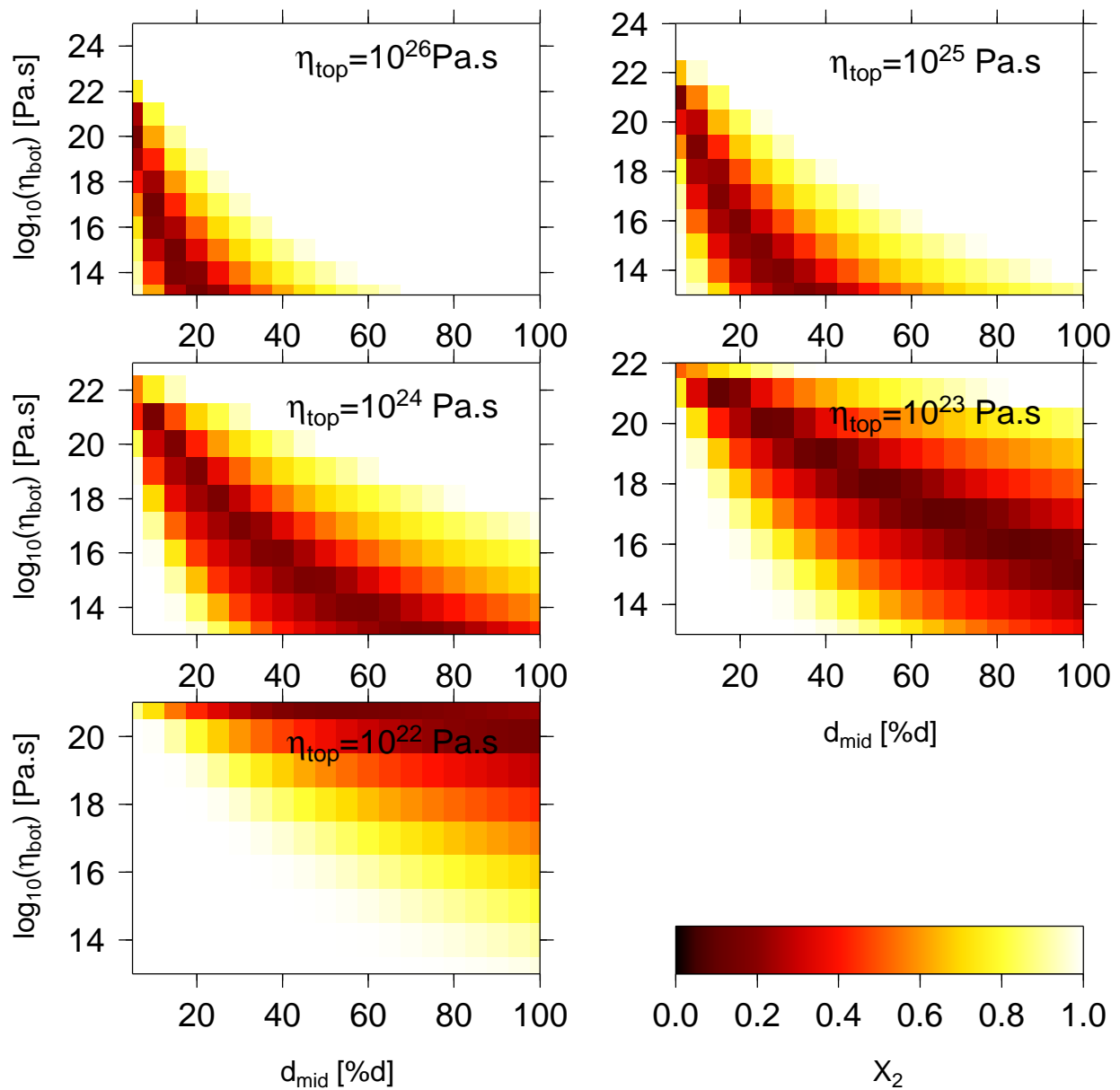
$$t = 50 \text{ My}$$

$$h_{j=200}(t) = 0, 1h_{j=200}(0)$$

$$h_{j=250}(t) = 0, 05h_{j=250}(0)$$

$$h_{j=500}(t) = 0, 25h_{j=500}(0)$$

$$h_{j=1000}(t) = 0, 75h_{j=1000}(0)$$



Obrázek 33: Obrácená úloha – bez kráteru Pwyll

Použitá data:

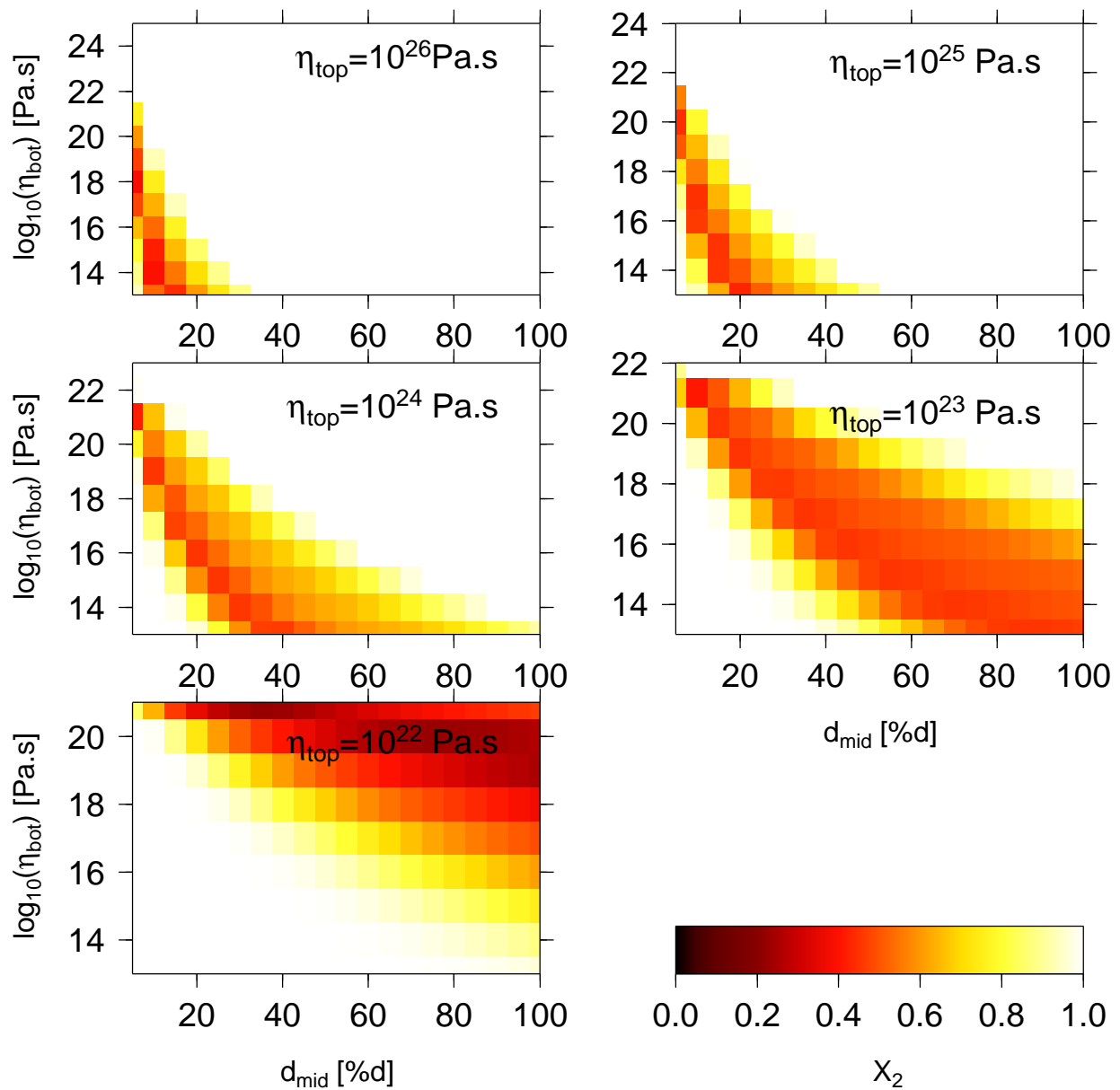
$t = 50 \text{ My}$

$h_{j=250}(t) = 0,05 h_{j=250}(0)$

$h_{j=500}(t) = 0,25 h_{j=500}(0)$

$h_{j=1000}(t) = 0,75 h_{j=1000}(0)$





Obrázek 34: Obrácená úloha – větší relaxace topografie na stupni 1000

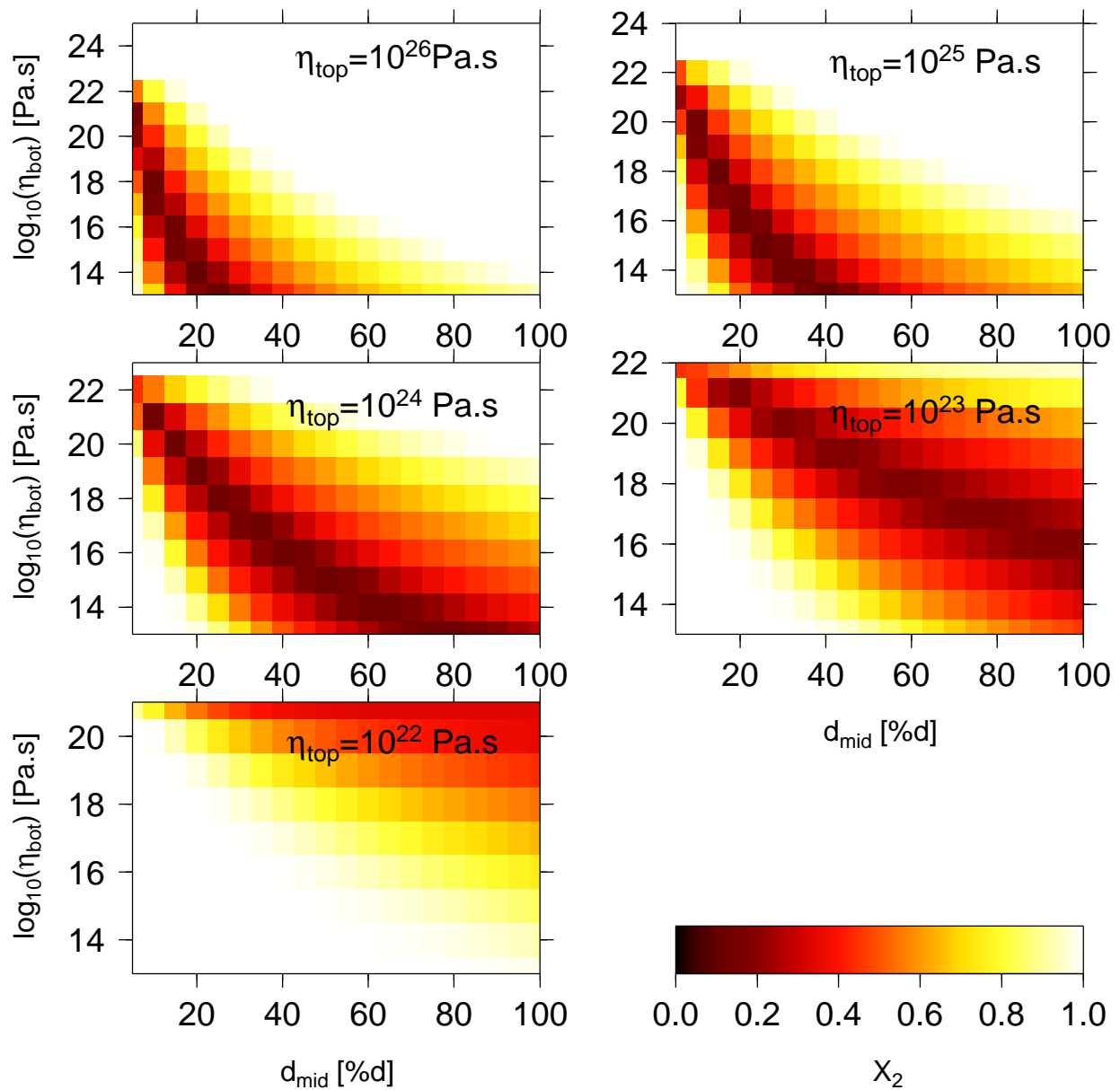
Použitá data:

$t = 50$  My

$h_{j=250}(t) = 0,05 h_{j=250}(0)$

$h_{j=500}(t) = 0,25 h_{j=500}(0)$

$h_{j=1000}(t) = 0,5 h_{j=1000}(0)$



Obrázek 35: Obrácená úloha – zanedbatelná relaxace topografie na stupni 1000

Použitá data:

$$t = 50 \text{ My}$$

$$h_{j=250}(t) = 0,05 h_{j=250}(0)$$

$$h_{j=500}(t) = 0,25 h_{j=500}(0)$$

$$h_{j=1000}(t) = h_{j=1000}(0)$$

## 7 Diskuze

Výpočet relaxace použitou metodou se opírá o mnoho předpokladů. Některé z nich zřejmě pro daný problém platí velmi dobře, jiné platí jen v některých případech nebo jsou diskutabilní. Za předpoklady, které jsou při relaxaci topografie velmi dobře splněny, považujeme zanedbatelný gravitační účinek topografie, konstantní a radiální vektor gravitačního zrychlení, homogenitu ledové vrstvy a zanedbatelnou setrvačnou sílu.

Vhodnost aproximace topografie plošnou hustotou je omezená na mělkou topografii s malým sklonem. Topografie by měla být mělká ve srovnání s tloušťkou  $d_{\text{mid}}$ , v opačném případě by průběh teploty a viskozity nebyl přibližně radiální nebo by byla skutečná tloušťka konduktivní části ledové vrstvy různá v různých místech. Malé sklony topografie jsou pro ledové měsíce splněny, pohybují se typicky v řádu stupňů. Poměrně velké sklony topografie mají zpravidla nerelaxované jednoduché krátery, u kterých je typický poměr průměru valu k hloubce kráteru přibližně 5:1, tedy sklon poblíž valu přibližně  $25^\circ$  [3]. Ještě větší sklony topografie lze očekávat při počátečním stádiu vzniku kráteru, při kterém jsou ale dominantní jiné procesy než relaxace topografie a které zde nemodelujeme.

Při výpočtech také předpokládáme radiálně symetrický model ledového měsíce. To sice neodpovídá realitě, ale jak jsme ukázali v kapitole 6.3, relaxace kráteru je lokální děj a jeho průběh závisí přednostně na podmínkách pod kráterem. Proto výsledky pro radiálně symetrický model ledového měsíce považujeme za platné i pro složitější modely, pokud se jejich parametry mění pozvolna. Dále při výpočtech uvažujeme průběh viskozity neměnný v čase, což samozřejmě nemusí pro skutečné ledové měsíce platit. Zkoumání časových změn průběhu viskozity nebo jiných parametrů je nad rámec této práce.

Diskutabilním předpokladem je volba maxwellovské reologie a vztahu mezi teplotou a viskozitou  $\eta(T)$ . Při použití vztahu (66) vychází pro teplotu 100 K, charakteristickou pro povrch měsíců Jupiteru, viskozita přibližně  $10^{30}$  Pa s a pro teplotu 70 K, charakteristickou pro povrch měsíců Saturnu, dokonce více než  $10^{40}$  Pa s. Tyto hodnoty viskozity jsou zřejmě nerealistické a relaxace topografie by pro ně prakticky neprobíhala ani na nízkých stupních. Vysvětlením může být přítomnost povrchové vrstvy regolitu, který by silně tepelně izoloval a zároveň by nebránil deformaci. Regolit silný několik set metrů by způsobil efektivní nárůst povrchové teploty o desítky stupňů [23]. Proti tomuto vysvětlení stojí předpoklad, že zdrojem regolitu je materiál uvolněný při vzniku kráterů. Na Europě a v oblastech bez kráterů na Enceladu by proto měla být vrstva regolitu tenká nebo téměř žádná a efekt by měl být zanedbatelný. Dalším možným vysvětlením je přítomnost příměsí v ledu, které by snížily viskozitu při dané teplotě. Speciálně se uvažuje o přítomnosti amoniaku [1]. Roli může hrát také struktura ledové vrstvy na větších prostorových škálách, například její rozlámání.

Viskozitu jsme předepsali nezávislou na napětí — předpokládáme tedy lineární reologii ledu, přestože reologie ledu je obecně mocninná. Lineární reologii považujeme za první přiblížení skutečného chování a jedná se o extrapolaci výsledků laboratorních měření pro velmi pomalé děje a malá napětí [9]. Při použití mocninné reologie by došlo k dalšímu zvýšení efektivní viskozity pro malá napětí a naopak snížení efektivní viskozity pro vyšší napětí. Relaxace topografie by pravděpodobně probíhala zpočátku rychleji než v našem modelu a později by se naopak zpomalila. Vypočteme-li efektivní střížné napětí  $\sigma_{\text{eff}}$  (v kartézské bázi platí  $\sigma_{\text{eff}}^2 = \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{D}_{ij}\mathbf{D}_{ij}$ ), můžeme jej srovnávat

s napětím měřeným v laboratorních experimentech [9]. Na začátku relaxace ve svrchní vrstvě dosahovalo  $\sigma_{\text{eff}}$  maximálně 1 MPa pro kráter s  $h_k = 2,5$  km. S hloubkou vrstvy, ve které napětí vyčíslujeme, a se zmenšující se výškou topografie toto napětí rychle klesá. Pro měřená napětí menší než 1 MPa vychází z laboratorních experimentů rychlost deformace úměrná první až druhé mocnině napětí [1]. Zdá se tedy, že za daných podmínek je použitá lineární reologie poměrně dobrou aproximací.

Výsledky obrácené úlohy na syntetických datech pro Enceladus ukazují, že i pro velmi přesná data nelze z relaxace topografie jednoznačně určit průběh viskozity s hloubkou. Najdeme vždy celou řadu modelů, ve kterých bude relaxace probíhat podobně. Jestliže data nejsou přesná, nelze z těchto modelů vybrat jeden nejlepší. Můžeme nicméně ověřit, jestli je pozorovaná topografie v souladu s průběhem viskozity používaným jinými autory nebo odvozeným jinými metodami. Enceladus je pro podobnou studii vhodný, protože na jeho povrchu najdeme velké množství relaxovaných i nerelaxovaných kráterů různých velikostí. Srovnání spektra stejně velkého relaxovaného a nerelaxovaného kráteru poskytuje přímo odhad veličiny  $h_j(t)/h_j(0)$  potřebný pro řešení obrácené úlohy. Krátery na Enceladu jsou navíc většinou jednoduché, a proto je jejich tvar teoreticky dobře popsitelný. Mezní průměr kráteru, od kterého dochází ke zhroucení valů a vzniku komplexní struktury, je vzhledem k nízkému gravitačnímu zrychlení na Enceladu 15 až 25 km [3]. Popisu kráterů na Enceladu se bohužel zatím nevěnovalo mnoho pozornosti a data potřebná k výpočtu obrácené úlohy nejsou k dispozici.

Určení míry relaxace kráterů na Europě je složitější problém než pro krátery na Enceladu, protože velké krátery na Europě mají komplexní strukturu. Na Europě je díky většímu gravitačnímu zrychlení mezní průměr pro přechod od jednoduchých ke komplexním kráterům pouze 2 až 3 km. Jednoduché krátery, které jsou vhodné ke studiu relaxace, jsou proto na fotografiích ze sond rozlišitelné, ale určení jejich tvaru už není příliš přesné. Pro parametry Europy jsme provedli obrácenou úlohu na reálných datech, kterými byla relaxace topografie  $h_j(t)/h_j(0)$  na několika stupních  $j$ , kterou jsme odhadli na základě prací [4, 22]. K nalezení minima funkce  $X_2$  stačily hodnoty relaxace pro pouze tři stupně  $j$ , protože mezi nimi byl stupeň s výrazně relaxovanou topografií i s málo relaxovanou topografií. Předpokladu silné konduktivní vrstvy nad konvektivní vrstvou s nízkou viskozitou [19] vyhovují modely s viskozitou na povrchu  $10^{23}$  Pa s až  $10^{24}$  Pa s. Dobrou shodu s daty získáme také pro několik konduktivních modelů, tj. modelů s  $d = d_{\text{mid}}$ , a dále pro modely s vyšší viskozitou na povrchu a s menší tloušťkou konduktivní vrstvy.

Ukázalo se, že nejistota v topografických datech a v době relaxace není zásadní. Obě nejistoty lze zmenšit statistickým zpracováním dat a obě lze navíc snadno numericky zkoumat. Vliv chyby v určení času je dokonce popsán analytickým škálovacím vztahem (32). Největším problémem použitého přístupu zůstává volba reologie ledu v extrémních podmínkách ledových měsíců — použitá lineární reologie je sice zřejmě pro popis relaxace topografie vhodná, ale chybu vzniklou touto aproximací je obtížné kvantifikovat.

## 8 Závěr

V této práci jsme studovali relaxaci topografie ledových měsíců. Dosažené výsledky lze shrnout do následujících bodů:

1. Pro model viskózního materiálu (newtonovské kapaliny) a viskoelastického materiálu (maxwellovského tělesa) jsme odvodili analytické škálovací vztahy a bezrozměrnou formulaci rovnic popisujících relaxaci topografie.
2. Ukázali jsme, že relaxace topografie ve viskózním a viskoelastickém materiálu se pro reálný průběh viskozity významně liší. Viskoelastický popis považujeme za lepší přiblížení skutečného chování a další výsledky jsme vypočítali za použití tohoto popisu.
3. Uskutečnili jsme řadu numerických simulací relaxace pro modely s parametry měsíců Europa a Enceladus a s průběhem viskozity přibližně odpovídajícím vrstvě s konduktivní svrchní částí a konvektivní spodní částí. Výpočet jsme provedli ve spektrální oblasti a získali jsme křivky popisující relaxaci topografie na různých stupních sférického harmonického rozvoje. V prostorové oblasti jsme zkoumali posunutí a úhel otočení materiálu při relaxaci osově symetrického kráteru.
4. Citlivost relaxace na parametry průběhu viskozity s hloubkou demonstruje obrácená úloha na syntetických datech pro model s parametry Enceladu. Ukázalo se, že existuje celá třída modelů, ve kterých relaxace probíhá podobně. Mezi těmito modely nelze bez dodatečných informací zvolit ten, pro který byla získána topografická data.
5. Pro model s parametry Europy jsme formulovali obrácenou úlohu na reálných datech, kterými byl odhad relaxace několika kráterů na Europě. Získali jsme řadu modelů s různým průběhem viskozity s hloubkou, které data vystihují. Když vyloučíme fyzikálně nepřípustné modely, výběr modelů, které jsou v souladu s daty, se značně zúží. Srovnáme-li výsledky s modelem konvekce v ledové vrstvě Europy [19], získáme shodu pro viskozitu na povrchu přibližně  $10^{23}$  Pa s až  $10^{24}$  Pa s v závislosti na době relaxace.

Vhodným rozšířením práce by bylo použití nelineární reologie ledu a aplikace na reálná topografická data. Jako vhodná topografická data se jeví krátery na Enceladu, protože jejich tvar před relaxací lze dobře popsat.

## Literatura

- [1] Tobie G. (2003): Impact du chauffage de marée sur l'évolution géodynamique d'Europe et de Titan, doktorská disertační práce, Université Paris 7.
- [2] Zimmer C., Khurana K. K., Kivelson M. G. (2000): Subsurface Oceans on Europa and Callisto: Constraints from Galileo Magnetometer Observations, *Icarus* **147**, 329–347.
- [3] Zahnle K., Schenk P., Levison H., Dones L. (2003): Cratering rates in the outer Solar system, *Icarus* **163**, 263-289.
- [4] Moore J. M., Asphaug E., Sullivan R. J., Klemaszewski J. E., Bender K. C., Greeley R., Geissler P. E., McEwen A. S., Turtle E. P., Phillips C. B., Tufts B. R., Head J. W. III, Pappalardo R. T., Jones K. B., Chapman C. R., Belton M. J. S., Kirk R. L., Morrison D. (1998): Large Impact Features on Europa: Results of the Galileo Nominal Mission, *Icarus* **135**, 127-145.
- [5] Thomas P. C., Burns J. A., Helfenstein R., Squyres S., Veverka J., Porco C., Turtle E. P., McEwen A., Denk T., Giese B., Roatsch T., Johnson T. V., Jacobson R. A. (2007): Shapes of the saturnian icy satellites and their significance, *Icarus* **190**, 573-584.
- [6] Tobie, G., Čadek, O. a Sotin, Ch. (2008): Solid tidal friction above a liquid water reservoir as the origin of the South Pole Hotspot on Enceladus, *Icarus*, 2008, v tisku.
- [7] Kirchoff M. R., Schenk P. (2008): Cratering records of saturnian satellites, *Lunar and Planetary Science XXXIX*.
- [8] Porco C. C., Helfenstein P., Thomas P. C., Ingersoll A. P., Wisdom J., West R., Neukum G., Denk T., Wagner R., Roatsch T., Kieffer S., Turtle E., McEwen A., Johnson T. V., Rathbun J., Veverka J., Wilson D., Perry J., Spitale J., Brahic A., Burns J. A., DelGenio A. D., Dones L., Murray C. D., Squyres S. (2006): Cassini observes the active south pole of Enceladus, *Science* **311** (5766), 1393-1401.
- [9] Durham W. B. a Stern L. A. (2001): Rheological properties of water ice — Applications to satellites of the outer planets, *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* **29**, 295-330.
- [10] Cathles L. M. (1975): *The Viscosity of the Earth's Mantle*, Princeton Univ. Press, Princeton.
- [11] Jones M. N. (1985): *Spherical Harmonics and Tensors for Classical Field Theory*, Research Studies Press Ltd.
- [12] Matas J. (1995): *Mantle Viscosity and Density Structure*, diplomová práce, MFF UK, Praha.
- [13] Varshalovich D. A., Moskalev A. N. a Khersonski V. K. (1989): *Quantum Theory of Angular Momentum*, World Scientific Publishing Co., Singapore.

- [14] Čadek, O. (1989): Spherical harmonic approach to the solution of the mantle stress problem, *Stud. Geophys. Geod.* **33**, 177-197.
- [15] Spada, G. (2008): ALMA, a FORTRAN program for computing the visco-elastic Love numbers of a spherically symmetric planet, *Comput. and Geosci.*, v tisku.
- [16] Fleitout, L. a Cailleaud, G. (2006): Post-glacial rebound and sea-levels, World Climate Research Programme Workshop, Paris, France, June 6-9, 2006.
- [17] Giunchi, C. a Spada, G. (2000): Postglacial rebound in a non-Newtonian spherical Earth, *Geophys. Res. Let.* **27** (14), 2065-2068.
- [18] Grott M., Sohl F. a Hussmann H. (2007): Degree-one convection and the origin of Enceladus's dichotomy, *Icarus* **191**, 203-210.
- [19] Tobie G. (2003): Tidally heated convection: Constraints on Europa's ice shell thickness, *Journal of Geophysical Research* **108**.
- [20] Melosh H. J., Ivanov B. A. (1999): Impact crater collapse, *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.* **27**, 385-415.
- [21] Langlais B., Thébaud E. a Quesnel Y. (2007): Magnetic Signature of Demagnetized Impact Craters: Tools to Time the Shutdown of the Dynamo on Mars?, *Lunar and Planetary Science XXXVIII*.
- [22] Schenk P. M. (1991): Ganymede and Callisto: Complex Crater Formation and Planetary Crusts, *Journal of Geophysical Research* **96** (E1), 15635-15664.
- [23] Passey Q. R. (1983): Viscosity of the lithosphere of Enceladus, *Icarus* **53**, 105-120.