

JOSEF VOJÁČEK:
SOUČTOVÉ VZORCE PRO GONIOMETRICKÉ FUNKCE
A JEJICH APLIKACE

Oponentský posudek na bakalářskou práci

Bakalářská práce se zabývá součtovými vzorci pro goniometrické funkce, tj. problematikou ve školské matematice leckdy „zatracovanou“, a to jak studenty, tak někdy i učiteli. Předložená práce se snaží o změnu tohoto negativního pohledu, a lze ji tedy chápat jako obhajobu součtových vzorců.

V první kapitole jsou zavedeny goniometrické funkce nejdříve tak, jak je tomu na základních školách (tj. pomocí poměrů délek stran pravoúhlého trojúhelníku), poté tak, jak je tomu na školách středních (tj. s využitím jednotkové kružnice), dále pomocí funkcionálních rovnic a nakonec s využitím Taylorova polynomu.

Druhá, dle mého názoru „nejhravější“ kapitola je věnována několika odvozením součtových vzorců. Společným výchozím bodem různých postupů je obrázek. Student uvádí např. odvození tzv. „beze slov“, tj. „díváním se na obrázek“.¹

Třetí kapitola představuje využití součtových vzorců pro stanovení jiných goniometrických vztahů.

Ve čtvrté kapitole jsou představeny metody výpočtu sinu jednoho stupně, a to včetně stanovení této hodnoty pomocí programovacího jazyku Python.

Stručná pátá, resp. šestá kapitola je věnována algoritmu CORDIC pro výpočet hodnot goniometrických funkcí, resp. vztahu mezi součtovými vzorci a Eulerovým vzorcem.

Jak to tak v životě bývá, téměř vše má svá pozitiva a zároveň i negativa. Předložená bakalářská práce není výjimkou. Dovolím si začít **pozitiv**y.

Svou náplní a strukturou je práce, dle mého názoru, příkladem toho, jak by mohla kvalitní bakalářská práce na učitelském studiu vypadat. Vychází ze středoškolského učiva, ale je v ní řada poznatků, které v hodinách matematiky na středních školách zmiňovány nejsou, přestože jsou založeny jen a pouze na středoškolských znalostech a jsou efektní. Současně se objevují i partie z vysokoškolské matematické analýzy.

Při jednotlivých definicích či odvozeních si přitom autor všímá omezení definičního oboru goniometrických funkcí, porovnává přístup ke konkrétním partiím v jednotlivých učebnicích, svým přístupem automaticky představuje stupeň poznání goniometrických funkcí žáky či studenty jednotlivých stupňů škol. Pečlivě udává literaturu, z které čerpal, resp. kterou byl inspirován, přikládá základní historická fakta.

A nyní k **negativům** textu. Pokud bych měla negativa shrnout do jediného souvětí, napsala bych toto: *Práce obsahuje leckdy jen drobné chyby, ale vyskytující se s poměrně velkou frekvencí.*

V práci se objevují pasáže, v nichž jakoby „na autora padla únava“. Např. 33⁵: *Vepišme do jednotkové kružnice tětivový čtyřúhelník ABCD tak, že strana BC je průměrem této kružnice, viz obrázek 4.1.2.* Tučně psané výrazy nejsou správně. Navíc každý čtyřúhelník vepsaný kružnici je automaticky tětivový, tj. je uvedena dvakrát tatáž informace. Poté následuje obrázek, v jehož popisu chybí opakovaně symbol $| |$ pro délku úsečky (viz i dále).

¹Odvození je autorem převzato z poměrně známé knihy *Proofs Without Words II* Richarda Nelsena.

Podrobněji uvádím k chybám toto (více řádků o negativěch neznamená jejich převážení nad pozitivy):

Vyskytují se ne zcela přesné formulace, např.

- 20^{8,9}, resp. 20¹²: *pata kolmice ... a bod D nechť definují úsečku*, resp. *pata kolmice ... a bod D vytvoří úsečku...* Lze psát jednoduše, že body jsou *krajními body úsečky*.
- 21¹⁰: ... *hledat úsečku společnou dvěma trojúhelníkům obsahující k a v*
- 23⁷: *Platnost tohoto obrázku by se zdůvodnila ...*
- 31⁵: *Pomocí délky tětivy malého úhlu ...*
- 31⁶: (obdobně 31₁₀): *Délka tětivy se velmi podobá dnešní funkci sinus.*
- 33₃: *Tato odvození vychází ze vztahů definice goniometrických funkcí, ...*

Občas není zřejmé, který vztah plyne z kterého; občas se objeví vztah na první pohled „spadlý z nebe“, bez jeho „uvedení na scénu“ (viz např. 37₄); občas není důkaz doveden do úplného konce (např. po 23² bych psala: *Protože $|DA| = |CE| + |EB|$, je $\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta$. A obdobně pro $|AB| = \dots$).*

Poměrně často (např. celá strana 32) chybí **označení délky** úsečky, a to především v symbolickém zápise (mělo by být $|AB|$ místo autorova AB), někdy i v textu.

A nakonec příkládám několik otázek k zamyšlení:

- 17¹⁴: Co vše zahrnuje pojem *součtové vzorce*? Jen čtyři rovnosti uvedené na straně 17? Nebo i vztah $\operatorname{tg}(x + y) = \dots$ (např. 45₆)?
- 25 (obr. 2.7): Pokud pojednáváme o úhlech o velikostech φ a $\frac{\pi}{2} - \varphi$, je dobré volit $\varphi \approx \frac{\pi}{4}$?
- 26^{4,5,7,\dots}: Proč není vysvětlen symbol \circ ?
- 28_{4,5}: Nemá být dvakrát místo slova *kladné* slovo *nezáporné*? Byl argument v této části někde omezen?
- 34¹: Kam se „ztratila“ funkce kosinus?
- Proč jsou někdy n -úhelníky popisovány „po anglicku“ po směru hodinových ručiček?
- Proč jsou některé obrázky černobílé a některé barevné?

Potvrzují, že předložený text splňuje požadavky kladené na bakalářskou práci. S radostí ji tímto doporučuji k obhajobě.

Navrhuji klasifikaci velmi dobře.

V Praze dne 24. ledna 2017

RNDr. Martina Štěpánová, Ph.D.