MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Josef Vojáček

Součtové vzorce pro goniometrické funkce a jejich aplikace

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání–Informatika se zaměřením na vzdělávání

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Součtové vzorce pro goniometrické funkce a jejich aplikace

Autor: Josef Vojáček

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Těžištěm bakalářské práce jsou součtové vzorce pro goniometrické funkce, jejich odvození a aplikace. Práce je rozdělena do šesti kapitol. V první je uvedena definice goniometrických funkcí, jak se uvádějí na základní a střední škole, a definice pomocí funkcionálních rovnic a Taylorova polynomu. Druhá kapitola se zabývá důkazy součtových vzorců a v kapitole následující jejich využitím odvozujeme jiné vzorce z goniometrie. Čtvrtá kapitola popisuje výpočet sinu jednoho stupně, s využitím historických výpočtů al-Kášího, a tvorbu tabulky hodnot goniometrických funkcí. Poslední dvě kapitoly uvádějí algoritmus CORDIC, který se využívá pro výpočet hodnot goniometrických funkcí, a Eulerův vzorec společně s odvozením. Práce obsahuje dva programy v programovacím jazyce Python3, které jsou využity ve čtvrté a páté kapitole.

Klíčová slova: součtové vzorce, goniometrie, sinus, kosinus, Klaudios Ptolemaios

Title: Sum Formulas for Trigonometric Functions and Their Applications

Author: Josef Vojáček

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: The topic of my bachelor thesis are sum formulas for trigometric function and their applications. The thesis consists of six chapters. The first chapter defines trigonometric functions as they are introduced in elementary school and high school and definitions using functional equations and Taylor's polynom. The second chapter describes proofs of the functional equations. The following chapter derives different trigonometric formulas using the proofs of the functional equations. The fourth chapter focuses on calculating the sin of one degree according to al-Kashi's method and creating a chart of values of the trigonometric functions. The last two chapters introduce CORDIC algorithm which is used for calculating the values of the trigonometric functions and Euler's formula with its derivation. The thesis includes two programs in Python3 programming language which are used in the fourth and the fifth chapter.

Keywords: sum formulas, trigonometry, sine, cosine, Claudius Ptolemy

Můj velký dík patří v první řadě vedoucímu mé práce, panu doktoru Zdeňku Halasovi, za jeho velkou ochotu a trpělivost, s níž práci vedl. Dále bych chtěl poděkovat své rodině, která mě podporovala v mém snažení.

Obsah

Úvod

Součtové vzorce pro goniometrické funkce (dále jen součtové vzorce) jsou základním prvkem goniometrie, která je jednou z významných součástí matematiky již od starověku. Goniometrie se navíc využívá v mnoha oblastech matematiky i v ryze praktických odvětvích, jako je například astronomie, geodézie a navigace. První dvě kapitoly věnujeme definici goniometrických funkcí a odvození součtových vzorců. Další části popíší některé jejich aplikace. Cílem této bakalářské práce je ukázat způsoby odvození součtových vzorců a uvést několik jejich historických aplikací, a tím přispět k popularizaci goniometrie zejména součtových vzorců.

V úvodní části vyslovíme definice goniometrických funkcí, tak jak se uvádí na základní a střední škole. Ukážeme konstrukci grafu funkce sinus z její středoškolské definice. Seznámíme se rovněž s definicí goniometrických funkcí pomocí funkcionálních rovnic a ukážeme, jak důležitou roli hrají součtové vzorce v goniometrii.

Další část zaměříme na odvození součtových vzorců, odvodíme je hned několika způsoby. První z nich, který vychází z odvození uvedeného v učebnici pro střední školy [Od] je platný pro součet libovolných úhlů z oboru reálných čísel. Abychom ukázali, že odvození součtových vzorců není složité, a motivovali tak k odvozování na středních školách, uvedeme v další podkapitole několik dalších odvození. Tato odvození však platí pouze v otevřeném intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Například v kapitole 2.2.2 uvedeme důkaz založený na jednoduchém obrázku z knihy [Ne], kde už samotný obrázek by postačil jako dobrá didaktická pomůcka při vysvětlování součtových vzorců. Oproti knize však tento obrázek doplníme patřičným vysvětlením.

V dalších kapitolách uvedeme několik aplikací součtových vzorců i s jejich historickými souvislostmi. Ukážeme si, že součtové vzorce hrály důležitou roli ve výpočtu hodnot goniometrických funkcí, ale i v propojování světa goniometrie a exponenciálních funkcí komplexní proměnné.

Ve třetí kapitole nastíníme, jak lze pomocí součtových vzorců odvodit nejen vztahy mezi funkcemi sinus a kosinus, ale také všechny další vzorce pro goniometrické funkce. Některá z těchto odvození explicitně uvedeme.

Další kapitolu zaměříme na výpočet hodnot funkce sinus. V dobách, kdy neexistovaly kalkulátory, bylo velmi důležité pro výpočty v astronomii, ale i třeba ve stavebnictví, disponovat přesnými tabulkami hodnot goniometrických funkcí. V této kapitole ukážeme, jak se takové tabulky konstruovaly. Vycházet přitom budeme z Ptolemaiových postupů pro výpočet hodnoty sinu tří stupňů a al-Kášího iterační metody pro získání sinu jednoho stupně. Na konci této kapitoly ukážeme celý postup v programovacím jazyce Python3 a zdrojový kód popíšeme.

Pátá kapitola uvede algoritmus CORDIC, který se využíval v navigaci při výpočtu polohy v reálném čase. Oproti práci [Ha] — ze které vycházíme — odvodíme matematický základ algoritmu pomocí rovnic pro převod mezi polárním a kartézským souřadnicovým systémem. I tento algoritmus zpracujeme v jazyce Python3.

V poslední části se budeme věnovat Leonhardu Eulerovi a vzorci $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, který nyní známe jako Eulerův. Nejprve přiblížíme čtenáři jeho život, následně popíšeme způsob, kterým takzvaný Eulerův vzorec odvodil. Vycházet při tom budeme z jeho původního díla [Eu] a z knihy [Sa], která Eulerův postup také popisuje. Oproti knize [Sa] však uvedeme Eulerovo odvození vzorce pro kosinus násobného argumentu a jeho způsob výpočtu Taylorovy řady goniometrických funkcí.

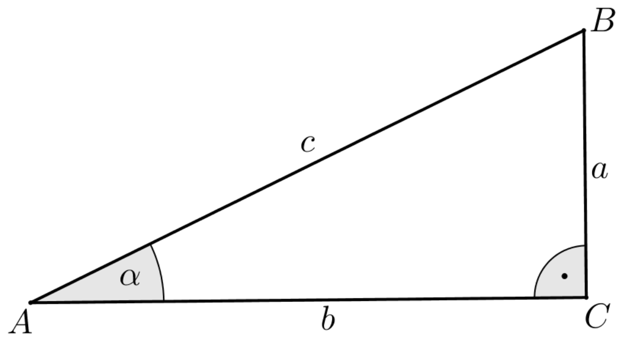
V textech se vyskytují programy v jazyce Python3. Zdrojové kódy těchto programů se nacházejí na CD, které přikládáme k této práci.

1. Definice goniometrických funkcí

V této kapitole nejprve zavedeme sinus a kosinus jako poměr délek stran v pravoúhlém trojúhelníku tak, jak se zavádí již na základní škole. Následně definujeme sinus a kosinus jako funkce na celé množině reálných čísel pomocí jednotkové kružnice a nakonec si ukážeme, že součtové vzorce představují velmi silný nástroj, neboť jejich pomocí dokážeme odvodit všechny vlastnosti funkcí sinus a kosinus.

1.1 Definice na základní škole

Mějme pravoúhlý trojúhelník ABC (viz obr. 1.1) s pravým úhlem při vrcholu C a úhlem α při vrcholu A, jehož velikost se na základní škole udává v míře stupňové. Označme odvěsnu protilehlou úhlu α písmenem a, druhou odvěsnu b a přeponu c.



Obrázek 1.1: Pravoúhlý trojúhelník.

Nyní na základě tohoto označení můžeme vyslovit následující definici.

Definice 1. *Poměr odvěsny a, která je protilehlá úhlu $\alpha \in (0{,}90^\circ)$, a přepony c pravoúhlého trojúhelníku nazýváme sinus úhlu α. Tento vztah zapisujeme jako*

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}. \tag{1.1.1}$$

Ostatní vztahy již zavedeme stručněji.

Kosinus α definujeme jako poměr odvěsny b k přeponě c a zapisujeme	$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$
Tangens α definujeme jako poměr odvěsny a k odvěsně b a zapisujeme	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$
Kotangens α definujeme jako poměr odvěsny b k odvěsně a a zapisujeme	$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}.$

Rozšíříme-li vztah pro $\operatorname{tg}\alpha$ zlomkem $\frac{1}{c}$, dostaneme

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Totéž můžeme provést s kotangentou:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Tyto poměry sinu a kosinu z předchozích dvou odvozených vztahů můžeme použít jako alternativní definice tangens a kotangens.

Nakonec se ještě zamysleme nad vztahy v pravoúhlém trojúhelníku ABC z obrázku 1.1. Dle Pýthagorovy věty platí $a^2 + b^2 = c^2$, pokud celou rovnost vydělíme c^2, dostaneme

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1.$$

V této rovnosti však hned vidíme vztahy pro $\sin^2\alpha = (a/c)^2$ a $\cos^2\alpha = (b/c)^2$. Zjistili jsme tedy, že součet druhých mocnin funkcí sinus a kosinus je roven jedné, neboli

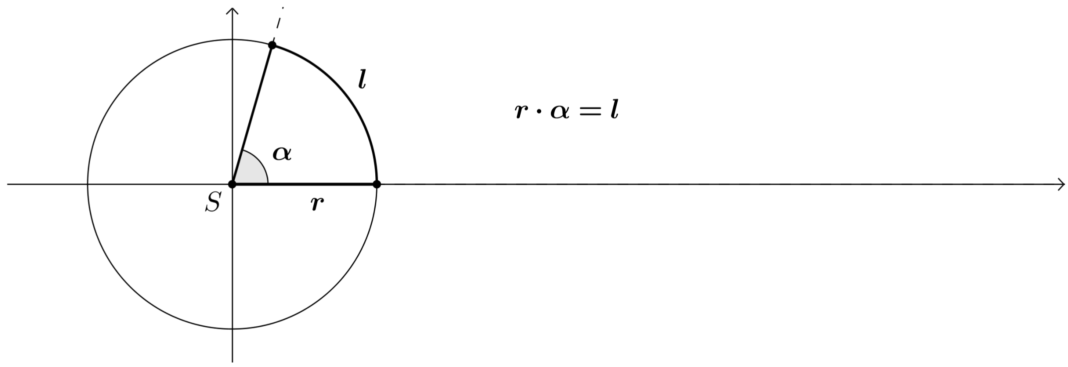
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{1.1.2}$$

1.2 Středoškolská definice

V předchozí části jsme definovali sinus a kosinus jako poměr délek stran v pravoúhlém trojúhelníku. V této části práce zavedeme sinus a kosinus jako funkce. Použijeme k tomu kružnici o poloměru jedna (tzv. jednotková kružnice) a obloukovou míru, která se od střední školy využívá pro zapisování velikosti úhlu.

Na základní škole se o goniometrických funkcích nemluví jako o funkcích, neboť pojem funkce ještě není zaveden. Pravdou ale je, že definice, kterou jsme uvedli v předchozí části, by se dala chápat jako definice funkcí, jejichž definiční obor je $D(f) = (0, \frac{\pi}{2})$ v obloukové míře. Můžeme si navíc všimnout, že sinus a kosinus jako poměr nabývají pouze kladných hodnot. Délka úsečky je totiž definována jako nezáporné číslo a poměr délek tedy také nemůže být záporný. Oproti tomu ve středoškolské definici, kterou uvedeme v této části, mohou sinus a kosinus nabývat hodnot v intervalu (-1,1), což si ukážeme později.

Jednotka obloukové míry radián je standardizovanou odvozenou jednotkou soustavy jednotek SI (francouzsky: Système international d'unités, v překladu Mezinárodní systém jednotek), někdy značíme *rad*, většinou se však toto označení vynechává. Jméno jednotky radián je odvozené ze slova radius neboli poloměr.

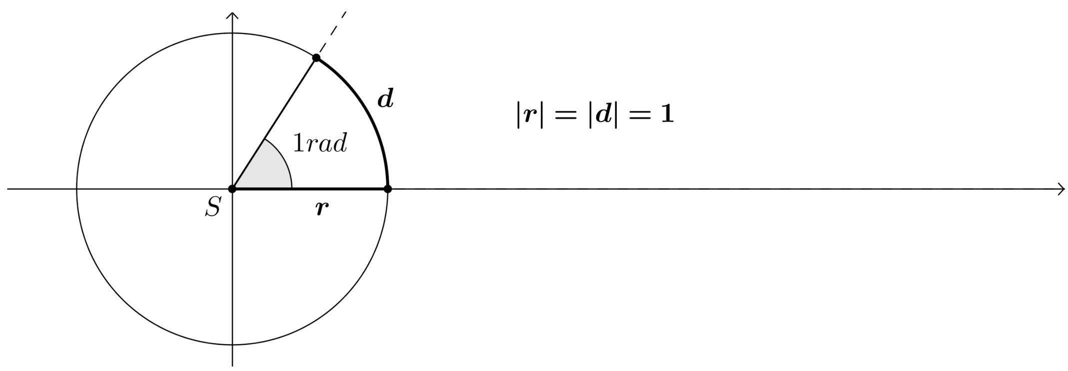


Obrázek 1.2: Ilustrační obrázek k definici radiánu.

S využitím označení z obrázku 1.2 vyslovme následující definici.

Definice 2. *Mějme kružnici k jejíž střed splývá s vrcholem úhlu α. Úhel jehož velikost je jeden radián, je takový úhel α, pro který platí, že oblouk l kružnice k, který leží v části roviny vymezené tímto úhlem, je stejné délky jako poloměr kružnice k.*

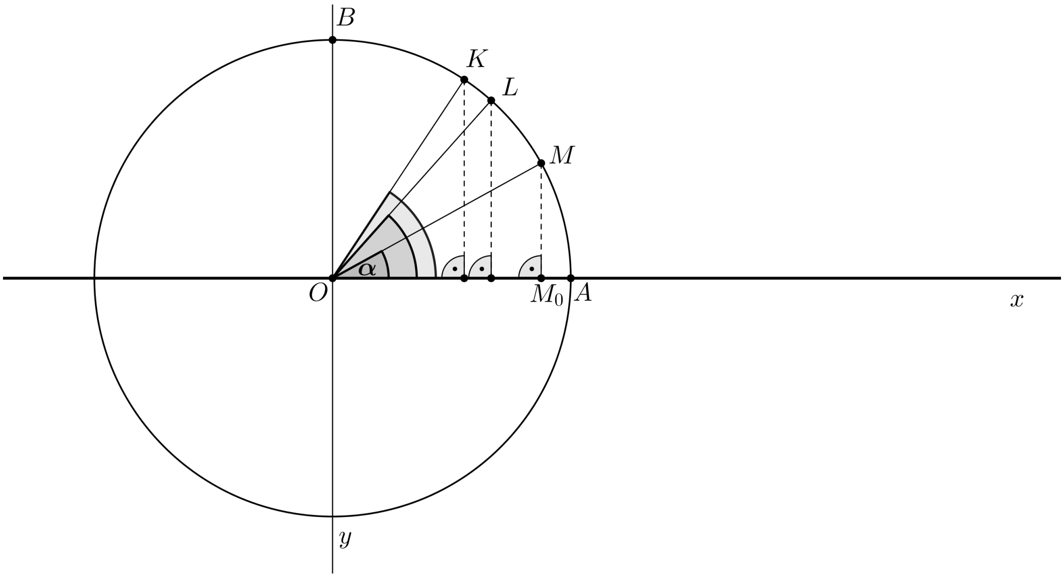
Konkrétně pro jednotkovou kružnici je to středový úhel příslušející oblouku o délce 1. Následující obrázek 1.3 je inspirován animací ze stránky [Ba].



Obrázek 1.3: Jeden radián.

Jeden ze způsobů jak si lze sinus představit, je pohyb bodu po jednotkové kružnici a zaznamenávání jeho y-ové souřadnice. Mějme tedy jednotkovou kružnici (viz obr. 1.4) se středem O v počátku kartézské soustavy souřadnic. Dále označme dva body A se souřadnicemi [1,0] a B se souřadnicemi [0,1].

Představme si, že jsme se v pohybu po jednotkové kružnici z A do B zastavili v bodě M. Spusťme z tohoto bodu kolmici na osu x. Patu této kolmice označme M_0. Úhel M_0OM označme α. Potom v pravoúhlém trojúhelníku OM_0M platí, že hodnota sinu úhlu α je rovna y-ové souřadnici bodu M. Využili jsme toho, že kružnice je jednotková, a vycházeli jsme přitom z definice sinu z části 1.1. Tato úvaha je popsána v následující rovnosti (1.2.1).



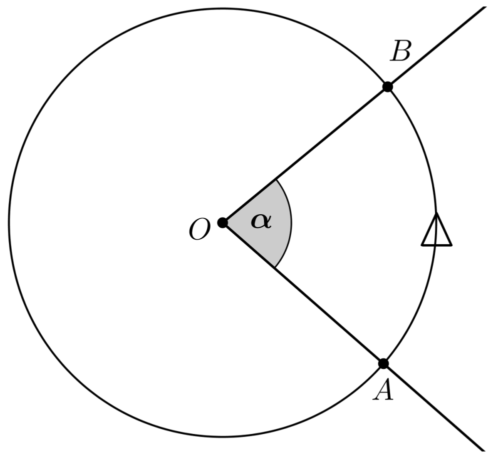
Obrázek 1.4: Pomocný obrázek pro odvození funkce sinus.

$$\sin\alpha = \frac{\left|\overline{M_0M}\right|}{\left|\overline{OM}\right|} = \frac{\left|\overline{M_0M}\right|}{1} = y_M \tag{1.2.1}$$

Tyto vztahy platí i pro ostatní body ležící na jednotkové kružnici mezi body A a B. Pohybujeme-li bodem M dál po kružnici, zjistíme, že už v bodě B nemůžeme aplikovat vztah (1.1.1) z definice 1. Nebudeme totiž schopni sestrojit příslušný pravoúhlý trojúhelník, protože splyne počátek O a bod B_0 (pokud bychom tak označili patu kolmice vedoucí z bodu B na osu x). Definice funkcí sinus a kosinus jako poměr nelze tedy přímo aplikovat na všechny trojúhelníky, které podle ní vznikají v jednotkové kružnici. Příkladem, který tuto skutečnost dokládá, není pouze bod B, ale i bod A. V obou těchto bodech nelze sestrojit pravoúhlý trojúhelník. Problematických bodů bychom však mohli najít i více. Proto je třeba definovat goniometrické funkce jinak.

V další úvaze vycházejme z obrázku 1.4. Zjistili jsme, že pokud přepona trojúhelníku je rovna jedné, pak je hodnota sinu rovna jeho y-ové souřadnici. Souřadnice bodu M tedy závisí na úhlu α. Velikost úhlu je ale kladné číslo a my chceme definovat funkce sinus a kosinus na celém oboru reálných čísel. Potřebujeme tedy jednoznačně definovat úhel tak, abychom následně mohli zavést pojem velikost úhlu, kde by „velikost“ úhlu mohla nabývat i záporných hodnot.

Mějme tedy $\angle AOB$ velikosti α (viz obr. 1.5), který je určen polopřímkami OA a OB. V mnoha případech při práci s úhly nás zajímá kromě velikosti úhlu i jeho orientace (například když chceme vědět, jak se něco otočilo, tak nám k zjištění původní polohy nestačí úhel, ale musíme vědět také „směr“ tohoto úhlu). Můžeme si to představit tak, že otáčíme jednou z polopřímek kolem vrcholu O, dokud nesplyne s polopřímkou druhou. Pokud budeme otáčet proti směru hodinových ručiček, říkáme, že otáčíme v kladném smyslu, pokud otáčíme naopak, pak je to ve smyslu záporném.



Obrázek 1.5: Orientovaný úhel α.

Pomocí předešlého značení pak definujme:

Definice 3. *Orientovaným úhlem budeme nazývat uspořádanou dvojici polopřímek* $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ *se společným počátkem* O. *První z polopřímek nazvěme počátečním ramenem a druhou koncovým ramenem orientovaného úhlu. Zapisujme tento úhel jako* $\widehat{AOB}$.

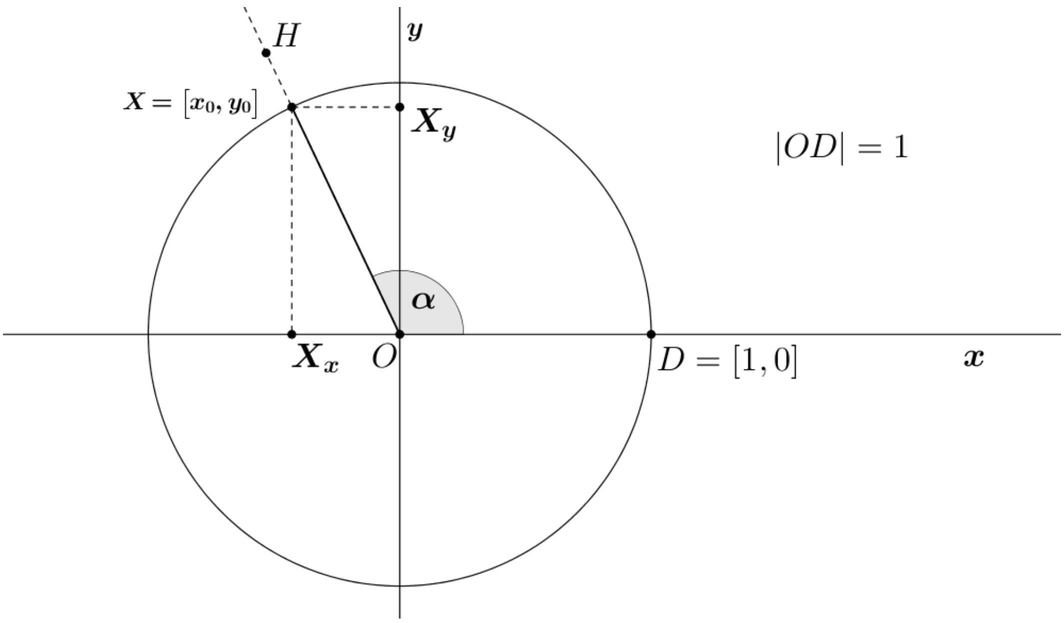
- *Základní velikostí orientovaného úhlu budeme nazývat délku oblouku jednotkové kružnice náležící části roviny, kterou opíše počáteční rameno tohoto úhlu při otočení kolem svého vrcholu v kladném smyslu, dokud nesplyne s koncovým ramenem.*
- *Velikostí orientovaného úhlu, jehož základní velikost v obloukové míře je* α, *je právě jedno číslo* $\alpha + k \cdot 2\pi$, *kde* k *je celé číslo.*

Základní velikostí orientovaného úhlu je tedy číslo, které náleží intervalu $\langle 0{,}2\pi)$.

Potřebujeme však zajistit, aby pro všechny $x \in \mathbb{R}$, kde x je velikost orientovaného úhlu existoval právě jeden úhel. Je pro nás velmi důležitá jednoznačnost, kterou nám zaručí následující věta. Uvedeme ji bez důkazu.

Věta 4. *Je-li v rovině dána polopřímka* $\overrightarrow{OA}$ *a libovolné číslo* $\alpha \in \mathbb{R}$, *pak existuje právě jeden orientovaný úhel* $\widehat{AOB}$ *tak, že velikost tohoto úhlu je* α.

Mějme jednotkovou kružnici se středem v počátku soustavy souřadnic Oxy. Označme bod $D = [1{,}0]$ a zvolme libovolné reálné číslo α, potom dle věty 4 existuje právě jeden orientovaný úhel určený polopřímkou $\overrightarrow{OD}$ a číslem α. Tento úhel označme $\widehat{DOH}$.



Obrázek 1.6: Ilustrační obrázek k středoškolské definici goniometrických funkcí

Jak vidíme i na obrázku 1.6, polopřímka $\overrightarrow{OH}$ protíná jednotkovou kružnici v bodě X se souřadnicemi $[x_0,y_0]$. Pro každé reálné číslo α tedy existuje právě jedna dvojice čísel x_0 a y_0. Nyní už nám nic nebrání v definování funkcí sinus a kosinus pomocí orientovaného úhlu. Využijeme při tom značení, které jsme používali v předešlých dvou odstavcích.

Definice 5. *Funkcí sinus se nazývá funkce definovaná na množině* $\mathbb{R}$*, která ke každému číslu* $\alpha \in \mathbb{R}$ *přiřadí číslo* y_0*.*

Funkcí kosinus se nazývá funkce definovaná na množině $\mathbb{R}$*, která ke každému číslu* $\alpha \in \mathbb{R}$ *přiřadí číslo* x_0*.*

1.2.1 Konstrukce grafu funkce sinus

Pokusme se nyní na základě definice funkce sinus sestrojit její graf.

Definice 6. *Grafem funkce* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *nazýváme množinu uspořádaných dvojic*

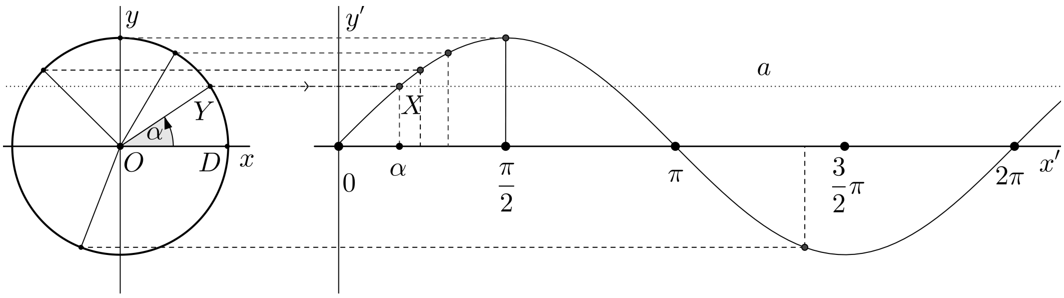
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D(f), y = f(x)\right\}.$$

Geometricky lze každou uspořádanou dvojici chápat jako bod o souřadnicích $[x,y]$ a graf funkce jako množinu bodů v rovině.

Pro konstrukci grafu budeme potřebovat najít obrazy bodů, ty ale umíme snadno získat pomocí definice funkce sinus. Vyjděme tedy z jednotkové kružnice (viz obrázek 1.7) v kartézské soustavě souřadnic Oxy, dále mějme kartézskou soustavu souřadnic $O'x'y'$ takovou, že osa y' je rovnoběžná s osou y a bod O' má v kartézské soustavě souřadnic Oxy

souřadnice [2,0]. Od počátku soustavy $O'x'y'$ začneme konstruovat graf funkce sinus. Graf budeme konstruovat z důvodu lepší přehlednosti pro kladné hodnoty. Osu x' budeme indexovat pomocí násobků čísla π, protože hodnoty na ose x' zapisujeme jako velikost úhlu v radiánech.

Postupně zvolíme orientované úhly na jednotkové kružnici o různé velikosti se stejným počátečním ramenem, v tomto textu však popíšeme, jak bychom konstruovali pouze první bod.



Obrázek 1.7: Konstrukce grafu funkce sinus.

Dle věty 4 existuje právě jeden úhel velikosti α s počátečním ramenem $\overrightarrow{OD}$. Průsečík koncového ramene s jednotkovou kružnicí označíme Y a vedeme jím přímku a rovnoběžnou s osou x. Na osu x' vyneseme bod α a vedeme jím kolmici. Průsečík této kolmice a přímky a, označen na obrázku 1.7 písmenem X, je bodem grafu funkce sinus.

Konstrukce grafu funkce sinus je velice vhodným cvičením pro výuku na střední škole. Oproti této práci, kde je graf tvořen v programu Geogebra, je však pro žáky vhodnější konstruovat funkci sinus na papíře. Podobně jako jsme sestrojili bod X v předchozím odstavci, můžeme získat dostatečné množství bodů grafu funkce sinus tak, abychom jej mohli od ruky načrtnout.

1.2.2 Porovnání definice v učebnicích pro střední školy

Při psaní této úvodní kapitoly jsem vycházel z několika středoškolských učebnic goniometrie, zejména z učebnice O. Odvárka *Goniometrie* ze série Matematika pro gymnázia [Od]. Další knihy, které jsem využíval pro inspiraci v tomto textu, jsou *Matematika pro tříleté obory Středních odborných učilišť* od E. Caldy [Ca] a *Přehled středoškolské matematiky* Josefa Poláka [Po].

Na definici goniometrických funkcí v knize [Ca] je velmi krásná zejména návaznost středoškolských znalostí na učivo ze základní školy. Není zde však uvedena žádná věta podobná větě 4, ani není jinak zdůvodněna jednoznačnost konstrukce orientovaného úhlu. Kniha není však pouze o goniometrii, což je asi důvodem, proč je stručnější. Oproti tomu kniha [Od] je důslednější v definování jednotlivých pojmů. I zde je však užito krátkých definic na úkor jednoznačnosti (například definice radiánu).

V knize [Po] pak úplně chybí v kapitole *Goniometrické funkce* definice funkcí sinus a kosinus jako poměr stran v pravoúhlém trojúhelníku a její vztah ke středoškolské definici.

Goniometrické funkce jako poměr stran však často využíváme ve středoškolské matematice, proto by zde alespoň zmínka o těchto vztazích nebo odkaz na více než 200 stránek vzdálenou kapitolu *Trigonometrie* byla vhodná.

1.3 Definice goniometrických funkcí pomocí funkcionálních rovnic

V následující části si ukážeme, že pokud zvolíme vhodné funkcionální rovnice, pak pomocí nich můžeme definovat goniometrické funkce. Mnohem více o této definici a vlastnostech goniometrických funkcí se můžeme dočíst v knize [Ve], kde nalezneme i důkaz následující věty [Ve, Věta 6.6.3], kterou zde nebudeme dokazovat.

Věta 7. *Existuje právě jedna dvojice funkcí na množině* $\mathbb{R}$*, pro které platí*

$$c(x-y) = c(x)c(y) + s(x)s(y), \qquad x,y \in \mathbb{R}, \tag{1.3.1}$$

$$s(x-y) = s(x)c(y) - c(x)s(y), \qquad x,y \in \mathbb{R}, \tag{1.3.2}$$

a vyhovují podmínce

$$\lim_{x\to 0} \frac{s(x)}{x} = 1. \tag{1.3.3}$$

Z podmínky (1.3.3) plyne, že funkce s a c jsou spojité, a to nejen v bodě 0, ale dokonce na celém oboru reálných čísel.

Definice 8. *Funkce* s *a* c *z věty 7 nazýváme po řadě sinus a kosinus a označujeme je* sin, cos.

Jak se později dozvíme, funkcionální rovnice z věty 7 odpovídají součtovým vzorcům pro goniometrické funkce.

1.3.1 Některé vlastnosti funkcí sinus a kosinus

Nyní si ukážeme, že z definice funkcí sinus a kosinus pomocí vztahů (1.3.1) až (1.3.3) z předchozí části lze odvodit řadu vlastností goniometrických funkcí. Vycházet budeme opět z knihy [Ve].

• Díky symetričnosti pravé strany vztahu (1.3.1) můžeme psát $c(x-y) = c(y-x)$, kde za x dosaďme 0 a ihned dostaneme

$$c(-y) = c(0-y) = c(0)c(-y) + s(0)s(-y) = c(0)c(y) + s(0)s(y) = c(y).$$

Funkce kosinus je tedy sudá.

• Funkce sinus není konstantní už díky podmínce $\lim_{x\to 0} \dfrac{s(x)}{x} = 1$. Pokud by byla konstantní, rovnala by se tato limita nule, nebo by neexistovala.

Nyní předpokládejme, že funkce $c(x)$ je konstantní. Nechť c nabývá konstanty K na celém definičním oboru $\mathbb{R}$, potom po dosazení do (1.3.1) platí

$$K = K^2 + s(x)s(y) \implies s(x) = \frac{K - K^2}{s(y)}, \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

Zvolme pevnou hodnotu $y = y_0$ potom by musela být funkce $s(x)$ konstantní, což je spor. Funkce c tedy *není* konstantní.

• Jako další vlastnost odvoďme lichost funkce s, pro její odvození budeme opět vycházet ze vztahu (1.3.1).

$$c(y - x) = c((-x) - (-y)) = c(-x)c(-y) + s(-x)s(-y)$$

$$c(x - y) = c(x)c(y) + s(x)s(y)$$

Odečtením první rovnosti od druhé získáme

$$c(x - y) - c(y - x) = c(x)c(y) - c(-x)c(-y) + s(x)s(y) - s(-x)s(-y)$$

díky sudosti funkce c dostaneme

$$0 = s(x)s(y) - s(-x)s(-y) \tag{1.3.4}$$

a dosazením x za y máme rovnost

$$0 = s(x)s(x) - s(-x)s(-x),$$

kterou lze také přepsat rozložením podle vzorce $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ jako

$$0 = (s(x) - s(-x))(s(x) + s(-x)). \tag{1.3.5}$$

Pokud by platilo $(s(x) - s(-x)) = 0$, kde $x \in \mathbb{R}$, pak by tato rovnost byla splněna, ale funkce $s(x)$ by byla sudá. Dokažme tedy nejprve, že funkce s není sudá. Toto tvrzení dokažme sporem. Předpokládejme tedy, že je funkce s sudá, pak díky tomuto předpokladu a sudosti c plyne následující rovnost:

$$c(x - y) = c(x)c(y) + s(x)s(y) = c(x)c(-y) + s(x)s(-y) = c(x + y)$$

ze které po dosazení $x = y$ dostaneme $c(2x) = c(0)$, z čehož plyne, že funkce c by byla konstantní. Došli jsme tedy ke sporu, díky kterému víme, že funkce s *není* sudá. Můžeme tedy psát:

$$\exists x_1 \in \mathbb{R} : s(x_1) \neq s(-x_1), s(x_1) \neq 0. \tag{1.3.6}$$

Po dosazení x_1 do (1.3.5) dostaneme

$$0 = (s(x_1) - s(-x_1))(s(x_1) + s(-x_1)).$$

Díky této rovnosti a předchozímu odstavci, kde jsme zjistili že $(s(x_1) - s(-x_1)) \neq 0$, můžeme psát že

$$s(x_1) + s(-x_1) = 0, \qquad \text{resp.} \quad s(-x_1) = -s(x_1) \neq 0.$$

Dosazením x_1 za y do rovnice (1.3.4) dostaneme

$$0 = s(x)s(x_1) - s(-x)s(-x_1),$$

a protože $s(-x_1) = -s(x_1) \neq 0$, tak

$$0 = s(x_1)(s(x) + s(-x))$$

neboli $-s(x) = s(-x)$, pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Můžeme tedy říct, že funkce s je lichá na celé množině reálných čísel. Speciálně pro $x = 0$ tedy platí $s(0) = -s(0) = 0$.

- Pro $s(x - 0)$ na základě předchozího zjištění a vztahu (1.3.6) platí :

$$s(x) = s(x - 0) = s(x)c(0) - c(x)s(0) = s(x)c(0)$$

z čehož vyplývá, že $c(0) = 1$.

- Také platí

$$c(0) = c(x - x) = c(x)c(x) + s(x)s(x) \implies s(x)^2 + c(x)^2 = 1.$$

- Nakonec z předchozího bodu vidíme, že $|s(x)| \leq 1$, $|c(x)| \leq 1$. Funkce s i c jsou tedy omezené a pokud $|s(x)| = 1$, pak $|c(x)| = 0$ a naopak.

V této práci nebudeme dokazovat ostatní vlastnosti goniometrických funkcí jako například existenci derivací funkcí sinus a kosinus, jejich periodičnost nebo popis nulových bodů. Tyto další vlastnosti jsou odvozeny v knize [Ve].

1.4 Definice goniometrických funkcí pomocí Taylorova polynomu

V této kapitole aproximujeme lokálně, tedy v okolí zvoleného bodu, funkce sinus a kosinus pomocí polynomu. V našem případě zvolíme pro aproximaci okolí bodu nula. Následně ověříme, že se polynom P_n v okolí tohoto bodu dostatečně přimyká funkci f, kterou chceme aproximovat. Jinými slovy, že platí $\lim_{n\to\infty} f(x) - P_n(x) = 0$. Vycházet při tom budeme z knih [Ja] a [Kop]. Využívat přitom budeme známou Taylorovu větu.

Nejprve však uveďme větu, která ukáže jak by měl polynom, který použijeme pro aproximaci, vypadat aby byl jeho rozdíl oproti funkci f, kterou chceme aproximovat, co nejmenší.

Věta 9. *Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ vlastní derivace do řádu n včetně, kde $n \in \mathbb{N}$. Potom existuje právě jeden mnohočlen $P_n(x)$ stupně nejvýše n (nebo nulový), že platí*

$$f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n).$$

Tento mnohočlen je dán vzorcem

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \tag{1.4.1}$$

nazývá se Taylorovým mnohočlenem n-tého stupně a označuje se $T_n(x; x_0, f)$.

Tuto větu zde nebudeme dokazovat, důkaz však lze nalézt v knize [Kop, Věta 5.22].

Následující rovností definujme chybu, které jsme se dopustili při nahrazení funkce f polynomem $T_n(x)$. Pišme tedy

$$R_{n+1}(x) = f(x) - T_n(x).$$

R_{n+1} budeme nazývat Taylorovým zbytkem funkce f po n-tém členu. Budeme se snažit odhadnout velikost čísla $R_{n+1}(x)$. Tento odhad je popsán v takzvané Taylorově větě [Kop, Věta 5.23] ve které je popsán i tzv. Lagrangeův tvar zbytku

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \qquad \xi \in J,$$

kde J je otevřený interval s krajními body x a x_0. Toto vyjádření zbytku budeme využívat pro jeho jednoduchost, není však jediné možné.

Nyní již najděme polynom, kterým můžeme nahradit funkci sin pomocí vztahu (1.4.1)

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left[\sin(x)^{(k)}\right]_{x=0}}{k!} x^k + R_{n+1},$$

rozepsáním dostaneme

$$\begin{aligned} \sin x = {} & [\sin(x)]_{x=0} + [\sin(x)']_{x=0}\, x + \frac{[\sin(x)'']_{x=0}\, x^2}{2!} + \frac{\left[\sin(x)^{(3)}\right]_{x=0} x^3}{3!} + \\ & + \frac{\left[\sin(x)^{(4)}\right]_{x=0} x^4}{4!} + \cdots + \frac{\left[\sin(x)^{(n)}\right]_{x=0} x^n}{n!} + R_{n+1}, \end{aligned}$$

z čehož díky cykličnosti derivací sinu ($(\sin x)' = \cos x$, $(\sin x)'' = -\sin x$, $(\sin x)^{(3)} = -\cos x$ a nakonec $(\sin x)^{(4)} = \sin x$) získáme

$$\sin x = \sin(0) + \cos(0)x - \frac{\sin(0)x^2}{2!} - \frac{\cos(0)x^3}{3!} + \frac{\sin(0)x^4}{4!} + \cdots + \frac{\left[\sin(x)^{(n)}\right]_{x=0} x^n}{n!} + R_{n+1}$$

a protože $\cos(0) = 1$ a $\sin(0) = 0$, vypadnou všechny členy posloupnosti obsahující sudou mocninu x. Níže ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ pro všechny $x \in \mathbb{R}$, dostáváme tedy vyjádření funkce sinus pomocí Taylorovy řady:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots. \tag{1.4.2}$$

Obdobně bychom mohli odvodit Taylorův rozvoj funkce kosinus:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots \tag{1.4.3}$$

Obě tyto řady konvergují pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Můžeme tedy použít vztahy (1.4.2) a (1.4.3) jako definici funkcí sinus a kosinus na množině reálných čísel.

V tomto odstavci ukážeme, že pro Lagrangeův tvar zbytku příslušného Taylorovu polynomu funkce sinus platí: $\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Jelikož je

$$0 \le |R_{n+1}| = \frac{\left|\left[(\sin x)^{(n)}\right]_{x=\xi}\right| \cdot x^n}{(n+1)!} \le \frac{1 \cdot |x^n|}{(n+1)!},$$

využili jsme omezenosti funkcí sinus a kosinus: $|\sin x| \le 1$ a $|\cos x| \le 1$ na celé množině reálných čísel a protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^2|}{(n+1)!} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

dostáváme, že

$$\lim_{x\to\infty} R_{n+1}(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Jelikož zbytek konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tak Taylorův rozvoj, který jsme odvodili, konverguje k funkci sinus na celé množině reálných čísel. Podobně bychom mohli ukázat, že analogické tvrzení platí i pro rozvoj funkce kosinus.

2. Odvození součtových vzorců

V nadcházející kapitole se zaměříme na základ této bakalářské práce, kterým je odvození součtových vzorců. Nejprve vyslovíme větu o součtových vzorcích, kterou následně dokážeme.

V dalších částech ukážeme některá další odvození, která nebudou dokazovat platnost součtových vzorců na celém oboru reálných čísel. Pomůže nám to k rozšíření pohledu a jejich zapamatování. Některé obrázkové důkazy, které uvedeme, můžou sloužit jako dobrá didaktická pomůcka.

Věta 10. *(O součtových vzorcích.) Pro všechna $x,y \in \mathbb{R}$ platí:*

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \tag{2.0.1}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y. \tag{2.0.2}$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y, \tag{2.0.3}$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y. \tag{2.0.4}$$

Tyto čtyři rovnosti nazýváme součtovými vzorci pro goniometrické funkce.

Než začneme tuto větu dokazovat, postupně si ukážeme, že rovnosti (2.0.1) až (2.0.4) jsou všechny ekvivalentní.

• Protože je kosinus funkce sudá a sinus lichá, získáváme ihned ekvivalenci (2.0.1),(2.0.3) a (2.0.2),(2.0.4). Vycházíme-li ze vzorců se součtem v argumentu, dostáváme

$$\sin(x-y) = \sin(x+(-y)) = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos(x+(-y)) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Obdobně bychom odvodili z (2.0.3) vzorec (2.0.1) a také z (2.0.4), (2.0.2). Proto se v dalších bodech omezíme pouze na součtové vzorce s rozdílem v argumentu.

• Pro další odvozování budeme potřebovat pomocné vztahy

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,$$

které umíme snadno odvodit. Zde si ukážeme odvození prvního z nich pomocí vzorce pro $\sin(x-y)$. Pišme tedy

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\sin x = 1 \cdot \cos x - 0 \cdot \sin x = \cos x,$$

analogicky bychom pomocí rovnosti (2.0.4) odvodili druhý vztah.

• Nakonec pomocí vztahů, které jsme odvodili v předchozím bodě, dostáváme ekvivalenci vzorců pro $\sin(x-y)$ a $\cos(x-y)$. Pomocí rovnosti (2.0.4) odvodíme (2.0.3).

$$\begin{aligned} \sin(x-y) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(x-y)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+y\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(y) - \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(y) \\ &= \sin x\cos y - \cos x\cdot\sin y. \end{aligned} \tag{2.0.5}$$

Podobně bychom dostali vzorec pro $\cos(x-y)$ pomocí (2.0.3). Můžeme tedy dokázat platnost pouze jedné z těchto rovností, čímž dokážeme všechny.

2.1 Důkaz věty o součtových vzorcích

Následující důkaz je inspirován důkazem z knihy [Od]. Omezíme se zde na rovnost (2.0.4), neboli

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Mějme jednotkovou kružnici v kartézské soustavě souřadnic Oxy (viz obrázek 2.1a). Předpokládejme, že čísla $\alpha,\beta \in \langle 0,2\pi)$. Označme bod o souřadnicích [1,0] jako D, dále sestrojme orientované úhly $\widehat{DOA} = \alpha$ a $\widehat{DOB} = \beta$, potom úhel $\widehat{BOA} = \alpha-\beta$. Předpokládejme, že body A a B leží na jednotkové kružnici. Ze středoškolské definice sinu a kosinu potom plyne, že pro body A a B platí

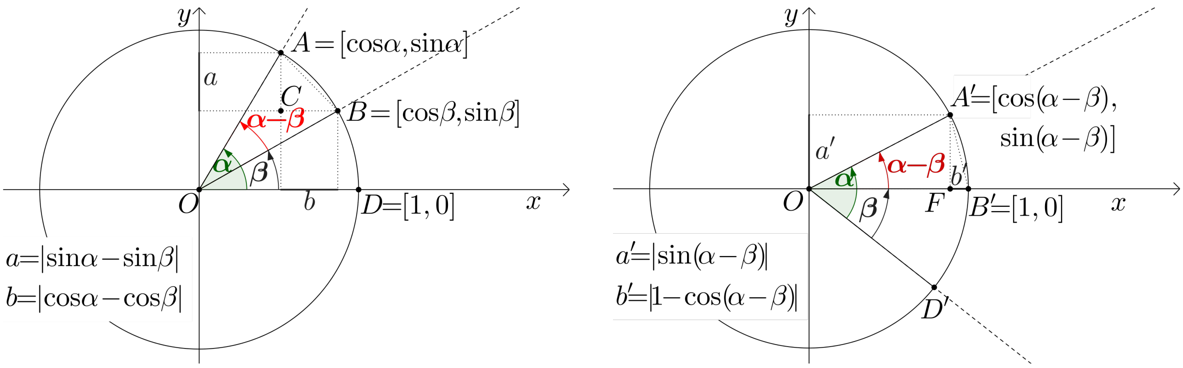
$$A = [\cos\alpha, \sin\alpha], \quad B = [\cos\beta, \sin\beta].$$

Veďme přímku procházející bodem B kolmou na osu y a přímku procházející bodem A kolmou na osu x. Průsečík těchto přímek označme C. Z Pýthagorovy věty, kterou aplikujeme v trojúhelníku ABC, pak získáme

$$|AB|^2 = |\sin\alpha - \sin\beta|^2 + |\cos\alpha - \cos\beta|^2,$$

z čehož po jednoduchých úpravách a využití vzorce pro součet druhých mocnin sinu a kosinu (1.1.2) dostaneme

$$|AB|^2 = 2(1-\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta). \tag{2.1.1}$$



(a) (b)

Obrázek 2.1: Vyjádření součtového vzorce v jednotkové kružnici a jeho otočení.

V dalším kroku odvození otočíme body D, A a B o úhel $(-\beta)$ se středem otočení v počátku, obraz bodu B se tak dostane na osu x, neboli $B' = [1{,}0]$. Výsledek tohoto otočení můžeme vidět na obrázku 2.1b. Otočení je shodnost, zachovává tedy délky stran a velikosti úhlů. Můžeme tedy psát, že $|A'B'| = |AB|$. Sestrojíme bod F, který je patou kolmice z bodu A' na osu x. Potom můžeme opět pomocí Pýthagorovy věty vyjádřit v trojúhelníku $A'B'F$ délku strany $A'B'$:

$$|A'B'|^2 = |AB|^2 = |\sin(\alpha-\beta)|^2 + |1-\cos(\alpha-\beta)|^2\,.$$

Po jednoduchých úpravách máme

$$|AB|^2 = 2(1-\cos(\alpha-\beta)). \tag{2.1.2}$$

Porovnáním pravých stran rovností (2.1.1) a (2.1.2) získáme

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Platnost tohoto vztahu pro libovolná čísla $x{,}y \in \mathbb{R}$ je zaručena díky tomu, že funkce sinus a kosinus jsou periodické s periodou 2π.

2.2 Odvození součtových vzorců v intervalu $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

V následujících podkapitolách uvedeme několik odvození součtových vzorců, kde $\alpha,\beta \geq 0$ a součet $\alpha+\beta \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. V prvních dvou podkapitolách je to daň za využívání definice goniometrických funkcí jako poměru, tak jak se uvádí na základní škole. Ve třetím případě využíváme odchylky dvou vektorů, která nabývá hodnot $(0,\pi)$. Proto ani toto odvození nemůžeme považovat za obecné na množině všech reálných čísel.

2.2.1 Odvození pomocí definice goniometrických funkcí ze základní školy

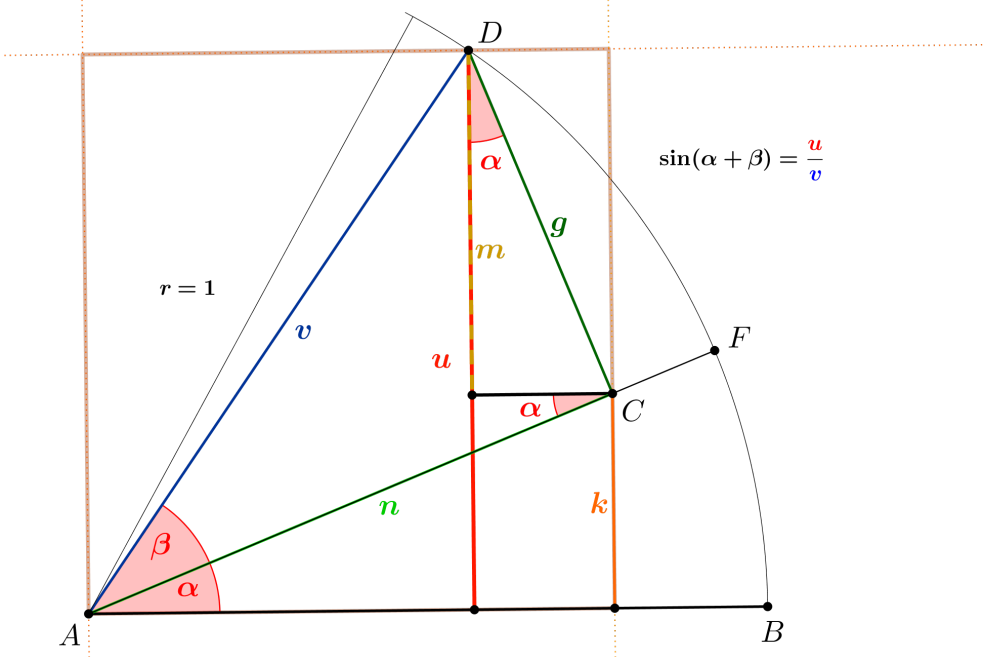
V této části budeme vycházet z Pýthagorovy věty a vztahů pro sin a cos z definice, která se uvádí na základní škole. K lepší orientaci nám pak pomůže níže přiložený obrázek 2.2. Pro tuto kapitolu jsme využili učební materiál [Ka].

Mějme úhel $\alpha = \angle BAF$ a úhel k němu přilehlý $\beta = \angle FAD$. Úsečku $\overline{AD}$ označíme v. Dále předpokládejme, že délka úseček $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ a $\overline{AF}$ je jedna. Z bodu D spusťme kolmice na úsečky $\overline{AF}$ a $\overline{AB}$. Patu kolmice na úsečce $\overline{AF}$ označme C. Pata kolmice na $\overline{AB}$ a bod D nechť definují úsečku $\boldsymbol{u}$. Potom pro $\sin(\alpha + \beta)$ platí

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{|u|}{|v|}. \tag{2.2.1}$$

Nyní spusťme kolmice z bodu C na úsečku $\overline{AB}$ a z téhož bodu na úsečku $\boldsymbol{u}$. Pata kolmice na úsečce $\boldsymbol{u}$ a bod D vytvoří úsečku $\boldsymbol{m}$ a pata kolmice z bodu C na úsečce $\overline{AB}$ pak vytvoří spolu s bodem C úsečku $\boldsymbol{k}$. Nyní platí následující rovnost

$$\frac{|u|}{|v|} = \frac{|m| + |k|}{|v|}.$$



Obrázek 2.2: Pomocný obrázek k odvození součtových vzorců pomocí definice, tak jak ji uvádíme na základní škole.

Jak můžeme vidět, na obrázku se úhel α vyskytuje třikrát. Jsou si ale opravdu všechny tyto úhly rovny? Úhel při vrcholu C je s úhlem při vrcholu A střídavý a úhel při vrcholu

C je rovný úhlu při vrcholu D díky podobnosti trojúhelníků, které mají společnou úsečku s krajním bodem C kolmou na $\boldsymbol{u}$.

Abychom dostali součtové vzorce, hledejme mezi poměry stran vztahy pro sinus a kosinus. Člen $\frac{|m|}{|v|}$ neumíme vyjádřit ani jako sinus, ani jako kosinus v žádném z trojúhelníků. Hledejme tedy něco, co mají úsečky m a v společného. Z obrázku 2.2 můžeme vidět, že strany m i v jsou součástí trojúhelníku, ve kterém jedna ze stran je $\overline{DC}$. Označme ji g a rozšiřme její velikostí vztah $\frac{|m|}{|v|}$. Tímto krokem získáme dva zlomky $\frac{|m|}{|g|}\frac{|g|}{|v|}$, výhodou však je, že víme, že pro jejich součin platí

$$\frac{|m|}{|g|}\frac{|g|}{|v|} = \cos\alpha\sin\beta. \tag{2.2.2}$$

Obdobně budeme hledat úsečku společnou dvěma trojúhelníkům obsahující k a v, což bude úsečka $\overline{AC}$. Označme tuto úsečku n a její velikostí rozšiřme podíl k a v, čímž dostaneme

$$\frac{|k|}{|v|} = \frac{|k|}{|n|}\frac{|n|}{|v|} = \sin\alpha\cos\beta. \tag{2.2.3}$$

Využitím rovnosti (2.2.1) a sečtením (2.2.2) a (2.2.3) získáme konečně

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{|k|}{|n|}\frac{|n|}{|v|} + \frac{|m|}{|g|}\frac{|g|}{|v|} = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \tag{2.2.4}$$

2.2.2 Odvození pomocí obrázku

Tato část vychází ze sbírky od R. Nelsena, *Proofs without words II* (Důkazy beze slov) [Ne]. Skládá se ze dvou obrázků, na nichž lze ukázat, že platí všechny čtyři varianty součtových vzorců. Je to tedy asi jejich vůbec nejjednodušší neformální důkaz, ovšem s omezením $\alpha, \beta \geq 0$ a součet $\alpha + \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. V tomto textu však pro jednoduchost popíšeme první z těchto obrázků, na kterém najdeme odvození vzorce pro $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$ a ukážeme si, že je vlastně velmi podobný předchozímu odvození. Poté, co si obrázek vysvětlíme, stačí jen porovnat délky protilehlých stran obdélníku a dostaneme ihned součtové vzorce.

Vycházejme tedy z obrázku 2.3. Mějme obdélník $ABCD$ a vepišme do něj pravoúhlý trojúhelník AEF tak, že $E \in BC$ a $F \in DC$, úhly $\angle BAE$, $\angle EAF$ označme postupně α, β. Úhly $\angle BAF$ a $\angle AFD$ jsou střídavé, proto $\angle AFD = \alpha + \beta$. Položme $AF = 1$.

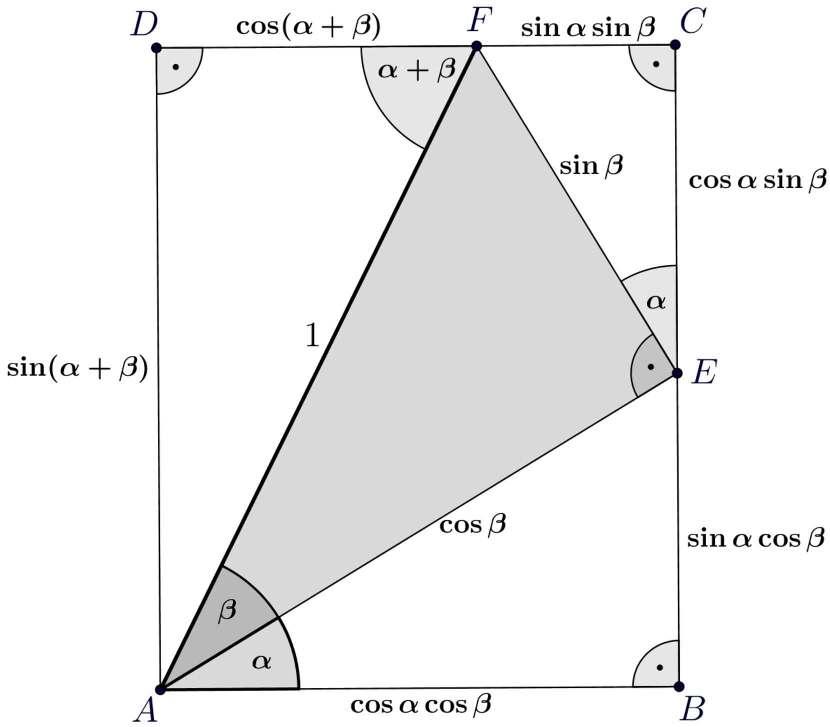
Velikost úhlu $\angle CEF$ je rovna $|\alpha|$, neboť porovnáme-li rovnosti

$$180^\circ = |\angle BEC| = |\angle BEA| + 90^\circ + |\angle CEF|$$

a

$$180^\circ = |\angle BEA| + 90^\circ + |\alpha|$$

zjistíme, že $\quad |\angle CEF| = |\alpha|$.



Obrázek 2.3: Odvození vztahů pro $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, inspirováno obrázkem z knihy [Ne].

V následující části budeme postupně odvozovat délky stran z obrázku 2.3. Vycházet budeme opět ze základních vztahů pro goniometrické funkce z části 1.1.

Pro velikosti úseček $\overline{EF}$, $\overline{EA}$ platí,

$$\sin\beta = \frac{|EF|}{1} \implies |EF| = \sin\beta, \quad \cos\beta = \frac{|EA|}{1} \implies |EA| = \cos\beta,$$

dále pro $\overline{EB}$ a $\overline{AB}$ platí,

$$\sin\alpha = \frac{|EB|}{\cos\beta} \implies |EB| = \sin\alpha\cos\beta, \quad \cos\alpha = \frac{|AB|}{\cos\beta} \implies |AB| = \cos\alpha\cos\beta.$$

Budeme pokračovat po směru hodinových ručiček stranami $\overline{AD}$ a $\overline{DF}$, pro které je

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{|AD|}{1} \implies |AD| = \sin(\alpha+\beta), \quad \cos(\alpha+\beta) = \frac{|DF|}{1} \implies |DF| = \cos(\alpha+\beta).$$

Zakončíme rovnostmi pro strany $\overline{FC}$ a $\overline{CE}$. Jelikož

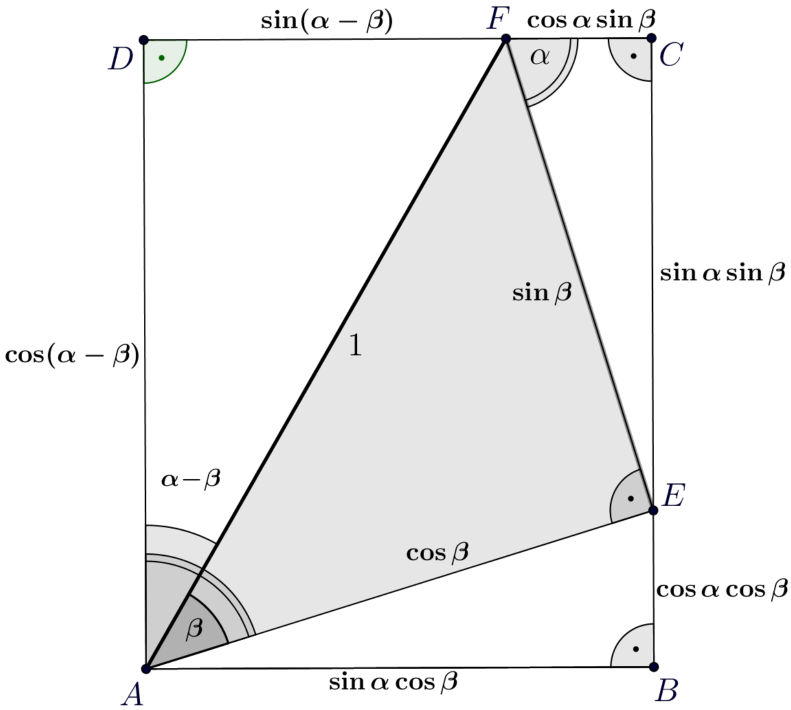
$$\sin\alpha = \frac{|FC|}{|FE|}, \quad \cos\alpha = \frac{|CE|}{|FE|},$$

kde $|FE| = \sin\beta$, tak po krátké úpravě dostaneme

$$|FC| = \sin\alpha\sin\beta, \quad |CE| = \cos\alpha\sin\beta,$$

čímž jsme odvodili veškeré vztahy v obrázku a vidíme tedy, že platí. Vzhledem k jednoduchosti je toto odvození vhodné jako cvičení na střední škole, kde by studenti měli být schopni ukázat, proč je obrázek pravdivý.

Pro zajímavost uveďme i druhý obrázek, na kterém je odvození vzorce pro $\cos(\alpha-\beta)$ a $\sin(\alpha-\beta)$. Platnost tohoto obrázku by se zdůvodnila obdobně jako u obrázku 2.3.

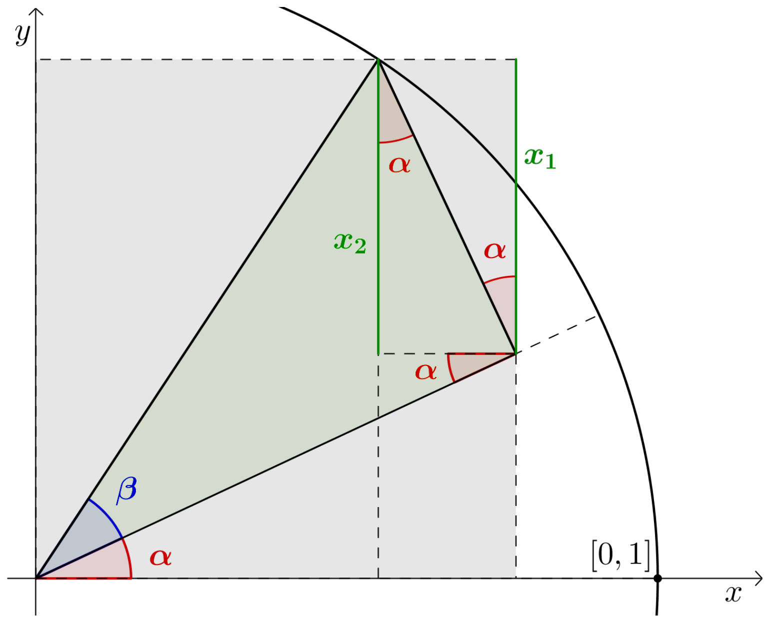


Obrázek 2.4: Odvození vztahů pro $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, inspirováno obrázkem z knihy [Ne].

Porovnání dvou předchozích odvození

Poslední dvě odvození se liší zejména v přístupu k odvozování. Zatímco první způsob byl více algebraický a bylo v něm třeba rozšířit zlomek, ve druhém odvození stačil jeden obrázek s předepsanými velikostmi stran, na kterém bylo třeba pochopit, proč byly délky stran zvoleny uvedeným způsobem.

Vztah těchto dvou odvození nejlépe ilustruje obrázek 2.5, ve kterém jsou obsaženy oba původní obrázky 2.2 a 2.3, zjednodušeny a vloženy do jednotkové kružnice. Je krásně vidět, že rozdíl je pouze v použití dvou různých úseček $\boldsymbol{x_1}$a $\boldsymbol{x_2}$, které mají stejnou velikost a jsou tedy zaměnitelné.

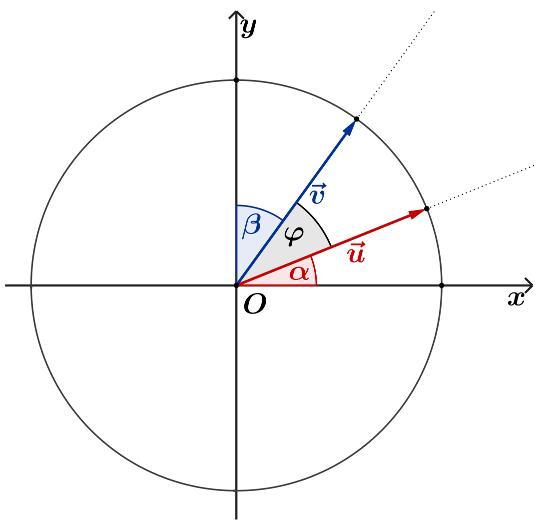


Obrázek 2.5: Porovnání předchozích odvození.

2.2.3 Odvození pomocí skalárního součinu

Mějme dva jednotkové vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ (viz obr. 2.6), kde vektor $\vec{u}$ svírá s osou x úhel α a vektor $\vec{v}$ svírá s osou y úhel β a $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Platí tedy $\alpha + \beta + \varphi = \dfrac{\pi}{2}$, kde φ je odchylkou vektorů $\vec{u}$,$\vec{v}$. Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ můžeme psát jako

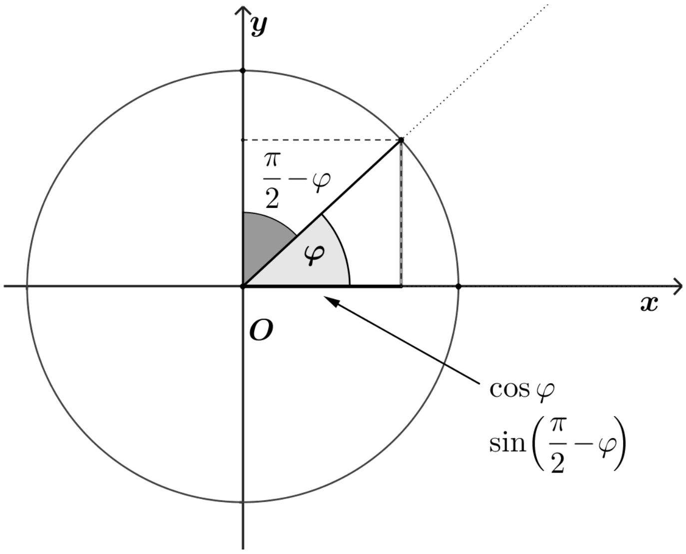
$$\vec{u} = (\cos\alpha, \sin\alpha), \quad \vec{v} = (\sin\beta, \cos\beta). \tag{2.2.5}$$



Obrázek 2.6: Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Jelikož je $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, platí také $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)$. Pravou stranu bychom ale mohli zjednodušit. Pokud si do jednotkové kružnice zakreslíme $\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)$ a $\cos\varphi$ (viz obr. 2.7), dostaneme

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos\varphi.$$

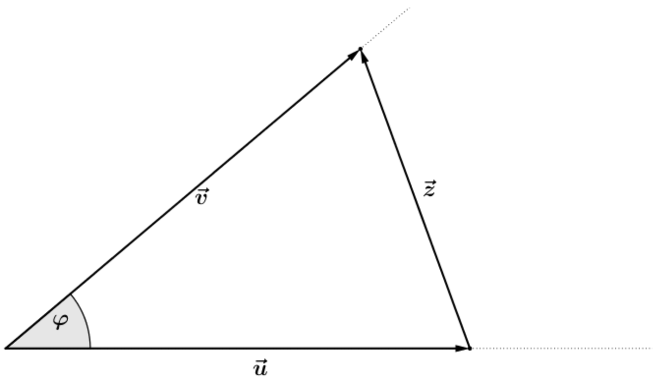


Obrázek 2.7: $\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos\varphi$.

Můžeme tedy psát, že

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\varphi.$$

Tím jsme celý problém hledání vzorce pro $\sin(\alpha + \beta)$ převedli na problém hledání vzorce pro $\cos\varphi$. Zde si snadno pomůžeme takzvanou kosinovou větou, která platí v libovolném trojúhelníku.



Obrázek 2.8: Rozdíl vektorů.

Mějme tedy vektor $\vec{z} = \vec{v} - \vec{u}$, viz obrázek 2.8, potom podle kosinové věty pro trojúhelník určený vektory $\vec{z}$,$\vec{v}$,$\vec{u}$ platí

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\varphi. \qquad (2.2.6)$$

Norma vektoru je $\|\vec{z}\| = \sqrt{\vec{z} \circ \vec{z}}$, druhá mocnina normy rozdílu vektorů pak bude

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \circ (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{v} \circ \vec{v} + \vec{u} \circ \vec{u} - 2\vec{u} \circ \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \circ \vec{v}. \qquad (2.2.7)$$

Porovnáním pravých stran vztahů (2.2.6) a (2.2.7) dostaneme

$$\vec{u} \circ \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\varphi.$$

Po osamostatnění $\cos\varphi$ získáme krásný vztah pro výpočet velikosti úhlu mezi vektory

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}, \qquad \varphi \in (0, \pi). \qquad (2.2.8)$$

V geometrii tento vzorec využíváme pro definici odchylky dvou vektorů. Měli bychom si ale připomenout, že úhel mezi dvěma vektory náleží intervalu $(0,\pi)$, proto jsme takto omezili i tento vztah. Po dosazení z (2.2.5) získáme

$$\cos\varphi = \frac{(\cos\alpha, \sin\alpha) \circ (\sin\beta, \cos\beta)}{1} = \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta. \qquad (2.2.9)$$

Ve jmenovateli zlomku je jednička, protože vektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ jsou jednotkové. Ze vztahu $\cos\varphi = \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)$ a (2.2.9) nakonec dostaneme

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos\varphi = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

což je vztah, který jsme chtěli ukázat. Je důležité si uvědomit, že toto odvození platí stejně jako vztah (2.2.8) pouze pro $\alpha,\beta > 0$ takové, že $\alpha + \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Pří odvození vzorce pro odchylku vektorů jsme se inspirovali v knize [Se].

3. Odvození různých goniometrických vztahů pomocí součtových vzorců

V této části ukážeme, že všechny goniometrické vzorce jsou odvoditelné ze součtových vzorců a některých dalších vlastností goniometrických funkcí (význačné hodnoty, parita a pod.). Navíc, většina odvození je jejich prostou aplikací, což nám usnadňuje práci, protože si je díky tomu nemusíme pamatovat. Většinu těchto odvození můžete najít v práci [Mo], kde jsme se inspirovali.

3.1 Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Následující vztah jsme již v předchozí kapitole odvodili graficky pro $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Snadno jej ale dostaneme aplikací součtových vzorců

$$\sin(90^\circ - \varphi) = \sin 90^\circ \cos\varphi - \cos 90^\circ \sin\varphi = 1 \cdot \cos\varphi - 0 \cdot \sin\varphi = \cos\varphi.$$

Obdobně dostaneme

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \cos 90^\circ \cos\varphi + \sin 90^\circ \sin\varphi = \sin\varphi$$

a také velmi důležitý a využívaný vzorec

$$1 = \cos(x - x) = \cos x \cos x + \sin x \sin x = \sin^2 x + \cos^2 x. \tag{3.1.1}$$

3.2 Sinus a kosinus dvojnásobného a trojnásobného argumentu

Pro odvození vzorců dvojnásobného argumentu jednoduše dosadíme do součtových vzorců $x = y$.

$$\begin{gathered}\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x,\\ \cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x,\end{gathered} \tag{3.2.1}$$

což se dá snadno pomocí (3.1.1) přepsat jako

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x, \tag{3.2.2}$$

obdobně můžeme odvodit i $\sin 3x$ a $\cos 3x$

$$\sin 3x = \sin(x + 2x) = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x.$$

Nyní rozepíšeme vzorce pro $\sin 2x$ a $\cos 2x$, které jsme již získali

$$\begin{aligned}\sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) + \cos x(2\sin x\cos x) &= \sin x\cos^2 x - \sin^3 x + 2\sin x\cos^2 x = \\ &= 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x.\end{aligned}$$

Pokračujme odvozením vzorce pro $\cos 3x$

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos x\cos 2x - \sin x\sin 2x = \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x(2\sin x\cos x) = \\ &= \cos^3 x - \cos x\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = \cos^3 x - 3\sin^2 x\cos x.\end{aligned}$$

Oba předchozí vzorce lze napsat v lehce zjednodušené variantě, kde opět využijeme vzorec (3.1.1). Získáme tak

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x, \qquad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x. \tag{3.2.3}$$

Tento vztah využijeme pro výpočet sinu jednoho v kapitole 4.2.4. Podobně bychom mohli dále odvodit vzorce s vícenásobnými argumenty. Na konci práce si však ukážeme, že je můžeme získat i jednodušším způsobem.

3.3 Sinus a kosinus polovičního argumentu

Ve vztahu (3.2.2) jsme si mohli všimnout, že na jedné straně vystupuje $\sin x$ a na druhé $\cos 2x$, toho využijeme k odvození vzorce pro $\sin\frac{y}{2}$ tak, že za x nahradíme $\frac{y}{2}$.

$$\cos y = 1 - 2\sin^2\frac{y}{2}, \tag{3.3.1}$$

z čehož vyjádříme $\sin^2\frac{y}{2}$,

$$\sin^2\frac{y}{2} = \frac{1-\cos y}{2}$$

a odmocněním získáme

$$\left|\sin\frac{y}{2}\right| = \left|\sqrt{\frac{1-\cos y}{2}}\right|,$$

což jsme chtěli odvodit. Je potřeba si uvědomit, že absolutní hodnota na pravé straně vůbec nemusí být, protože funkce cos nabývá pouze hodnot mezi jedničkou a mínus jedničkou. Jinými slovy pod odmocninou bude vždy kladné číslo, což znamená, že i výsledek odmocniny bude kladný. Můžeme tedy psát

$$\left|\sin\frac{y}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos y}{2}}.$$

Pro $\cos\dfrac{y}{2}$ bychom využili první část rovnosti (3.2.2), čímž bychom dostali vztah

$$\cos y = 2\cos^2\frac{y}{2} - 1,$$

z něhož bychom znovu pouze vyjádřili $\cos\dfrac{y}{2}$ a výsledek vyjádření odmocnili, čímž bychom obdrželi vztah

$$\left|\cos\frac{y}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos y}{2}}.$$

3.4 Součet goniometrických funkcí

V této části budeme hledat vzorce pro $\sin a+\sin b$, $\sin a-\sin b$, $\cos a+\cos b$ a $\cos a-\cos b$. Protože už víme, že součtové vzorce jsou mocný nástroj, tak se je pokusíme při odvozování těchto vztahů využít.

$$\sin a+\sin b = \sin(x+y)+\sin(x-y) \tag{3.4.1}$$

potom

$$a = x+y,$$
$$b = x-y.$$

Sečtením a odečtením těchto dvou rovnic dostaneme

$$a+b = 2x \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{a+b}{2} \tag{3.4.2}$$

$$a-b = 2y \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{a-b}{2}. \tag{3.4.3}$$

Tím jsme dostali vzorec pro x a y a můžeme rozložit $\sin(x+y)+\sin(x-y)$ z (3.4.1) pomocí součtových vzorců. Tedy

$$\sin x\cos y+\cos x\sin y+\sin x\cos y-\cos x\sin y = 2\sin x\cos y, \tag{3.4.4}$$

kde na levé straně se výrazy $\cos x\sin y$ odečtou a dosazením (3.4.2) a (3.4.3) dostaneme

$$\sin a+\sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}.$$

Vzorec pro $\sin a-\sin b$ odtud dostaneme nahrazením $-b$ za b:

$$\sin a-\sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}.$$

U vztahů pro $\cos a+\cos b$ a $\cos a-\cos b$ bychom postupovali obdobně a dostali bychom vzorce

$$\cos a+\cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2},$$
$$\cos a-\cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}.$$

3.4.1 Součin goniometrických funkcí

Ze vzorců pro součin goniometrických funkcí ukážeme pouze odvození pro $\sin a \sin b$. Při odvození budeme opět vycházet ze součtových vzorců. Nejprve si rozepíšeme $\sin a \sin b$ podle vzorce pro $\cos(a+b)$

$$\sin a \sin b = \cos a \cos b - \cos(a+b),$$

nyní si zkusíme rozepsat $\cos a \cos b$, všimněme si ale, že pokud bychom rozepisovali opět podle $\cos(a+b)$, tak by se nám oba $\cos(a+b)$ odečetly. Zvolme tedy vzorec pro $\cos(a-b)$, nyní dostáváme

$$\sin a \sin b = \cos(a-b) - \sin a \sin b - \cos(a+b),$$

což můžeme přepsat jako

$$2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

a po převedení dvojky na druhou stranu máme

$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}.$$

Ostatní vzorce pro součin goniometrických funkcí bychom odvodili obdobně.

3.5 Součtové vzorce pro funkci tangens

Postupně vyjádříme funkci tangens pomocí sinu a kosinu, na něž pak aplikujeme součtové vzorce:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}.$$

Nakonec už jen rozšíříme výrazem $\cos a \cos b$ a po zkrácení dostaneme

$$\frac{\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\cos a \sin b}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

Z tohoto vzorce už snadno dostaneme vzorec pro $\operatorname{tg} 2x$

$$\operatorname{tg}(x+x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

Analogicky můžeme odvodit i vzorce

$$\operatorname{cotg}(a+b) = \frac{\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b - 1}{\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b}, \quad \operatorname{cotg}(2x) = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x}$$

a vzorce pro obě funkce s $(a-b)$ v argumentu.

4. Výpočet sinu jednoho stupně

Výpočet co nejpřesnější hodnoty délky tětivy, která odpovídá danému středovému úhlu o co nejmenší velikosti, byl jeden z problémů, který bylo potřeba řešit napříč staletími už od dob Hipparcha (asi 190–125 př.n.l.). Důvod pro řešení takovéto úlohy byl jasný. Pomocí délky tětivy malého úhlu a součtových vzorců je možné sestavit celou tabulku takovýchto hodnot. Délka tětivy se velmi podobá dnešní funkci sinus. Pokud ji označíme $crd\,\alpha$, kde α je středový úhel k ní příslušný, a poloměr příslušné kružnice označíme R, pak přesný vztah funkce sinus a délky tětivy kružnice je

$$crd\ \alpha = 2R \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Pro tvorbu tabulky bude nejlepší, spočítáme-li nejprve hodnotu funkce sinus v jednoho stupně. Zbytek hodnot už jsme schopni dopočítat pomocí součtových vzorců. Dostaneme tak tabulku hodnot s krokem jednoho stupně.

4.1 Součtové vzorce a Ptolemaiova věta

V této kapitole představíme Ptolemaiovu větu, z níž následně přímo dostaneme při vhodné aplikaci součtové vzorce. Uvádíme ji zde hlavně z historických důvodů. V antice byla tato věta základem celé goniometrie. Z tohoto důvodu uvedeme i některé historické souvislosti.

4.1.1 Ptolemaiova věta

Klaudios Ptolemaios (žijící přibližně mezi léty 85–165 n.l.) byl řecko–egyptský matematik působící po většinu života v Alexandrii. Proslavilo ho jeho dílo Almagest, třináctidílná encyklopedie astronomie, která byla používána ještě ve středověku. Kapitola 10. a 11. první knihy je věnována tabulce délek tětiv a jejímu výpočtu, kterou se budeme zabývat v této části textu. Délky tětiv se výrazně podobají dnešní funkci sinus. Staří Řekové je používali jak v astronomii, tak například při výpočtu výšky pyramid s využitím délky stínu. Základem pro tyto výpočty byla Ptolemaiova věta, která je zobecněním věty Pýthagorovy a jedna její aplikace nám pomůže snadno odvodit součtové vzorce.

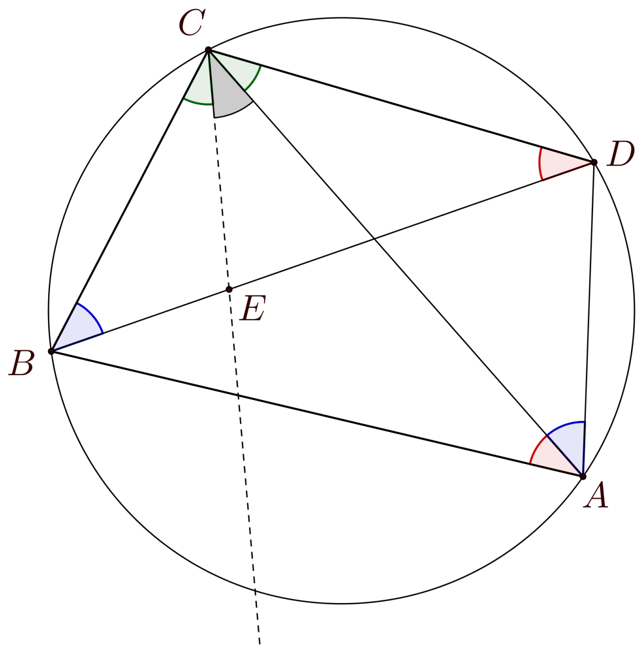
Věta 11. *(Ptolemaiova) Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$ vepsaný do kružnice. Potom v něm platí, že součet součinů jeho protilehlých stran je roven součinu jeho úhlopříček:*

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD.$$

Důkaz. Mějme tedy čtyřúhelník $ABCD$ vepsaný do kruhu. Sestrojme úhel $\angle BCE$, kde pro bod E platí:

$$E \in \overline{BD} \quad \wedge \quad |\angle BCE| = |\angle ACD|.$$

Dvojice úhlů $\angle CBD, \quad \angle CAD$ (vyznačeny na obrázku 4.1 modře) a $\angle BDC, \quad \angle BAC$ (vyznačeny červeně) mají stejnou velikost, protože jsou to obvodové úhly nad úsečkami $\overline{CD}$, respektive $\overline{BC}$.



Obrázek 4.1: Obrázek k Ptolemaiově větě.

Trojúhelníky BEC a ADC jsou tedy díky shodnosti dvou úhlů trojúhelníky podobnými a platí pro ně

$$\frac{BC}{BE} = \frac{AC}{AD},$$

jinak přepsáno

$$AD \cdot BC = AC \cdot BE. \tag{4.1.1}$$

Podobné jsou i trojúhelníky CDE a BCA. Díky shodnosti červených úhlů a rovnosti součtu úhlů

$$\angle ACD + \angle ECA = \angle BCE + \angle ECA$$

platí

$$\frac{CD}{ED} = \frac{AC}{AB},$$

neboli

$$CD \cdot AB = AC \cdot ED. \tag{4.1.2}$$

Nyní stačí sečíst rovnosti (4.1.1) a (4.1.2)

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BE + AC \cdot ED = AC \cdot (BE + ED),$$

kde $BE + ED = BD$, dostáváme tedy

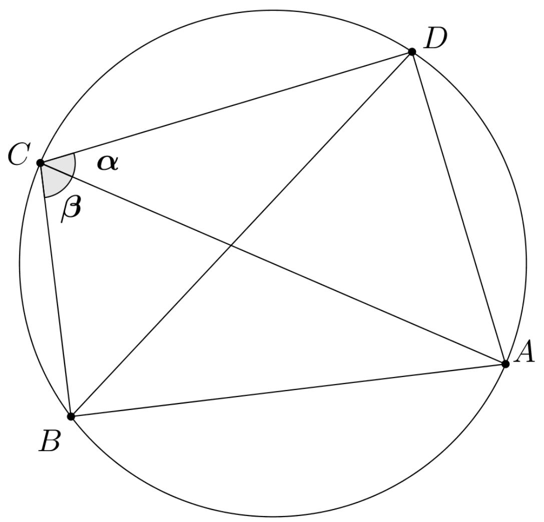
$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD,$$

což jsme chtěli dokázat.

$\square$

4.1.2 Aplikace Ptolemaiovy věty

Vepišme do jednotkové kružnice tětivový čtyřúhelník $ABCD$ tak, že strana BC je průměrem této kružnice, viz obrázek 4.1.2.



$AC = 1$
$CD = \cos\alpha$
$AD = \sin\alpha$
$BC = \cos\beta$
$AB = \sin\beta$
$BD = \sin(\alpha+\beta)$

Obrázek 4.2: Aplikace Ptolemaiovy věty pro odvození součtových vzorců.

Hned dostáváme dle Ptolemaiovy věty

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD,$$

neboli

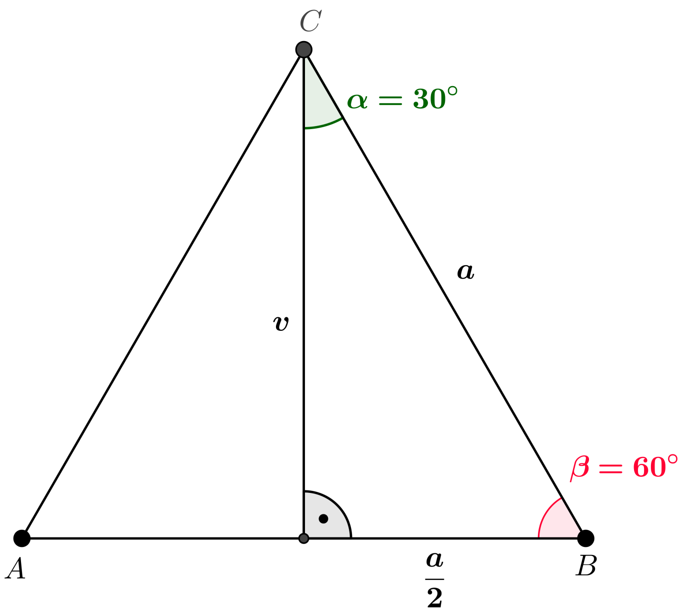
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

4.2 Výpočet hodnoty $\sin 1°$

Abychom spočítali sinus v jednoho stupně, odvodíme si nejprve některé hodnoty funkcí sinus a kosinus. Tato odvození vychází ze vztahů definice goniometrických funkcí, která se uvádí na základní škole, a z Pýthagorovy věty. Potom pomocí součtových vzorců a vztahů z nich odvozených dojdeme až k hodnotě sinus jednoho stupně.

4.2.1 Základní hodnoty funkce sinus

Mějme rovnostranný trojúhelník ABC, viz následující obrázek 4.3.



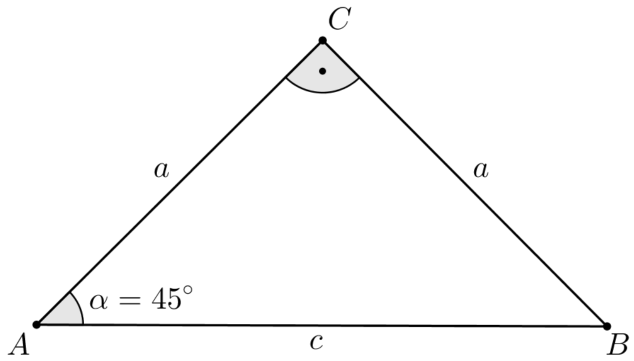
Obrázek 4.3: Odvození základních hodnot goniometrických funkcí.

Pro úhly α,β platí

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \tag{4.2.1}$$

$$\sin\beta = \cos\alpha = \frac{v}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}}{a} = \frac{\sqrt{\frac{3a^2}{4}}}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{4.2.2}$$

Obdobně můžeme odvodit hodnoty $\sin 45°$ a $\cos 45°$ z pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku.



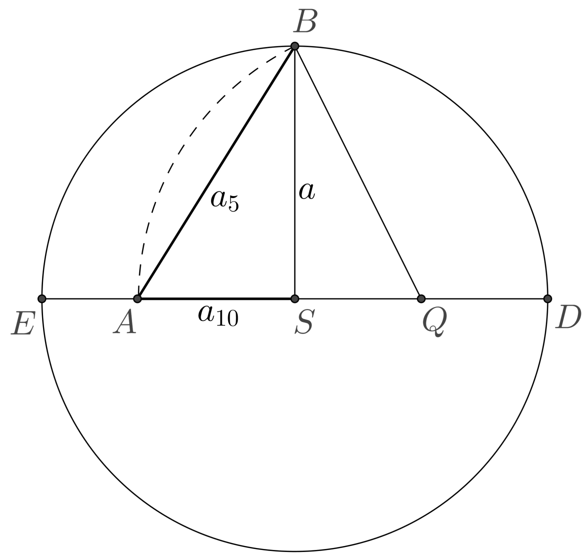
Obrázek 4.4: Odvození hodnoty $\sin 45°$

$$\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Z těchto hodnot ale pomocí součtových vzorců dostaneme pouze hodnotu $\sin 15°$. Opakovaným použitím vzorce pro sinus poloviny úhlu bychom mohli lehce zmenšovat úhel, ale brzy bychom dostali čtvrtiny, osminy a později ještě menší části stupně. Budeme tedy muset najít nějakou další hodnotu funkce sinus, kterou bychom mohli odvodit přímo.

Na začátku této kapitoly jsme využili pro odvození hodnoty $\sin 30°$ rovnostranný trojúhelník, což je úloha identická s výpočtem poloviny strany šestiúhelníku v jednotkové kružnici. Co kdybychom obdobnou věc zkusili s pětiúhelníkem? Dostali bychom $\sin 36°$.

Pro určení délky strany pravidelného pětiúhelníku využijeme popis jeho konstrukce znázorněný na následujícím obrázku. Postup pro konstrukci pětiúhelníku se objevil již v Eukleidově díle *Základy* nebo v Ptolemaiově *Almagestu*.



Obrázek 4.5: Konstrukce pravidelného pětiúhelníku.

Vycházejme z obrázku 4.5. Mějme úsečku ED délky $2a$. Sestrojme střed této úsečky a označme ho S. Tento bod zvolme jako střed kružnice s poloměrem a. Tato kružnice tak bude protínat krajní body úsečky ED. Sestrojme střed úsečky SD a označme jej Q. Z bodu S veďme úsečku kolmou k průměru ED a krajní bod na kružnici označme B. Nakonec sestrojme kružnicový oblouk o poloměru QB se středem Q. Průsečík tohoto oblouku s průměrem ED označme A. Nyní úsečka AB má délku rovnou délce strany pravidelného pětiúhelníku vepsaného do této kružnice a délka AS je délkou strany pravidelného desetiúhelníku.

Využitím Pýthagorovy věty potom dostáváme

$$a_5 = AB = \sqrt{AS^2 + a^2}, \tag{4.2.3}$$

kde AS vyjádříme jako

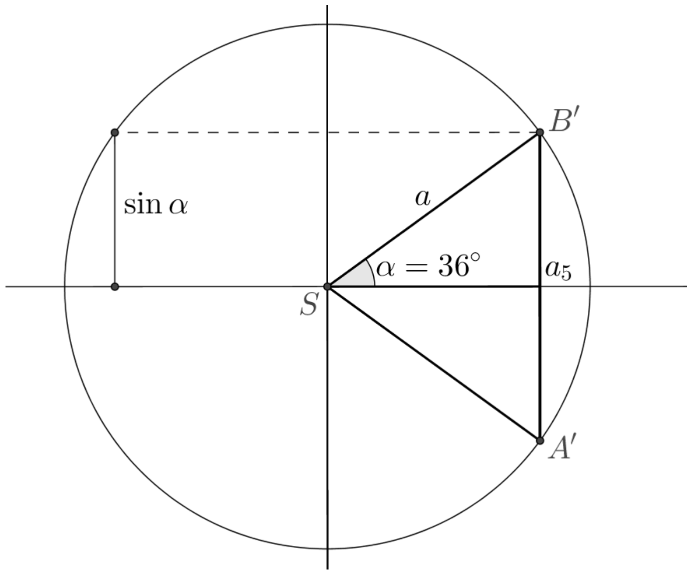
$$AS = BQ - SQ = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a.$$

Dosazením za AS do vztahu 4.2.3 získáme

$${a_5}^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a\right)^2 + a^2 = a^2\frac{5-2\sqrt{5}+1+4}{4} = a^2\frac{5-\sqrt{5}}{2},$$

z čehož dostáváme

$$a_5 = a\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$



Obrázek 4.6: Vztah mezi délkou tětivy v jednotkové kružnici a hodnotou funkce sinus.

Potom z obrázku 4.6 a posledního vztahu pro a_5 vidíme ihned, že

$$\sin 36° = \frac{\frac{1}{2}a_5}{a} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

Zvolme poloměr kružnice z obrázku 4.6 roven jedné, potom pro $\cos 36°$ díky Pýthagorově větě platí, $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$, neboli

$$\cos 36° = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)^2}$$

4.2.2 Použití součtového vzorce pro výpočet sinu šesti stupňů

$$\sin 6° = \sin(36° - 30°) = \sin 36° \cos 30° - \cos 36° \sin 30°,$$

kde po dosazení z (4.2.1), (4.2.2) a dvou předchozích výpočtů dostaneme,

$$\sin 6° = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)^2}\right)\frac{1}{2}.$$

Podobně pro $\cos 6°$ platí

$$\cos 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)^2}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\frac{1}{2}.$$

Nyní použijeme vztah pro $\sin\frac{x}{2}$, který jsme si odvodili v části 3.3. Zde bychom znovu dosazovali $\cos 6^\circ$, ale s jeho přesnou hodnotou by se nám špatně pracovalo. Zjednodušíme tedy dosazením $\cos 6^\circ$ a dostáváme

$$\sin 3^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 6^\circ}{2}}.$$

Nyní nás čeká poslední krok, kterým je aproximace sinu jednoho stupně. Inspiraci pro řešení této úlohy bychom mohli hledat už v antice u řeckého matematika Ptolemaia, jehož metoda byla založena na hledání horního a dolního odhadu pro $\sin 1^\circ$. Pro horní odhad použil hodnotu $\sin\frac{3^\circ}{4}$ a pro dolní odhad $\sin\frac{3^\circ}{2}$. Tato metoda se již nedá moc zpřesňovat, proto zvolíme metodu výpočtu $\sin 1^\circ$, kterou popsal již na začátku 15. století arabský matematik al-Káší.

4.2.3 Al-Káší

V této podkapitole jsme vycházeli z článku [CoR] a kapitoly Arabská matematika v knize [Ši].

Džamšíd Ghíjáth ad-Dín al-Káší, narozen kolem roku 1380 v Kášanu, byl perský matematik a astronom působící v Samarkandu (dnes město ležící v Uzbekistánu), kde také roku 1429 zemřel. Zásadní pro jeho práci bylo zázemí, kterým mu byla observatoř v Samarkandu. Tu nechal postavit sultán Ulugh Beg, který se zabýval matematikou a astronomií. Ulugh Beg na některých dílech s al-Káším přímo spolupracoval nebo využíval jeho pomoci. Na observatoři se například uskutečnilo pozorování, díky kterému Ulugh Beg, pravděpodobně za pomoci výpočtů al-Kášího, spočítal délku roku jako 365 dní 5 hodin 49 minut a 15 sekund, což se od dnešní hodnoty liší pouze o pět vteřin. Al-Káší také spočítal hodnotu 2π na devět šedesátinných míst (což odpovídá 16 místům v soustavě desítkové), čímž ve své době dosáhl nejvyšší přesnosti. Překonal jej až téměř o 200 let později německý matematik Ludolph van Ceulen, který publikoval výpočet čísla π na 20 desetinných míst. Proto se někdy číslo π nazývá Ludolfovým číslem. V al-Kášího době a před ní byla šedesátková soustava v astronomických výpočtech nejpoužívanější číselnou soustavou. Al-Káší však také počítal v soustavě desítkové, dokonce i s desítkovými zlomky.

Obrázek 4.7: Džamšíd al-Káší, z článku [CoR].

Práce al-Kášího, ve které popisuje výpočet hodnoty $\sin 1°$, byla ztracena. Postup byl ale dochován například v komentářích k astronomickým tabulkám *Pravidla operací a oprava tabulek* sepsaných Marjánem Čelebím kolem roku 1500. Dědeček Čelebího totiž působil jako astronom a matematik v Samarkandu ve stejné době jako al-Káší. Tato metoda je založena na kubické rovnici vycházející ze součtových vzorců, kterou al-Káší řešil pomocí iterační metody.

4.2.4 Aproximace sinu jednoho stupně

Al-Káší vycházel z námi použitého Ptolemaiova postupu výpočtu hodnoty $\sin 3°$, jehož přesnost závisí pouze na přesnosti výpočtu odmocnin. Znal tedy tuto hodnotu s přesností 14 desetinných míst.

$$\sin 3° = 0,05233595624294|4$$

Dále al-Káší využil tehdy dobře známého vzorce pro sinus trojnásobného argumentu, který jsme v části 3.2 odvodili pomocí součtových vzorců:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Za α dosadil $1°$, čímž získal kubickou rovnici, kde $\sin 1°$ byla neznámá, označme jej x. Dostaneme tak

$$\sin 3° = 3x - 4x^3.$$

Z této rovnice již vytvořil iterační předpis, který můžeme zapsat následovně

$$x_n = \frac{4x_{n-1}^3 + \sin 3^\circ}{3}, \quad x_0 = \frac{1}{60}. \tag{4.2.4}$$

Tímto způsobem al-Káší spočítal hodnotu $\sin 1^\circ$ s přesností na šestnáct desetinných míst:

$$\sin 1^\circ = 0.0174524064372835.$$

Se stejnou přesností uměl spočítat i hodnotu čísla π. Al-Káší nebyl první, kdo k aproximaci $\sin 1^\circ$ využil kubickou rovnici, před ním se o totéž pokoušel al-Bírúní. Iterativní metoda řešení použitá al-Káším byla však jedním z výborných výsledků středověké matematiky.[Ha],[Ma]

4.3 Výpočet sinu jednoho stupně a sestavení tabulky ostatních hodnot s využitím programovacího jazyku Python

V této části si ukážeme, že al-Kášího metoda může být velice užitečná i dnes. Například pomocí této metody můžeme s využitím dnešních programovacích jazyků spočítat „neomezeně přesnou hodnotu“ $\sin 1^\circ$. Navíc, pokud máme hodnotu $\sin 1^\circ$, je už velmi snadné sestavit celou tabulku hodnot $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$ pro $\alpha = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \dots, 90^\circ$.

Pokud používáme datové typy jako je BigDecimal v Javě nebo Decimal v jazyce Python, kde velikost jejich reprezentace v paměti není stanovená pevně, ale může se rozšiřovat, pak i tak nejsme schopni dosáhnout úplně neomezené přesnosti. Omezením nám je velikost operační paměti počítače. Maximální přesnost, které bychom mohli dosáhnout, může být výrazně vyšší, než s jakou budeme počítat, i tak ale rozdíl mezi hodnotou $\sin 1^\circ$, kterou spočítáme na šedesát desetinných míst, a reálnou hodnotou $\sin 1^\circ$ bude o víc než třicet desetinných míst menší než velikost jednoho kvarku v metrech (dosud jedna z nejmenších známých částic ve vesmíru, ze které se skládají protony a neutrony). Proto jsme si do uvozovek dovolili napsat „neomezeně přesnou hodnotu“.

Pro řešení tohoto problému jsme zvolili programovací jazyk Python3, protože má jednoduchou syntaxi a je Open-source (tzn. jsou volně dostupné jeho zdrojové kódy, tudíž je volně stažitelný i šiřitelný) včetně integrovaného vývojového prostředí IDLE.

4.3.1 Výpočet sinu jednoho stupně v jazyce Python

Pro přehlednější popis rozdělíme program do několika částí, jmenovitě to budou části *Inicializace důležitých proměnných*, *Ptolemaiův výpočet* $\sin 3^\circ$, *Al-Kášího výpočet* $\sin 1^\circ$ a *Sestavení a výpočet tabulky hodnot funkcí sinus a kosinus*. Tyto části budeme popisovat jednotlivě. Některé kroky jsou popsány přímo v programu červeně formou komentářů. Jednotlivé řádky kódu jsou očíslovány, čehož využijeme při jejich popisování. K očíslování jsme využili rozšíření IDLEX pro IDLE, které je také volně stažitelné.

```
1 from decimal import *
2 getcontext().prec = 60
3
4
5 x = Decimal(1)/Decimal(60)
6
7 # Na následujících řádcích definujeme typované
8 # hodnoty přirozených čísel(1,2,3,5), které budeme potřebovat pro další výpočty.
9 # Pokud bychom to neudelali výpočet by nebyl dostatečně přesný.
10 _1 = Decimal(1)
11 _2 = Decimal(2)
12 _3 = Decimal(3)
13 _5 = Decimal(5)
```

Na prvním řádku programu jsme načetli knihovnu Decimal, díky níž můžeme počítat s vyšší přesností s desetinnými čísly. Na řádku 2 nastavujeme přesnost representace čísel i všech výpočtů na 60 desetinných míst. Dále definujeme proměnnou `x`, kterou inicializujeme hodnotou $\frac{1}{60}$, jíž budeme dále využívat jako odhad pro $\sin 1°$.

```
14 # Ptolemaiuv postup výpočtu hodnoty sin 3°
15 sin30 = _1/_2
16 cos30 = _3.sqrt()/_2
17 sin36 = (_1/_2)*((_5-_5.sqrt())/_2).sqrt()
18 cos36 = (_1 - sin36*sin36).sqrt()
19 sin6  = sin36*cos30 - cos36*sin30
20 cos6  = cos36*cos30 + sin36*sin30
21 sin3  = ((_1 - cos6)/_2).sqrt()
```

Na řádcích 15-21 jsme v podstatě pouze přepsali Ptolemaiův postup vedoucí k výpočtu sinu tří stupňů, který jsme uvedli v částech 4.2.1 a 4.2.2.

```
22 # Al-Kášího iterační metoda
23 print("iterace   |hodnota pro sin 1° po dané iteraci")
24 print("________________________________________________________________________")
25 for count in range(22):
26   Vysledek = (Decimal(4)*x*x*x + sin3)/3
27   print("%s.        %s" % ((count+1),Vysledek))
28   x = Vysledek
```

Řádek 25 definuje takzvaný „for“ cyklus, který zajistí, že se blok příkazů na následujících odsazených řádcích provede tolikrát, kolik udává číslo v závorce za klíčovým slovem `range`.

Na následujícím řádku jsme do proměnné `Vysledek` uložili výpočet na základě iteračního vztahu z 4.2.4, kde `x` je na začátku definováno jako $\frac{1}{60}$. Po každém výpočtu uložíme do proměnné `x` novou hodnotu pro $\sin 1°$, kterou vytiskneme společně s číslem iterace `(count+1)`. Výsledkem po dvaceti dvou iteracích je pak následující výstup.

```
iterace   |hodnota pro sin 1° po dané iteraci
__________________________________________________________________________
1.        0.0174514915871541170802123827091989790831789241528944796673408
2.        0.0174524053227379782084612259360245107333805277463352117811975
3.        0.0174524064359256108547923132328852429901953968609260604751937
4.        0.0174524064372818584250439724575692344383442269877441486513670
5.        0.0174524064372835108037942724891122306721256080640363935199027
6.        0.0174524064372835128169632502952064232782465309073518434312712
7.        0.0174524064372835128194159865897547041155527499259222106344456
8.        0.0174524064372835128194189748711145482552029217055940551487815
9.        0.0174524064372835128194189785118750757690430273857795294795220
10.       0.0174524064372835128194189785163107816556514443215890958256778
11.       0.0174524064372835128194189785163161858800061640559336136490176
12.       0.0174524064372835128194189785163161924642210833360847315684827
13.       0.0174524064372835128194189785163161924722429349946692457590879
14.       0.0174524064372835128194189785163161924722527083852437093407691
15.       0.0174524064372835128194189785163161924722527202926146489161207
16.       0.0174524064372835128194189785163161924722527203071219462161086
17.       0.0174524064372835128194189785163161924722527203071396211231908
18.       0.0174524064372835128194189785163161924722527203071396426573425
19.       0.0174524064372835128194189785163161924722527203071396426835786
20.       0.0174524064372835128194189785163161924722527203071396426836105
21.       0.0174524064372835128194189785163161924722527203071396426836106
22.       0.0174524064372835128194189785163161924722527203071396426836106
```

Pro kontrolu použijeme hodnotu, kterou vypočítal program *Mathematica*

$$\sin 1^\circ = 0.0174524064372835128194189785163161924722527203071396426836105.$$

Při porovnání zjistíme, že hodnota, kterou jsme vygenerovali po dvacáté iteraci, je totožná s kontrolní hodnotou. Také můžeme vidět, že hodnota $\sin 1^\circ$ se velmi rychle zpřesňuje. Al-Kášímu tedy pro přesnost 16 desetinných míst stačilo pouhých pět iterací.

V poslední části programu na řádcích 30 a 31 uložíme hodnotu $\sin 1^\circ$ do proměnné Sin1 a dopočítáme Cos1. Na dalších dvou řádcích definujeme počáteční hodnoty pro SinN a CosN.

```
29 # Sestavení a výpočet tabulky hodnot pro sinus a kosinus
30 Sin1 = Vysledek
31 Cos1 = (_1 - Sin1*Sin1).sqrt() # Podle vzorce cos x = odmocnina(1- sinx*sinx)
32
33 SinN = Sin1
34 CosN = Cos1
35                                   # Využijeme součtové vzorce a
36 for count in range (91):          # budeme postupně přičítat 1°.
37   if ((count+1) < 6) or (count+1 == 45) or (count+1 == 30) or (count+1 == 90):
38     print ("sin %s°  = %s" % ((count+_1),SinN))
39     print ("cos %s°  = %s" % ((count+_1),CosN))
40   SinNplus1 = Sin1*CosN + Cos1*SinN
41   CosNplus1 = Cos1*CosN - Sin1*SinN
42   SinN = SinNplus1
43   CosN = CosNplus1
```

Nakonec využijeme znovu „for cyklus“ pro vytvoření tabulky hodnot funkcí sinus a kosinus. V každé iteraci „for cyklu“ začínajícího na řádku 36 nejprve vytiskneme hodnoty spočítané v předchozí iteraci ($\sin n$ a $\cos n$), kde poprvé tiskneme námi uložené hodnoty Sin1 a Cos1. Poté na řádcích 40-43 spočítáme pomocí součtových vzorců hodnotu $\sin(n+1°)$ a $\cos(n + 1°)$ a obě hodnoty uložíme, abychom je mohli využít v další iteraci. Výsledkem je výstup podobný následujícímu.

```
sin 1°  = 0.0174524064372835128194189785163161924722527203071396426836106
cos 1°  = 0.999847695156391239157011558813914851692740310583185939658321
sin 2°  = 0.0348994967025009716459951816253329373548245760432968714250022
cos 2°  = 0.999390827019095730006243440043929964495236306669996773103901
sin 3°  = 0.0523359562429438327221186296090784187310182539401649204835040
cos 3°  = 0.998629534754573873784492058439436580590952290767785532441442
sin 4°  = 0.0697564737441253007759588351941433286009032016527965250436102
cos 4°  = 0.997564050259824247613162680644255026369377660384221536225997
sin 5°  = 0.0871557427476581735580642708374735513777011561497026726137345
cos 5°  = 0.996194698091745532295010402473888046183562672645850974525444
sin 30° = 0.499999999999999999999999999999999999999999999999999999999956
cos 30° = 0.866025403784438646763723170752936183471402626905190314027934
sin 45° = 0.707106781186547524400844362104849039284835937688474036588292
cos 45° = 0.707106781186547524400844362104849039284835937688474036588402
sin 90° = 1.00000000000000000000000000000000000000000000000000000000002
cos 90° = 1.577E-58
```

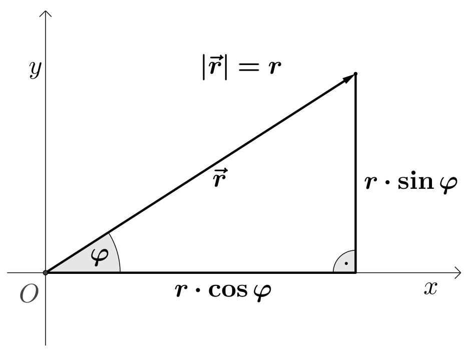
Tento výstup je upraven (podmínka na řádku 37) tak, aby byly vidět zajímavé hodnoty funkcí sinus a kosinus, jako je hodnota v $30°, 45°$ nebo $90°$.

5. Algoritmus CORDIC

CORDIC (z anglického **CO**ordinate **R**otation **DI**gital **C**omputer) je jednoduchý algoritmus pro výpočet goniometrických funkcí. Byl vyvinut v roce 1959 Jack E. Volderem z nutnosti nahradit analogový řešič v počítači bombardérů B-58, který nebyl dostatečně přesný. Algoritmus CORDIC využívá pro výpočet v podstatě pouze sčítání, odčítání a „logický shift“ (posun desetinné čárky ve dvojkové soustavě), což jsou velmi jednoduché operace. Mohl být tedy implementován do tehdejších letadel, i když výpočetní síla počítačů nebyla velká. To vedlo například k možnosti spočítat polohu letadla v reálném čase. Vycházet budeme z publikací J. E. Voldera [Vo] a [Vo2]

5.1 Otočení vektoru okolo počátku

Algoritmus CORDIC je založen na vyjádření rotace vektoru o určitý úhel δ. Vektor $\vec{r}$, který budeme rotovat, lze vyjádřit v kartézské soustavě souřadnic jako $\vec{r} = [x_0,y_0]$. Můžeme ho však určit i pomocí souřadnic polárních, v kterých je vektor definován orientovaným úhlem a velikostí. Velikost vektoru $\vec{v}$ budeme dále značit jako v.



Obrázek 5.1: Vztah mezi kartézskou a polární soustavou souřadnic.

Vztah mezi těmito souřadnicovými systémy můžeme vyjádřit následovně

$$
\begin{aligned}
x_0 &= r \cdot \cos\varphi \\
y_0 &= r \cdot \sin\varphi.
\end{aligned}
\tag{5.1.1}
$$

Otočení o úhel δ pak lze zapsat jako

$$
\begin{aligned}
x_\delta &= r \cdot \cos(\varphi + \delta) \\
y_\delta &= r \cdot \sin(\varphi + \delta),
\end{aligned}
$$

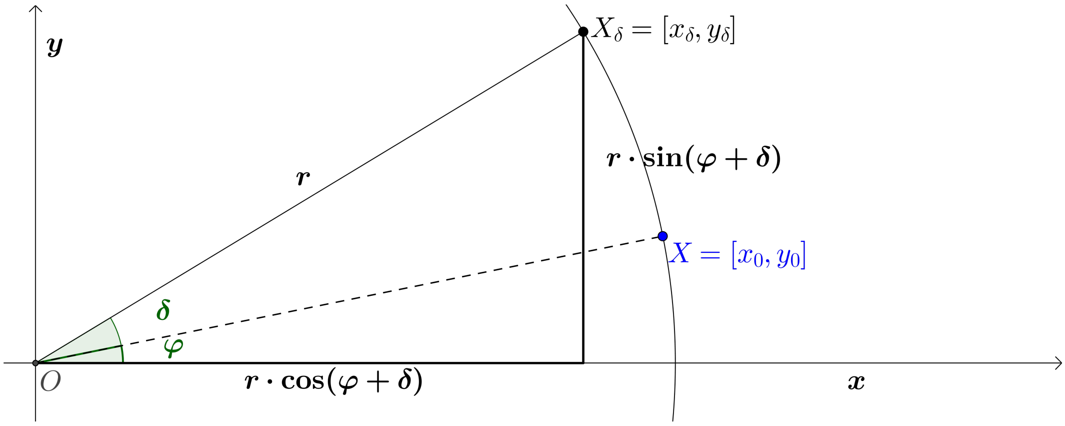
kde po rozepsání pomocí součtových vzorců a nahrazení $\cos\varphi$ a $\sin\varphi$ s využitím rovnic (5.1.1) dostáváme

$$
\begin{aligned}
x_\delta &= r \cdot (\cos\varphi\cos\delta - \sin\varphi\sin\delta) = x_0\cos\delta - y_0\sin\delta \\
y_\delta &= r \cdot (\sin\varphi\cos\delta + \cos\varphi\sin\delta) = x_0\sin\delta + y_0\cos\delta.
\end{aligned}
\tag{5.1.2}
$$

Zjistili jsme tedy, že otočení vektoru o úhel δ není závislé na jeho délce ani na původním úhlu, kterým byl vektor $\vec{r}$ definován v polárních souřadnicích. Tyto rovnice, které přímo určují obraz bodu X při otočení o úhel δ, se nazývají transformační rovnice pro otočení.

5.2 Podstata algoritmu CORDIC

Z následujícího obrázku můžeme vidět, že $\operatorname{tg}(\varphi + \delta) = \dfrac{y_\delta}{x_\delta}$.



Obrázek 5.2: Odvození součtového vzorce pro tangens.

Díky vztahu (5.1.2) můžeme tedy psát, že

$$\operatorname{tg}(\varphi + \delta) = \frac{x_0 \sin \delta + y_0 \cos \delta}{x_0 \cos \delta - y_0 \sin \delta}.$$

Pokud pravou stranu této rovnosti rozšíříme $\dfrac{1}{\cos \delta}$, dostáváme

$$\operatorname{tg}(\varphi + \delta) = \frac{y_0 + x_0 \operatorname{tg} \delta}{x_0 - y_0 \operatorname{tg} \delta}.$$

Opětovným rozšířením zlomku z pravé strany rovnosti, tentokrát podílem $\dfrac{1}{x_0}$, dostaneme součtový vzorec pro funkci tangens

$$\operatorname{tg}(\varphi + \delta) = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \delta}{1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta}.$$

Součtový vzorec pro funkci tangens je tedy základem algoritmu CORDIC. Myšlenka, díky které bylo možno předešlé vztahy zhodnotit, je využití hodnot 2^{-i}, kde $i \in \mathbb{N}$, jako volbu pro $\operatorname{tg} \delta$. Každý úhel δ lze přibližně vyjádřit jako součet

$$\delta \approx k_1 \delta_1 + k_2 \delta_2 + k_3 \delta_3 + \cdots + k_n \delta_n,$$

kde $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$. Díky tomu můžeme místo násobení využívat operaci shift (neboli bitový posun, což je velmi rychlá operace). Hodnoty $\operatorname{arctg} 2^{-i}$ si navíc můžeme předpočítat dopředu a uložit je do paměti. Takto postupoval J. E. Volder ve svých úvahách. V roce 1966 Hewlett Packard do svých kalkulátorů implementoval desítkovou verzi algoritmu, který dle svého názvu využíval místo hodnot 2^{-i} hodnoty 10^{-i}. Hodnoty δ_i pak můžeme definovat jako

$$\delta_i = \operatorname{arctg} 10^{-i}.$$

Dostáváme tak hodnoty:

i	10^{1-i}	úhel δ v radiánech
1	1.0	0.7853981633974483
2	0.1	0.0996686524911620
3	0.01	0.0099996666866652
4	0.001	0.0009999996666668
5	0.0001	0.0000999999996666
6	0.00001	0.0000099999999996
7	0.000001	0.0000009999999999
8	0.0000001	0.0000000999999999
9	0.00000001	0.0000000099999999

Na tabulce si všimněme, že čím vyšší je hodnota i, tím více se k sobě blíží hodnoty ve druhém a třetím sloupci. Pro zjednodušení se někdy využívala pouze hodnota v prvním řádku tabulky a hodnoty zbylé se uvažovaly jako $\operatorname{arctg} 10^{-i} = 10^{-i}$. V následujícím programu, kvůli vyšší přesnosti, využijeme hodnoty z tabulky.

```
from decimal import *
getcontext().prec = 60
_1 = Decimal(1);_0 = Decimal(0)
delta = [Decimal(0.7853981633974483096156608458198757210), # arctg 10^0
         Decimal(0.0996686524911620273784461198780205902), # arctg 10^-1
         Decimal(0.0099996666866652382063401162092795485), # arctg 10^-2
         Decimal(0.0009999996666668666665238096349205440), #      .
         Decimal(0.0000999999996666666686666666523809524), #      .
         Decimal(0.0000099999999999666666666686666666652), #      .
         Decimal(0.0000009999999999996666666666668666666), #
         Decimal(0.0000000999999999999996666666666666686), #
         Decimal(0.0000000099999999999999996666666666666),
         Decimal(0.0000000009999999999999999996666666666),
         Decimal(0.0000000000999999999999999999996666666)]
print ("  Tento program vypočítá pomocí algoritmu CORDIC  ")
print ("          tg() úhlu, který zvolíte.")
print ("--------------------------------------------------")
print ("   Pro ukončení programu stiskněte pouze enter.")
print ("--------------------------------------------------")
vstup = ( input("Zadejte úhel (rad) a stisknete enter: ") )
if vstup == "":
  exit()
vstup = Decimal(vstup); a = Decimal(vstup)
while vstup != 0:
  x = _1; y = _0; d = Decimal(10);
  for i in range(11):
    d = d/10
    while a >= delta[i]:
      a = a - delta[i]
      x = x - d*y; y = y + d*(x + d*y)
  print ("tg %s = %s"% ((vstup),(y/x)))
  print ("--------------------------------------------------")
  print ("   Pro ukončení programu stiskněte pouze enter.")
  vstup = Decimal( input("Zadejte úhel (rad): ") ); a = vstup
```

Program čeká na zadání čísla na vstupu a po stisknutí enter vypočítá tangens vstupu. Následně se zeptá uživatele na další číslo.

6. Odvození Eulerova vzorce užitím součtových vzorců

6.1 Leonhard Euler

Leonhard Euler, švýcarský matematik a fyzik, se narodil 15. dubna 1707 v Basileji a zemřel 18. září 1783 v Petrohradě. Je považován za jednoho z nejlepších matematiků nejen 18. století. Pro tuto část budeme čerpat z článku [CoR2].

Euler publikoval své práce v mnoha odvětvích, např. mechanice, optice a astronomii. Největší věhlas však získal díky svým pracím v oblasti matematické analýzy, kde také zavedl velkou část matematických pojmů a symbolů.

Obrázek 6.1: Portrét Eulera od Emanuela Handmanna z roku 1753.

Jeho otec Paul Euler vystudoval teologii a byl pastorem reformované církve, zajímal se ale také o matematiku. Osobně navíc znal Jacoba Bernoulliho i jeho bratra Johanna Bernoulliho (oba byli výborní švýcarští matematici). Byl to on, kdo dal pravděpodobně mladému Leonhardovi matematický základ, se kterým nastoupil na universitu v Basileji. Tam již ve svých 16-ti letech získal magisterský titul z filosofie. Většinu svého života však působil na Petrohradské nebo Berlínské akademii věd. Nejprve působil v Petrohradě, kde po nemoci oslepl na jedno oko (to můžeme vidět na přiloženém portrétu). V letech 1738 a 1740 pak získal Grand Prix (Velkou cenu) od Pařížské akademie, díky níž se dostal do Berlínské akademie věd, kterou od roku 1759 vedl. Nestal se však jejím prezidentem. Král Frederick II. oslovil totiž nejprve D'Alemberta, což Eulera urazilo, a rozhodl se odejít zpět do Petrohradu.

Psal se rok 1766, kdy Euler onemocněl a oslepl kvůli šedému zákalu i na své druhé oko. To ho ale nezastavilo v jeho tvorbě. Navzdory své slepotě vydal ještě s pomocí svého syna Johana Albrechta Eulera a později dalších členů akademie A. J. Lexela a N. Fusse téměř polovinu svých prací. Například 775stránkovou práci o pohybu Měsíce. Dále pokračoval ve svých pracích z algebry nebo optiky. To vše dokázal hlavně díky své neuvěřitelné paměti. Během posledních sedmi let života připravil s pomocí Fusse přes 250 prací k publikaci. Po jeho smrti pak Petrohradská akademie vydávala ještě téměř padesát let jeho práce.

6.2 Eulerův vzorec a jeho odvození

Eulerův vzorec je důležitým vztahem, který propojuje goniometrii s exponenciální funkcí $y = e^{ix}$ komplexní proměnné. V této části popíšeme způsob, kterým Euler pomocí goniometrického vyjádření Pýthagorovy věty a součtových vzorců získal větu Moivreovu a z té následně odvodil vzorec dnes známý jako Eulerův. V průběhu tohoto odvození navíc získal z binomické věty vzorce pro sinus a kosinus násobného argumentu. Dále získal polynomy, jejichž členy odpovídají členům Taylorovy řady pro sinus a kosinus. Vycházet přitom budeme z knihy [Sa] a původní Eulerovy knihy [Eu], která je psaná v latině.

Ve 40. letech 17. století pracoval Leonhard Euler v Berlíně na své knize *Introductio in analysin infinitorum* [Eu], kterou se mu také roku 1748 podařilo vydat. V této knize, přesněji její osmé kapitole, se věnuje získávání vlastností funkcí sinus, kosinus a tangens téměř tak, jak to děláme dnes. V další části této kapitoly popisuje využití komplexních čísel, přičemž dojde ke vzorci, který dnes nazýváme jeho jménem.

Právě tato část nás z pohledu této práce zajímá. Euler zde pro komplexní jednotku využívá označení $\sqrt{-1}$ oproti dnešnímu značení i, které budeme dle dnešní zvyklosti využívat. Dále využijeme tzv. Eulerovu konstantu značenou písmenem e. Zde je třeba dodat, že Euler nebyl tím, kdo by tuto konstantu používal jako první. Byl ale tím, kdo ji jako první značil písmenem e, a to ne z důvodu ješitnosti, ale jednoduše proto, že e je druhá samohláska v abecedě hned za písmenem a, které již ale ve svém značení využíval.

V odvozování vyšel ze vzorce $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, který přepsal jako

$$(\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x) = 1,$$

což vychází ze vzorce $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$. Dále vzal součin podobný tomu z levé strany rovnosti $(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)$ a roznásobil jej. Pomocí součtových vzorců tak získal

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y + (\cos x \sin y + \sin x \cos y)i = \cos(x + y) - i \sin(x + y).$$

Následně po několika dalších řádcích, protože násobení lze považovat za opakované sčítání, uvedl výsledek

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx,$$
$$(\cos x - i \sin x)^n = \cos nx - i \sin nx,$$

který dnes nazýváme Moivreova věta. Abraham de Moivre tento výsledek publikoval dříve, konkrétně v roce 1707. Není jasné, jestli Euler tento vzorec znal, ve své knize totiž necitoval zdroje. Pouhým sečtením a odečtením těchto dvou rovností dostáváme ihned

$$\begin{aligned} \cos nx &= \frac{(\cos x + i \sin x)^n + (\cos x - i \sin x)^n}{2}, \\ \sin nx &= \frac{(\cos x + i \sin x)^n - (\cos x - i \sin x)^n}{2i}. \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

Tyto vztahy pak rozepsal pomocí binomické věty, čímž de facto získal vzorec pro goniometrické funkce násobného argumentu. My zde rozepíšeme pouze vztah pro kosinus. Analogicky bychom postupovali s funkcí sinus.

$$\cos nx = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2} x \sin^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4} x \sin^4 x - \dots$$

Euler věděl, že pokud jde x k nule, pak $\cos x = 1$ a $\sin x = x$, dále volí n jako „nekonečně velké“ číslo tak, že $nx = v$, kde v je konečné. Využil tedy následující substituce

$$\cos x = 1, \quad \sin x = x = \frac{v}{n}, \tag{6.2.2}$$

dostal tak

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{v^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \dots,$$

což je řada ekvivalentní s Taylorovou řadou pro kosinus.

Substituci (6.2.2) využil znovu pro nahrazení $\sin x$ a $\cos x$ ve vztahu (6.2.1)

$$\cos v = \frac{\left(1 + i\frac{v}{n}\right)^n + \left(1 - i\frac{v}{n}\right)^n}{2},$$
$$\sin v = \frac{\left(1 + i\frac{v}{n}\right)^n - \left(1 - i\frac{v}{n}\right)^n}{2i}.$$

V sedmé kapitole knihy [Eu] Euler odvozuje vztah $e^x = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, kde e je tzv. Eulerova konstanta. Po uvedení tohoto vztahu s odkazem na předchozí dvě rovnosti mohl tedy psát

$$\cos v = \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2},$$
$$\sin v = \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i}.$$

Nakonec dostává

$$e^{iv} = \cos v + i \sin v,$$
$$e^{-iv} = \cos v - i \sin v.$$

což je vzorec, který dnes nese jeho jméno. Pokud za neznámou zvolíme π, získáme

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Tato rovnost je považována v matematice za jednu z nejkrásnějších, protože ukazuje vztah mezi konstantami e, i a π. Pravděpodobně z úcty k tomu, co vše Euler dokázal, byla taktéž pojmenována po něm. Není totiž prokázáno, že by k ní Euler samostatně došel. Mnozí matematici před ním byli k objevení této rovnosti stejně blízko, jak se uvádí v knize [Sa].

Závěr

V této práci jsem chtěl poukázat na důležitost součtových vzorců. Ukázal jsem, že jsou využívány pro odvození vlastností goniometrických funkcí, ale i odvození transformační rovnice pro otočení. Kapitoly pět a šest pak dokládají, že důležitou roli hrály nejen v dějinách matematiky. S jejich pomocí byly sestavovány tabulky hodnot goniometrických funkcí a J. E. Volder je využil při vývoji algoritmu CORDIC, který byl využíván pro navigaci v bombardérech B-58.

Přesto jsou součtové vzorce na střední škole někdy nedoceňované nebo považované za příliš obtížné jak žáky, tak v krajních případech učiteli. V této bakalářské práci jsem uvedl několik jejich různých odvození, z nichž všechny jsou pochopitelné pro žáky středních škol. Chtěl jsem tím přispět k popularizaci součtových vzorců a ukázat, že není nikterak složité zařadit do výuky na střední škole jak některé jejich odvození, tak také vybrané aplikace.

Literatura

[Ba] Barbosa L. V. *Radián a jeho vztah ke kružnici* (The radian and its relation to the circle), Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Circle_radians.gif

[Ca] Calda E. *Matematika pro tříleté učební obory středních odborných učilišť*, 3.díl, Prometheus, Praha, 2004.

[CoR] O'Connor J. J., Robertson E. F. *Ghiyath al-Din Jamshid Mas'ud al-Kashi.* MacTutor History of Mathematics,1999, School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland Dostupné z: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Kashi.html

[CoR2] O'Connor J. J., Robertson E. F. *Leonhard Euler* MacTutor History of Mathematics,1998, School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland Dostupné z: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler.html

[Eu] Euler L. *Introductio in analysin infinitorum*, apud Marcum-Michaelem Bousquet & socios, Svazek 1, str. 140–148, 1748.

[Ha] Halas Z. *Goniometrie v antice.* Matfyzpress, Praha, 2014.

[Ja] Jarník V. *Diferenciální počet.* Academia, Praha, 1974.

[Ka] Kadourek J. *Odchylka vektorů v euklidovském prostoru E_n*, Dostupné z: www.math.muni.cz/~kadourek/odchylka.pdf

[Kop] Kopáček J. *Matematická analýza nejen pro Fyziky.* Matfyzpress, Praha, 2004.

[Ma] Maor E. *Trigonometric Delights.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998.

[Mo] Motičková M. Diplomová práce - *Využití internetu ve výuce goniometrie na střední škole*, 2006, Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/motyckova/Stranky_s_aplety/index.html

[Ne] Nelsen R. B. *Proofs Without Words II*, *MAA*, 2000.

[Od] Odvárko O., *Matematika pro gymnázia–Goniometrie.* 4. vydání. Prometheus, Praha, 2013. ISBN 978-80-7196-359-2.

[Po] Polák J. *Přehled středoškolské matematiky*, 9. přepracované vydání. Prometheus, Praha, 2008. ISBN 978-80-7196-356-1.

[Sa] Sandifer, C. E. *How Euler did even more.* Washington, District of Columbia: Mathematical Association of America, 2015. *MAA spectrum.* str. 83-88, ISBN 978-1-61444-519-7.

[Se] Sekanina M. a kol. *Geometrie I.* SPN, Praha, 1986.

[Ši] Šimša P. *Arabská matematika.* V knize Bečvář J. (editor): *Matematika ve středověké Evropě.* Prometheus, Praha, 2001, str. 150-183, ISBN: 80-7196-232-5.

[Ve] Veselý J. *Základy matematické analýzy.* Matfyzpress, Praha, 2009.

[Vo] Volder J. E. *The Birth of CORDIC.* The Journal of VLSI Signal Processing. Kluwer Academic Publishers Hingham, 2000, **25**(2), 101-105. DOI: 10.1023/A:1008110704586. ISSN 09225773. Dostupné také z: http://link.springer.com/10.1023/A:1008110704586

[Vo2] Volder J. E. *The CORDIC Trigonometric Computing Technique.* IEEE Transactions on Electronic Computers. 1959, **EC-8**(3), 330-334. DOI: 10.1109/TEC.1959.5222693. ISSN 0367-7508. Dostupné také z: http://home.citycable.ch/pierrefleur/Jacques-Laporte/Volder_CORDIC.pdf

Seznam obrázků