Univerzita Karlova v Prahe
Pedagogická fakulta

Dizertačná práca

Praha 2010 **Lucia Csachová**

Univerzita Karlova v Prahe
Pedagogická fakulta

Pravidelné a náhodné teselácie vo vyučovaní matematiky

Dizertačná práca

Lucia Csachová

Školiteľ: RNDr. Ivan Saxl, DrSc.

Školiace pracovisko: Katedra matematiky a didaktiky matematiky,
Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy,
Matematický ústav AV ČR

Študijný program: pedagogika

Obor: didaktika matematiky

Poďakovanie

Ďakujem najmä svojmu školiteľovi RNDr. Ivanovi Saxlovi, DrSc. (1936–2009), ktorý mi venoval mnoho hodín konzultácií, s veľkou trpezlivosťou a obetavosťou sa snažil naučiť ma princípom vedeckej práce a hľadať nové odborné problémy a riešiť ich. Spolupracovať s ním bolo pre mňa profesionálnym i osobným prínosom.

Ďalej by som chcela poďakovať kolegyniam – učiteľkám, ktoré mi pomohli zrealizovať v ich triedach experimenty, najmä Doc. RNDr. Marii Kubínovej, CSc., RNDr. Jane Pócsovej, Ph.D., PhDr. Michaele Ulrychovej a Mgr. Barbore Divišovej, a všetkým deťom a študentom, ktorí sa experimentov trpezlivo zúčastňovali.

Vďaka patrí aj RNDr. Ingrid Semanišinovej, Ph.D., ktorá stála na začiatku mojej cesty k teseláciám, dr. hab. Ewe Swobode, Doc. RNDr. Nadi Stehlíkovej, Ph.D., Mgr. Marii Tichej, CSc. a Mgr. Filipovi Roubíčkovi, Ph.D., ktorí mi ukázali cestu v didaktickom výskume, a každému, kto reagoval na tému môjho výskumu rôznymi pripomienkami či odkazmi.

Nakoniec chcem ešte poďakovať svojmu manželovi Kornelovi, ktorý ma podporoval a pomáhal mi s grafickou úpravou práce, pričom veľká časť použitých obrázkov je výsledkom jeho trpezlivej práce.

Túto prácu som vypracovala samostatne s použitím uvedenej literatúry. Súhlasím s požičiavaním práce.

V Prahe 18. 1. 2010 Lucia Csachová

Úvod 3

1 Rovinné teselácie 8

1.1 Pravidelné teselácie . . . 11
1.1.1 Mnohouholníkové teselácie . . . 11
1.1.2 Escherovské teselácie . . . 14
1.1.3 Rovinné grupy symetrií . . . 17
1.2 Náhodné teselácie . . . 26
1.3 Charakteristiky teselácií . . . 32
1.4 Teselácia ako štruktúra . . . 36

2 Teselácie okolo nás 41

2.1 Teselácie v umení a architektúre . . . 41
2.2 ... od Platóna po súčasnosť . . . 56
2.3 Aplikácia modelu teselácií . . . 68

3 Rovinné teselácie v didaktike matematiky 74

3.1 Rovinné teselácie a rovinná predstavivosť . . . 74
3.2 Rovinné teselácie a tvorivosť . . . 83
3.3 Postavenie rovinných teselácií v didaktike matematiky a v školskej matematike . . . 87

4 Predmet, ciele a metódy výskumu 93

4.1 Experimenty predvýskumu . . . 93
4.1.1 Štvoruholníkové teselácie . . . 93
4.1.2 Escherovské teselácie . . . 101
4.1.3 Voronojove teselácie . . . 107
4.2 Ciele výskumu . . . 111
4.3 Metódy výskumu . . . 111
4.4 Analýza úloh, skúmané javy a kategórie . . . 113
4.4.1 Voronojove teselácie . . . 114
4.4.2 Escherovské teselácie . . . 116

5 Experimenty a ich analýza 119

5.1 Gymnazisti . . . 120
5.1.1 Voronojove teselácie . . . 120
5.1.2 Escherovské teselácie . . . 126
5.1.3 Mnohouholníkové monoedrálne teselácie . . . 129

5.2 Primáni . . . 138
5.2.1 Voronojove teselácie . . . 138
5.2.2 Escherovské teselácie . . . 155
5.3 Porovnanie práce žiakov a študentov . . . 171

6 Zhrnutie 172

Záver 175

Literatúra 176

Prílohy 182

Považujem svoje dielo za
najkrajšie i najškaredšie.
M. C. Escher

Úvod

Vytváranie obrázkov z dielov skladačky (*puzzle*[1], obr. 1a) je obľúbenou činnosťou vo voľnom čase nielen pre deti ale aj pre mnohých dospelých, pri ktorej človek objavuje určité geometrické zákonitosti typu „čo k čomu patrí“. Táto činnosť rozvíja rekonštruktívnu i konštruktívnu predstavivosť (podľa skúseností človeka; viď podkapitola 3.1) v súvislosti s geometrickými útvarmi („pasujú“ dané časti k sebe?), a skúša cit pre vzor. V oblasti oblečenia či bytového textilu sa zase opakovane objavuje obľúbený štýl *patchwork* (obr. 1b).

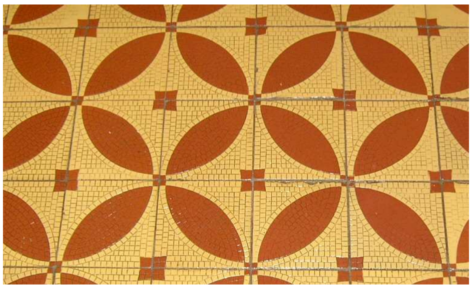
a)

b)

Obr. 1 a) Detail skladačky (*puzzle*), b) deka v štýle *patchwork*.

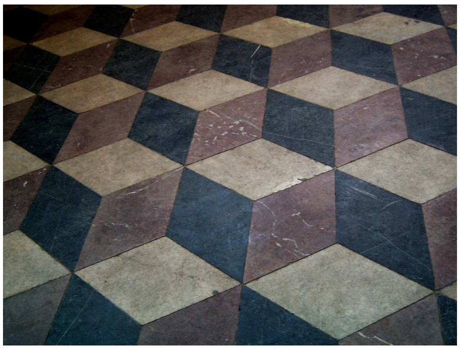
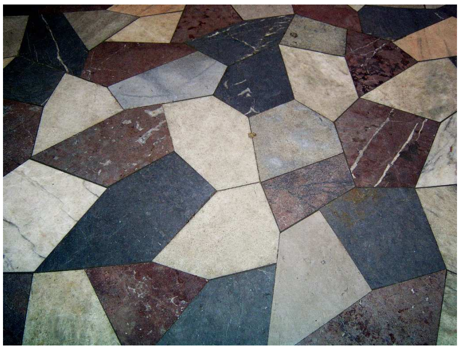
Podobnou činnosťou ako vytváranie obrázku z jednotlivých dielov (vyžadujúcou možno menej predstavivosti, ale zato oveľa užitočnejšou) je dláždenie chodníkov, kachličkovanie stien v kúpeľni či parketovanie podlahy. Zložitejšou činnosťou je už vymýšľanie nových, nezvyčajných tvarov dlaždíc alebo parkiet (obr. 2, obr. 3, obr. 4).

[1] Prvá skladačka, tzv. *jigsaw puzzle* (Príloha I), bola vytvorená v roku 1766 anglickým rytcom a výrobcom máp, Johnom Salisburym, ktorý sa vyučil u kráľovského geografa. Salisbury pripevnil mapu Európy na drevenú dosku a jednotlivé krajiny vyrezal; takto vyrobená pomôcka sa používala v škole. Napriek tomu, že nadchla širokú verejnosť, až do roku 1820 sa používala výlučne v školách. Zlatý vek skladačiek nastal v dvadsiatych a tridsiatych rokoch 20. storočia, kedy ju vyrábalo niekoľko spoločností. Typické skladačky sú zložené z 300, 500, 750 a 1000 dielov; komerčne vyrobená skladačka zložená z najväčšieho počtu dielov mala rozmery 428 cm ×157 cm a 24000 častí.



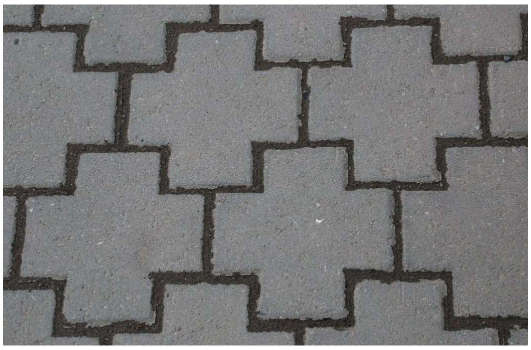

a) b)

Obr. 2 Mozaiková podlaha: a) chodba gymnázia vo Velkom Meziříčí, b) poštový motív na dlaždiciach na hrade Kokořín.

a) b)

Obr. 3 Mozaiková podlaha: a) kaplnka sv. Kříže na Pražskom hrade (rovinná teselácia vyvoláva trojrozmerný dojem), b) pasáž U Stýblů, Václavské náměstí.




a) b)

Obr. 4 Dláždenie chodníkov: a) dlaždica v tvare nekonvexného dvanásťuholníka, b) štvorcová dlaždica v dvoch farebných odtieňoch.

Aj živá príroda ponúka bohatstvo podobnej „tvorby“. Koža žirafy je posiata škvrnami, ktoré z väčšej vzdialenosti pripomínajú mnohouholníky (obr. 5a); zebra (obr. 5b) sa zase pýši známymi „pásmi“. Pre korytnačky je najtypickejším znakom ich pancier. Jeho vonkajšia časť je rohovinová, zložená z charakteristicky tvarovaných a sfarbených štítkov (obr. 6a) vytvárajúcich akúsi mozaiku na zakrivenej ploche. Zaujímavosťou je, že každá korytnačka má túto „výzdobu“ tak jedinečnú, že by mohla slúžiť rovnako ako odtlačok prstov v svete ľudí. Život včiel fascinuje ľudí od nepamäti.

Každá komôrka v pláste je približne rovnako veľká šesťhranná rúrka s tenkými stenami ukončená hrubším voskovým poklopom. Otázka, ako sú včely schopné vytvoriť tak precízne hranoly, ktorých kolmým prierezom je pravidelný šesťuholník (obr. 6b), je už dlhú dobu predmetom viacerých štúdií nielen v biológii ale aj v matematike.[2]

a) b)

Obr. 5 a) Škvrny na koži žirafy, b) pásy zebier.

a) b)

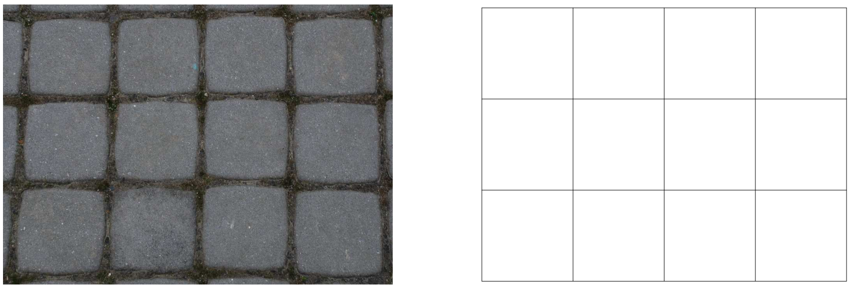
Obr. 6 a) Korytnačí pancier, b) plásty včelieho úľa.

Všetky predložené príklady je možné nazvať jedným pojmom – *teselácie*. Táto práca sa zaoberá najmä ich špeciálnym prípadom – *rovinnou teseláciou*, ktorá síce reálne neexistuje (všetky objekty sveta majú tri rozmery a medzery medzi jednotlivými útvarmi vždy existujú, viď obr. 7a, b), v mnohých prípadoch je ale možné jeden rozmer i medzery zanedbať, a riešiť tak množstvo zaujímavých problémov. Ďalším spôsobom získania rovinnej teselácie môže byť napríklad dvojrozmerný rez trojrozmerného objektu.

S rovinnými teseláciami ako matematicko-didaktickou problematikou som sa stretla počas štúdia na vysokej škole a ich rafinovaná krása a súčasne jednoduchosť mi učarovali natoľko, že som sa im venovala nielen

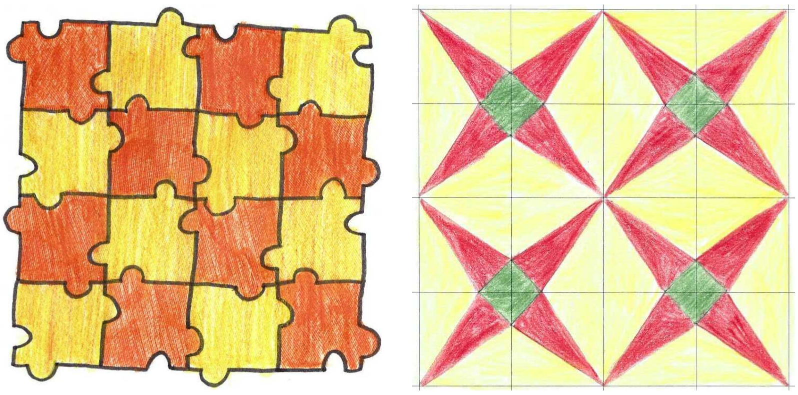
[2] Pravdepodobným vysvetlením neobyčajnej presnosti včiel pri stavaní plástu je teplo. Najprv včely vybudujú z vosku komôrku v tvare valca. Potom do nej vojde včela – „vyhrievačka“ – a rozohreje vosk, až sa začne topiť. Ako vosk chladne, vytvaruje sa šesťstenný útvar.

v diplomovej práci [Ilucová, 2002], ale pokračovala som ďalej v tejto téme aj v rámci doktorandského štúdia. A keďže som bola presvedčená (a ešte stále som), že táto téma nie je len pre vyvolených (t. j. matematikov, resp. vedeckých pracovníkov vo všeobecnosti), ale pre širokú verejnosť, rozhodla som sa realizovať výskum, ktorý by preukázal záujem ľudí o rôzne „typy“ teselácií a schopnosť detí školského veku vytvárať rovinné teselácie.



a) b)

Obr. 7 a) Časť vydláždeného chodníka, b) príslušná dvojrozmerná teselácia (je zanedbaný tretí rozmer a šírka medzier, resp. hraníc, medzi celami).



Obr. 8 Ukážky detských teselácií.

Túto prácu je možné rozdeliť do dvoch častí. Prvá časť (kapitoly 1 a 2) sa venuje človeku v úlohe staviteľa, architekta, umelca či výskumníka. Predkladá krásu a účelnosť teselácií okolo nás a matematické problémy, ktoré sa ich týkajú, a zamestnávali (a zamestnávajú) matematikov, fyzikov, biológov či inžinierov v priebehu storočí. Druhá časť práce (kapitoly 3, 4, 5 a 6) je o človeku školského veku ako bytosti s bohatým potenciálom tvorivosti a predstavivosti pri rôznych aktivitách s rovinnými teseláciami v pedagogickej situácii.[3] V tej časti chcem ukázať, že problematika teselácií je

[3] Kapitola 3 predkladá základné poznatky o predstavivosti (geometrickej, resp. priestorovej) a tvorivosti, o ktoré sa v práci opieram, v kapitole 4 opisujem svoje začiatky s experimentami týkajúcimi sa rovinných teselácií; na základe ich výsledkov som si vytýčila ciele, metódy výskumu a javy a kategórie, ktoré som chcela skúmať. Kapitola 5 sa venuje hlavnej časti výskumu. V ňom okrem plánovanej výskumnej skupiny – žiakov

témou vhodnou pre zaradenie do vyučovania matematiky najmä základnej školy, pretože žiakom prirodzeným a zábavným spôsobom predvádza rôznosť geometrických závislostí a vzťahov, ktoré sa často vo vyučovaní geometrie strácajú. A naviac vytváranie rôznych typov teselácií rozvíja u detí (ale aj u dospelých) výtvarnú a geometrickú predstavivosť a kultivuje ich estetické cítenie (viď napríklad obr. 8). Žiaci sú pritom často bez zložitého vysvetľovania schopní použiť intuitívne to, čo sa v ich živote prirodzene vyskytuje (napríklad zhodné zobrazenia), zatiaľ čo my, učitelia, sa ich to snažíme naučiť ako niečo absolútne nové. Myslím si, že obrázky nakreslené žiakmi uvedené v práci a ich reakcie pozitívny vplyv teselácií dokazujú.

druhého stupňa základnej školy – vystupujú aj študenti gymnázia, ktorých som učila matematiku. Nakoniec kapitola 6 podáva zhrnutie prevedených experimentov.

Kapitola 1

Rovinné teselácie

Rovinnou teseláciou $\mathcal{T}$ nazvem množinu dvojrozmerných ohraničených útvarov v euklidovskej rovine, ktorá predstavuje súčasne *pokrytie* roviny, resp. jej časti, bez *prekrytia*[4]. (Analogicky je definovaná *priestorová teselácia* ako pokrytie bez prekrytia v trojrozmernom priestore.[5]) Útvary vytvárajúce teseláciu sa nazývajú *cely*, vrcholy ciel *vrcholy teselácie*, strany ciel *strany teselácie*. Napríklad rovnako veľké štvorce môžu vytvárať rôzne teselácie, pričom prienikom jednotlivých štvorcov môže byť celá strana štvorca, jeho vrchol alebo prázdna množina; takáto teselácia sa nazýva *strana k strane* (obr. 9a), prípadne je prienikom ciel teselácie len časť strany cely (obr. 9b). V prípade teselácie strana k strane spája strana dva vrcholy a každý vrchol je koncovým bodom niekoľkých strán; počet týchto strán sa nazýva *valencia* vrcholu teselácie.[6]

Rovinnú teseláciu je možné chápať aj ako *dekompozíciu* alebo *kompozíciu* roviny, resp. jej časti (podľa [Peregrin, 1999]). Dekompozíciou je napríklad rozstrihnutie pohľadnice na časti (charakterizované ako prechod od teselácie k cele/celám), kompozíciou usporiadanie týchto častí tak, aby vznikla teselácia s pôvodným alebo iným usporiadaním (prechod od cely/ciel

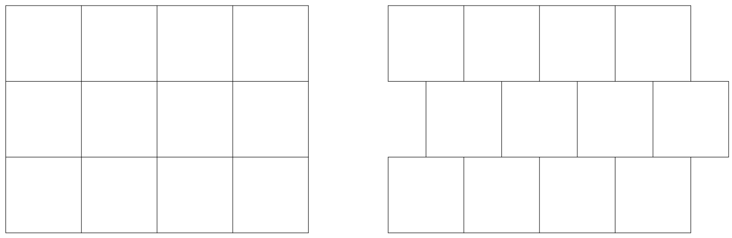
---

[4] [covering without overlapping]

[5] B. Grünbaum a G. C. Shephard v [Grünbaum, Shephard, 1977, str. 227] definujú rovinnú teseláciu nasledovne: „Rovinné dláždenie je systém množín nazývaných dlaždice, ktoré pokrývajú rovinu bez medzier a prekrytí.“ [A tiling of the plane is a family of sets – called tiles – that cover the plane without gaps or overlaps.] V tejto definícii je možné zameniť pojem „plane“ za pojmy „space“ resp. „Euclidean n-dimensional space“, a tak získať zovšeobecnenie pre teseláciu v euklidovskom n-rozmernom priestore.

[6] Terminológia použitá v práci bola čerpaná najmä z publikácií [Grünbaum, Shephard, 1987], [Coxeter, 1989], [Ponížil, 1998]. Pojmy bolo nevyhnutné preložiť a niektoré upraviť pre slovenský jazyk, keďže terminológia nie je prístupná v slovenských publikáciách; niektoré pojmy sa ale nachádzajú v [Pradlová, 2001] alebo [Marcinek, 2001].

k teselácii). Pod pojmom *konštrukcia/vytvorenie* teselácie rozumiem nakreslenie teselácie pomocou rysovacích potrieb ale i voľnou rukou alebo vytvorenie teselácie z už pripravených ciel. (Za kompozíciu je možné považovať aj konštrukciu Voronojovej teselácie; bližšie podkapitola 1.2.)



a) b)

Obr. 9 a) Štvorcová teselácia strana k strane (valencia každého vrcholu je 4), b) štvorcová teselácia, ktorá nie je strana k strane.

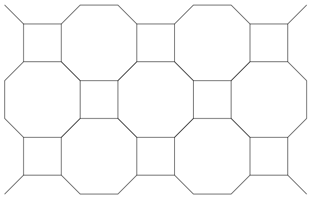
Monoedrálna teselácia je teselácia $\mathcal{T}$, ktorej každá cela T_i je kongruentná (priamo alebo zrkadlovo) s jednou danou množinou T nazývanou *protocela* (t. j. všetky cely teselácie sú rovnakého tvaru i veľkosti). Protocelou môže byť jedna cela (ako napríklad v prípade štvorcových teselácií na obr. 9b), ale i konečná množina viacerých ciel (napríklad na obr. 10). *Diedrálna* teselácia $\mathcal{T}$ je teselácia, ktorej každá cela T_i je kongruentná s jednou z dvoch rôznych protociel (napríklad obr. 11). Podobne sa definuje *triedrálna*, *kvadriedrálna*, …, n-*edrálna* teselácia s 3, 4, …, n rôznymi protocelami. Problematika rovinných n-*edrálnych* teselácií ($2 \leq n$) je hlbšia a oveľa rozsiahlejšia, a k jej štúdiu je možné použiť napríklad publikáciu [Grünbaum, Shephard, 1987].

a) b)

Obr. 10 M. C. Escher: a) *Eight Heads* [Osem hláv] (1922), b) protocela teselácie.[7]

[7] Ak nebude uvedená iná informácia, tak všetky obrázky od M. C. Eschera sú prevzaté z internetovej stránky `http://www.mcescher.com` [stránka aktuálna k dňu 17. 1. 2010].

Pojem *teselácia* je prevzatý z anglického *tessellation*[8] odvodeného zo slovesa *tessellate* (pokrývať), ktoré pochádza z gréckeho slova *τέςςαρεζ* (tessares) s významom „štyri“. Gréci nazývali hraciu kocku *τέςςαρα* (tessara), pretože každá jej stena mala štyri hrany. Latinské slovo pre hraciu kocku je *tessera*, jeho zdrobneliny sú *tessella* alebo *tesserula*. Napríklad slovník [Webster's New Collegiate Dictionary, 1989, str. 1382] vysvetľuje slovo *tessera* ako malú tabuľku dreva, slonoviny a pod. používanú ako žetón, lós alebo ako hraciu tabuľu v starovekom Ríme.



Obr. 11 Diedrálna teselácia.

Z matematického hľadiska sú teselácie veľmi bohatou oblasťou, čo dokazuje aj veľký počet kníh a článkov im venujúci sa. Publikované boli špeciálne monografie zaoberajúce sa teseláciami (napríklad [Okabe a kol., 1992], [Møller, 1994]), prípadne sú im venované samostatné kapitoly v knihách venovaných konvexnej (napríklad [Schulte, 1993]) či stochastickej geometrii (napríklad [Stoyan a kol., 1990], [Saxl a kol., 1995]), alebo je teória teselácií tesne spätá s teóriou geometrických symetrií (napríklad [Grünbaum, Shephard, 1987]).

Keďže úlohy zadané v experimentoch predvýskumu a hlavného výskumu (kapitoly 4 a 5) sa týkali len rovinných teselácií a ich vlastností, v tejto kapitole je podaný prehľad najdôležitejších matematických pojmov a poznatkov práve o rovinných teseláciách; priestorové teselácie, resp. lineárne, spomeniem len v prípade, že je to v súvislosti s dvojrozmerným

[8] V anglickej literatúre sa okrem pojmu *tessellation* používajú aj pojmy *tiling, paving, parquetting* alebo *mosaic*, v nemeckej literatúre *Pflasterung, Felderung, Teilung, Parkettierung* a *Zerlegung*, vo francúzskej *pavage, carrelage* a *dallage* a v ruskej *паркетаж, разбиение, замощение* [Grünbaum, Shephard, 1987, str. 16]. V českej literatúre sa vyskytujú pojmy *pokrytí roviny mnohoúhelníky* [Kuřina, 2002], *rovinná* alebo *prostorová teselace* [Saxl a kol., 1997], [Ponížil, 1998], *mozaika* [Kupčáková, 2001], v slovenskej *rovinná mozaika* (pre prípad roviny), *výplň* roviny alebo priestoru, *parket* a *dlažba* [Marcinek, 2001], *parketáž, dláždičkovanie* alebo *kachličkovanie*. Významy niektorých pojmov sa od seba mierne líšia (napríklad parket – dlažba, viď [Marcinek, 2001]), ale týmito rozdielmi sa nebudem podrobnejšie zaoberať. Pre útvary vytvárajúce teseláciu sa v anglickej literatúre používajú pojmy *tiles* [Grünbaum, Shephard, 1977] alebo *cells* [Schulte, 1993], v českej a slovenskej *buňky, cely* [Ponížil, 1998] alebo *dlaždice* [Kupčáková, 2001], [Marcinek, 2001].

prípadom nevyhnutné alebo zaujímavé.[9] Podkapitola 1.1 sa zaoberá pravidelnými rovinnými teseláciami, podkapitola 1.2 tými, ktoré sa vyznačujú nepravidelnosťou, a podkapitola 1.3 teseláciou v roli štruktúry.

1.1 Pravidelné teselácie

Pod pravidelnými teseláciami sa obyčajne chápu tri monoedrálne strana k strane teselácie – teselácia vytvorená zo zhodných štvorcov (štvorcová), z rovnostranných trojuholníkov a z pravidelných šesťuholníkov.[10] V tejto práci ale *pravidelnou* teseláciou budem nazývať takú teseláciu, ktorá sa vyznačuje pravidelnosťou vzhľadom k tvaru a usporiadaniu svojich ciel, pričom sa zameriam len na dvojrozmerný prípad monoedrálnych teselácií. Najprv zhrniem, ktoré mnohouholníky vytvárajú monoedrálnu teseláciu, potom ukážem možnosti pre aplikáciu zhodných zobrazení na cely, ktorá vedie k vytvoreniu tzv. *escherovských* teselácií, a nakoniec sa pomocou grúp symetrie pokúsim opísať rôzne typy pravidelného usporiadania ciel.

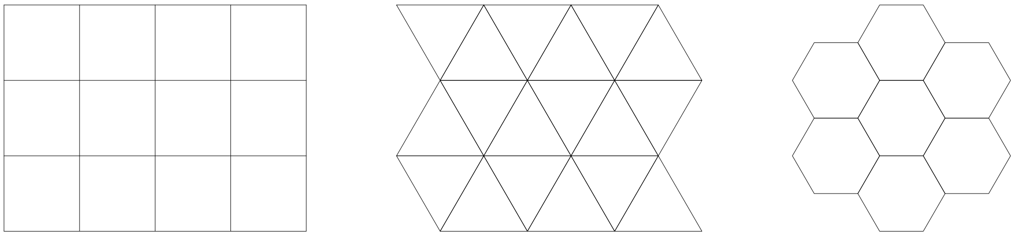
1.1.1 Mnohouholníkové teselácie

Odpoveď na otázku, ktorý pravidelný mnohouholník vytvára monoedrálnu rovinnú teseláciu, je z pohľadu školskej matematiky jednoduchá: je to štvorec, rovnostranný trojuholník a pravidelný šesťuholník (obr. 12). Dôvodom je, že len tieto pravidelné n-uholníky majú veľkosti vnútorných uhlov také, že ich celočíselný násobok je rovný 360° (rovnostranný trojuholník: $6 \times 30°$, štvorec: $4 \times 90°$, pravidelný šesťuholník: $3 \times 120°$). Takisto známe a jednoducho dokázateľné je, že ľubovoľný štvoruholník (aj nekonvexný, viď obr. 13a) vytvára rovinnú teseláciu (dôkaz je na obr. 14 a obr. 15) a ľubovoľný trojuholník takisto[11] (obr. 13b). Dané teselácie nazvem *štvoruholníková* a *trojuholníková*, teseláciu vytvorenú opakovaním jedného n-uholníka *n-uholníková*.

[9] K štúdiu trojrozmerných teselácií je možné odporučiť napríklad [Okabe a kol., 1992], [Saxl a kol., 1995], [Ponížil, 1998].

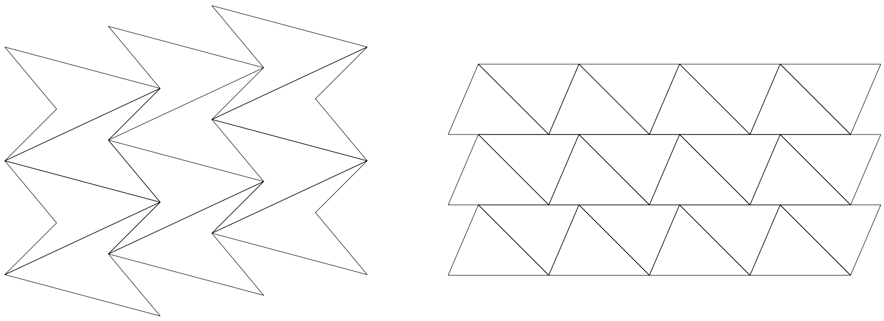
[10] Polopravidelnú teseláciu potom predstavuje teselácia vytvorená opakovaním rôznych pravidelných mnohouholníkov, ktorých usporiadanie a počet je okolo každého vrcholu rovnaké (viď Príloha II). Takto zadefinované pravidelné a polopravidelné teselácie sú tiež známe pod názvom *archimedovské*.

[11] Dôkaz je založený na rovnakom princípe ako dôkaz pre štvoruholníky; ďalšou možnosťou je jednoduchá predstava, že pre každé dva zhodné trojuholníky existuje možnosť vytvorenia štvoruholníka (napríklad rovnobežníka).



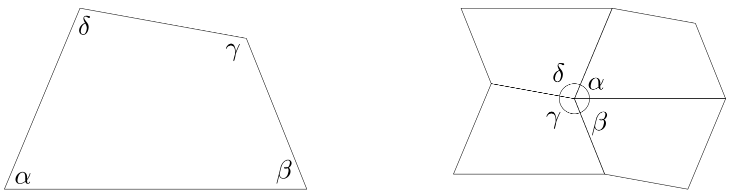
a) b) c)

Obr. 12 Monoedrálne teselácie vytvorené opakovaním zhodných pravidelných mnohouholníkov: a) štvorec, b) rovnostranný trojuholník, c) pravidelný šesťuholník.



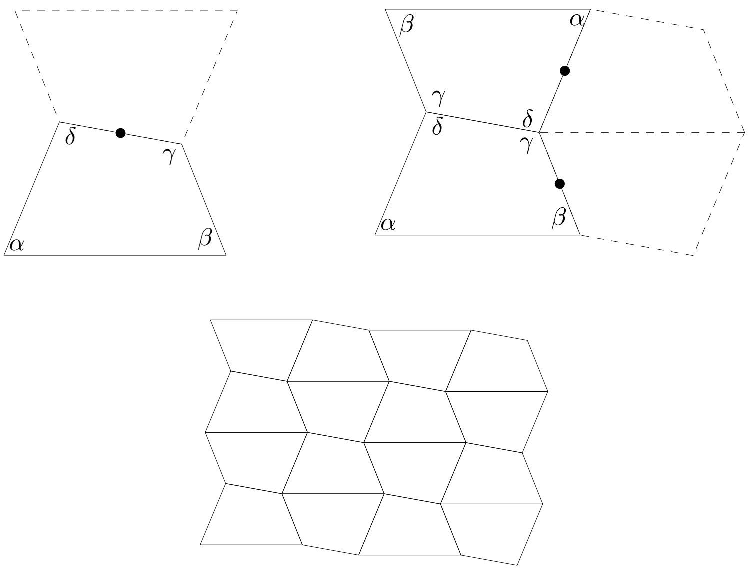
a) b)

Obr. 13 a) Štvoruholníková teselácia s celou v tvare nekonvexného štvoruholníka, b) príklad trojuholníkovej teselácie.



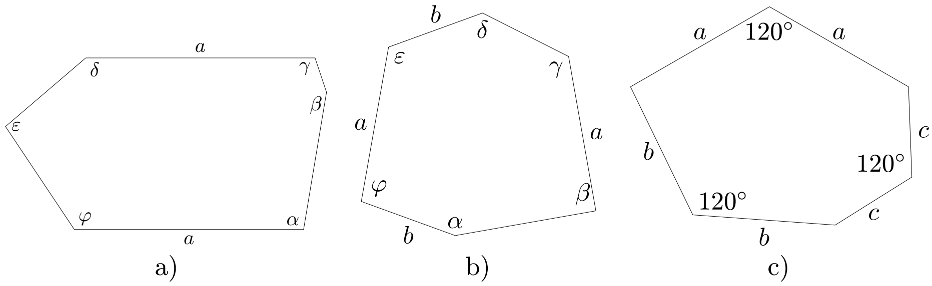
Obr. 14 Pre súčet veľkostí vnútorných uhlov v ľubovoľnom štvoruholníku platí: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$.

Problematika vytvárania monoedrálnych teselácií opakovaním jedného konvexného n-uholníka s $n \geq 5$ už ale nie je taká jednoduchá. Ako z predchádzajúcich riadkov vyplýva, pravidelný päťuholník nepatrí k útvarom, ktoré je možné využiť ako celu teselácie, ale niektoré ďalšie konvexné päťuholníky áno. Na druhej strane pravidelný šesťuholník vytvára teseláciu, ale neplatí to pre každý šesťuholník. Kým ale problém, ktoré konvexné šesťuholníky vytvárajú teseláciu, bol už vyriešený, pre konvexné päťuholníky analogická otázka nebola dlho uzavretá. Zoznam teselujúcich šesťuholníkov predstavujú tri typy šesťuholníkov na obr. 16 (pod „typom“ sa rozumie množina mnohouholníkov, ktoré vyhovujú určitým podmienkam pre veľkosť strán a vnútorných uhlov), počet všetkých typov teselujúcich päťuholníkov je podľa výskumov štrnásť. Opis vyhovujúcich šesťuholníkov a päťuholníkov s nákresmi, ktoré boli objavované nezávislo odborníkmi i laikmi, je možné nájsť napríklad v [Schattschneider, 1978a] alebo v [Grünbaum, Shephard, 1987, str. 492–494]. (Bližšie informácie o monoedrálnych päťuholníkových a šesťuholníkových teseláciách viď podkapitola 2.2.)



Obr. 15 Otočením štvoruholníka o 180° okolo stredu jednej zo strán a okolo stredov ďalších troch strán, sa vytvorí monoedrálna štvoruholníková teselácia.

Pre konvexné n-uholníky s $n \geq 7$ ale platí, že žiaden z nich nevytvára monoedrálnu rovinnú teseláciu. Dôkaz pochádza od I. M. Nivena a je možné ho nájsť napríklad v [Niven, 1981, str. 150–153].[12] (Predpoklad konvexnosti je podstatný – viď obr. 4a.)

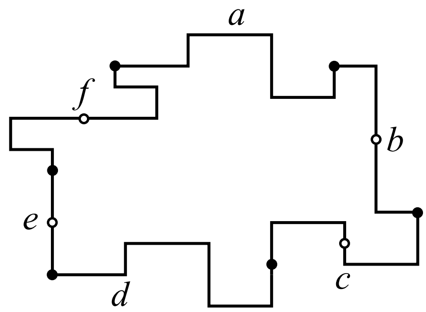


Obr. 16 Tri typy šesťuholníkov vytvárajúcich monoedrálne rovinné teselácie; každá z príslušných troch teselácií je izoedrálna (viď časť 1.1.3). Podmienky, ktoré musia niektoré strany spĺňať, sú vyznačené v obrázku (strany s rovnakými dĺžkami sú označené rovakými písmenami), podmienky pre veľkosti vnútorných uhlov sú nasledujúce: a) $\beta = 2\pi - \alpha - \gamma$, $\epsilon = 2\pi - \delta - \varphi$, b) $\gamma = 2\pi - \delta - \varphi$, $\epsilon = 2\pi - \alpha - \beta$, c) veľkosť troch vnútorných uhlov je 120°.

Na konci tejto časti by som sa chcela ešte pozastaviť pri probléme existencie algoritmu, pomocou ktorého by bolo možné zistiť bez vytvorenia

[12] Prvýkrát dôkaz Ivan Morton Niven publikoval v decembri 1978 (Niven, I. Convex Polygons which Cannot Tile the Plane. *American Mathematical Monthly* vol. 85, No. 10, 1978, str. 785–792).

teselácie, či sa opakovaním danej cely, resp. protocely (v tvare mnohouholníka, ale aj so zaoblenými „stranami“) v rovine vytvorí monoedrálna rovinná teselácia. Týmto algoritmom je použitie tzv. *Conwayovho kritéria* (obr. 17; viď napríklad [Schattschneider, 1980]). To tvrdí, že cela vytvára monoedrálnu teseláciu, ak je možné rozdeliť jej hranicu (obvod) na šesť častí tak, aby časti a a d vznikli navzájom posunutím, zatiaľ čo ostatné štyri časti b, c, e a f sú krivkami, z ktorých každá má stred súmernosti. Nevýhodou je, že kritérium je len postačujúcou podmienkou pre existenciu teselácie a nie nutnou; napriek tomu má ale široké uplatnenie.



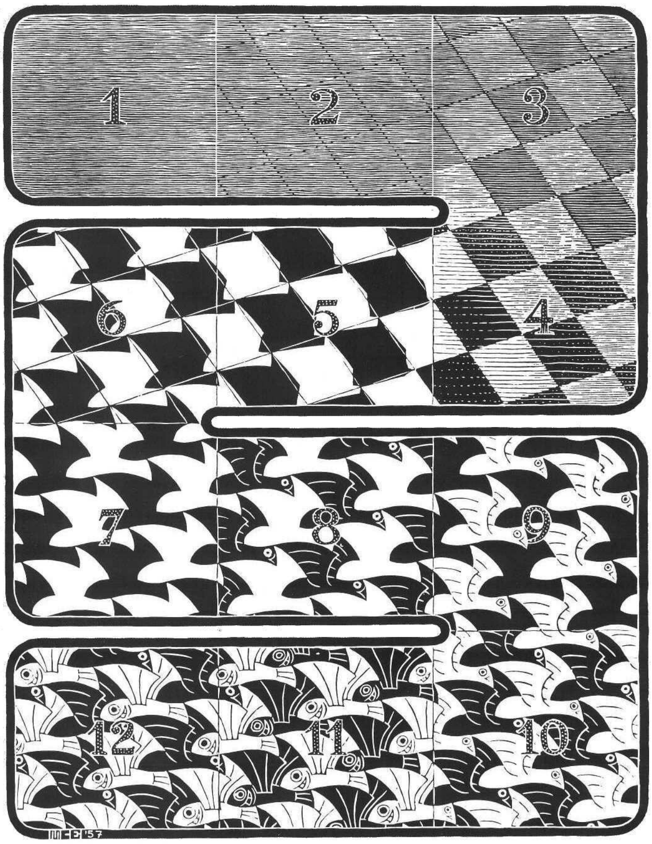
Obr. 17 Použitie Conwayovho kritéria: časti a a d vznikli navzájom posunutím, zatiaľ čo ostatné štyri časti b, c, e a f sú krivkami, z ktorých každá má stred súmernosti (obrázok nakreslený podľa [Schattschneider, 1980]); útvar spĺňajúci tieto podmienky vytvára opakovaním monoedrálnu teseláciu.

1.1.2 Escherovské teselácie

Holandský umelec M. C. Escher (viď bližšie podkapitola 2.1) sa v mnohých svojich grafikách venoval teseláciám.[13] Jedna z takto zameraných grafík je na obr. 18, na ktorej je znázornený postup vytvárania teselácií s čiernobielymi celami v tvare vtáka a rybky (ak sa neberie do úvahy farebnosť, tak v časti 10 je protocelou vták, v časti 11 rybka, protocela v časti 12 je zložená z rybky a vtáka). Autor vychádzal z počiatočného rozdelenia roviny dvoma systémami rovnobežných priamok, výsledkom ktorého bola monoedrálna kosodĺžniková teselácia (časť 2 – 4). V časti 5 deformuje dve susedné strany cely, ktoré následne posunie (t. j. zobrazí posúvaním) na príslušné protiľahlé strany. Deformácie v ďalších častiach sú komplikovanejšie, opakujúci sa útvar ale stále spĺňa požiadavku „čo sa uberie (pridá), to sa musí pridať (ubrať)“.[14] Nakoniec sa cely ešte vyzdobia určitým motívom a výsledkom procesu sú teselácie s celami v tvare rybky a vtáka. Takýto postup vytvorenia teselácie nazvem *escherovský* a príslušnú teseláciu *escherovská.*

[13] Publikácia [Bool a kol., 2000] mapuje život a prácu M. C. Eschera a je v nej možné nájsť nielen kompletnú prehliadku jeho tvorby, ale aj opis postupov, ktoré použil pri vytváraní niektorých teselácií.

[14] Pri správnom zobrazení deformovaných strán platí zachovanie obsahu pôvodnej cely, a tak všetky opakujúce sa útvary majú rovnaký obsah ako kosodĺžnik z časti 2.



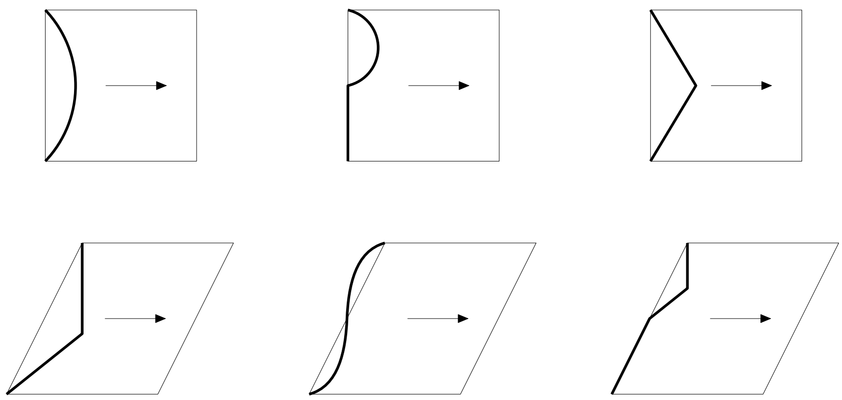
Obr. 18 M. C. Escher: *Regular Division of the Plane I* [Pravidelné delenie roviny I] (1957).

Pre vytvorenie escherovských teselácií je najvhodnejšie použiť tri mnohouholníkové teselácie – so štvorcom (resp. vo všeobecnosti rovnobežníkom), rovnostranným trojuholníkom (napríklad obr. 21) alebo pravidelným šesťuholníkom ako opakujúcou sa celou. Deformácie strán ciel môžu byť rôzne[15] (ako napríklad na obr. 19, obr. 20) a k ich zobrazeniu sa použijú zhodné zobrazenia – *posunutie* o vzdialenosť protiľahlých strán a *otočenie* okolo vrcholu cely o 60° (rovnostranný trojuholník), 90° (štvorec) alebo 120° (pravidelný šesťuholník).[16] K ďalším zobrazeniam, ktoré je možné použiť pri vytváraní ciel a teselácií, patrí *zrkadlenie* a *posunuté zrkadlenie*[17] (viď nasledujúca podkapitola); tieto zobrazenia som ale pri vysvetľovaní escherovských postupov v experimentoch nevyužila, preto sa im bližšie nebudem venovať (pre detailnejšie informácie viď napríklad [Bool a kol., 2000]).

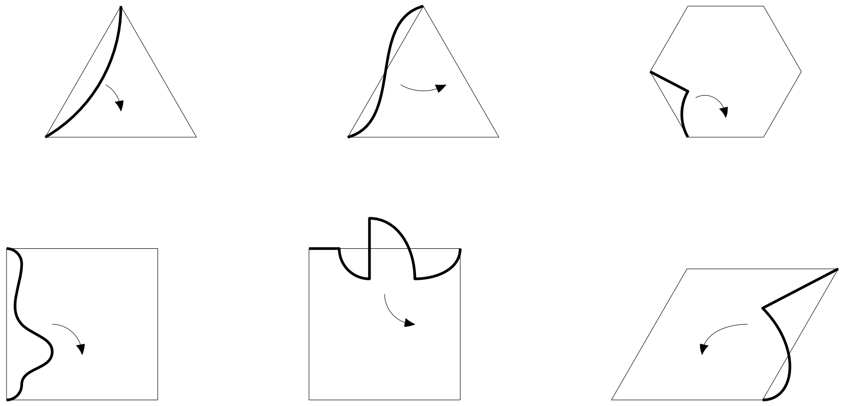
[15] Viac inšpirácií je možné nájsť napríklad v [Teeters, 1974] a [Ranucci, Teeters, 1977].

[16] Do úvahy pripadá aj otočenie okolo stredu týchto ciel: o 120° v rovnostrannom trojuholníku, o 90° v štvorci a o 60° v pravidelnom šesťuholníku.

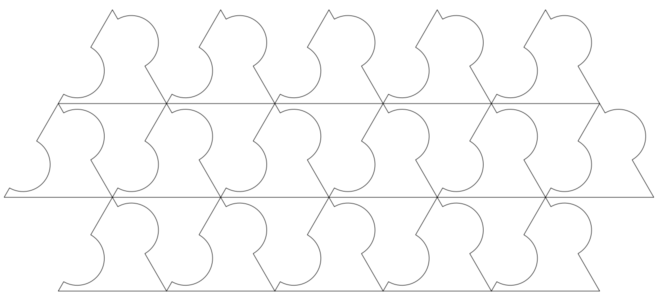
[17] Pod *zrkadlením* rozumiem osovú súmernosť, *posunuté zrkadlenie* je potom zobrazenie zložené z osovej súmernosti a posunutia.



Obr. 19 Niekoľko možností pre deformáciu strán ciel, ktorá bude následne zobrazená posúvaním.

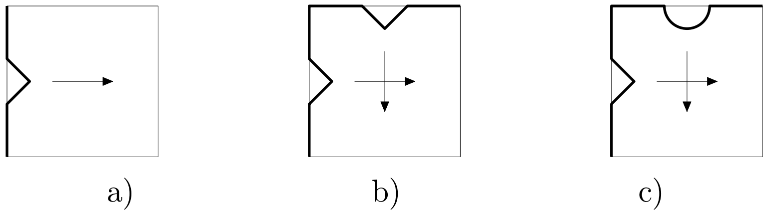


Obr. 20 Niekoľko možností pre deformáciu strán ciel, ktorá bude následne zobrazená otáčaním.



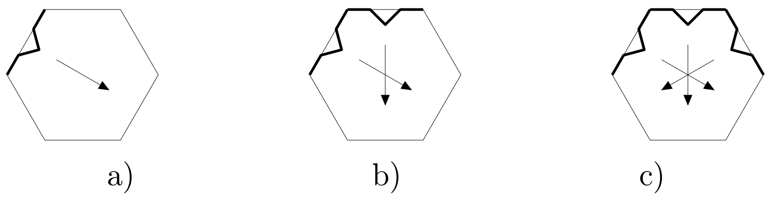
Obr. 21 Escherovská teselácia, ktorej cela vznikla deformovaním strany rovnostranného trojuholníka, otočením tejto deformácie okolo vrcholu trojuholníka o 60° a posunutím po jeho strane.

Ak sa pri tvorbe cely escherovskej teselácie deformuje len jedna strana a následne je táto deformácia zobrazená (napríklad posúvaním ako na obr. 22a, obr. 23a), tak použité príslušné zobrazenie nazvem *jednonásobné*, ak sa použije tá istá deformácia na dve strany cely a dvakrát sa zobrazí (napríklad obr. 22b, obr. 23b), tak *dvojnásobné*. V prípade šesťuholníkovej cely môže nastať aj *trojnásobné* (obr. 23c) zobrazenie tej istej deformácie.



Obr. 22 a) Jednonásobná, b) dvojnásobná deformácia strán cely štvorcovej teselácie; c) dve rôzne deformácie strán cely štvorcovej teselácie.

Pri vytváraní escherovských teselácií je možné na jednej cele deformovať strany dvoma (napríklad obr. 22c) alebo troma rôznymi spôsobmi.



Obr. 23 a) Jednonásobná, b) dvojnásobná, c) trojnásobná deformácia strán cely šesťuholníkovej teselácie.

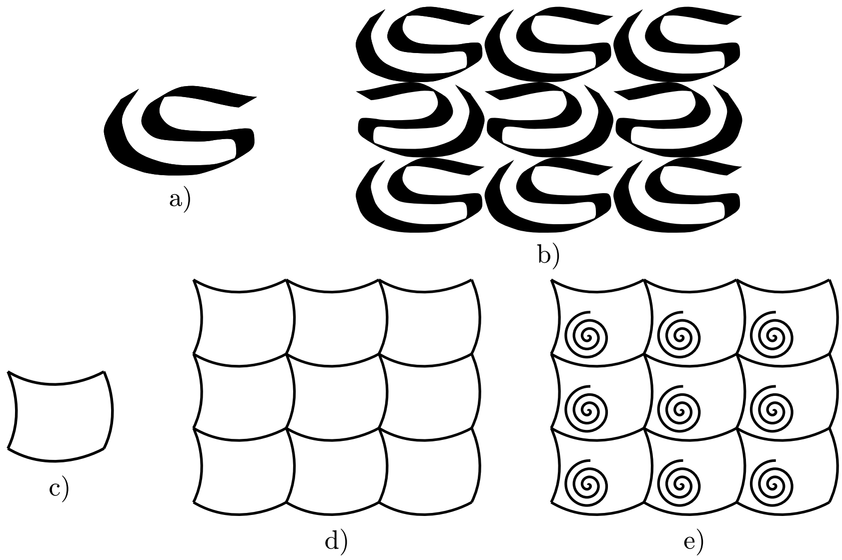
Modely, ktoré som použila pri vysvetľovaní escherovských postupov v experimentoch predvýskumu a hlavnej časti výskumu (podkapitoly 4.1.2, 5.1.2 a 5.2.2), boli zvolené tak, aby boli deformácie strán ciel čo najjednoduchšie a použité zobrazenia jednonásobné. Preto pri kreslení vlastných teselácií deti neboli silno ovplyvnené predloženými modelmi, a ak došlo k ich „napodobňovaniu", tak bolo jednoduché to zistiť.

1.1.3 Rovinné grupy symetrií

Všetky doteraz predložené teselácie sa vyznačovali pravidelným opakovaním jednej cely, resp. protocely. Podľa spôsobu tohoto opakovania je možné každú z teselácií zaradiť do jednej zo sedemnástich rovinných grúp symetrií. Skôr ako vysvetlím toto tvrdenie, je nevyhnutné objasniť niekoľko pojmov, ako ich chápem.

Pod pojmom *motív* rozumiem ľubovoľný ohraničený geometrický útvar v rovine (napríklad obr. 24a), *vzorom* jeho pravidelné opakovanie (obr. 24b). V prípade, že motív predstavuje uzavretý rovinný útvar (napríklad obr. 24c), ktorý je možné opakovať v rovine bez medzier a prekrytí (t. j. motív predstavuje celu), dostanem *teseláciu*[18] (obr. 24d). Ak ešte každú celu teselácie dokreslím nejakým motívom (rovnakým alebo rôznym), tak môžem povedať, že teselácia je ozdobená *ornamentom* (obr. 24e).

[18] Teseláciu je tak možné považovať za špeciálny prípad vzoru.



Obr. 24 a) Motív, b) vzor (grupa symetrie *pg*, viď nižšie), c) uzavretý motív, d) teselácia (grupa symetrie *p*1), e) teselácia ozdobená ornamentom.

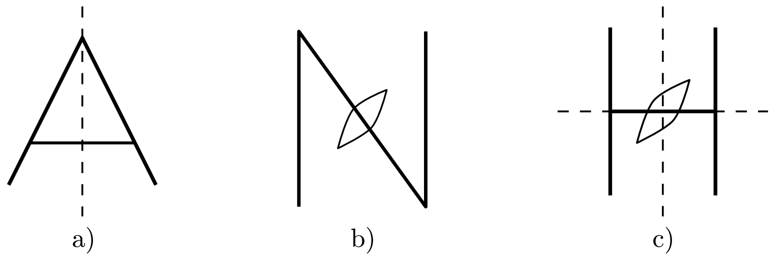
Každé zhodné zobrazenie v rovine – *posunutie*, *otočenie*, *zrkadlenie* a *posunuté zrkadlenie* – zobrazujúce celu teselácie $\mathcal{T}$ na inú jej celu sa nazýva *symetria* teselácie (alebo tiež *izometria*; príklady symetrií pre písmená A, N a H sú na obr. 25). Množina všetkých symetrií teselácie $\mathcal{T}$ vytvára jej diskrétnu *grupu symetrií* $\mathcal{S}(\mathcal{T})$.[19] Dve vzorové cely teselácie sú *ekvivalentné*, ak $\mathcal{S}(\mathcal{T})$ obsahuje izometrické zobrazenie, ktoré zobrazuje jednu vzorovú celu na druhú; súbor ciel ekvivalentných s danou vzorovou celou sa nazýva jej *triedou tranzitívnosti.* Ak všetky cely teselácie $\mathcal{T}$ vytvárajú jednu triedu tranzitívnosti, tak je to teselácia *izoedrálna* (obr. 26a). Ak teselácia $\mathcal{T}$ má presne k tranzitívnych tried vzorových ciel (napríklad obr. 26b), tak sa nazýva *k-izoedrálna. Symetrickou* teseláciou sa rozumie teselácia, ktorá sa vyznačuje ľubovoľnou symetriou; ak grupa symetrií teselácie obsahuje aspoň dve posunutia v nerovnobežných smeroch, tak sa teselácia nazýva *periodická* [Grünbaum, Shephard, 1987].

Jednorozmerné grupy symetrií vzoru sa nazývajú *frízové vzory* (je ich 7 – obr. 27), dvojrozmerný prípad *tapetové vzory* (je ich 17 – obr. 28) a 230 priestorových grúp je známych pod názvom *kryštalografické.*[20]

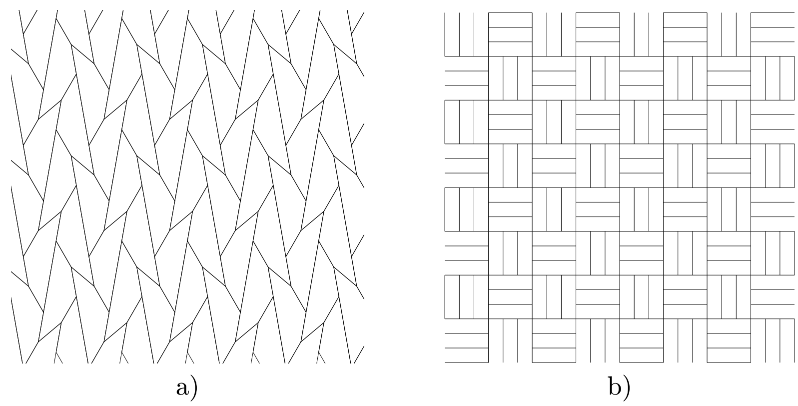
---

[19] Grupa rovinných symetrií spĺňa vlastnosti grupy: asociativitu, existenciu neutrálneho prvku (identita) i existenciu inverzného prvku ku každému prvku (inverzné zobrazenie).

[20] V anglickej literatúre sa používajú pojmy *frieze patterns*, *wallpaper patterns*, *crystallographic patterns*. Ďalšie informácie o rovinných i kryštalografických grupách symetrií sú v podkapitolách 2.1 a 2.2; pre hlbšie štúdium teórie grúp symetrií viď napríklad [Grünbaum, Shephard, 1987] alebo [Darvas, 2007].



Obr. 25 Symetrie písmen: a) veľké tlačené písmeno A je symetrické podľa vertikálnej osi, b) písmeno N v otočení o 180° okolo stredu „strednej priečky“, c) písmeno H má dve na seba kolmé osi symetrie a symetriou je aj otočenie o 180° okolo priesečníku týchto osí.



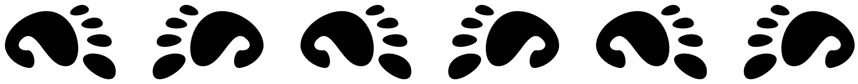
Obr. 26 a) Izoedrálna teselácia (t. j. existuje len jedno možné usporiadanie zhodných útvarov daného tvaru v rovine bez medzier a prekrytí), b) 2-izoedrálna teselácia.

Pre označenie grúp symetrií používa kryštalografia rôzne symboly a zápisy. Označenia z prvého stĺpca v Tab. 1 sú prevzaté z Medzinárodných tabuliek pre röntgenovú kryštalografiu[21], symboly sú nanajvýš štvorčlenné a skratky v označeniach majú nasledovný význam:

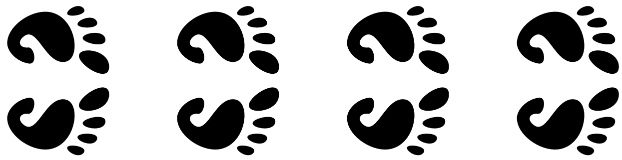
m – zrkadlenie podľa osi [mirroring in an axis]; g – posunuté zrkadlenie [glide reflection]; 1 – posunutie o jednotku [translation by one unit]; 2, 3, 4, 6 – dvoj-, troj-, štvor-, šesť- násobné otočenie [2, 3, 4, 6-fold rotation]; p – primitívna rovinná bunka [primitive cell]; c – centrovaná rovinná bunka [centred lattice].

[21] Henry, N. F. M., Lonsdale, K. *International Tables for X-Ray Crystallography*, vol. 1. Birmingham: Kynoch Press, 1952. Spoluautorkou týchto tabuliek pre röntgenovú kryštalografiu bola Kathleen Yardleyová-Lonsdalová (1903–1971), ktorá významne prispela k teórii priestorových grúp, venovala sa štruktúram kryštálov organických zlúčenín a vlastnostiam prírodných i umelých diamantov. O významnosti jej práce hovorí jej zvolenie do Royal Society v roku 1945, kedy sa členovia tejto spoločnosti rozhodli po prvýkrát prijať aj dve ženy (spolu s mikrobiologičkou Marjory Stephensonovou).

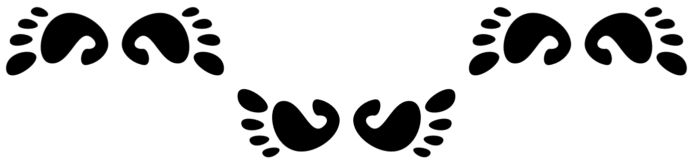
a) 11 – posunutie,



b) $m1$ – zrkadlenie podľa vertikálnej osi a posunutie,



c) $1m$ – zrkadlenie podľa horizontálnej osi a posunutie,



d) mg – zrkadlenie podľa vertikálnej osi a posunuté zrkadlenie podľa horizontálnej osi,

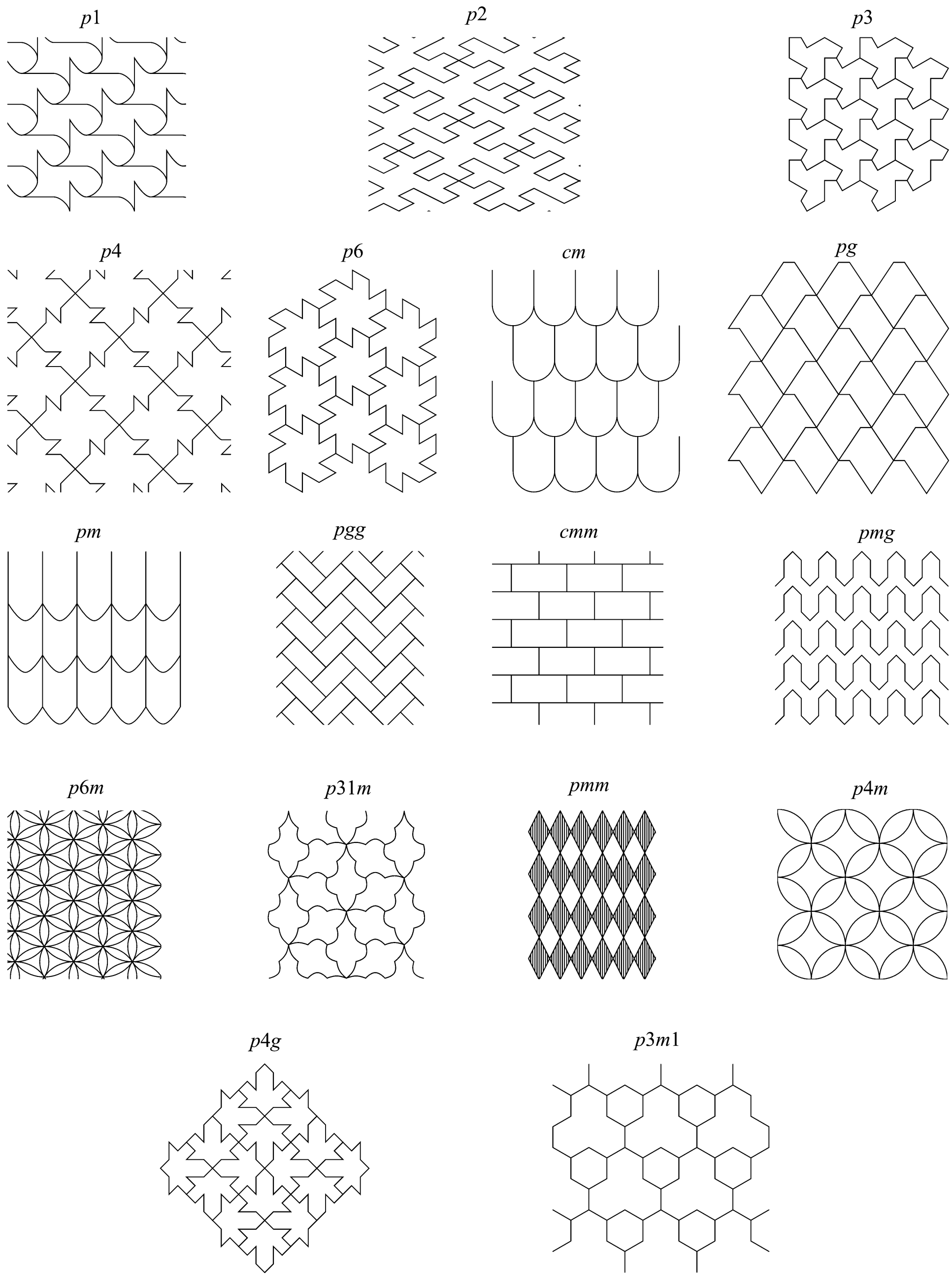
e) mm – zrkadlenie podľa vertikálnej a horizontálnej osi,

f) 12 – posunutia v dvoch navzájom opačných smeroch,

g) $1g$ – posunutie a posunuté zrkadlenie podľa horizontálnej osi.

Obr. 27 Reprezentanti siedmych jednorozmerných grúp symetrií a ich stručná charakteristika.[22]

[22] Motív odtlačku chodidla je často používaný pri vysvetľovaní frízových grúp symetrií.



Obr. 28 Reprezentanti sedemnástich rovinných grúp symetrií podľa G. Pólyu (bližšie informácie viď podkapitoly 2.1 a 2.2).

Pre ukážku predvediem zaradenie piatich teselácií na obr. 30 od M. C. Eschera k príslušnej grupe symetrií, pričom sa zameriam len na tvarovú symetriu a nebudem brať do úvahy farebnú symetriu. Použitý algoritmus pre zaradenie vzoru ku grupe symetrií je na obr. 29.[23]

[23] Algoritmus je prevzatý z internetovej stránky Donalda W. Crowa *Symmetries of Culture*, `http://vismath6.tripod.com/crowe1/` [stránka aktuálna k dňu 17. 1. 2010].

Medzinárodné tabuľky pre RTG kryštalografiu	Označenie podľa G. Pólyu	Operácie	Časť generujúceho útvaru
$p1$	C_1	2 posunutia	1
$p2$	C_2	3 otočenia o 180°	1/2
pm	D_1kk	2 zrkadlenia a 1 posunutie	1/2
pg	D_1gg	2 rovnobežné posunuté zrkadlenia	1/2
cm	D_1kg	1 zrkadlenie a 1 rovnobežné posunuté zrkadlenie	1/2
pmm	D_2kkkk	4 zrkadlenia na stranách rovnobežníka	1/4
pmg	D_2kkgg	1 zrkadlenie, 1 posunuté zrkadlenie	1/4
pgg	D_2gggg	2 kolmé posunuté zrkadlenia	1/4
cmm	D_2kgkg	2 kolmé zrkadlenia a 1 otočenie o 180°	1/4
$p4$	C_4	1 otočenie o 180°a 1 otočenie o 90°	1/4
$p4m$	D_4^*	3 zrkadlenia na stranách rovnoramenného	1/8
		(45°, 45°, 90°) trojuholníka	1/8
$p4g$	D_4^0	1 zrkadlenie a 1 otočenie o 90°	1/8
$p3$	C_3	2 otočenia o 120°	1/3
$p3m1$	D_3^*	1 zrkadlenie na stranách rovnostranného trojuholníka	1/6
$p31m$	D_3^0	1 zrkadlenie a 1 otočenie o 120°	1/6
$p6$	C_6	1 otočenie o 180°, 1 otočenie o 60° a 1 otočenie o 120°	1/6
$p6m$	D_6	3 zrkadlenia na stranách pravouhlého	
		(30°, 60°, 90°) trojuholníka	1/12

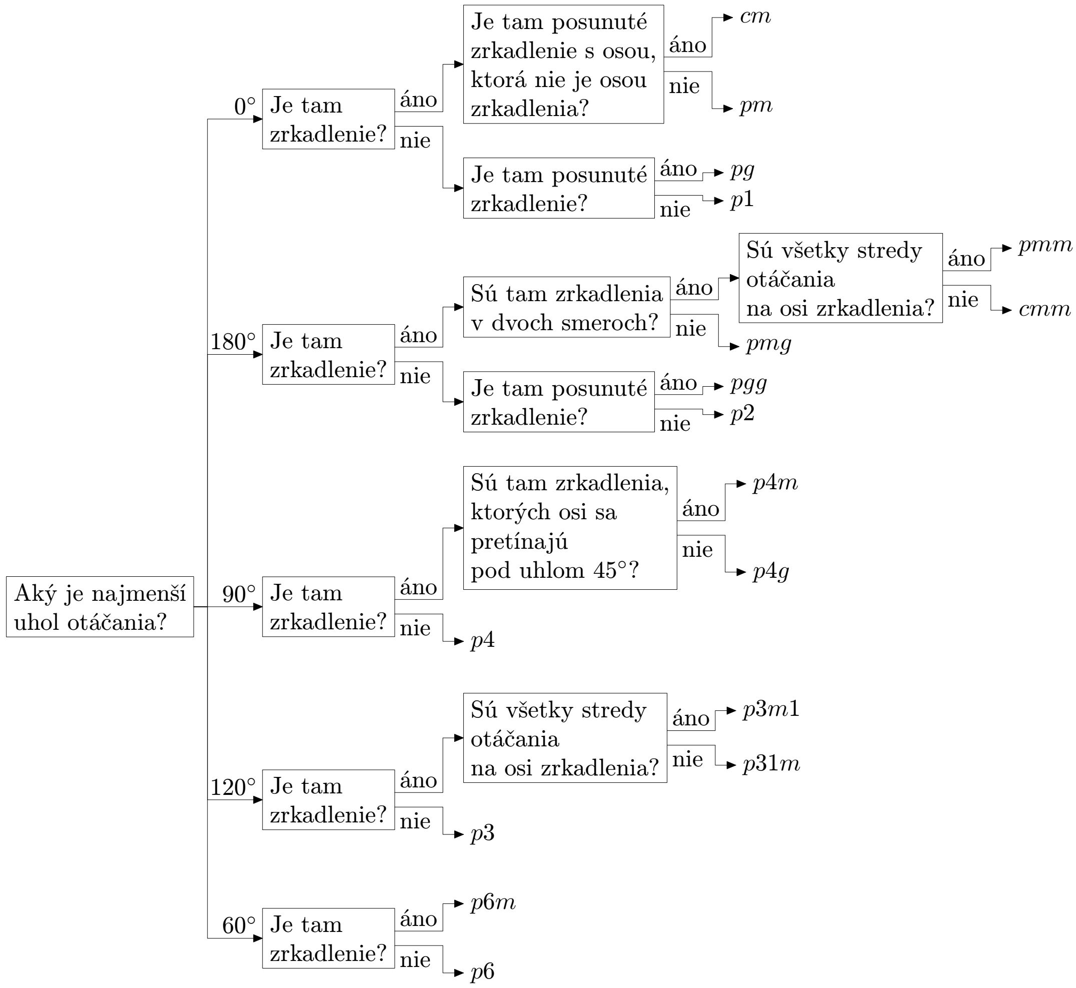
Tab. 1 Označenia jednotlivých grúp symetrií podľa Medzinárodných tabuliek pre röntgenovú kryštalografiu (prvý stĺpec), podľa G. Pólyu (druhý stĺpec) a ich stručný opis (tretí a štvrtý stĺpec) podľa [Schattschneider, 1978b] a [Darvas, 2007].

Podstatou procesu zaradenia ku grupe symetrie je nájsť najmenší (základný) motív, ktorý sa ďalej posúvaním a otáčaním v rovine opakuje, a tak vytvára teseláciu, resp. vo všeobecnosti vzor. V prípade teselácií môže byť motívom jedna cela, jej časť (polovica, tretina, štvrtina, šestina), prípadne dve alebo viac ciel. Na začiatku je potrebné určiť najmenší uhol otáčania tohoto základného motívu, pričom je možné dokázať, že jediné možnosti pre veľkosť uhla otáčania sú 180°, 120°, 90° a 60°.[24] Ak vzor nemá žiadnu inú symetriu otáčania len tzv. triviálnu (otočenie o 360°, resp. 0°), tak sa použije prvá možnosť v klasifikácii – 0°.

Okrídlené kone (obr. 30a)

Cela teselácie (v tvare koňa) nie je symetrická, preto sa pri opakovaní zobrazuje celý tento útvar. Ďalšiu celu nie je možné získať otáčaním (prvá možnosť z algoritmu – 0°), pri opakovaní sa nepoužije ani zrkadlenie, ani posunuté zrkadlenie. Záver: teselácia reprezentuje grupu $p1$.

[24] Tento fakt je známy ako *kryštalografická reštrikcia* [crystallographic restriction].



Obr. 29 Algoritmus pre určovanie grupy symetrií teselácie (resp. všeobecne vzoru).

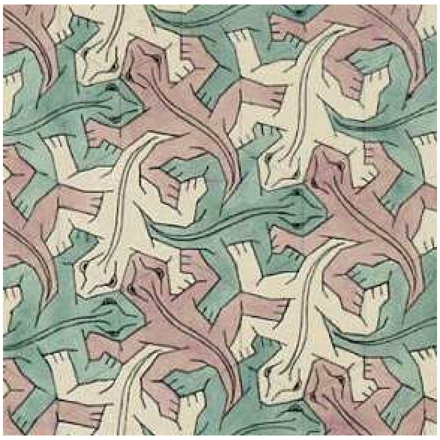
Horizontálne pásy rybičiek (obr. 30b)

Cela teselácie (v tvare rybky) nie je symetrická, preto sa pri opakovaní zobrazuje celý útvar. Pri opakovaní tohoto útvaru sa nepoužije ani otáčanie, ani zrkadlenie, ale posunuté zrkadlenie (osou zrkadlenia je vertikála). Záver: teselácia reprezentuje grupu *pg*.

Jašteričky (obr. 30c)

Cela teselácie (v tvare jašterice) nie je symetrická, preto sa pri opakovaní zobrazuje celý útvar. Ďalšie dve jašterice je možné získať otáčaním o 120° v smere i v protismere hodinových ručičiek. Pri ďalšom opakovaní sa nepoužije zrkadlenie. Záver: teselácia reprezentuje grupu $p3$.

a) b)



c) d)

e)

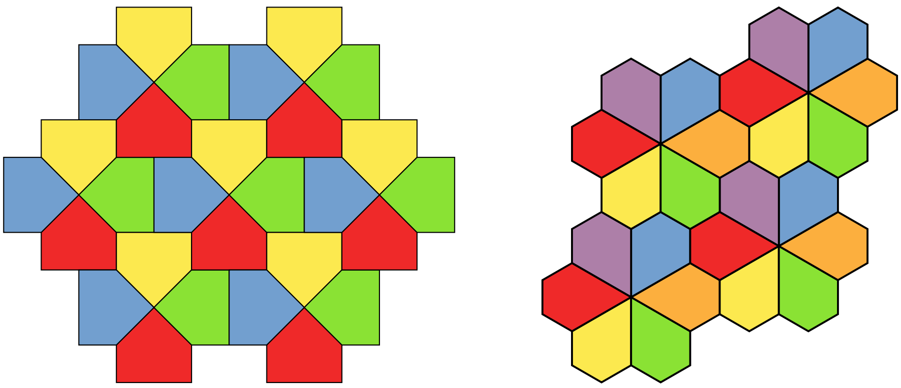
Obr. 30 Vybraté monoedrálne teselácie od M. C. Eschera.[25]

[25] Teselácie pochádzajú z Escherovho náčrtníka pod číslami 105, 88, 107, 93, 25; obrázky je možné nájsť na internetovej stránke `http://www.mcescher.com` v kategórii Galéria [stránka aktuálna k dňu 17. 1. 2010].

Modré rybičky (obr. 30d)
Cela teselácie (v tvare rybky) nie je symetrická, preto sa pri opakovaní zobrazuje celý útvar. Najmenším uhlom otáčania je 180° (stredom otočenia je bod v strede hranice malej plutvy alebo v strede dlhšej časti chvosta), a tak základným útvarom, ktorý sa opakuje v celej teselácii, je „dvojrybička". Pri opakovaní sa nepoužilo zrkadlenie, ale použilo sa posunuté zrkadlenie (základ dvojrybička: svetlá „pozerá" doprava hore, tmavá doľava dole, a do nich „vsunutá" dvojrybička – svetlá „pozerá" doľava hore a tmavá doprava dole, takže musí existovať posunuté zrkadlenie). Záver: teselácia reprezentuje grupu *pgg*.

Morské koníky (obr. 30e)
Cela teselácie (v tvare morského koníka) nie je symetrická, preto sa pri opakovaní zobrazuje celý útvar. Ďalšieho koníka je možné získať pomocou otočenia o 180°, pričom stredom otáčania môžu byť štyri rôzne body (všetky štyri sú na náčrte vyznačené a sú viditeľné) ležiace v dvojiciach na vyznačených rovnobežných priamkach. Základom je teda „dvojkoník" (jeden hlavou hore a jeden hlavou dole). Pri ďalšom opakovaní sa už nepoužije zrkadlenie, ani posunuté zrkadlenie. Záver: teselácia reprezentuje grupu $p2$.

O farebnej symetrii teselácií, resp. vzorov, je v literatúre málo informácií. Keďže ale mnohé teselácie, ktoré deti nakreslili (kapitoly 4 a 5), sa vyznačovali opakovaním farieb, zhrniem aspoň niektoré z nich. Informácie som čerpala z publikácie [Grünbaum, Shephard, 1987], ktorá sa ale v tejto oblasti venuje vzorom, takže som si pojmy musela prispôsobiť pre teselácie.



a) b)

Obr. 31 Dokonale farebné teselácie: a) štvorfarebná, b) šesťfarebná.

Nech $\mathcal{T}$ je monoedrálna teselácia a každej jej cele je možné priradiť jednu z konečného počtu farieb k. Takúto teseláciu nazvem *farebnou.* Všetky cely, ktoré majú jednu danú farbu j ($j = 1, \ldots, k$), vytvárajú *triedu farebnosti* j. Ak každá z k farieb je priradená aspoň k jednej cele teselácie, tak teselácia sa nazýva k-*farebnou.* Farebnú teseláciu nazvem *dokonale* *farebná*[26], ak je v nej zachovaná farebná pravidelnosť (obr. 31). *Farebná symetria* teselácie $\mathcal{T}$ je každá symetria, ktorá zobrazí teseláciu tak, aby každá farebná cela bola priradená cele tej istej farby. Grupa všetkých takýchto symetrií sa nazýva *grupa farebných symetrií* teselácie. Tab. 2 predkladá počet farebných symetrií pre jednotlivých sedemnásť rovinných grúp symetrií a pre počet farieb $k \leq 12$.

Rovinná grupa symetrií	Počet farieb 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p1$	1	1	2	1	1	1	2	2	1	1	2
pg	2	2	4	2	5	2	7	3	6	2	11
pm	5	2	10	2	11	2	16	3	12	2	23
cm	3	2	7	2	7	2	13	3	8	2	17
$p2$	2	1	3	1	2	1	4	2	2	1	3
pgg	2	1	4	1	4	1	7	2	5	1	9
pmg	5	2	11	2	11	2	19	3	12	2	26
pmm	5	1	13	1	9	1	21	2	10	1	25
cmm	5	1	11	1	8	1	21	2	9	1	22
$p3$	–	2	1	–	1	1	–	3	–	–	4
$p31m$	1	2	1	–	5	–	1	3	–	–	7
$p3m1$	1	2	1	–	4	–	1	3	–	–	7
$p4$	2	–	5	1	2	–	9	1	4	–	9
$p4g$	3	–	7	–	2	–	13	1	3	–	10
$p4m$	5	–	13	–	2	–	28	1	3	–	16
$p6$	1	2	1	–	5	1	1	3	–	–	8
$p6m$	3	2	2	–	11	–	3	3	–	–	20
Spolu periodických grúp	46	23	96	14	90	15	166	40	75	13	219

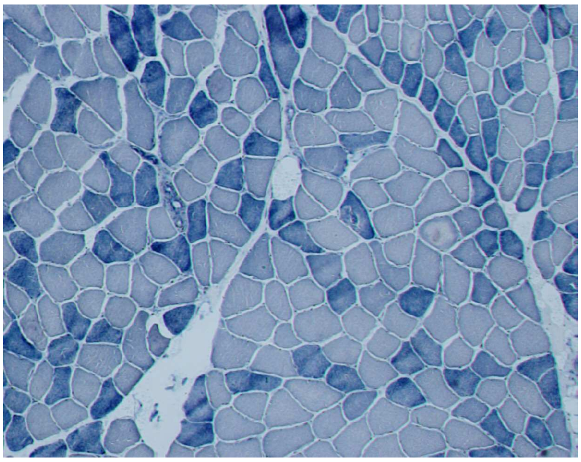
Tab. 2 Počet k-farebných grúp symetrií pre jednotlivé rovinné grupy symetrií, $k \leq 12$ (tabuľka je prevzatá z [Grünbaum, Shephard, 1987, str. 47]).

1.2 Náhodné teselácie

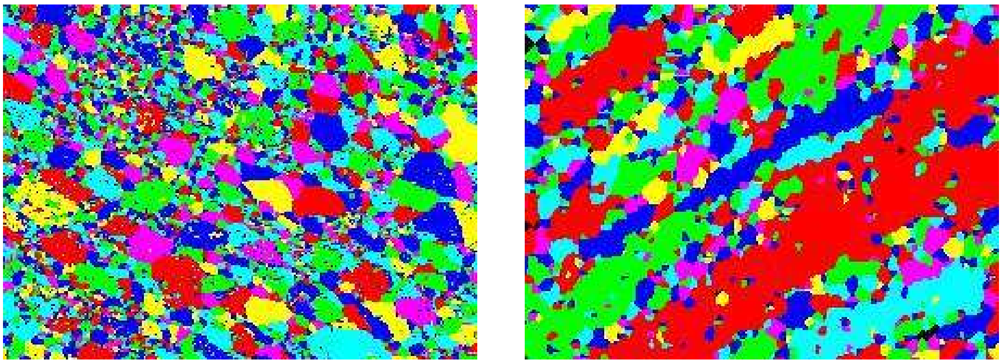
Doteraz opísané teselácie v kapitole 1 sa vyznačovali výraznou pravidelnosťou (pravidelné usporiadanie ciel, ich rovnaký tvar a veľkosť), hrúbka ich hraníc bola nulová a všetky boli dvojrozmerné. Príroda je ale plná reálnych trojrozmerných teselácií. Teselácie tvorené bunkami živých tkanív sú optimalizované – majú veľmi podobný tvar i rozmery (obr. 32) a aj

[26] Takto zadefinovaná dokonale farebná teselácia sa líši od definície v [Grünbaum, Shephard, 1987].

ich usporiadanie je čiastočne pravidelné. Zrná polykryštalických materiálov (a takisto aj ich dvojrozmerné rezy – profily) sa ale vyznačujú tvarovou i rozmerovou variabilitou (obr. 33), ktorá je dôsledkom nepravidelného priestorového rozmiestnenia zárodkov, t. j. generátorov, i možnej lokálnej variácie rastových podmienok. Preto sa budem v tejto časti venovať práve *náhodným teseláciám*, a to vo všeobecnosti v $\mathbb{R}^d$.



Obr. 32 Rovinný rez kostrového svalstva potkana.[27]



Obr. 33 Dvojrozmerné rezy hliníka a medi po ECAPe získané pomocou EBSD (bližšie informácie v podkapitole 2.3).

Východiskom pre jeden zo spôsobov vytvorenia rôznych druhov rovinných teselácií je rozmiestnenie bodového systému – generátorov v rovine[28], ktoré charakterizujú rôzne modely nazývané *bodové procesy*[29] s intenzitou λ. Generátory môžu byť rozmiestnené homogénne, t. j. navzájom nezávisle

[27] Pre lepšie odlíšenie svalových vláken bolo svalstvo zafarbené. Za poskytnutie obrázku ďakujem profesorke Ide Eržen z Inštitútu anatómie na Lekárskej fakulte Univerzity v Ľubľane.

[28] Tento postup ale platí všeobecne pre $\mathbb{R}^d$.

[29] Pre izolované objekty je intenzita náhodného procesu definovaná ako stredná hodnota ich počtu v jednotke obsahu $\mathbb{R}^d$. To isté platí aj pre intenzity mier, napríklad stredná hodnota dĺžky alebo plošného obsahu v jednotke obsahu $\mathbb{R}^d$.

rovnomerne náhodne v „prázdnej“ rovine, pričom odpovedajúcim modelom je *Poissonov bodový proces*[30] (PBP). Je základným bodovým procesom; teselácia ním generovaná sa nazýva *Poissonova-Voronojova* alebo len *Voronojova*[31] (viď nižšie).

Ďalšie bodové procesy s heterogénnym rozmiestnením bodov[32] je možné vytvoriť pomocou iných pravidiel alebo z PBP selektívnym výberom, resp. implantáciou bodových zhlukov do bodov jednoduchších procesov, a je možné ich rozdeliť do troch základných skupín (napríklad podľa [Ponížil, 1998]):

1. Procesy s pevným jadrom a Gibbsove bodové procesy

Do tejto skupiny patria napríklad nasledujúce procesy. Pri *Maternovom procese I* je z počiatočného PBP odstránená každá dvojica bodov, ktorých vzdialenosť je menšia ako polomer pevného jadra D. Pri *Maternovom procese II* je každému bodu z počiatočného PBP nezávisle priradená hodnota rovnomerne náhodne z intervalu $[0, 1]$ – „čas vzniku“, a bod nie je odstránený len v prípade, že všetky ostatné body ležiace vo vzdialenosti D od neho sú „mladšie“. Ak sú body postupne generované v zvolenej oblasti a prijaté sú len body s vzdialenosťou väčšou ako D od všetkých už prijatých bodov, tak je to *prosté postupné zamietanie*; pri $D = 0$ prechádza v PBP. *Straussov proces* je Gibbsovým bodovým procesom s párovým potenciálom $\theta(r) = -\ln(\gamma)$ pre $0 < r \leq R$, inak 0, kde γ je parameter odpudzovania $0 < \gamma < 1$ a $\theta(0) = \infty$; pri $\gamma = 1$ prechádza v PBP.

2. Translačné a posunuté bodové mriežky

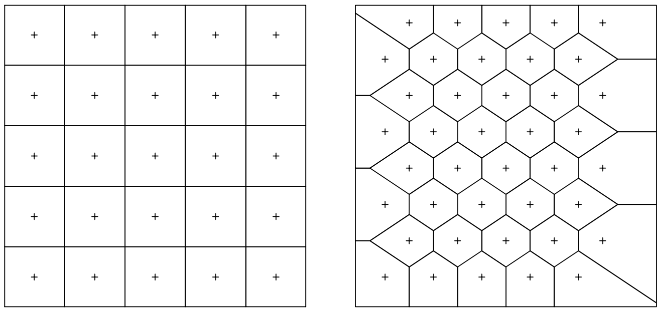
Translačné bodové mriežky generujú pravidelné teselácie, vzniknuté cely však nie sú vždy translačne ekvivalentné s mriežkovými celami (pre porovnanie obr. 34). Z bodových mriežok sa v rovine najčastejšie používajú štvorcové a hexagonálne, v priestore kubické (prostá, plošne centrovaná a priestorovo centrovaná) a hexagonálne mriežky, ktoré sa niektorými svojimi celkovými vlastnosťami málo líšia od PBP.

---

[30] Poissonov bodový proces je možné charakterizovať napríklad tým, že počty bodov n v ľubovoľne obmedzenej borelovskej množine obsahu V majú Poissonovo rozdelenie $P(n) = \frac{(\lambda V)^n}{n!} \exp(-\lambda V)$, kde λ je intenzita bodového procesu. V prípade, že body nie sú rozmiestňované naraz, ale postupne, platí $\lambda = \lambda(t)$; viď napríklad [Stoyan a kol., 1987].

[31] Poissonova-Voronojova teselácia má pri štúdiu teselácií rovnakú úlohu ako PBP pri bodových procesoch. Jej vlastnosti predstavujú štandard pre každú klasifikáciu.

[32] Heterogénne rozmiestnenie bodov (generátorov) môže byť dôsledkom napríklad vzájomnej interakcie generátorov, interakcie generátorov s javmi odlišného charakteru (povrch, fázové rozhrania) alebo premenlivého vonkajšieho poľa (zmeny teploty alebo koncentrácie látok).



Obr. 34 Rovinné Voronojove teselácie generované: a) štvorcovou mriežkou, b) kosoštvorcovou mriežkou.

Z ľubovoľnej bodovej mriežky L^d intenzity λ_L je možné spojito prejsť k PBP dvoma jednoduchými postupmi. *Bernoulliho proces* na mriežke vznikne, keď pravdepodobnosť realizácie ľubovoľného uzla je $p \leq 1$. PBP intenzity λ dostávame limitou pre $p \to 0$, $\lambda_L \to \infty$ pri zachovaní $p\lambda_L = \lambda = konst.$ V *Booksteinovom modeli*[33] je každému bodu priradené posunutie ξ_k s centrovaným trojrozmerným normálnym rozdelením $N(0, \Sigma^2)$, $\Sigma^2 = a^2 I$, kde I je jednotková matica a a je smerodajná odchýlka distribúcie posunutia. Takto generované teselácie predstavujú spojitý prechod medzi izoedrálnymi teseláciami ($a = 0$) a Poissonovou-Voronojovou teseláciou generovanou stacionárnym PBP ($a \to \infty$, ale $a > 10$ je prakticky postačujúce).

3. Zhlukové polia

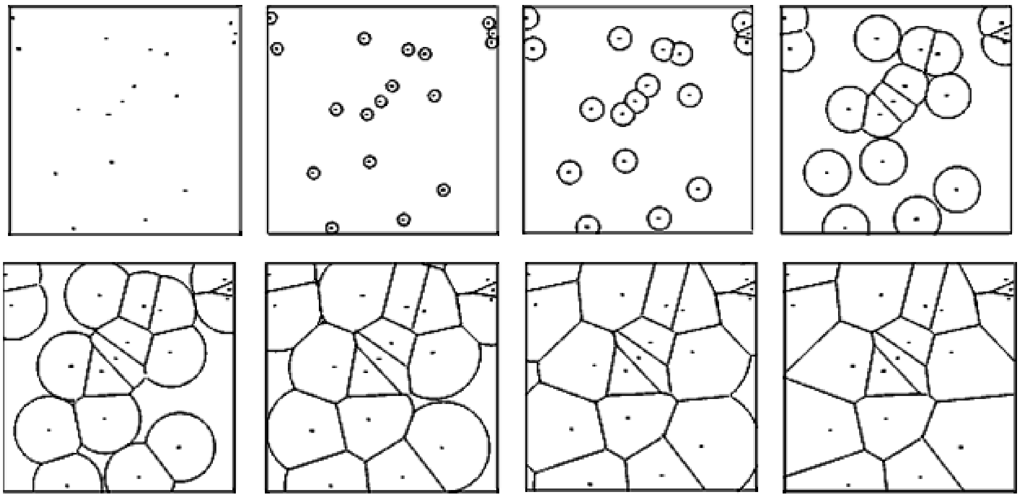
Teselácie vytvorené týmto spôsobom predstavujú veľmi širokú triedu delenia priestoru. V prvom rade závisí na voľbe bodového procesu rodičov, ktorým môže byť mriežka, porušená mriežka, Booksteinov model na ideálnej či porušenej mriežke, PBP alebo nejaký zhlukový proces. Ďalší krok predstavuje priestorové rozmiestnenie bodov zhluku – náhodne ohraničenej n-tice bodov – dcér so strednou hodnotou N, ktoré majú predpísané rozmiestnenie v nejakej (zvyčajne obmedzenej) oblasti. Ak sú dcéry nezávisle rovnomerne náhodne rozmiestnené v guli s priemerom D, tak sa to nazýva zhluk *globulárny*, ak sú na povrchu gule s priemerom D, tak *sférický*. V prípade, že sú dcéry vo vrcholoch pravidelných mnohostenov pevne alebo náhodne orientovaných, tak zhluk nazývame *pravidelný*. Rodičovský bod je pritom niekedy v procese ponechaný, inokedy odstránený.

Bernoulliho zhlukové pole je modelom nezávislého zhlukovania: náhodné zhluky bodov sú implantované do rodičovských bodov (tie sú potom odstránené) s pravdepodobnosťou $0 \leq p \leq 1$. Tento proces predstavuje spojitý prechod medzi Poissonovou-Voronojovou teseláciou ($p = 0$) zo zárodkov a *Neymanovým-Scottovej* zhlukovým poľom ($p = 1$) bodov.

---

[33] Model je často používaný vo fyzike a stochastickej teórii tvaru.

Rast kryštálu ako teselácie prirodzene modeluje tzv. *rastový model* (obr. 35).[34] Predpokladom je, že zrná začnú rásť konštantnou rýchlosťou $v > 0$ v rozličných časoch t_i z jadier x_i, ktorých rýchlosť nukleácie je $I(t) = \alpha t$, kde t je čas a $\alpha > 0$ je ľubovoľná konštanta (viď [Stoyan a kol., 1987], [Velgosová a kol., 2003]). Rast zrna sa lokálne zastaví v každom bode, v ktorom sa susedné zrná dotknú, pričom nové zrno začína rásť len v ešte nenaplnenom priestore. Takto vzniknuté zrná vytvoria homogénnu *Johnsonovu-Mehlovu teseláciu* s celami, ktoré nemusia byť konvexné (viď napríklad obr. 38). Tento model zahŕňa aj *Voronojovu teseláciu* ako špeciálny prípad, keď všetky jadrá začnú rásť súčasne. Ak je rýchlosť nukleácie klesajúcou funkciou času, tak vznikne nehomogénna varianta Johnsonovej-Mehlovej teselácie.



Obr. 35 Rastový model teselácie.

Najjednoduchším prípadom náhodnej teselácie je práve už spomínaná *Voronojova teselácia.* Formálna definícia cely V_i Voronojovej teselácie, ktorá je generovaná konečným alebo lokálne konečným bodovým systémom $P = \{x_1, x_2, \ldots\}$ d-rozmerného euklidovského priestoru je

$$V_i = \{x \in \mathbb{R}^d, ||x - x_i|| \leq ||x - x_j||, \text{pre } i \neq j\},$$

kde $|| \cdot ||$ je euklidovská vzdialenosť[35]. Bod x_i nazývame *generátor* i*-tej* Voronojovej cely a množinu $P = \{x_1, x_2, \ldots\}$ *množina generátorov* Voronojovej teselácie. Vnútro cely je potom tvorené bodmi priestoru, ktoré majú

[34] Rastovým modelom je možné vysvetliť rast zŕn kryštalických a polykryštalických látok zo zárodkov.

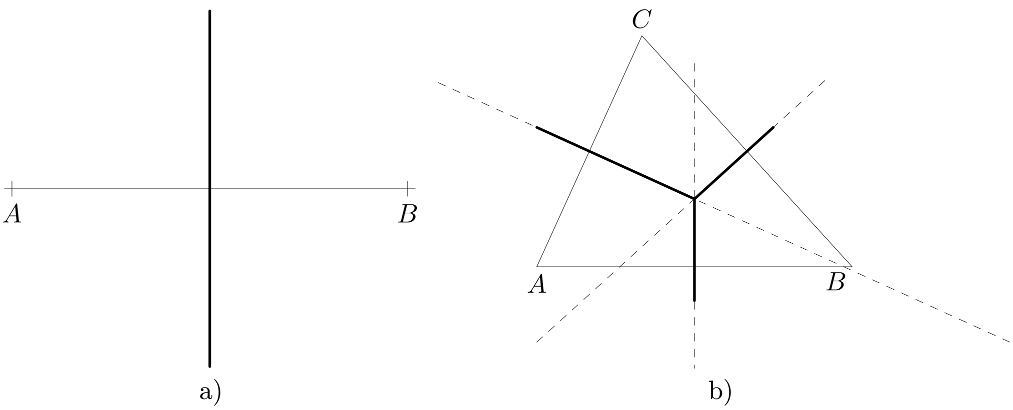
[35] Namiesto euklidovskej vzdialenosti je možné použiť napríklad *manhattanskú* vzdialenosť, v ktorej je vzdialenosť medzi dvoma bodmi $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$ definovaná ako dĺžka ľubovoľnej cesty spájajúcej body po horizontálnych a vertikálnych jednotkových úsečkách, t. j. $g(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

k danému bodu x_i bližšie ako k ostatným generátorom; hranice cely sú tvorené bodmi rovnako vzdialenými od viacerých generátorov. Zjednotením všetkých ciel V_i je Voronojova teselácia.[36] (Cely Voronojovej teselácie sú konvexné mnohouholníkové oblasti.)

Voronojovu teseláciu v R^d možno vytvoriť nasledujúcim spôsobom: nech $E_+^d(x_i, x_j)$ je polpriestor ohraničený nadrovinou symetrie bodov x_i, x_j obsahujúci bod x_i. Potom prienik všetkých týchto polpriestorov obsahujúci bod x_i je cela Voronojovej teselácie

$$V_i = \bigcap_{i \neq j} E_+^d(x_i, x_j).$$

V dvojrozmernom prípade hranice jednotlivých oblastí tvoria body ležiace v rovnakej vzdialenosti od dvoch (alebo viacerých) generátorov a sú konštruované ako úsečky – časti osí súmernosti dvojíc generátorov (obr. 36).



Obr. 36 a) Časť osi úsečky AB predstavuje časť hranice cely Voronojovej teselácie, b) pri trojici generátorov predstavujú časti osí strán trojuholníka s generátormi vo vrcholoch hranice ciel.

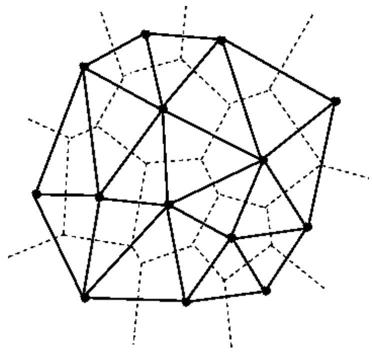
Ak sa spoja úsečkami generátory susedných ciel Voronojovej teselácie, tak vznikne tzv. *Delaunayova triangulácia* (alebo tiež *Delaunayova teselácia*) – obr. 37.[37]

Konštrukcia práve Voronojovej teselácie bola cieľom v jednej z úloh zaradených medzi experimentami predvýskumu i hlavného výskumu (časti 4.1.3, 5.1.1 a 5.2.1) a je založená na poslednom spôsobe vytvorenia. Zadané body – generátory – predstavovali stanice autobusov/metra alebo prístrešky proti dažďu, cely teselácie boli spádovými oblasťami.

---

[36] Vo všeobecnosti platia zaujímavé tvrdenia, že dvojrozmerný rez trojrozmernej Voronojovej teselácie nie je Voronojovou teseláciou, a ak je teselácia zadaná bez jednotlivých generátorov, tak nie je možné zistiť, či je daná teselácia Voronojova alebo nie.

[37] Zaujímavosťou je, že Delaunayova teselácia nemusí byť určená jednoznačne.



Obr. 37 Voronojova telesácia (vyznačená čiarkovane) a k nej duálna – Delaunayova teselácia (plná čiara).

1.3 Charakteristiky teselácií

Priame pozorovanie a premeriavanie ciel reálnych trojrozmerných teselácií je väčšinou nemožné a preto je k skúmaniu nevyhnutné použiť dvojrozmerné alebo jednorozmerné rezy týchto teselácií, t. j. študovať teselácie *indukované* reálnymi teseláciami v rovine alebo na testovacích priamkach. Štatistické odhady vlastností trojrozmerných objektov z ich dvojrozmerných alebo jednorozmerných rezov a dvojrozmerných projekcií tenkých vrstiev sú predmetom aplikovanej matematickej disciplíny – *stereológie.* V tejto podkapitole sa budem venovať charakteristikám, ktoré sa používajú na opis teselácií (ďalšie informácie o aplikácií týchto charakteristík viď podkapitola 2.3).[38]

Pretože cely teselácií sú obyčajne konvexné (až na výnimky ako napríklad na obr. 38), charakteristiky pre ich popis je možné odvodiť z jednoduchého tvaru *Hadwigerovej teorémy*[39], ktorá hovorí:

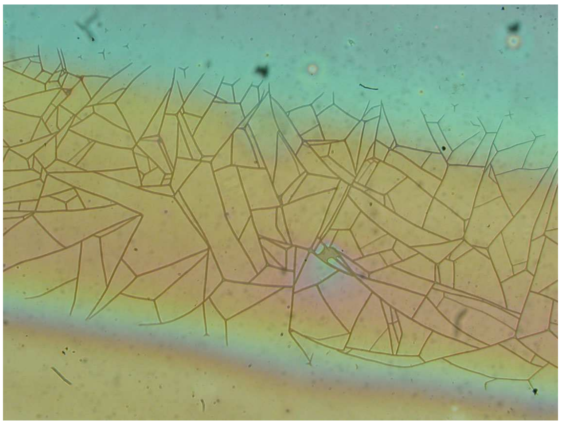
Pre množinu konvexných objektov $\mathcal{K}$ v $\mathbb{R}^d$ platí, že existuje $d+1$ pohybovo invariantných, aditívnych a spojitých funkcionálov nad $\mathcal{K}$, takých že každý ďalší funkcionál s týmito vlastnosťami je ich lineárnou kombináciou s kladnými koeficientami.

---

[38] Dôležitosť tejto problematiky chcem odôvodniť aj tým, že väčšina dvojrozmerných teselácií, s ktorými sa človek stretáva v živote, v skutočnosti predstavuje teselácie indukované v rovine trojrozmernými teseláciami.

[39] Hugo Hadwiger (1908–1981), švajčiarsky matematik nemeckého pôvodu. Od roku 1937 až do konca svojho života pôsobil na univerzite v Berne. Pracoval v rámci projektu vývoja šifrovacieho stroja NEMA (NEue MAchine), ktorý vznikol v rokoch 1941–1943 v švajčiarskom armádnom šifrovacom centre ako vylepšená verzia známej Enigmy. Jeho práca v oblasti geometrie začala po roku 1935 po stretnutí s významným nemeckým matematikom W. J. E. Blaschkem (1885–1962) v Hamburgu. V roku 1957 publikoval knihu *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie* [Prednášky o objeme, povrchu a izoperimetrii] (Springer: Berlin), ktorá sa stala základom pre množinovú formuláciu stochastickej geometrie.

Pre konvexnú množinu K dimenzie d je tak veľmi vhodná nasledujúca voľba charakteristík: $\nu_d(K), \mathbf{E}\nu_{d-1}(K|L_{d-1}), \ldots \mathbf{E}\nu_1(K|L_1), \nu(K)$, kde ν_j znamená obsah (*Lebesgueova miera*) j-rozmerného objektu ($j = 1, \ldots, d$), $\mathbf{E}\nu_j(K|L_j)$ je stredná hodnota obsahu ortogonálnych projekcií množiny K do lineárneho podpriestoru dimenzie j, a ν je *Eulerova-Poincarého charakteristika*. Zvolené charakteristiky teda predstavujú d-rozmerný objem, súbor stredných obsahov ortogonálnych projekcií K do všetkých lineárnych podpriestorov a charakteristiku $\nu(K)$, ktorá sa pre konvexné telesá rovná 1.



Obr. 38 Rovinný rez polyméru, v jeho ľavej časti je profil zrna nekonvexného tvaru.

Pre cely C dvojrozmernej teselácie sa tak okrem $\nu(C)$ volia nasledujúce tzv. *rozmerové* charakteristiky:
- plošný obsah a ($= \nu_2(C)$),
- stredná šírka w ($= \mathbf{E}\nu_1(C|L_1)$), t. j. stredná dĺžka priemetu do zväzku priamok (rovná strednej vzdialenosti oporných priamok)[40] alebo ekvivalentne obvod p rovný podľa Cauchyho relácie $p = \pi w$[41].

Pre cely trojrozmernej teselácie je voľba podobná:
- objem v ($= \nu_3(C)$),
- stredný plošný obsah projekcií h do nadrovín L_2 ($= \mathbf{E}\nu_2(C|L_2)$) alebo ekvivalentný plošný obsah hranice S opäť úmerny podľa Cauchyho relácie $S = 4h$,[42]
- stredná šírka w ($= \mathbf{E}\nu_1(C|L_1)$), t. j. stredná dĺžka projekcií do trsu priamok[43].

---

[40] V technickej praxi je táto charakteristika známa ako *Feretov* alebo *kliešťový priemer*.

[41] Vzťah je známy pre kruh, ale platí všeobecne, takže napríklad pre štvorec so stranou c je $w = \frac{4c}{\pi} = 1.273c$.

[42] Vzťah je pre guľu známy, ale platí všeobecne, takže napríklad pre kocku s hranou c je $h = \frac{3}{2}c^2$.

[43] Pre guľu je to jej priemer, pre kocku s hranou c je to $1.5c$.

Priestorovú teseláciu ako množinu objektov – ciel – určujú *globálne* charakteristiky ako *objemová intenzita* ciel λ (stredný počet ciel v jednotke objemu), *plošná intenzita* hraníc S_V (stredná plocha hraníc ciel v jednotke objemu), a *dĺžková intenzita* hrán L_V (stredná dĺžka hrán ciel v jednotke objemu). Medzi rozmerovými a globálnymi charakteristikami je závislosť, platí $\lambda = \frac{1}{\mathbf{E}v}, S_V = \frac{s}{2}\lambda$ (hranica je vždy spoločná dvom celám). Vzťah pre intenzitu L_V závisí od toho, koľko ciel zdieľa spoločnú hranu; vo Voronojových teseláciách sa vždy v jednej hrane stretávajú tri cely a v jednom vrchole štyri cely. Preto platí $L_V = 4\lambda\mathbf{E}w$.

Základným problémom hodnotenia plošných, čiarových či bodových prienikov trojrozmerných systémov, napríklad teselácií, spočíva v tom, že výber prevedený rovinnými či lineárnymi prienikmi zo zložiek trojrozmerného systému nie je nestranný, ale vážený vlastnosťami týchto zložiek. Jednoduchým príkladom môže byť trojrozmerný systém tvorený dvoma rovnakopočetnými súbormi vzájomne sa nedotýkajúcich rovnomerne náhodne rozmiestnených gulí A, B s polomermi r a $2r$, ktorého rez je vyšetrovaný v pozorovacom okienku mikroskopu. Pravdepodobnosť, že náhodná rovina rezu pretne časticu A je úmerná jej priemeru $2r$ a pravdepodobnosť, že pretne časticu B, jej priemeru $4r$ – takže na reze je vidieť približne dvojnásobok profilov B v porovnaní s profilmi A. Okraje okienka sú náhodné úsečky a tie budú pretínať častice úmerne plochám πr^2 a $4\pi r^2$ ich rovinných projekcií, takže preťatých častí B bude štyrikrát toľko ako častí A. Nakoniec rohy okienka je možné považovať za náhodné body a tie budú pretínať častice úmerne ich objemu – pravdepodobnosť, že roh okienka pretne časticu B, bude osemkrát väčšia ako pravdepodobnosť, že pretne časticu A.

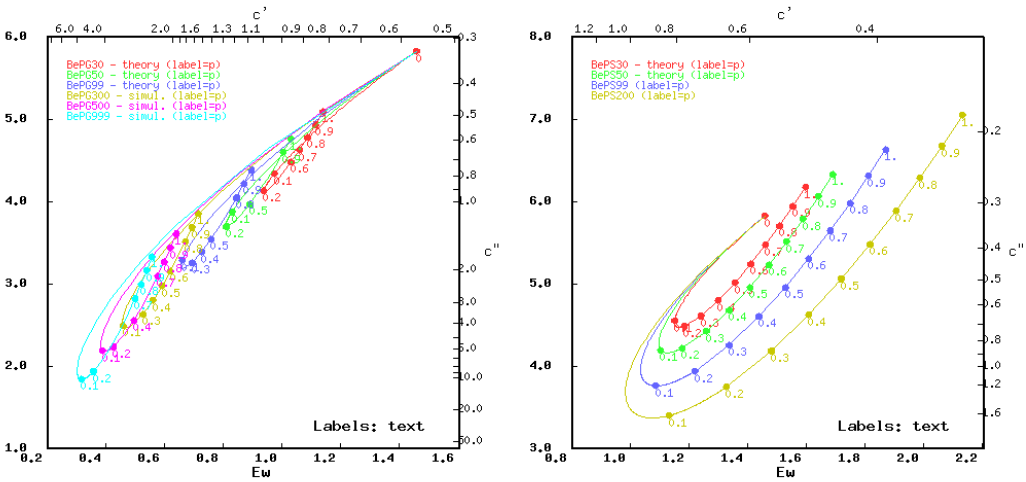
Za predpokladu, že súbor častíc rôznych rozmerov určujú charakteristiky $\lambda, s\,(s = 4h)$ a w, platia nasledujúce všeobecné, tzv. *stereologické* rovnice

$\lambda_2 = \mathbf{E}w\lambda$ t. j. rovina vyberá častice podľa stredných šírok,

$\lambda_1 = \mathbf{E}h\lambda = \mathbf{E}\left(\frac{s}{4}\right)\lambda$ t. j. priamka vyberá častice podľa stredných projekcií h, ktoré sú analógiou účinných prierezov v jadrovej fyzike.

Nech $\mathcal{T}$ je trojrozmerná teselácia, a výsledkom jej prienikov s testovacou rovinou a s testovacou priamkou sú indukované teselácie – dvojrozmerná $\mathcal{T}_2$ a jednorozmerná $\mathcal{T}_1$. Cely teselácie $\mathcal{T}$ sa nazývajú *zrná*, cely $\mathcal{T}_2$ *profily* a cely $\mathcal{T}_1$ *tetivy*; intenzitami jednotlivých teselácií (viď vyššie) je stredný počet zŕn λ, profilov λ_2 a tetív λ_1 pripadajúci na jednotku objemu, plochy, resp. dĺžky vyplneného priestoru. Pokiaľ cely teselácie $\mathcal{T}$ sú konvexné, platia pre ne opäť vyššie uvedené rovnice pre λ_2 a λ_1.

Teselácia $\mathcal{T}$ má však okrem ciel tiež dva už vyššie uvedené komponenty, ktoré ju vyplňujú celú. Sú to mnohonásobne súvislé systémy plôch – hraníc zŕn a mnohonásobne súvislé systémy čiar – styky troch, prípadne viacerých zŕn, charakterizované intenzitami S_V a L_V. Plochám odpovedá v rovinnom reze súbor čiar – hraníc profilov (rovinných rezov), ktorý má plošnú intenzitu L_A a platí rovnica $[S_V] = \frac{4}{\pi} L_A$, kde [ ] predstavuje estimátor, t. j. stredná hodnota $\frac{4}{\pi} L_A$ je nestranným odhadom intenzity S_V. Styky zŕn sú na reze zobrazené priesečníkmi troch a viacerých profilov a zase platí vzťah $[L_V] = 4P_p$, kde P_p je plošná intenzita týchto priesečníkov. Koeficienty $\frac{4}{\pi}$ a 4 sú správne, keď plochy a čiary sú v trojrozmernom priestore rozmiestnené izotropne rovnomerne náhodne. Potom stačí jediný dostatočne rozmerný rez, resp. dostatočne dlhé testovacie čiary. Inak sa musia rezy voliť tak, aby ich polohy a smery pohybu pokryli celý skúmaný priestor.



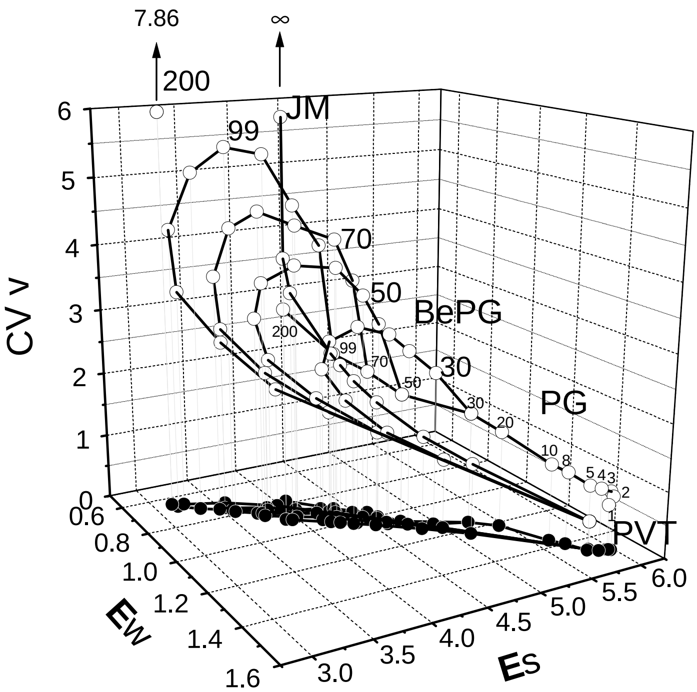
a) b)

Obr. 39 w–s diagram pre: a) globulárne zhluky, b) sférické zhluky implantované do rodičovského procesu PBP.

Výber v indukovaných teseláciách je teda vážený charakteristikami w a h, resp. $\frac{s}{4}$, ktoré navzájom nesúvisia, a stredné hodnoty $\mathbf{E}w$, $\mathbf{E}s$ tak určujú trojrozmernú i indukované teselácie s jednotkovým objemom. Na tomto základe je zostrojená grafická reprezentácia, ktorá sa nazýva *w-s diagram.*[44] Na obr. 39 sú dva príklady *w-s* diagramov pre teselácie s generátormi vo forme zhlukových polí, pričom každá teselácia má jednotkový objem, do

[44] Tento nástroj bol zavedený v [Saxl, Ponížil, 2001] a predstavuje užitočnú pomôcku pre odhad vlastností trojrozmernej štruktúry z rovinných a lineárnych rezov. Databázu počítačovo simulovaných trojrozmerných teselácií a ich vlastností je možné nájsť na `http://fyzika.ft.utb.cz/voronoi/` [stránka aktuálna k dňu 17. 1. 2010].

trojrozmerného obrázku obr. 40 je ako tretia súradnica zavedený koeficient variácie objemu CV v, ako parameter nezávislý na mierke.



Obr. 40 *w-s* diagram: každá jednotková teselácia (t. j. [$\mathbf{E}v = 1$]) je reprezentovaná bodom so súradnicami [$\mathbf{E}w$, $\mathbf{E}s$]; treťou súradnicou je koeficient variácie objemu ciel CV v.[45]

1.4 Teselácia ako štruktúra

Okrem striktne matematického prístupu predvedeného v predchádzajúcich podkapitolách je možné na každú teseláciu nazerať tiež z logicko-filozofického pohľadu ako na systém objektov, medzi ktorými sú určité vzťahy. Takéto pochopenie vyhovuje požiadavkám pre štruktúru napríklad z prác [Peregrin, 1999] a [van Hiele, 1986]. Táto podkapitola sa preto venuje pohľadu na teseláciu práve v roli *štruktúry*.

Dôležité je, že o štruktúre má zmysel hovoriť len tam, kde sú nejaké časti, ktoré sú usporiadavané do nejakých celkov, a štruktúra sa v [Peregrin, 1999] rozumie práve v súvislosti so spôsobom usporiadania týchto častí do celku. Pri teseláciách sú časťami cely (alebo skupiny ciel) usporiadané do celej teselácie; pod vzťahmi medzi celami ale rozumiem nielen

[45] Body v diagrame predstavujú jednotlivé teselácie; JM – Johnsonova-Mehlova teselácia, PVT – Poissonova-Voronojova teselácia, PG – Poissonova teselácia s globulárnym zhlukom, BePG – Bernoulliho (Poissonova) teselácia s globulárnymi zhlukmi. Čísla na krivkách určujú stredný počet bodov Poissonovského zhluku, ktoré boli implantované pri jednotlivých procesoch; pozdĺž krivky sa mení pravdepodobnosť implantácie zhluku medzi hodnotami $p = 1$ (PG) a $p = 0$ (PVT). V horizontálnej rovine je nakreslený odpovedajúci *w-s* diagram a vertikálna súradnica je rovná CV v.

vzťahy týkajúce sa ich usporiadania, ale aj vzhľadu, či spôsobu vytvorenia jednotlivých ciel podľa zadania. Tieto vzťahy som zhrnula pod *pravidlá* pre štvoruholníkové, escherovské a Voronojove teselácie, ktoré vysvetľujem v podkapitolách 3.1 a 4.4.

P. van Hiele vysvetľuje pojem *štruktúra*[46] [van Hiele, 1986, str. 28] na štyroch dôležitých predpisoch určujúcich štruktúru, ktoré preberá z tvarovej psychológie[47]:

1. Štruktúru je možné rozširovať. Ktokoľvek pozná časť štruktúry, pozná aj jej rozšírenie. Rozšírenie štruktúry sa riadi tým istým pravidlom ako jej časť.

2. Štruktúra môže byť chápaná ako časť jemnejšej štruktúry. Pôvodná štruktúra tým nie je ovplyvnená: pravidlá sa nezmenia, len sa rozšíria. Týmto spôsobom je možné zainteresovať viac detailov pri vytváraní (skladaní) štruktúry.

3. Štruktúra môže byť chápaná ako časť širšej štruktúry. Pritom širšia štruktúra má viac pravidiel, z ktorých niektoré definujú pôvodnú štruktúru.

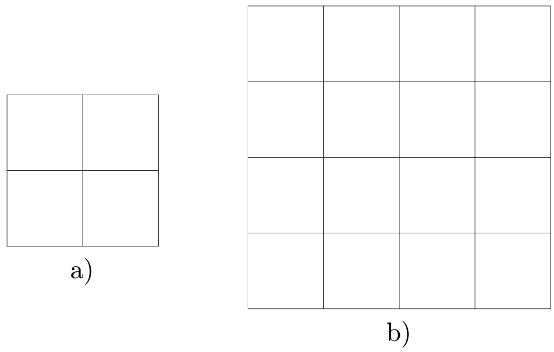
4. Daná štruktúra môže byť izomorfná s inou štruktúrou. V takom prípade sú obe štruktúry definované cez pravidlá, ktoré si vzájomne odpovedajú. Ak niekto zistí pravidlo v jednej štruktúre, vie, ako vznikla aj druhá štruktúra. V prípade globálneho izomorfizmu sú iné pravidlá než v matematickom izomorfizme.

Van Hiele rozoznáva dva typy štruktúr – *pevne zadanú* [rigid] a *slabo zadanú* [feeble] (v ďalšom texte už používam pojmy *pevná* a *slabá* štruktúra). Ak je známa časť štruktúry (napríklad obr. 41), je možné ju rozšíriť bez chyby. Takúto štruktúru nazýva van Hiele pevnou. V prípade, že rozšírenie nie je jednoznačné, resp. nevie sa, ako ďalej pokračovať v rozširovaní štruktúry (napríklad teselácie), je to štruktúra slabá.[48]

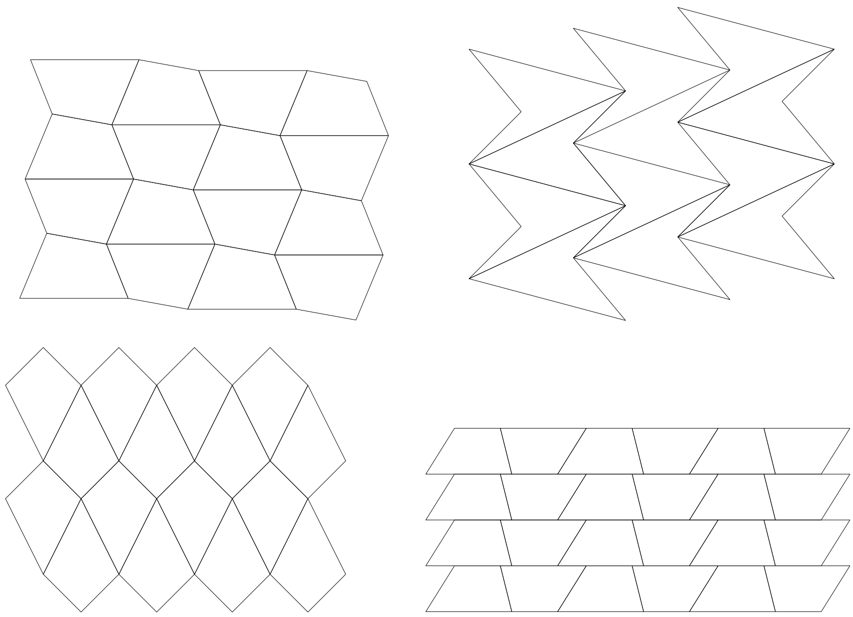
[46] P. van Hiele v práci pojem štruktúra priamo nedefinuje, ale zavádza ho na základe rôznych príkladov (ako príklady uvádza aj rovinné teselácie), ktoré zhrňuje nasledovne: „Štruktúra je to, čo štruktúra je. Najprv pochopte ako štruktúra funguje, a potom pochopíte, čo štruktúra je.“ [Structure is what structure does. First see how structures work, and afterward you will understand what structures are.] [van Hiele, 1986, str. 5]

[47] Geštalt psychológia.

[48] Van Hiele ale zdôrazňuje dôležitosť slabých štruktúr, pretože práve s nimi sa ľudia stretávajú každodenne, napriek tomu, že ich nemajú radi, pretože smerujú k neistote. Slabé štruktúry môžu stáť na začiatku poznávania na vyšší stupeň myslenia, kde sa z nich stávajú štruktúry pevné alebo zostávajú stále slabými. Daná štruktúra môže byť pre niekoho pevná, pre iného človeka môže byť slabá, závisí to ale od rôznych faktorov (napríklad skúsenosť).

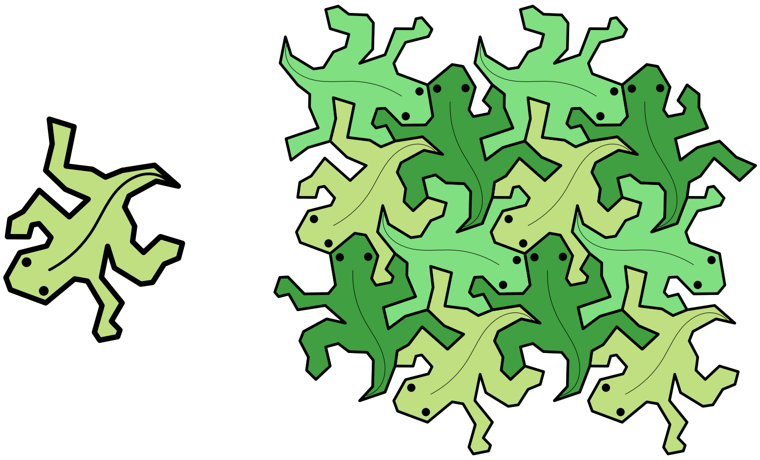


Obr. 41 Štvorcová teselácia ako pevná štruktúra: a) 4 štvorcové cely, b) rozšírenie štvorcovej teselácie.



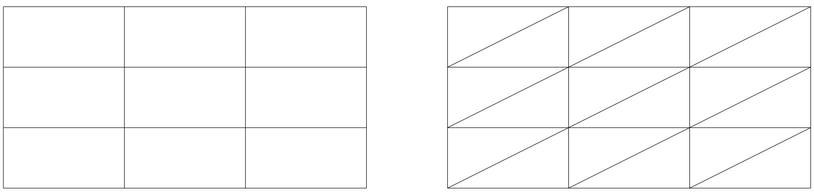
Obr. 42 Monoedrálne teselácie s rôznymi štvoruholníkmi ako celami.

Zo štyroch uvedených predpisov pre štruktúru sú pre moju prácu v súvislosti s vytváraním teselácií žiakmi a študentmi v kapitolách 4 a 5 dôležité dva – prvý a posledný. Podľa prvého o rozširovaní štruktúry je teseláciu možné rozširovať. V prípade štvorcovej teselácie (napríklad na obr. 41) je rozširovanie jednoduché, a to aj pre deti mladšieho veku (ako napríklad v práci [Swoboda, 2006], kde na štvorcových celách bol vyznačený ešte aj motív). Podobné je to s obdĺžnikmi (obr. 45), hoci ich usporiadanie v tvare „rybia kosť“ je zložitejšie. Ďalšie typy štvoruholníkových teselácií (obr. 42) môžu už byť pri rozširovaní v pozícii pevných i slabých štruktúr, závisí to od geometrickej predstavivosti a skúseností človeka. V prípade Voronojových či escherovských teselácií je to podobné (napríklad obr. 43). Pre tieto teselácie je spoločné, že cely každej z nich sú vytvorené a usporiadané podľa určitého pravidla. K správnemu rozširovaniu je potom toto pravidlo nevyhnutné odhaliť (inak človek vytvára teseláciu stratégiou „pokus-omyl“).



Obr. 43 Teselácia s celou v tvare jašterice z Escherovho obrazu *Reptiles* (viď podkapitola 2.1) môže byť v pozícii pevnej i slabej štruktúry, záleží to na skúsenostiach človeka a jeho geometrickej predstavivosti.

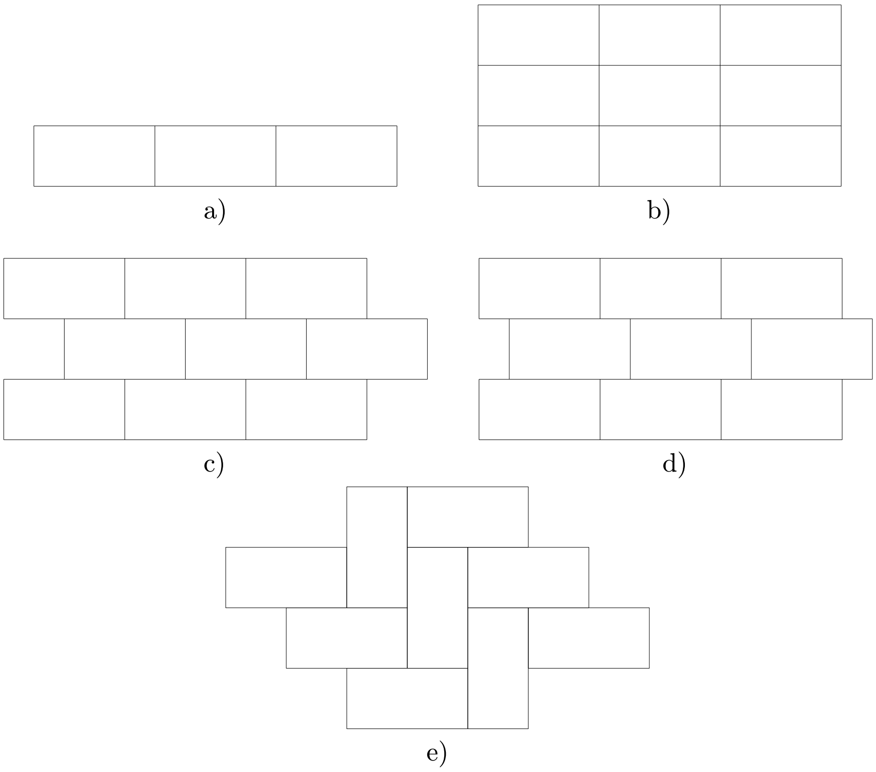
Požiadavku izomorfizmu zo štvrtého predpisu pre štruktúru je možné v súvislosti s teseláciou vysvetliť nasledovným príkladom s obdĺžnikovou teseláciou a teseláciou zloženou z pravouhlých trojuholníkov (obr. 44). Ich odlišnosť je evidentná, obidve sú ale vytvorené rovnako pomocou pravidla príslušných strán (útvary sú k sebe priložené stranami s rovnakou dĺžkou) a príslušných uhlov (útvary sú k sebe priložené tak, aby sa súčet veľkostí vnútorných uhlov rovnal 180° alebo 360°).[49]



Obr. 44 Izomorfizmus medzi štvoruholníkovou a trojuholníkovou teseláciou.

V niektorých prípadoch sa môže štruktúra – teselácia zdať pevnou (napríklad obr. 45a), existuje ale viacero možností pre jej rozšírenie (obr. 45b, c, d). Vtedy sa hovorí o *vzore očakávania*. (V prípade jednej obdĺžnikovej cely pripadá do úvahy ešte usporiadanie ciel ako na obr. 45e.)

[49] Je to ako keď sa porovnávajú gotické kostoly; sú postavené v rovnakom štýle, teda majú veľa spoločných znakov, a to je možné chápať ako izomorfizmus, ale tak isto sa od seba líšia.



Obr. 45 a) Obdĺžnik ako protocela, pás ciel nie je možné chápať ako pevnú štruktúru, b), c), d) vzor očakávania pre protocelu – obdĺžnikový pás, e) opakovaním obdĺžnikovej cely je možné vytvoriť tiež teseláciu so vzorom tzv. „rybia kosť“.

K analýze teselácií alebo vzorov, ktoré žiaci nakreslili, som nakoniec použila pojmy pevná a slabá štruktúra pre charakteristiku schopnosti rozširovať správne alebo nie teseláciu; dôležité postavenie mali takisto vzťahy medzi časťami – celami, t. j. pravidlá.

Kapitola 2

Teselácie okolo nás

Táto kapitola je venovaná fascinujúcemu svetu teselácií okolo nás. Jej prvá podkapitola sa zameriava na trojrozmerné i dvojrozmerné teselácie v architektúre a umení, druhá podáva historický prehľad ich matematického výskumu, a tretia, posledná podkapitola predstavuje teselácie ako model v rôznych vedných disciplínach.

2.1 Teselácie v umení a architektúre

Vytváranie teselácií v architektúre a umení je spojené s celou históriou ľudstva. Už pri stavbe obydlí a opevnení sa ľudia oddávna snažili usporiadať nalámané kamene tak, aby medzi jednotlivými kusmi vytvárajúcimi náhodnú priestorovú teseláciu (t. j. múr, stenu) neboli medzery (obr. 46). Takéto „teselovanie“ sa pritom zdokonaľovalo nielen z ekonomického dôvodu (usporiadať kamene tak, aby uniklo čo najmenej tepla) ale aj estetického, a postupne sa vyznačovalo výraznejšou pravidelnosťou. Z nalámaných nepravidelných kameňov sa časom stávali čoraz viac presnejšie kvádre – tehly (obr. 47).

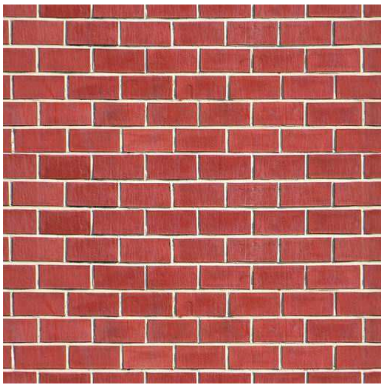
So zdokonalením zručnosti v stavebníctve ľudia začali vyzdobovať aj interiér a exteriér svojich obydlí, verejných budov i modlitební (kostoly, synagógy, mešity). V období gotiky sa objavili vitráže – mozaiky z farebných a na povrchu maľovaných skiel spojených prúžkami olova. A tak sa môžeme nadchýňať nádhernými výzdobami a obloženiami na podlahách, stenách (vonkajších či vnútorných) alebo stropoch budov, môžeme kráčať po fascinujúcich parketážach či dláždeniach chodníkov a námestí, ktoré sú ukážkami teselácií potvrdzujúcimi ľudskú tvorivosť v architektúre.

a)

b)

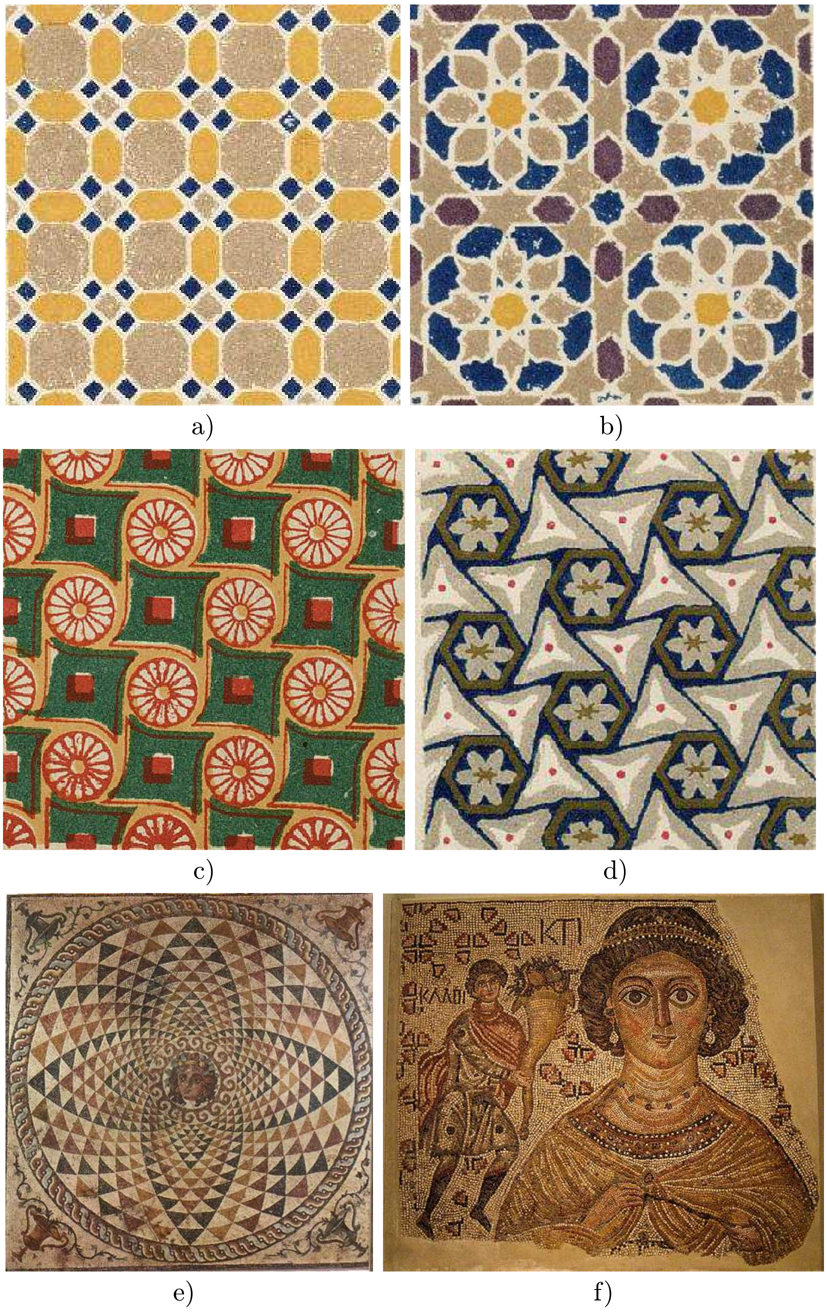
c)

Obr. 46 Múry z nalámaných kameňov: a) na zrúcanine stredovekého hradu Klenová, b) v podzemí kostola sv. Klimenta v Levom Hradci, c) na Spišskom hrade[50].



Obr. 47 Klasické usporiadanie tehál.

50 Prvú kamennú časť Spišského hradu, ktorú nechal na hradnom kopci v polovici 12. storočia vystavať kráľovský dvor Arpádovcov, bola veľká kruhová obytná veža obklopená murovaným opevnením. Veža ale vplyvom tektonických pohybov hradného brala spadla, z opevnenia sa zachovala menšia časť na východe brala. Prvé skutočné hradné múry boli vybudované pravdepodobne až na začiatku 13. storočia. Aj vďaka nim hrad ako jeden z mála odolal vpádu Tatárov v roku 1241.



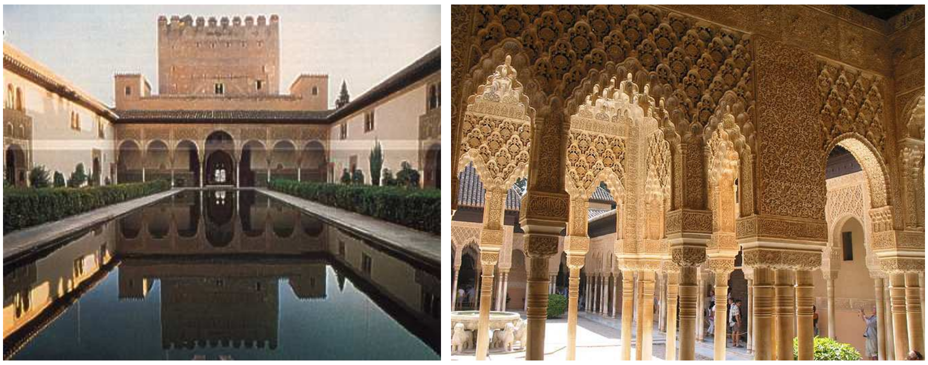
Obr. 48 Rovinné teselácie – mozaiky z rôznych kultúr: a), b) maurské, c) egyptská, d) perzská, e) byzantská, f) zo starovekého Korintu.

S rovinnými teseláciami ako výzdobou je možné sa stretnúť v rôznych kultúrach, pričom nietoré z nich vytvorili špecifické štýly teselácií a vzorov na ich celách (obr. 48). Napríklad na zložitých mozaikách z okolia Stredozemného mora sa vyskytujú často portréty ľudí a výjavy z prírody. Na druhej strane, islam chápe figuratívne zobrazovanie ako rúhanie, prejav spupnosti človeka, ktorý sa snaží napodobovať tvorivý akt Boha, a preto islamská kultúra vyvinula jedinečný charakter výtvarného umenia používajúci množstvo abstraktných geometrických tvarov (geometrické a kvetinové opakujúce sa tvary, arabesky a kaligrafia). Tie sa vyskytujú nielen ako výzdoba budov a mešít, ale napríklad aj na náhrobkoch, kobercoch, tkaninách a iných predmetoch dennej potreby. Aj tie boli často prekrásne zdobené a sú tak dokonalým dôkazom umelecky zvládnutého remesla. Maurská architektúra v Španielsku a islamská kultúra na Strednom východe tak ponúkajú skvelé ukážky rovinných teselácií s bohatými vzormi.

Pravdepodobne k jedným z najznámejších pamiatok islamského umenia je Alhambra v španielskej Granade (obr. 49).[51] Je výsledkom vplyvu viacerých moslimských panovníckych rodov a práce mnohých staviteľov i umelcov, ktorí jej vtlačili osobitý šarm. Po navrátení vlády do kresťanských rúk v roku 1492 sa Alhambra na nejaký čas stala kresťanským palácom (svojím pôvabom očarila panovnícky pár Ferdinanda Aragónskeho a Izabelu Kastílsku), potom schátrala a stala sa z nej ruina. Následné nesprávne zvolené a zle prevedené reštaurátorské práce spolu s vandalským správaním niektorých turistov a ďalšie negatívne vplyvy (niekoľkokrát zemetrasenie, požiar, výbuch skladu strelného prachu a vojny) zanechali na Alhambre nenapraviteľné škody. Napriek všetkému je od 19. storočia, kedy ju „znovuobjavili“ romantickí cestovatelia[52] a básnici, veľmi vyhľadávanou turistickou pamiatkou.

[51] Alhambra (názov má arabské korene z „al-Hamrá“, čo znamená červená alebo tmavočervená pevnosť alebo zámok; podľa rozprávania bola Alhambra stavaná pri svetle fakieľ a ich odraz dodal stenám jedinečné zafarbenie) bola sídelným a správnym komplexom nasrovskej dynastie (jej zakladateľ Muhammad I. Ibn al-Ahmar (1203–1273) získal moc v Granade okolo roku 1238). Vo vnútri Alhambry sa nachádzalo šesť palácov, kasáreň, veľká mešita a malé mestečko, zoologická záhrada, voliéra a priemyselné dielne; všetko zaberalo plochu približne 14 hektárov a odhadom tam mohlo žiť asi až 40 tisíc ľudí. Preto arabské zdroje často Alhambru označujú ako „madína“ – mesto a nie „kasr“ – palác (viď napríklad [Irwin, 2004]).

[52] Jedným z nich bol aj anglický architekt a dizajnér Owen Jones (1809–1874). Počas svojej cesty po krajinách v okolí Stredozemného mora sa stretol s M. Julesom Gourym a pri návšteve Alhambry v roku 1834 sa snažili zachytiť ornamenty na stenách na papier; do Alhambry sa Jones vracia ešte raz o tri roky neskôr sám (Goury ešte v lete 1834 podľahol v Granade cholere), aby nákresy revidoval. V období 1842 až 1846 vychádza knižne práca *Plans, Elevations, Sections and Details of the Alhambra* novou metódou farebnej tlače prostredníctvom chromolitografie. Kniha nemala až taký ohlas a až po nejakom čase sa prejavil jej vplyv. Medzitým bol Jones menovaný hlavným architektom Veľkej výstavy v Londýne v roku 1851, o rok nato po presťahovaní Krištáľového paláca z výstavy v Hyde Parku do južnej okrajovej časti Londýna dostal na starosť jednu sekciu zameranú na maurskú kultúru. Tú zorganizoval tak, že bola presnou reprodukciou niektorých častí Levieho dvora (jeden z palácov Alhambry). V roku 1856 mu vychádza kniha *The Grammar of Ornament* bohato zdobená ukážkami vzorov z rôznych kultúr; veľkú časť tvorili obrázky dlaždíc z Alhambry. Viac informácií je možné nájsť napríklad v [Irwin, 2004].



a) b)

Obr. 49 Alhambra: a) budova jedného z palácových komplexov Comares, b) bohato zdobené stĺporadie Levieho dvora.

Obr. 50 Pravidelné teselácie z Alhambry reprezentujúce niektoré z tapetových vzorov.

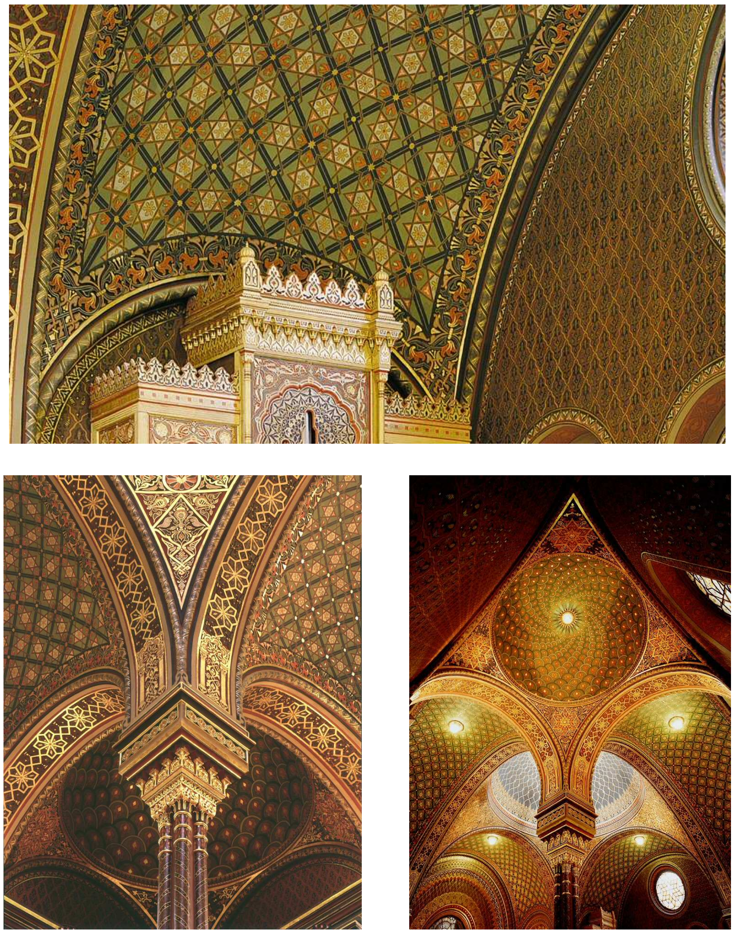
V palácoch Alhambry je možné obdivovať prekrásne miestnosti ozdobené kameňmi a dreveným vyrezávaním, jemnými ornamentami a kaligrafiou, záhrady, dvory a fontány, sochy, veže či vstupné brány – zoznam je nekonečný. Na dekoráciách podláh, stien, stropov, ale i zachovaných látkach a nábytku sa nachádzajú nesmierne bohaté vzory (frízové či tapetové) a hviezdicové dizajny. Z nich všetkých sú teselácie práve tie najzaujímavejšie a najzvláštnejšie – obr. 50. Niektoré zdroje (napríklad [Irwin, 2004] alebo [Pérez-Gómez, 1987]) uvádzajú tvrdenie, že práve v Alhambre je možné nájsť všetkých sedemnásť rovinných grúp symetrie. Ako prvá zisťovala túto skutočnosť E. A. Müllerová vo svojej dizertačnej práci[53] z roku 1944, v ktorej zdokumentovala výskyt dvanástich tapetových vzorov v Alhambre. Postupne ďalší autori predkladali príklady z alhambrskej výzdoby reprezentujúce jednu alebo viacero príkladov rovinných grúp symetrií, niektorí ale prišli s tvrdením o výskyte všetkých grúp. Vďaka preberaniu informácií bez ďalšieho detailnejšieho skúmania sa toto tvrdenie veľmi rozšírilo. V roku 1987 vyšla kniha J. M. Montesinosa *Classsical Tessellations and Three-Manifolds*;[54] v jednej jej časti sú fotografie ornamentov – vzorov z Alhambry, a autor tvrdí, že dokazujú výskyt všetkých 17 grúp symetrií. Podľa B. Grünbauma [Grünbaum, 2006], J. M. Montesinos považuje za symetriu všetko, čo našiel ako vhodné, v knihe sa ale nenachádza vymedzenie pojmu ornament, autor niekedy berie do úvahy aj farby dlaždíc, inokedy si farebnosť nevšíma, nie je vysvetlené, aká veľkosť, resp. rozsah ornamentu je dostatočný na to, aby reprezentoval niektorú z grúp (niekedy je príkladom celá teselácia alebo jedna vyzdobená dlaždica, inokedy je to detailná časť ornamentu). Počas návštevy v roku 1983 B. Grünbaum skúmal dekorácie v Alhambre a našiel reprezentantov 12 tapetových vzorov od E. A. Müllerovej a jedného, ktorý sa v jej práci nenachádzal.[55] A tak dvojica autorov B. Grünbaum a G. C. Shephard tvrdí [Grünbaum, Shephard, 1986], že v Alhambre sa vyskytuje 13 zo 17 tapetových vzorov, dve zo štyroch ďalších chýbajúcich grúp symetrií boli nájdené v španielskom Tolede a pochádzajú približne z toho istého obdobia ($p3$ bola nájdená v kostole, $p3m1$ v synagóge). Autori upozorňujú na to, že je pravdepodobné, že zostávajúce dve grupy (pg a pgg) sa v islamskom umení nevyskytujú vôbec, a že na jeho opis je okrem geometrických tvarov a ich opakovania dôležité sledovať i farebné zmeny alebo vzory prepletania. Preto, aby bolo možné určiť presný počet

[53] Müller, E. A. *Gruppentheoretische und Strukturanalytische Untersuchungen der Maurischen Ornamente aus der Alhambra in Granada* [Grupovo teoretické a štruktúrovo analytické vyšetrovania maurských ornamentov z Alhambry v Granade]. PhD. thesis. Baublatt, Rüschlikon: Universität Zürich, 1944. Dizertačnú prácu písala Müllerová pod vedením Andreasa Speisera (študent D. Hilberta), ktorý napísal v roku 1922 text o teórii grúp spojených s výskumom grúp symetrií v ornamentoch a ilustruje to niekoľkými vzormi zo starovekého Egypta. Edith Alicia Müllerová (1918–1995) sa napriek svojim matematickým začiatkom stala veľmi známou astronomičkou. V liste z roku 1984 spomenula, že pretrváva jej záujem o tému z dizertačnej práce a plánuje ju znovu publikovať; k tomu ale už nedošlo [Grünbaum, 2006].

[54] Montesinos, J. M. *Classsical Tessellations and Three-Manifolds.* New York: Springer, 1987. Autor José Maria Montesinos – Amibilia pracuje na katedre geometrie a topológie na univerzite Complutense v Madride.

[55] Podľa fotografií a obrázkov v prácach [Grünbaum, Shephard, 1987] a [Grünbaum, 2006] usudzujem, že Grünbaum hľadá reprezentantov medzi teseláciami, resp. dlaždicami tvoriacimi teselácie.

grúp symetrií vyskytujúcich sa v Alhambre, je potrebné určiť jednoznačné pravidlá, na základe ktorých by sa hľadali jednotliví reprezentanti.



Obr. 51 Bohato zdobené nástenné teselácie v Španielskej synagóge.[56]

Za krásami mozaík z Alhambry ale nie je nutné chodiť až do Španielska. Na rohu ulíc Dušní a Vězeňské v pražskom Josefově stojí *Španielska synagóga*. Bola postavená v roku 1868 na mieste najstaršej pražskej židovskej modlitebny nazývanej Stará škola. Traduje sa, že bola postavená španielskými imigrantami, svoj názov však dostala skôr kvôli svojmu architektonickému štýlu. Autori projektu, V. I. Ullmann a J. Niklas, sa totiž nechali inšpirovať práve Alhambrou, a tak je možné obdivovať synagógu novorenesančného štýlu s mnohými španielsko-maurskými prvkami (obr. 51). Štuková arabeska i štylizované orientálne motívy sa opakujú na stenách i v rezbárskej výzdobe dverí, zábradlí i galérie. Farebné vitráže i vnútorná výzdoba boli dokončené v roku 1893 podľa návrhu architektov A. Bauma a B. Münzbergera.

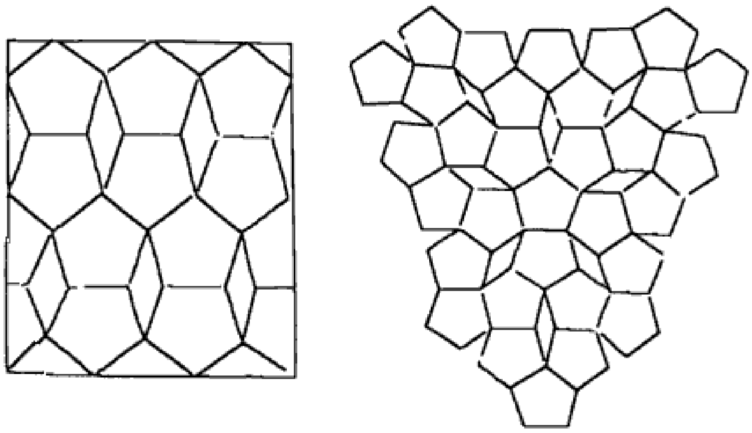
[56] Za poskytnutie fotografií do práce ďakujem Židovskému múzeu v Prahe. Fotografie pochádzajú zo zbierkového materiálu, na ktorý má múzeum výhradné právo.

Nádhernou mozaikovou výzdobou sa pýši aj večný symbol bohatstva, moci, histórie a viery Benátok – bazilika sv. Marka na námestí s rovnakým menom. Pôvodná stavba zo 4. storočia dostala v 11. storočí nádhernú podobu podľa byzantského vzoru s orientálnym nádychom. Ani v ďalších obdobiach ju neminuli rekonštrukcie, a tak má bazilika renesančnú fasádu, románsku zvonicu (resp. už len jej kópiu) a barokový interiér. Najväčšou atrakciou sú však jej mozaiky, a nielen tie nástenné (napríklad Posledný súd, Prenesenie tela sv. Marka do Benátok alebo Kristus so svätými a pápežom Gregorom IV. v apside baziliky), ale aj tie na podlahe s čisto geometrickým vzorom (obr. 52).

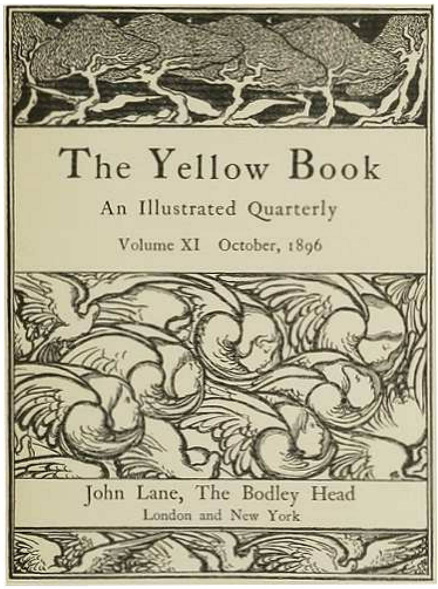
Obr. 52 Teselácie na podlahách baziliky sv. Marka v Benátkach.

Veľa teselácií, medzi ktorými sú napríklad dve teselácie s dvoma protocelami (obr. 53), vytvoril známy umelec a vedec Albrecht Dürer (1471–1528) [Grünbaum, Shephard, 1987]. Tieto teselácie dokazujú Dürerov záujem o pravidelné päťuholníky[57] ako i to, že vedel, že päťuholníky a kosoštvorce je možné usporiadať periodicky alebo kváziperiodicky.

[57] Dürer vo svojom hlavnom matematickom diele *Underweysung der messung/mit dem zirckel und richtscheyt/in Linien ebnen unnd gantzen corporen* [Poučenie o meraní kružidlom a pravítkom] prvýkrát vydanom v Norimberku v roku 1525 a určenom pre mladých remeselníkov a umelcov podáva (okrem iného) dve konštrukcie pravidelných päťuholníkov. Prvý z nich je pritom presný, druhý len približný.



Obr. 53 Dürerove teselácie (okolo roku 1525) s periodickým a kváziperiodickým usporiadaním.[58]



Obr. 54 Vzor od Nellie Syrettovej v literárnom štvrťročníku *The Yellow Book*.

Podľa [Crompton, 2000] tzv. escherovské teselácie začali vznikať práve v období secesie. Veľa dizajnov (vzorov) z tohto obdobia obsahuje opakujúce sa motívy bez medzier a prekrytí, tak ako napríklad vzor od Nellie Syrettovej na obr. 54 pre jedenáste číslo *The Yellow Book*[59] z roku 1896; stredná časť pripomína Escherovu teseláciu *Eight heads* (obr. 10).

[58] Pod kváziperiodickým usporiadaním sa rozumie usporiadanie útvarov, v ktorom nie je možné zobraziť celú teseláciu posunutím tak, aby bola zhodná s pôvodnou; na prvý pohľad sa to ale javí ako možné.

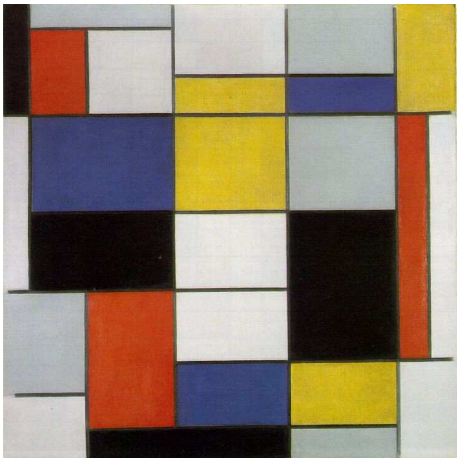
[59] *The Yellow Book* bol anglický literárny štvrťročník vychádzajúci knižnou formou v rokoch 1894–97 v Londýne. Obsahoval krátke príbehy, články, básne a kresby, pričom sa dôraz kládol na estetiku a dekadenciu. Všetkých 13 čísel je možné nájsť na adrese `http://en.wikipedia.org/wiki/The_Yellow_Book` [stránka aktuálna k dňu 17. 1. 2010].

Obr. 55 Päť escherovských teselácií od K. Mosera.

Na prelome 19. a 20. storočia bola viedenská umelecká scéna na jednom zo svojich vrcholov a v jej centre bol jeden z najmnohostrannejších umelcov tej doby K. Moser[60]. Jeho práca bola veľmi rôznorodá – od módnych návrhov a ilustrácií v knihách a časopisoch (napríklad obr. 56), cez keramiku, nábytok alebo šperky, a výrazne ovplyvnila dizajn úžitkových predmetov dennej potreby. V období 1899–1900 vytvoril niekoľko teselácií, ktoré viditeľne nesú znaky escherovského štýlu (napríklad obr. 55).

[60] Koloman (Kolo) Moser (1868–1918), rakúsky maliar, architekt a dizajnér, predstaviteľ viedenskej secesie. Študoval na Umeleckopriemyslovej škole vo Viedni, kde pôsobil sám ako učiteľ v rokoch 1900 až 1918. V roku 1897 spoluzaložil *Vienna Secession* (Spoločnosť revolučných umelcov a architektov), ktorej prvým prezidentom sa stal Gustav Klimt, no v roku 1905 ju spolu opustili.

Obr. 56 K. Moser: *Trout Dance* [Tanec pstruhov], publikované v roku 1901 v časopise *Ver Sacrum*.[61]



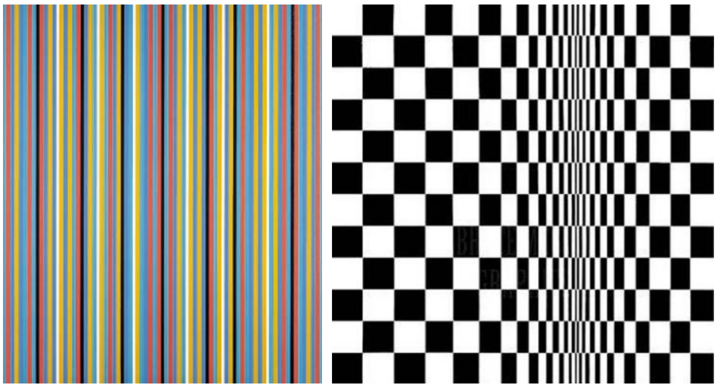
Obr. 57 P. Mondrian: *Composition A* [Kompozícia s čiernou, červenou, sivou, žltou a bielou] (1920).

K autorom ďalších obrazov s „motívom“ teselácií je možné zaradiť aj holandského maliara Pieta Cornelisa Mondriana (1872–1944) (na niekoľkých jeho obrazoch sú zobrazené farebné bloky oddelené čiernymi čiarami, napríklad obr. 57), britskú abstraktnú maliarku Bridget Rileyovú[62] (naprí-

61 Obrázok je možné nájsť na internetovej stránke architekta Andrewa Cromptona `http://www.cromp.com/tess/apc/page08.html` [stránka aktuálna k dňu 17. 1. 2010]. Andrew Crompton učí na Univerzite v Manchestri a je vedeckým pracovníkom vo Výskumnom centre pre architektúru.

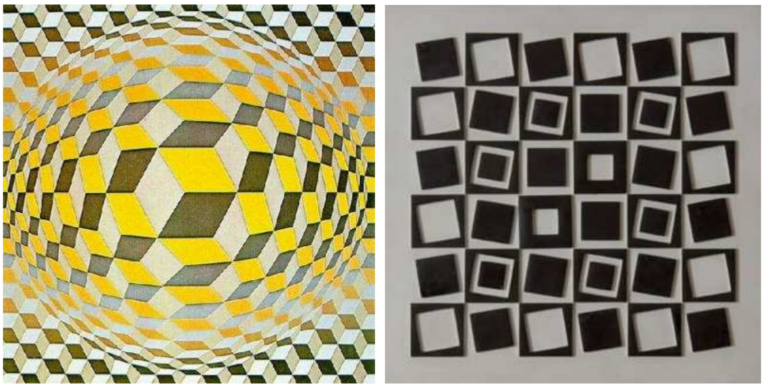
62 Bridget Rileyová (1931), britská maliarka, jej dielo je zaraďované do Op-Artu. Na začiatku svojej tvorby upútala čiernobielymi maľbami, pokračovala obdobím farebnej šedi a nakoniec vstupujú do jej kompozíc farby. Ich rozdelením na plátne sa snaží, aby sa zmiešali práve v okamihu, keď sa človek na obraz pozerá.

klad obr. 58), alebo Victora Vasarelyho[63] (napríklad obr. 59).[64]



a) b)

Obr. 58 B. Rileyová: a) *Shade* [Tieň] (1981), b) *Movement in Squares* [Pohyb v štvorcoch] (1961).



a) b)

Obr. 59 V. Vasarely: a) *Cheyt M* (rok neudaný), b) *Eridan* (1970).[65]

Za najznámejšieho umelca vytvárajúceho teselácie je ale považovaný holandský grafik Maurits Cornelis Escher (1898-1972). Práve krásami Alhambry a bohatosťou abstraktných geometrických vzorov maurského ume-

[63] Victor Vasarely (1908–1997), maďarský maliar a sochár, považovaný za otca Op–Artu. V roku 1930 presídlil do Paríža. Obraz *Zebra*, ktorý nakreslil v 30-tych rokoch 20. storočia, je mnohými odborníkmi považovaný za jeden z prvých príkladov Op-Artu. Vasarely bol fascinovaný tým, ako ľudské oko vníma a ako môže byť oklamané použitím jednoduchých geometrických foriem, princípov a obrazov. Vytváral optické ilúzie a dodával statickým plátnam dojem pohybu. V súčasnosti existujú tri múzeá s jeho prácami (prvé vo Francúzsku, druhé v jeho rodnom meste Pécs a tretie, najväčšie, v Budapešti).

[64] Okrem týchto známych umelcov je nevyhnutné spomenúť aj ďalších „umelcov“ – amatérov, ktorí svoje teselácie vystavujú napríklad na internete. (Príkladom môže byť stránka `http://www.cromp.com/tess/people/TessHome.shtml` [stránka aktuálna k dňu 17. 1. 2010].)

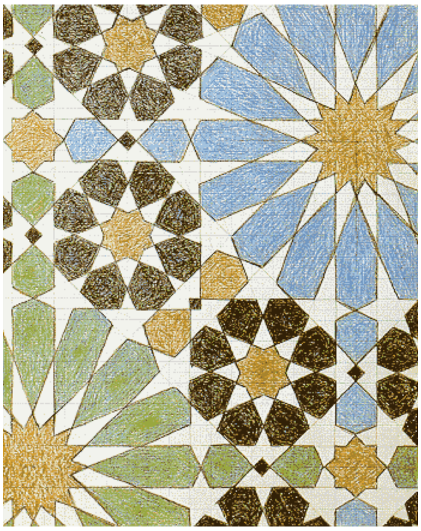
[65] Zo stránky `http://www.vasarely-2008.com/oeuvres/index.html` sú prevzaté obrázky [stránka aktuálna k dňu 17. 1. 2010].

nia sa Escher nadchýnal.[66] Prvýkrát toto miesto navštívil v roku 1922, a mnohé zo vzorov použil už v tom období vo svojich prácach (napríklad obr. 10). V roku 1936 Escher navštívil Alhambru po druhýkrát už so svojou manželkou Jettou; počas niekoľkodňového pobytu pár urobil veľké množstvo skíc, ktoré sa stali Escherovým dlhodobým zdrojom inšpirácie (napríklad obr. 60). V roku 1936 ho nevlastný brat Beer[67] upozornil na súvislosť medzi teseláciami a kryštalografiou a odporúčal mu pozrieť *Zeitschrift für Kristallographie.* O pár dní neskôr mu Beer poslal zoznam desiatich článkov k danej problematike, všetky boli napísané v nemčine a publikované v spomínanom časopise. Väčšina z nich bola príliš odborná pre laikov, ale jeden z nich aj tak zaujal Eschera. Bol to článok Georgea Pólyu o 17 rovinných grupách symetrií, v ktorom Pólya predložil reprezentantov jednotlivých grúp symetrií (obr. 28; bližšie viď poznámka 93 a [Schattschneider, 1987]). Escher študoval tieto teselácie, aby pochopil ich geometrickú štruktúru, t. j. vzájomné usporiadanie jednotlivých ciel, a uvažoval aj o tom, ako môžu byť tieto teselácie vyfarbené minimom farieb tak, aby to bolo kompatibilné so symetriami teselácie. Napriek váž-nemu záujmu Eschera o kryštalografickú literatúru mu ale použité systémy a označenia nevyhovovali. Preto si vypracoval vlastný systém, ktorý opísal v 40-stránkovej knihe s farebnými ilustráciami vydanej v roku 1958 pod názvom *Regelmatige Vlakverdeling* [Pravidelné delenie roviny][68]. Escher nakreslil vo svojich náčrtníkoch 137 periodických vzorov.

[66] O výzdobe v Alhambre M. C. Escher povedal: „Toto je najbohatší zdroj inšpirácie, z ktorého som kedy čerpal, a stále ešte nevyschol. Uvedené symetrické kresby ukazujú, ako môže byť plocha pravidelne rozčlenená na rovnaké obrazce, resp. ako môže byť týmito obrazcami vyplnená. Obrazce musia k sebe priliehať bez toho, aby vznikli „voľné plochy“. Majstrami tohoto umenia boli Mauri. Najmä v španielskej Alhambre vyzdobili steny a podlahy kongruentnými farebnými majolikami zasadenými bez medzier vedľa seba. Aká škoda, že islam zakázal Maurom zhotovovať „obrazy“! Pri tvorbe s dlaždicami sa vždy obmedzovali na obrazce abstraktne geometrických tvarov. Pokiaľ je mi známe, ani jediný maurský umelec sa nikdy neodvážil (alebo ho táto myšlienka nikdy nenapadla?) použiť k vyplneniu plochy konkrétnych, poznateľných a v prírode sa vyskytujúcich obrazcov ako rýb, vtákov, plazov a ľudí. Toto obmedzenie je mi tým nepochopiteľnejšie, pretože dôvodom môjho neutíchajúceho záujmu v tejto oblasti je poznateľnosť komponentov mojich vlastných vzorov“ [Escher, 2003, str. 7–8]. „Zvláštnou črtou maurskej dekorácie je úplná absencia akýchkoľvek ľudských alebo zvieracích foriem – a takisto takmer aj rastlinných. Možno je to súčasne silná i slabá stránka“ [Bool a kol., 2000, str. 24].

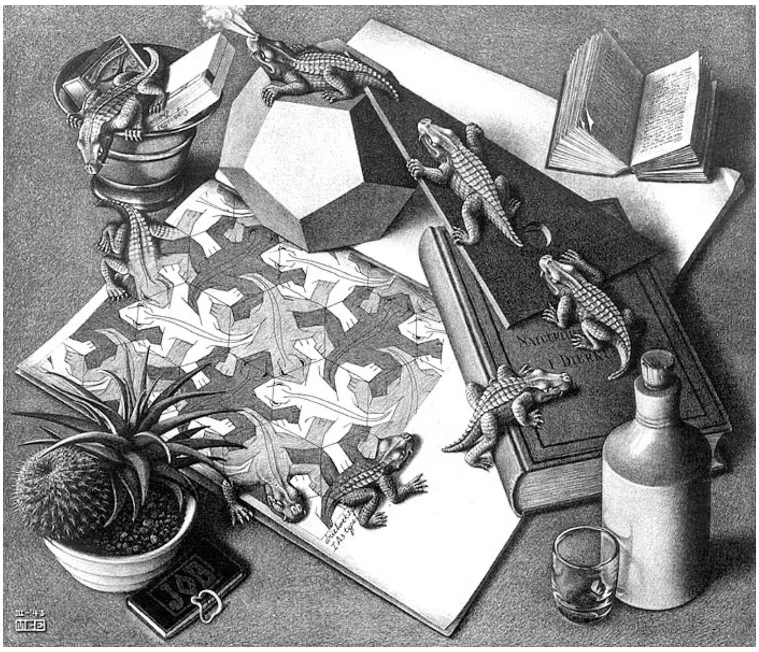
[67] Berend (Beer) G. Escher, profesor geológie, paleontológie a kryštalografie na univerzite v Leidene. Escherov otec o reakcii Beera na bratove teselácie napísal: „Beer v tom videl viac ako som si myslel, videl spojenie s problémami z kryštalografie; to potešilo M. veľmi“ [Bool a kol., 2000, str. 56].

[68] Táto esej bola napísaná na požiadanie súkromného vydavateľstva De Roos Foundation (text je možné nájsť v anglickom preklade v [Bool a kol., 2000, str. 156–172]).



Obr. 60 Motív z Alhambry z Escherových náčrtníkov (1936).

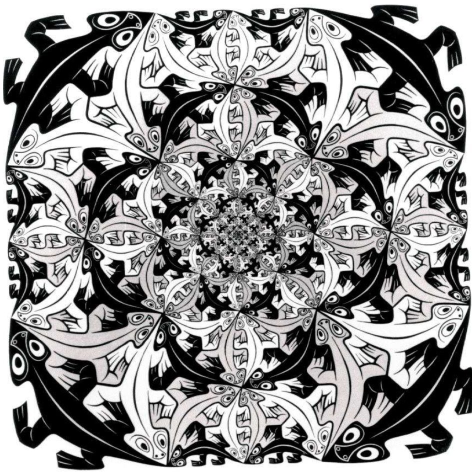
Dlhší čas existovali dohady, či je nejaké prepojenie medzi Escherovou tvorbou a secesiou, ale stále išlo len o teoretizovanie, pretože dôkazy neexistovali. Neskôr sa ale našla pohľadnica z roku 1964, na ktorej Escherov priateľ (takisto grafik), vtipkujúc Escherovi napísal, že ani nevie, že tvoril už pred svojím narodením, a poslal mu jeden z Moserových „escherovských“ obrázkov. Z Escherovej odpovede nie je jasné, či poznal tvorbu Mosera už predtým, ale poznamenal, že si kresbu pridá do svojej malej zbierky iných umelcov, ktorí podobným spôsobom tvorili pred ním [Hargittai, Hargittai, 2000].



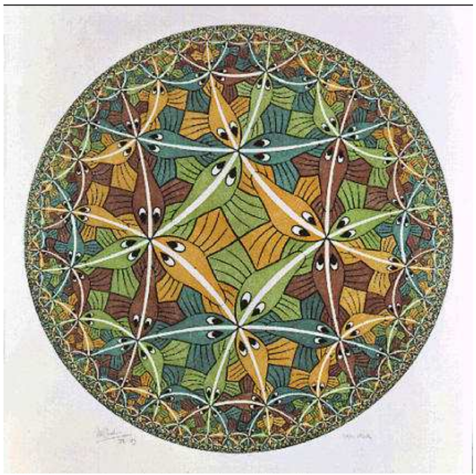
Obr. 61 M. C. Escher: *Reptiles* [Jašterice] (1943).

Pri práci s deťmi som často ako motivačný príklad použila teseláciu z Escherovej grafiky *Reptiles* (obr. 61) a jašteričku[69] ako základnú celu pre escherovské teselácie. Sám Escher túto grafiku opísal nasledovne [Escher, 2003, str. 11]: „Na stole leží otvorený skicár, v ktorom je mozaika zložená z obrazcov v tvare jašterice v troch farebných odtieňoch. Jedno zviera prestalo baviť ležať medzi svojimi druhmi naplocho a tak sa odpúta od roviny skicára a vydáva sa do priestoru. Vylezie na knihu a po trojuholníkovej doske sa dostáva k vrcholu svojho bytia. Tam si krátko odpočinie a spokojné pokračuje opäť dole, cez popolník, kde sa poslušne znovu zaradí medzi svojich dvojrozmerných druhov.“

Okrem už spomenutých teselácií v umení vytvorených z rovnakých (tvarom i veľkosťou) ciel je vhodné spomenúť aj *úbežníkové* a *hyperbolické* teselácie, ktoré sa často vyskytujú vo výtvarnom a dekoračnom umení a ich príklady môžeme nájsť aj v Escherovej tvorbe. *Úbežníková* teselácia má stred a opakujúci sa útvar sa smerom do tohoto stredu zmenšuje, a ak sa využije aj otáčanie, tak útvary konvergujú k stredu akoby po špirále (obr. 62a). *Hyperbolická* teselácia väčšinou vypĺňa kruh, od jeho stredu sa útvary zmenšujú k jeho obvodu; teselácia nakoniec vyvoláva dojem obrazu v guľovom zrkadle (obr. 62b).[70]



a)



b)

Obr. 62 M. C. Escher: a) úbežníková teselácia – *Smaller and smaller* [Menší a menší] (1956), b) hyperbolická teselácia – *Circle limit III* [Kruhový limit III] (1959).

[69] Jašterica ako cela teselácie sa vyskytuje aj v ďalších Escherových grafikách, napríklad *Development II* (1939) alebo *Metamorphosis II* (1939–1940).

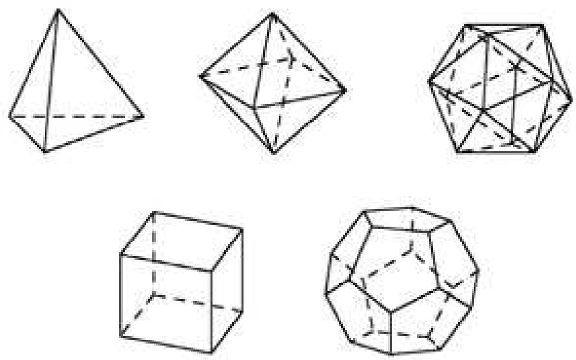
[70] Môj preklad článku *Escher ako matematik* (z anglického originálu [Daems, 2008]), ktorý pojednáva o jednom z Escherových obrazov *Print gallery* [Obrazáreň] (1956) a o rozporuplných reakciách matematikov na Escherovu tvorbu bol publikovaný v časopise *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* 1, ročník 54, 2009, str. 33–40.

2.2 ... od Platóna po súčasnosť

V porovnaní s prepracovanými a starodobými znalosťami vytvárania teselácií je matematická teória týkajúca sa danej problematiky mladá, hoci vytváranie priestoru mnohostenmi bolo predmetom štúdia už v starovekom Grécku. Táto podkapitola je zameraná na prehľad základných problémov týkajúcich sa najmä dvojrozmerných a v krátkosti aj trojrozmerných teselácií, ktoré ľudí zaujímali od dávnych čias až po súčasnosť.[71]

Už v 5. storočí pred n. l. sa v atomistickej teórii gréckych filozofov Leukippa a Demokrita objavuje idea teselácií, keď vyslovili predpoklad, že všetky látky sa skladajú z častíc ďalej už nedeliteľných.

Platón (427–347 pr. n. l.) vo svojom 17. spise *Timaios* stotožnil päť pravidelných telies (tzv. *Platónske telesá*) – kocka, tetraéder, oktaéder, dodekaéder a ikosaéder (obr. 63) – s jedným zo živlov podľa určitých pravidiel – pohyblivosť, tvárnosť, veľkosť. A tak zemi priraďuje tvar kocky (najmenej pohyblivá, najtvárnejšia), vode ikosaéder, ohni tetraéder a vzduchu oktaéder; piate teleso, dodekaéder, porovnáva s tvarom vesmíru.



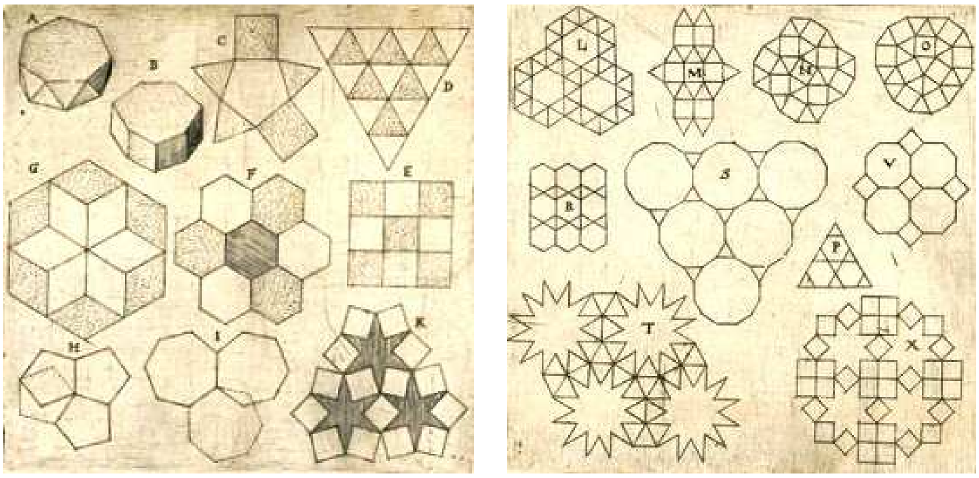
Obr. 63 Platónske telesá: tetraéder (štvorsten) porovnal Platón s ohňom, kocku (šesťsten) so zemou, ikosaéder (dvadsaťsten) s vodou, oktaéder (osemsten) so vzduchom a dodekaéder (dvanásťsten) s hmotou, ktorá vytvára vesmír.

Že Platónske telesá okrem kocky a štvorstenu nevyplňujú priestor bez medzier a prekrytí, tvrdil už Aristoteles (384–322 pred n. l.) vo svojej práci *De Caelo* [O nebi. O vzniku a zániku] (rok 350 pred n. l.). Úcta k Platónovi a Aristotelovi a veľký záujem stredovekých alchymistov o túto tajomnú pätícu telies dlhý čas neumožňovali prístup k pravde. Až v renesancii zvyšujúci záujem o štruktúru kryštálov obnovil štúdium teselácií, keď sa znovu stali predmetom záujmu antickí grécki filozofi. V jednej časti práce Thomasa Bradwardina (asi 1295–1349) *De Geometria speculativa* [Teoretická geometria] (1323–1335?) zaoberajúcej sa telesami je možné nájsť odstavec

[71] Histórii rovinných grúp symetrií som sa venovala stručne v článku [Ilucová, 2008], histórii päťuholníkových teselácií v [Ilucová, 2009].

venovaný vyplňovaniu priestoru telesami. Bradwardine uviedol, že okrem kociek vyplňujú priestor i ihlany, a to buď v počte dvanásť (podľa Averroës) alebo dvadsať, pričom sa priklonil k názoru, že je to skôr dvadsať [Molland, 1978, str. 130]. To, že ani pravidelné štvorsteny nevypĺňajú priestor, dokázal okolo roku 1480 Pavol Middelburgský[72]. Priestor vyplňuje len kocka, pravidelný trojboký hranol, pravidelný šesťboký hranol, zrezaný oktaéder a rombický dodekaéder, a kombinácie rôznych konvexných mnohostenov.[73]

Pravdepodobne autorom ďalšej z prvých zmienok o teseláciách, a to sférických (t. j. teselácia na povrchu gule), vyznačujúcich sa kváziperiodicitou, bol perzský geometer a astronóm Abu'l Wafa'al-Buzjani (940–998) [Coxeter, 1973].[74]



Obr. 64 Rovinné teselácie a mnohosteny so stenami v tvare pravidelných mnohouholníkov od J. Keplera (*Harmonices Mundi*, 1619).

Za prvú úspešnú matematickú štúdiu zaoberajúcu sa teseláciami je možné však považovať až *Harmonices Mundi* [Harmónia sveta][75], ktorú napísal v roku 1619 Johannes Kepler (1571–1630). Okrem iného v nej popisuje geometrické vlastnosti rovinných teselácií vytvorených pravidelnými mnohouholníkmi[76]. Na obr. 64 sú okrem takýchto teselácií aj tzv. *hviezdicové*[77] teselácie a niektoré mnohosteny, ktorých steny predstavujú pravi-

[72] Pavol Middelburgský (1446–1534), astronóm a astrológ z Padovy, dvorný astrológ v Urbine. Vo svojom diele *Praenostica* opisuje podklady a analýzy politickej astrológie.

[73] Priestor vypĺňa kombinácia nasledujúcich pravidelných mnohostenov: tetraéder a oktaéder, ďalej oktaéder, zrezaný oktaéder a kocka kombinované v pomere 1 : 1 : 3, tetraéder a zrezaný tetraéder.

[74] Podľa [Dunlap, 1997] žil tento astronóm až okolo roku 1180.

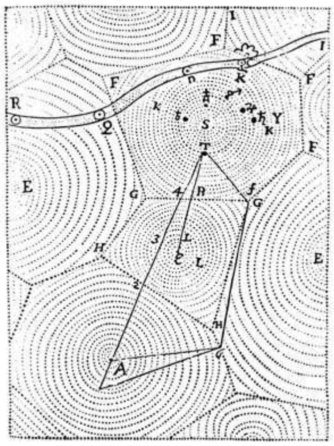
[75] Úvodná stránka viď Príloha III.

[76] Podľa [Grünbaum, Shephard, 1981] je možné, že Kepler už v tej dobe objavil aj všetky tzv. polopravidelné teselácie (viď podkapitola 1.1 a Príloha II).

[77] Teselácie zložené z hviezdicových mnohouholníkov, tzv. *hviezdicové teselácie*, prvý-

delné mnohouholníky. Keplerove príspevky o astronómii však zatienili tieto výsledky o teseláciách až tak, že sa na ne zabudlo takmer na tristo rokov.

Myšlienka delenia priestoru ako teselácie generovanej bodmi sa prvýkrát objavila v práci R. Descartesa (1596–1650) z roku 1644 *Le Monde de Mr. Descartes, ou Le Traité de la Lumière* [Svet pána Descartesa alebo pojednanie o svetle], v ktorej sa autor zaoberal usporiadaním hmoty v slnečnej sústave. Jeho obrázky zobrazujú priestor rozložený do konvexných oblastí, v ktorých sa hmota otáča okolo fixovaných hviezd – obr. 65.[78]



Obr. 65 Usporiadanie hmoty v slnečnej sústave podľa R. Descartesa (1644).

Špeciálne formy teselácií v dvoj- a trojrozmernom prípade využil v roku 1850 J. P. G. L. Dirichlet[79] pri štúdiu pozitívne kvadratických foriem[80]. Tieto výsledky neskôr J. F. Voronoj[81] v roku 1908 a 1909 zovšeobecnil pre d-rozmerný prípad[82]. Odtiaľ sa pre Voronojovu teseláciu objavujú ter-

krát opísal v roku 1881 Albert Badoureau v článku *Mémoire sur les Figures Isoscèles* [Pojednanie o pravidelných útvaroch] publikovanom v *Journal de l'Ecole Polytechnique* 30, str. 47–172.

[78] Voronojova teselácia ako model pre popis rozdelenia galaxií vo vesmíre sa v súčasnosti vyskytuje napríklad v [Weygaert, 1994].

[79] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), nemecký matematik, ktorému je prisudzovaná moderná formálna definícia funkcie.

[80] Dirichlet, G. L. Über die Reduktion der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen [O zjednodušení pozitívne kvadratických foriem s troma neurčitými celými číslami]. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 40, 1850, str. 209–227.

[81] Jurij (Georgij) Feodosjevič Voronoj (1868–1908), ruský matematik. Študoval na fakulte matematiky a fyziky na univerzite v Petrohrade (bol žiakom A. Markova), kde si dokončil aj učiteľské vzdelanie. Jeho dizertačná práca sa zaoberala algebraickými celými číslami spojenými s koreňmi ireducibilných kubických rovníc. Neskôr sa stal profesorom matematiky na Varšavskej univerzite. Voronoj sa venoval teórii čísel, a to najmä algebraickým číslam a geometrii čísel.

[82] Voronoi, G. F. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des for-

míny *Dirichletova mozaika* alebo *Voronojov diagram.* Časom sa rozvinula aplikácia tohto modelu do ďalších oblastí. V meteorológii bola Voronojova teselácia použitá americkým meteorológom Alfredom H. Thiessenom v roku 1911 ako model pre opis oblastí podľa priemerných zrážok; odtiaľ pochádza názov *Thiessenove mnohouholníky (polygóny).* V biológii a fyziológii sa používajú pojmy *rastlinné mnohouholníky* alebo *domény kapilár.* V roku 1927 zaviedol Voronojovu teseláciu do kryštalografie Paul Niggli, ktorý použil pojem *doména vplyvu*, v roku 1933 do fyziky a chémie E. P. Wigner a F. Seitz, odtiaľ pojem *Wignerove-Seitzove zóny.*[83] (Ďalšie informácie viď podkapitola 2.3.)

Sedemnásť rovinných grúp symetrií sa síce vyskytuje už v starom Egypte, bohatými periodickými vzormi sa môžu pýšiť i ďalšie staroveké kultúry (perzská, maurská, atď.), matematické skúmanie tejto problematiky sa datuje ale až oveľa neskôr. Zaujímavosťou je, že kompletnému určeniu počtu dvojrozmerných grúp symetrií predchádzalo vyriešenie počtu trojrozmerných kryštalografických grúp. Ich odvodenie začína spisom *Mémoire sur les groupes de mouvements* [Pojednanie o pohybových grupách][84] francúzskeho matematika M. E. C. Jordana[85] (1838–1922) a Leonhardom Sohnckem (1842–1897), ktorý vo svojej knihe *Entwickelung einer Theorie der Kristallstruktur* [Vývoj teórie kryštalických štruktúr][86] odvodil 65 periodických diskrétnych grúp v priestore. V roku 1890 ruský kryštalograf J. S. Fjodorov[87] (obr. 66a) podal klasifikáciu všetkých grúp symetrií pries-

---

mes quadratiques, premier mémoire, sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 133, 1908, str. 97–178.

Voronoi, G. F. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques, deuxième memoire, recherches sur les parallelloèdres primitifs. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 134, 1908, str. 198–287.

Voronoi, G. F. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques, deuxième memoire, seconde partie, recherches sur les parallelloèdres primitifs. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 136, 1909, str. 67–181.

[83] S Voronojovými teseláciami je možné sa stretnúť aj v astrofyzike pri sledovaní distribúcie hmotnosti pri kondenzácii oblakov medzihviezdneho plynu alebo v geológii pri štúdiu pôvodu hornín a v biológii a fyziológii sa používajú pojmy rastlinné a kapilárne polygóny.

[84] Jordan, C. Mémoire sur les groupes de mouvements. *Ann. Mat. Pur. App.* (2) 2, 1868/1869, str. 167–215 a 322–345.

[85] Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922), francúzsky matematik známy svojimi prácami z teórie grúp.

[86] Sohncke, L. *Entwickelung einer Theorie der Kristallstruktur.* Leipzig: Teubner, 1879.

[87] Jevgraf (Evgraf) Stepanovič Fjodorov (1853–1919), ruský kryštalograf. Svoju prvú monografiu *Нацала уцения о фигурах* [Princípy teórie o obrazcoch] začal písať už v 16-

toru v článku *Симметрия правильных систем фигур* [Symetrie pravidelných systémov obrazcov][88], o rok neskôr dané výsledky prezentoval aj Nemec A. M. Schönfliess[89] (obr. 66b) v pojednaní *Über Gruppen von Transformationen des Raumes in sich* [O grupách transformácií priestoru v sebe][90]. Odvodili ich nezávisle na sebe; jeden geometrickými metódami, druhý s využitím algebraickej teórie grúp. (Napriek tomu, že obidva články, Fjodorovov i Schönfliessov, o kryštalografických grupách sú z roku 1891, podľa [Galiulin, 2003] Fjodorov všetky grupy skompletizoval trošku skôr.) Je zaujímavé, že ani jeden z nich na začiatku nenašiel všetky (Fjodorov našiel 229 možných kombinácií častíc v kryštáloch, Schönfliess 227). Vďaka vzájomnej korešpondencii si navzájom svoje zoznamy doplnili[91], a od tej doby sa počet kryštalografických grúp – 230 (je ich v podstate 219, z toho 11 zrkadlových párov, teda spolu 230) – nezmenil (viď [Galiulin, 2003], [Levitin, 1991]). Fjodorovove a Schönfliessove výsledky boli dlho chápané len ako matematická zábava bez vzťahu k realite. Až v roku 1912 Max von Laue (1879–1960) so svojimi spolupracovníkmi objavil difrakciu röntgenových lúčov na kryštáloch, ktorá experimentálne overila teóriu symetrií kryštálov.

V tejto problematike J. S. Fjodorov pokračoval, a tak ešte v roku 1891 dokázal v príspevku *Симметрия на плоскости.* [Symetrie v rovine][92], že každá rovinná symetrická teselácia (a každý periodicky opakujúci sa

---

tich rokoch (je považovaná za jednu z najhlbších monografií o elementárnej geometrii, vyšla v roku 1885 v Petrohrade); v mladosti bol organizátorom ilegálnych socialistických novín *Нацала* [Princípy]. Desať rokov pracoval pre geologickú komisiu, kde vytvoril geologické mapy severozápadného Ruska (vyvinul všeobecnú teodolickú metódu pre mineralógiu a petrológiu). Vystúpil s mnohými príspevkami pred St. Petergburskou mineralogickou spoločnosťou, tie vychádzali v ich zborníku. 230 kryštalografických grúp sa v Rusku tiež označuje ako *Fjodorovove grupy.*

[88] Фёдоров, Е. С. *Симметрия правильных систем фигур.* Записки Минералогического Общества (2) 28, 1891, str. 1–146.

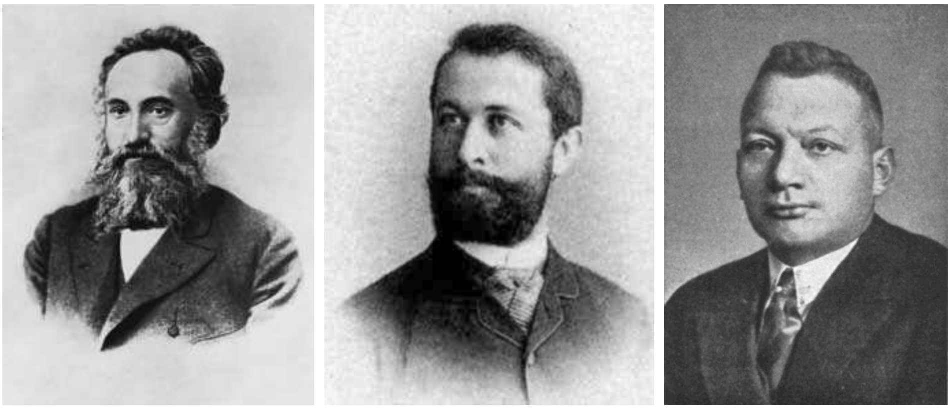
[89] Arthur Moritz Schönfliess (1853–1928), nemecký matematik. Po ukončení štúdia matematiky v Berlíne pôsobil ako stredoškolský učiteľ; počas tohoto obdobia pokračoval vo svojej vedeckej práci, čo ho priviedlo až k miestu profesora aplikovanej matematiky v Göttingene. Tam sa zaoberal geometrickými vlastnosťami stupňov voľnosti tuhého telesa, čím nadviazal na výskumy M. E. C. Jordana spred dvadsiatich rokov a L. Sohnckeho spred desiatich rokov.

[90] Schönfliess, A. M. *Über Gruppen von Transformationen des Raumes in sich. Kristallsystems und Kristallstruktur.* Leipzig: Teubner, 1891.

[91] O výsledkoch tejto korešpondencie napísal Fjodorov príspevok *Zusammenstellung der krystallographischen Resultate des Herrn Schoenflies und der meinigen* [Zhrnutie kryštalografických výsledkov pána Schoenfliesa a mojich] (Zeitschrift Kryst. Mineral. 20, 1891, str. 25–75).

[92] Фёдоров, Е. С. *Симметрия на плоскости.* Записки Минералогического Общества (2), 28, 1891, str. 345–390.

motív) môže byť podľa spôsobu opakovania vzoru zaradená do jednej zo sedemnástich grúp symetrií. Tento problém však zamestnával radu vedcov už pred ním; Fjodorovova tabuľka ukazuje, že 16 z týchto 17 grúp opísal už v roku 1869 M. E. C. Jordan, 14 grúp L. Sohncke o päť rokov neskôr, viď [Coxeter, 1989]. Fjodorovove príspevky o rovinných grupách symetrií boli napísané v ruštine, a tak klasifikáciu rovinných grúp symetrií spopularizovali až George Pólya (1887–1985) a švajčiarsky kryštalograf Paul Niggli (1888–1953) v roku 1924 svojimi článkami[93] zaoberajúcimi sa tapetovými vzormi a kryštálovými štruktúrami. (Zaujímavý prehľad histórie výskumu problematiky kryštalografických grúp je možné nájsť v [Joyce, 1997].)



a) b) c)

Obr. 66 a) J. S. Fjodorov (1853–1919), b) A. M. Schönfliess (1853–1928), c) K. A. Reinhardt (1895–1941).

Po mnohých rokoch úsilia bolo pomocou počítačov zistené, že v štvorrozmernom priestore existuje 4783 kryštalografických grúp [Brown a kol., 1978] (z toho 112 sa rozdeľuje zrkadlovo). Počet grúp v päťrozmernom priestore doteraz nie je známy, ale je konečný podľa viet Bieberbacha[94] (1910) a Frobenia[95] (1911)[96] [Grünbaum, Shephard, 1987], [Schulte, 1993]. Teóriu

[93] Pólya, G. Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene [O analógii kryštalických symetrií v rovine]. *Zeitschrift für Kristallographie* 60, 1924, str. 278–282.
Niggli P. Die Flächensymmetrien homogener Diskontinuen [Rovinné symetrie homogénneho diskontinua]. *Zeitschrift für Kristallographie* 60, 1924, str. 283–298.
Pólyovým hlavným prínosom bola najmä celostránková ilustrácia s príkladmi teselácií pre každú zo sedemnástich grúp symetrií; trinásť z nich boli klasicky známe, štyri vytvoril sám. V niektorých zdrojoch (napríklad [Irwin, 2007]) sa uvádza nesprávne tvrdenie, že práve G. Pólya je autorom klasifikácie rovinných grúp symetrií.

[94] Ludwig Georg Elias Moses Bieberbach (1886–1982), nemecký matematik, jeho dizertačná práca (1911) na tému grupy euklidovských pohybov predstavovala dôležitý krok k vyriešeniu 18. Hilbertovho problému.

[95] Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917), nemecký matematik, známy svojimi prácami v teórii diferenciálnych rovníc, teórii grúp a čísel.

[96] Frobenius, F. G. Über die unzerlegbaren diskreten Bewegungsgruppen [O nerozloži-

rovinných grúp symetrií rozšírili v roku 1951 A. V. Šubnikov a N. V. Belov[97] kombináciou periodického opakovania tvarov s periodickým opakovaním farieb (tzv. *polychromatická* symetria).

Už spomínaný objav, ktoré konvexné šesťuholníky vytvárajú teseláciu, je pripisovaný Karlu Augustovi Reinhardtovi (obr. 66c), ktorého dizertačná práca *Über die Zerlegung der Ebene in Polygone* [O rozložení roviny na mnohouholníky] [98] z roku 1918 obsahuje riešenie tohoto problému.[99] Sú to práve tri typy konvexných šesťuholníkov – obr. 16, pričom pod „typom“ sa všeobecne rozumie množina mnohouholníkov, ktoré vyhovujú určitým podmienkam pre veľkosť strán a vnútorných uhlov. Objavovanie konvexných teselujúcich paťuholníkov je ale ságou, ktorá trvá niekoľko desaťročí. Po prvýkrát sa klasifikácia päťuholníkov vytvárajúcich monoedrálne teselácie v rovine objavila takisto v Reinhardtovej dizertačnej práci, v ktorej stanovil päť[100] rôznych skupín požiadavok pre uhly a strany daného päťuholníka, a každá z nich tak definuje jeden teselujúci typ päťuholníka – obr. 67. (Pre päťuholníky tohoto typu existuje veľa rozličných teselácií.) Podľa [Schattschneider, 1978a] Reinhardt nepochyboval, že vytvoril kompletné riešenie tohto problému, ale nevedel dokázať, že každý teselujúci päťuholník je určite jeden z daných piatich. Okrem toho bol Reinhardt vo svojom odvodzovaní tak dôkladný, že sa jeho klasifikácia prijala ako finálny výsledok. Reinhardtovo tvrdenie potvrdili H. Heesch a O. Kienzle v roku 1963.[101] O päť rokov neskôr R. B. Kershner z Johns Hopkins University

teľných diskrétnych pohybových grupách]. *Sitzungsberichte der Preussischen Akamemie der Wissenschaften Berlin, Physikalisch-Mathematische Klasse* 29, 1911, str. 654–665.

97 Alexej Vasiljevič Šubnikov (1887–1970), Nikolaj Vasiljevič Belov (1891–1982), ruskí kryštalografi, venujúci sa teórii farebnej symetrie a antisymetrie.

98 Reinhardt, K. *Über die Zerlegung der Ebene in Polygone.* PhD. thesis. Borna – Leipzig: Univ. Frankfurt am M. Noske, 1918. Dizertačnú prácu písal Reinhardt pod vedením L. Bieberbacha. Titulná stránka tejto práce viď Príloha IV.

99 Teselácie sú obsahom aj 18. Hilbertovho problému, v ktorom sa rieši otázka vyplnenia priestoru bez medzier kongruentnými polyédrami. Časť tohoto problému vyriešil práve L. Bieberbach, časť týkajúcu sa anizoedrálnych konvexných mnohouholníkov K. A. Reinhardt v roku 1928 (Reinhardt, K. Zur Zerlegung der euklidischen Räume in kongruente Polytope [K rozkladu euklidovských priestorov na kongruentné polytopy]. *Sitzungsberichte der Preussischen Akamemie der Wissenschaften Berlin, Physikalisch-Mathematische Klasse*, 1928, str. 150–155.), časť zostala nevyriešená.

100 V skutočnosti Reinhardt odvodil 8 typov teselujúcich päťuholníkov, ale prvé 3 typy sú považované za špeciálne prípady 3 typov teselujúcich konvexných šesťuholníkov a je možné z nich dané šesťuholníky vytvoriť vložením ďalšieho vrcholu na jednu stranu [Kershner, 1968]. Pre ostatných päť typov päťuholníkov to neplatí.

101 Heesch, H., Kienzle, O. *Flächenschluss. System der Formen lückenlos aneinanderschliessender Flachteile* [Úplné využitie plochy. Systém foriem bez medzier na seba naväzujúcich plôch]. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer-Verlag, 1963.

oznámil [Kershner, 1968], že našiel ďalšie tri typy päťuholníkov teselujúcich rovinu (použil metódu odlišnú od Reinhardtovej), a že spolu týchto osem typov nakoniec tvorí konečný zoznam teselujúcich konvexných päťuholníkov.[102] Aj toto rozšírenie pôvodného zoznamu sa neskôr ukázalo ako nie konečné.

V roku 1975 v júlovom čísle časopisu *Scientific American* Martin Gardner[103] vo svojej rubrike publikoval Kershnerov zoznam ôsmych päťuholníkových teselácií. Vďaka tomu tento problém znovuotvoril a oboznámil s ním širokú čitateľskú verejnosť, vrátane mnohých amatérov – matematikov. Prvým aktívnym čitateľom, ktorý Gardnerovi aj poslal svoje výsledky, bol Richard James, počítačový vedec z Kalifornie. Ten sa rozhodol už po prečítaní prvej časti článku otestovať svoje schopnosti a bez pomoci Kershnerovho zoznamu nájsť nejaké z päťuholníkových teselácií. Našiel ďalší päťuholník, ktorý v Kershnerovom zozname chýbal a M. Gardner ho publikoval. Druhou aktívnou čitateľkou bola Marjorie Riceová[104], ktorá čítala synom predplatený časopis a článok o Jamesových objavoch v *Scientific American* z decembra 1975 v nej vzbudil pozornosť. Zaujal ju už júlový článok o päťuholníkových teseláciách a myslela si, aké zaujímavé to muselo byť pre Kershnera objaviť nové typy päťuholníkových ciel, ale až po objave Richarda Jamesa jej záujem natoľko vzrástol, aby zistila, či je schopná nájsť nejaký ďalší teselujúci päťuholník [Schattschneider, 1981]. Marjorie si najprv spísala všetky informácie o daných deviatich teselujúcich päťuholníkoch a snažila sa nájsť spoločné vzťahy, ktorým vyhovovali dané päťuholníky a príslušné teselácie. Vianoce v roku 1975 boli pre ňu veľmi náročné, pretože sa tomuto problému venovala aj pri práci v kuchyni, pričom sa snažila, aby to nikto nezistil a nemusela tak svoju činnosť nikomu vysvetľovať. V polovici februára 1976 Marjorie poslala svoje nákresy M. Gardnerovi. V tom čase sa začala vzájomná korešpondencia a priateľstvo medzi Marjo-

[102] Kershner napísal, že jeho dôkaz je príliš komplexný a namáhavý na publikovanie v *American Mathematical Monthly*, ale že ho bude publikovať čo najskôr niekde inde. Či nakoniec Kershner dôkaz publikoval alebo nie, sa mi nepodarilo zistiť.

[103] Martin Gardner (1914), americký popularizátor matematiky. Počas 25 rokov (1956–1981) viedol rubriku „Matematické hry“ v časopise *Scientific American*, vďaka ktorej priblížil krásu matematiky verejnosti a mnohých inšpiroval k práci nad matematickými problémami. Téme teselácií sa venoval niekoľkokrát vo svojej rubrike i v mnohých knihách (je autorom viac než 60 kníh).

[104] Marjorie Riceová (1923), matka piatich detí a žena v domácnosti zo San Diega. Po ukončení strednej školy sa stala sekretárkou a neskôr sa vydala za svojho šéfa. Pri hľadaní teselujúcich päťuholníkov si vytvorila svoj vlastný systém označovania vyjadrujúci podmienky a vzťahy medzi stranami a uhlami teselujúcich útvarov.

rie a Doris Schattschneiderovou[105], ktorá sa stala nielen jej priateľkou ale aj konzultantkou. Doris posielala Marjorie články, ktoré sa v danom čase objavovali v odborných časopisoch, a Marjorie sa snažila napríklad šesťuholníkové cely rozdeliť tak, aby získala päťuholníkové. Bez formálneho matematického vzdelania, ale s nadšením, sa jej podarilo počas obdobia dvoch rokov nájsť štyri nové typy teselujúcich päťuholníkov, pričom vzniknuté teselácie ešte dokreslila napríklad kvetinovým alebo zvieracím ornamentom (napríklad ako na obr. 68), a viac než šesťdesiat rôznych teselácií. Podrobný opis ako R. James alebo M. Riceová našli teselujúce päťuholníky, je možné nájsť v [Schattschneider, 1981].

Zoznam trinástich typov teselujúcich päťuholníkov sa objavil už v roku 1978 v *Mathematics Magazine* v článku Doris Schattschneiderovej [Schattschneider, 1978a] a D. C. Hunt a M. D. Hirschhorn v roku 1983 tvrdili, že dokázali jeho kompletnosť. Dôkaz dvojica publikovala v roku 1985.[106] V roku 1985 objavil ďalší, štrnásty, teselujúci päťuholník Rolf Stein, študent z Univerzity v Dortmunde, ktorý vyhlásil (nepoučený zo skúseností Reinhardta a Kershnera), že daný problém je vyriešený raz a navždy. Prehľad doteraz známych typov päťuholníkov vytvárajúcich teselácie s príslušnými teseláciami je na obr. 67.[107]

---

[105] Doris Schattschneiderová získala doktorát na Yaleskej univerzite v roku 1966. Učila na Northwestern University a University of Illinois v Chicago Circle, a od roku 1968 na Moravian College. Tu ju jej záujem o umenie priviedol k myšlienke vytvoriť kurz s názvom „Teselácie: Matematické umenie“. O tejto téme napísala veľa; spolupracovala s grafikmi – umelcami na vytvorení knihy a kolekcie jedinečných geometrických modelov M. C. Eschera – *Kaleidocycles* (Schattschneider, D., Walker, W. *Kaleidocycles.* Petaluma, CA: Pomegranate Publications, 1987).

[106] Hirschhorn, M. D., Hunt, D. C. Equilateral Convex Pentagons Which Tile the Plane. *Journal of Combinatorial Theory*, Ser. A 39, 1, 1985, str. 1–18. Autori tvrdia, že rovnostranný konvexný päťuholník vytvára teseláciu v rovine vtedy a len vtedy, ak má súčet veľkostí dvoch uhlov rovný 2π alebo ak je to jednoznačne určený päťuholník so špeciálnymi uhlami. Ich dôkaz je založený na preskúmaní všetkých bodov prieniku 100 kriviek. V článku O. Bagina Tiling the Plane with Congruent Equilateral Convex Pentagons (*Journal of Combinatorial Theory*, Ser. A 105, 2, 2004, str. 221–232) autor predvádza alternatívny dôkaz tvrdení o päťuholníkoch a to založený na Eulerovej vete pre rovinné grafy.

[107] Podmienky pre dĺžky strán a veľkosti vnútorných uhlov jednotlivých typov sú nasledujúce (A, B, C, D, E – vnútorné uhly päťuholníka, a, b, c, d, e – strany päťuholníka; takéto označenie je napríklad použité v článku [Schattschneider, 1978a]) – typ 1: $D + E = 180°$, typ 2: $C + E = 180°, a = d$, typ 3: $A = C = D = 120°, a = b, d = c + e$, typ 4: $A = C = 90°, a = b, c = d$, typ 5: $C = 2A = 120°, a = b, c = d$, typ 6: $C + E = 180°, A = 2C, a = b = e, c = d$, typ 7: $2B + C = 360°, 2D + A = 360°, a = b = c = d$, typ 8: $2A + B = 360°, 2D + C = 360°, a = b = c = d$, typ 9: $2E + B = 360°, 2D + C = 360°, a = b = c = d$, typ 10: $E = 90°, A + D = 180°, 2B - D = 180°, 2C + D = 360°, a = e = b + d$, typ 11: $A = 90°, C + E = 180°, 2B + C = 360°, d = e = 2a + c$, typ 12: $A = 90°, C + E = 180°, 2B + C = 360°, 2a = c + e = d$, typ

Okrem objavovania monoedrálnych rovinných teselácií z konvexných päťuholníkov je súčasný výskum (t. j. obdobie od 2. polovice 20. storočia) v tejto oblasti úzko spojený najmä s interdisciplinárnymi problémami a aplikáciou teselácií. Jeden z najfascinujúcejších objavov sa týka *aperiodických* teselácií. Cely takýchto teselácií vytvárajú na prvý pohľad pravidelné, ale v skutočnosti neperiodické teselácie, teda také, ktoré nie sú invariantné vzhľadom k posunutiu (t. j. keď sa teselácia posunie o ľubovoľný vektor, nikdy sa nebude zhodovať s pôvodnou teseláciou).[108] V roku 1973 a 1974 objavil profesor matematiky v Oxforde Roger Penrose[109] tri množiny aperiodických ciel. Prvé z jeho pokusov viedli k objaveniu veľkého počtu ciel vytvárajúcich takéto teselácie, ďalšia práca priniesla úspech so šiestimi, a neskôr Penrose zistil, že aperiodickú teseláciu je možné vytvoriť aj len opakovaním dvoch štvoruholníkových ciel – obr. 69.[110]

V roku 1975 čítal Robert Ammann[111] článok od M. Gardnera o Penroseovej práci. Keďže Penrose požiadal o patent na tento objav[112], Gardnerov opis bol dosť vágny. Ammann napísal Gardnerovi list, v ktorom opisuje svoju vlastnú prácu so zopakovanými Penroseovými množinami a pridal ešte štvoricu „zlatých rovnobežnostenov“, ktoré vytvárajú aperiodickú teseláciu v priestore. O niekoľko rokov neskôr začal Ammann korešpondenciu s mnohými významnými profesionálnymi vedcami. Objav kvázikryštálov v roku 1982 zmenil pozíciu aperiodických teselácií a Ammannova práca prešla z oblasti rekreačnej matematiky k uznávanému akademickému výskumu. Päť množín ciel, ktoré Ammann objavil, sa vyskytli aj v [Grünbaum, Shephard, 1987] a v spolupráci s autormi publikoval Ammann článok[113], ktorý dokazoval aperiodicitu štyroch z nich.

13: $A = C = 90°, 2B = 2E = 360° - D, c = d, 2c = e$, typ 14: $D = 90°, 2E + A = 360°, C + A = 180°, B + D + E = 360°, 2e = 2c = a$.

[108] Cely prvých aperiodických teselácií sú známe ako *Wang tiles*.

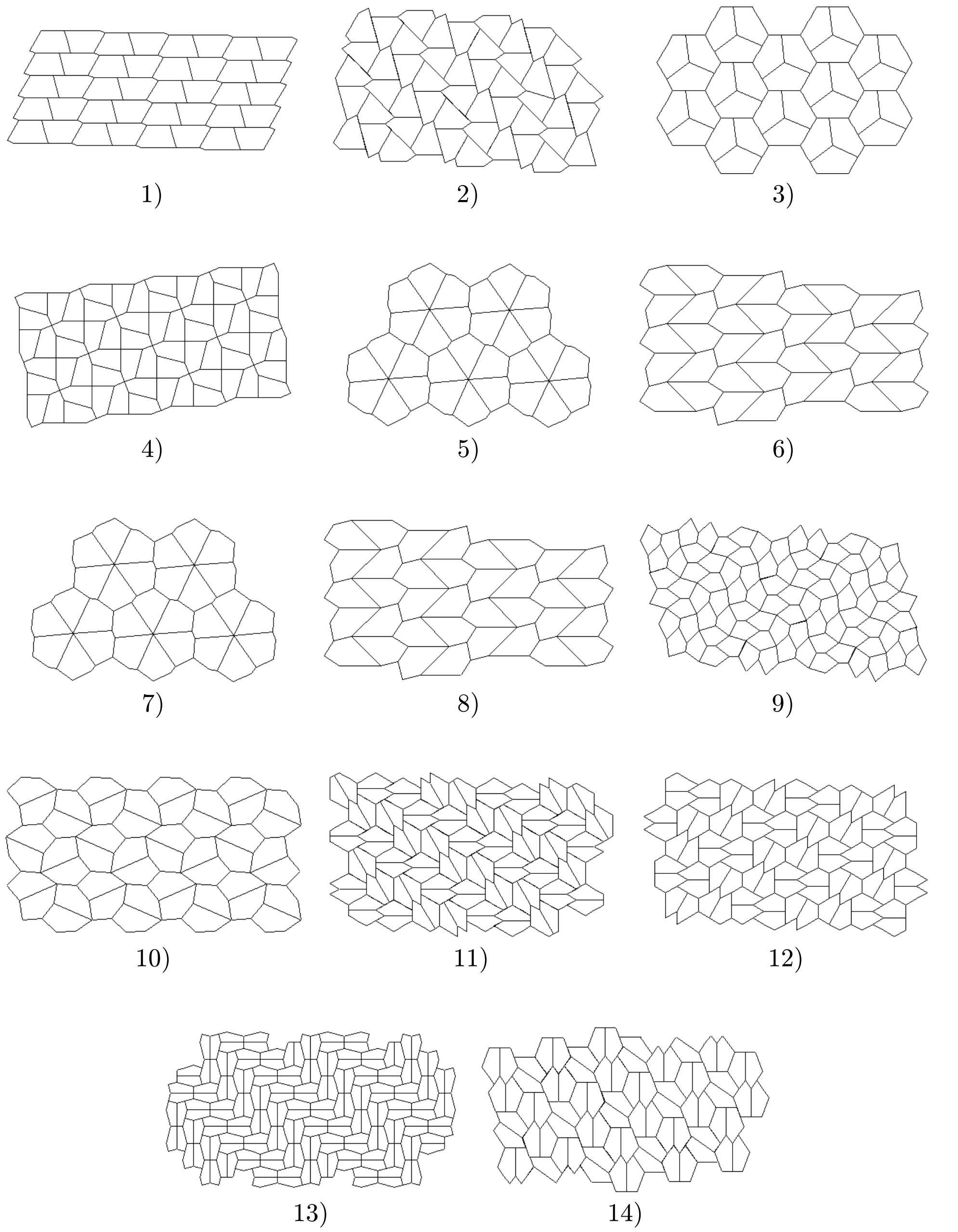
[109] Roger Penrrose, známy svojimi prácami v oblasti teórie relativity, kvantovej fyziky, lineárnej algebry a numerickej matematiky.

[110] Prvýkrát sa takáto aperiodická teselácia z dvoch objavila v článku Penrose, R. Role of aesthetics in pure and applied mathematical research. *Buletin Inst. Maths. Appl.* 10, 1974, str. 266 – 271.

[111] Robert Ammann (1946–1994), amatérsky matematik, ktorý významne prispel k teórii kvázikryštálov a aperiodických teselácií. Po neukončenom štúdiu na univerzite pracoval ako programátor alebo na poštovom úrade ako triedič pošty.

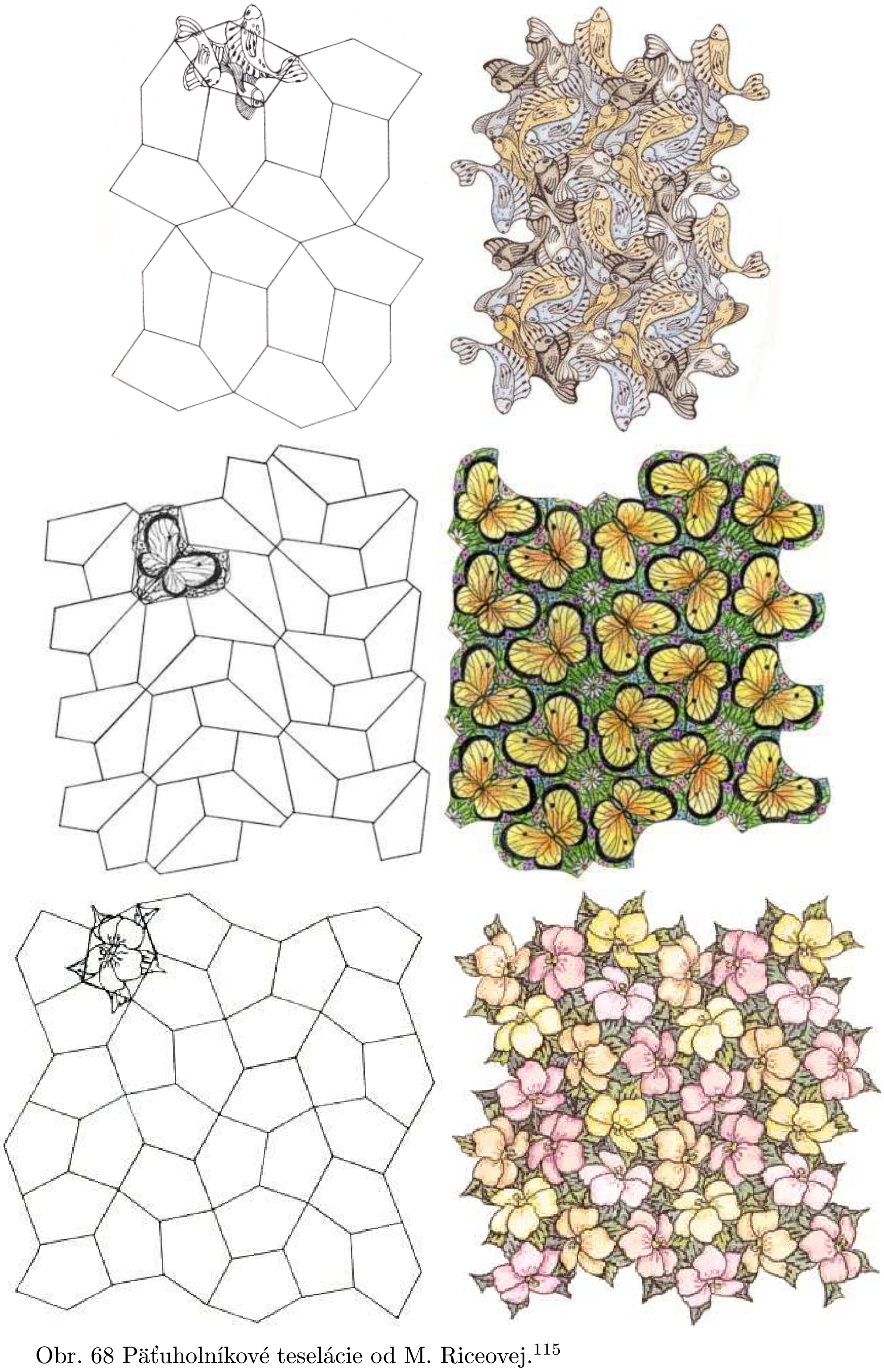
[112] Tento patent bol neskôr zdrojom sporu, keď firma Kleenex použila vzor bodiek rozložených vo vrcholoch tejto aperiodickej teselácie na svoj toaletný papier.

[113] Ammann, R., Grünbaum, B., Shephard, G. C. Aperiodic Tiles. *Discrete Comput. Geom.* 8, 1992, str. 1–27.



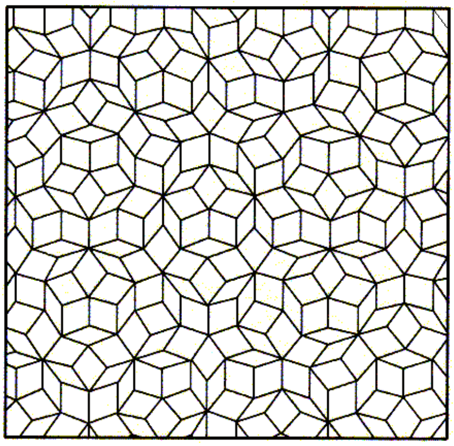
Obr. 67 Štrnásť typov päťuholníkov vytvárajúcich monoedrálne teselácie, ktoré sú v súčasnosti známe. Teselácie 1–5 odvodil K. Reinhardt (1918), R. B. Kershner teselácie 6 – 8 (1968), R. James teseláciu 10 (1975), M. Riceová teselácie 9, 11 – 13 (1976–1977), R. Stein teseláciu 14 (1985).[114]

[114] Obrázky sú prevzaté zo stránky `http://www.mathpuzzle.com/tilepent.html` [stránka aktuálna k dňu 17. 1. 2010].



Obr. 68 Päťuholníkové teselácie od M. Riceovej.[115]

[115] Obrázky sú prevzaté z internetovej stránky Marjorie Riceovej, na ktorej je niekoľko jej teselácií (`http://tessellations.home.comcast.net/tessellations/` [stránka aktuálna k dňu 17. 1. 2010]).



Obr. 69 Penroseova aperiodická teselácia.

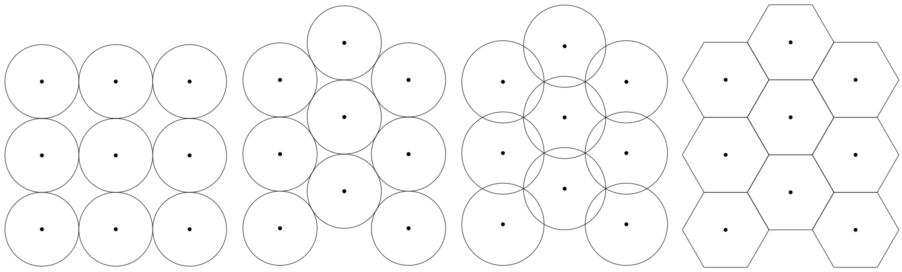
2.3 Aplikácia modelu teselácií

Ako už bolo spomenuté, model teselácií, najmä Voronojových, je často využívaný v prírodných, sociálnych i ekonomických vedách. Kdekoľvek sa vyskytuje diskrétna množina dát rozmiestnených tak, že vzdialenosť má nejaký význam, tak Voronojova teselácia môže byť užitočná. Delenie priestoru (jednorozmerného, dvojrozmerného či trojrozmerného) na oblasti (cely) je potom založené na vzdialenostiach bodov priestoru od určitých bodov – centier oblastí. Vnútro jednotlivých oblastí je potom vytvorené bodmi priestoru, ktoré majú k danému centru bližšie ako k ostatným centrám; body majúce rovnakú vzdialenosť od viac centier vytvárajú hranice oblastí.

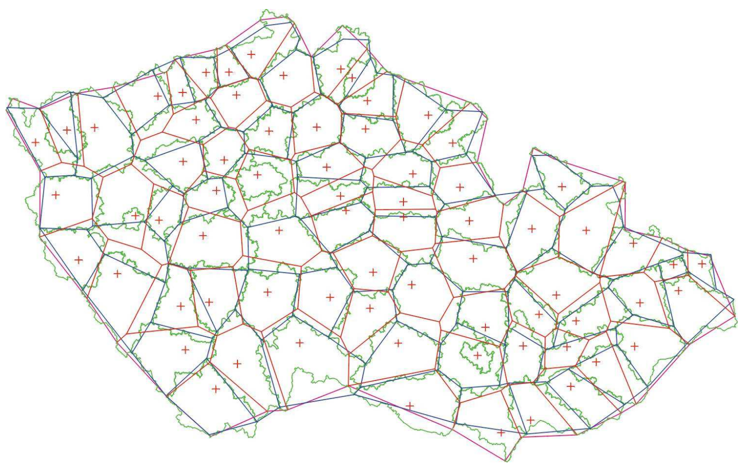
Ako model boli Voronojove teselácie použité aj v *teórii centrálnych miest* W. Christallera[116] z roku 1933. Táto teória sa snaží teoreticky vysvetliť problematiku rozmiestnenia a veľkosti sídel a obslužných zariadení v sídelnej štruktúre, pričom si Christaller kládol otázku, či existujú pravidlá a zákony, ktoré by ovplyvňovali počet, rozmiestnenie a veľkosti sídel. Podľa neho sa mesto stáva centrom danej oblasti, ak sa nachádza v jej geometrickom strede a plní funkciu obchodného centra. Jeho úlohou je tak exportovať miestne a importovať nedostatkové výrobky, a zaisťovať distribúciu tovarov a rozmiestnenie služieb tak, aby ich počet, vzdialenosť a počet zákazníkov vyhovoval (t. j. minimalizovať dopravné náklady). Preto centrá umiestnil

[116] Walter Christaller (1893–1969), nemecký sociálny geograf, autor knihy *Die zentralen Orte in Süddeutschland* (Jena: Gustav Fischer, 1933). Prvá časť knihy sa zaoberá teoretickými poznatkami, druhá obsahuje praktické metódy, pomocou ktorých môže byť teória testovaná v praxi, a posledná časť sa venuje aplikácii teórie práve v oblasti južného Nemecka. Christallerovu teóriu napriek jej nedostatkom (v porovnaní s pravidelným rozmiestnením centier v teórii je reálna skutočnosť často veľmi chaotická) používajú sídelní geografi doteraz.

pôvodne do kruhových oblastí, medzi ktorými ale vznikli „hluché“ miesta, a tak sa pre tvar oblastí zaviedli vhodnejšie pravidelné šesťuholníky vytvárajúce sieť – obr. 70.[117]



Obr. 70 a) Rozmiestnenie centier v stredoch kruhových oblastí, medzi jednotlivými oblasťami sú „hluché“ miesta, b) pri takomto rozmiestnení sa hluché miesta zmenšujú, c) pri prekrytí kruhových oblastí dochádza k odstráneniu hluchých miest, d) najvhodnejšie rozmiestnenie centier v strede pravidelných šesťuholníkoch vytvárajúcich sieť.

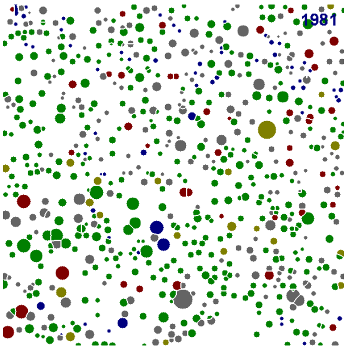


Obr. 71 Rozdelenie Českej republiky na okresy; zelené hranice – skutočné hranice okresov, modré hranice – konvexifikované hranice okresov, červené hranice – hranice okresov ako ciel Voronojovej teselácie s generátormi v okresných mestách.

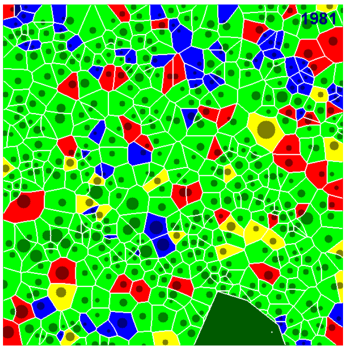
V teórii centrálnych miest sa brala do úvahy euklidovská vzdialenosť („vzdušnou cestou“), v reálnom prostredí je nevyhnutné prihliadať na vzdialenosť bodov od centra oblasti po „cestách“. Na obr. 71 je rozdelenie Českej republiky na okresy k dňu 1. 1. 2002, kde zelenou farbou sú vyznačené skutočné hranice okresov a červenou farbou hranice okresov ako ciel Voronojovej teselácie s generátormi v okresných mestách. Aplikácia Voronojovej

[117] Základy teórie položil už v prvej polovici 19. storočia nemecký ekonóm Johann Heinrich von Thünen (1783–1850). Christallerovu teóriu následne rozvinul nemecký ekonóm August Lösch (1906–1945), ktorý sa zameral na vzťahy pri rozmiestnení veľkých priemyselných podnikov.

teselácie ako modelu sa použila napríklad pri skúmaní vzájomnej interakcie mravcov viacerých druhov v Slovenskom Rudohorí v [Ponížil a kol., 2003] – obr. 72.[118]



a)



b)

Obr. 72 a) Vyznačené polohy mravenísk v skúmanej oblasti (veľkosti vyznačených centier závisia od veľkosti populácie), b) rozdelenie pomocou Voronojovej teselácie.

Ďalšou disciplínou, v ktorej sa využívajú teselácie ako model, je metalografia, ktorej cieľom je popis vlastností kovových materiálov a ich vnútornej štruktúry. Tú nie je možné študovať v celom objeme materiálu ako trojrozmernom objekte, ale na základe vhodného (náhodného alebo systematického) geometrického výberu, najčastejšie rovinného rezu. Priestorové vlastnosti sa potom odhadujú použitím štandardných stereologických metód (skúmané vlastnosti a základné stereologické vzťahy sú naznačené v podkapitolách 1.2 a 1.3). Všetky technické kovové materály sú polykryštály, teda sú zložené z oblastí nazývaných *zrná*, ktoré sú v látke usporiadané nepravidelne. (Zrná sú od seba oddelené navzájom tenkou vrstvou – hranicou zrna; hrúbka hranice je niekoľko atómových vzdialeností). Stabilita vlastností kovov a ich zlúčenín voči zmene tlaku, teploty, či deformačným procesom je dôležitým javom, ktorý je v centre pozornosti rôznych výskumov. Jedného výskumu sa zúčastňujem aj ja ako pracovníčka Matematického ústavu AV ČR, ktorý je realizovaný v spolupráci s Ústavom fyziky materiálov AV ČR v Brne. Vzorka skúmaného materiálu (hliník, meď alebo hliník-skandium) je vystavená technike ECAP (equal channel angular pressing) – mechanické pravouhlé pretlačovanie, pri ktorej je materiál pretlačovaný cez kanálik v tvare písmena L (vzorku je možné takto deformovať viackrát). Vzorka je potom vystavená zväzku dopadajúcich elektrónov,

[118] K rozdeleniu na oblasti – cely Voronojovej teselácie (ale s určitými prekrytiami ciel) – dochádza prirodzene aj v prírode, keď si zvieratá vytvárajú vlastné teritória, ktoré si následne obraňujú. V ľudskej spoločnosti okrem spomenutého územno-správneho členenia a optimalizácie rozmiestnenia centier obsluhy (obchody, poštové schránky, úrady, knižnice, školy) je vhodné spomenúť optimalizáciu trás (dopravné prostriedky, pojazdné predajne) s ohľadom na vyťaženosť a ľahkú dostupnosť pre spotrebiteľov.

ktoré sú po odraze od mriežkových rovín pod určitým uhlom zachytené na fluorescentné sklíčko, na ktorom vytvárajú vzor. Ten je zaznamenaný prostredníctvom skenovacieho elektrónového mikroskopu a je charakteristický pre kryštalickú štruktúru pri povrchu vzorky skúmaného materiálu. Výstupom sú mapy znázorňujúce učitú časť povrchu (napríklad obr. 73, obr. 74). Táto metóda získavania obrazových materiálov sa nazýva EBSD (electron backscatter diffraction) – difrakcia spätne odrazených elektrónov. Bližšie informácie o príprave materiálov je možné nájsť napríklad v [Král, 2006]; viac informácií o tomto výskume a jeho výsledkoch je možné nájsť napríklad v [Ilucová a kol., 2007a], [Ilucová a kol., 2007b], [Saxl a kol., 2007] alebo [Saxl a kol., 2009].

Ako už bolo v úvodnej kapitole spomenuté, teselácie využíva móda napríklad vo forme patchwork pre vzor na látky.[119] Existujú ale i ďalšie možnosti. Z viac ako 250 obrázkov predstavujúcich rezy polykryštalických materiálov (hliník a meď) som vybrala také, ktoré sa mi zdali zaujímavé z dôvodu farebnosti alebo tvaru zŕn či subzŕn – ciel (časť teselácií mala cely s plochami približne rovnako veľkými, plocha ciel niektorých vzoriek sa vyznačovala veľkou variabilitou). Študentom, ktorých som učila[120], som potom predložila „katalóg“ 50 vzoriek. Z nich si mali vybrať 5 takých, ktoré by boli vhodné ako vzor pre látku na dievčenské/dámske oblečenie, a 5 takých, ktoré by boli úplne nevhodné.[121] Nakoniec sa ankety zúčastnilo ešte niekoľko študentov z ďalšej strednej školy[122] a niekoľko mojich známych rôzneho veku (ankety sa spolu zúčastnilo 63 ľudí). Tri teselácie, ktoré respondenti zvolili ako najvhodnejšie vzory na látku sú na obr. 73, obrázky desiatich najvhodnejších s počtami hlasov v Príloha V. Z respondentov bolo 18 chlapcov/mužov a 12 „dospelákov“, t. j. ľudí nad 20 rokov. Tieto počty nepovažujem ale za štatisticky významné, preto neuvádzam výsledky špeciálne pre tieto skupiny respondentov. Je ale pravdou, že „dospeláci“ preferovali menej farebne výrazné vzory a tie, ktoré sa vyznačovali malou variabilitou plochy. Platí ale, že veľmi výrazným vzorom (t. j. farebne výrazným, farebne variabilným a s veľkou plošnou variabilitou ciel) sa vyhýbali takmer všetci zúčastnení. Na obr. 74 sú 3 obrázky, ktoré res-

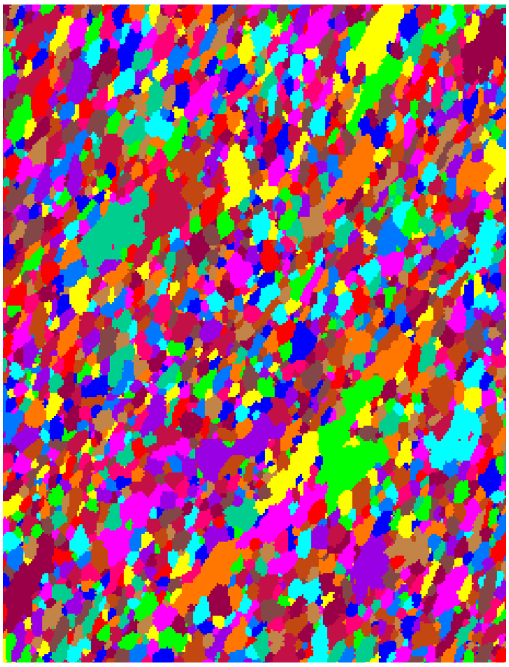
[119] Pojem *vzor* je tu použitý v hovorovom význame, nie tak ako som zaviedla v časti 1.1.3.

[120] Gymnázium Bernarda Bolzana, V Holešovičkách 2, Praha 8.

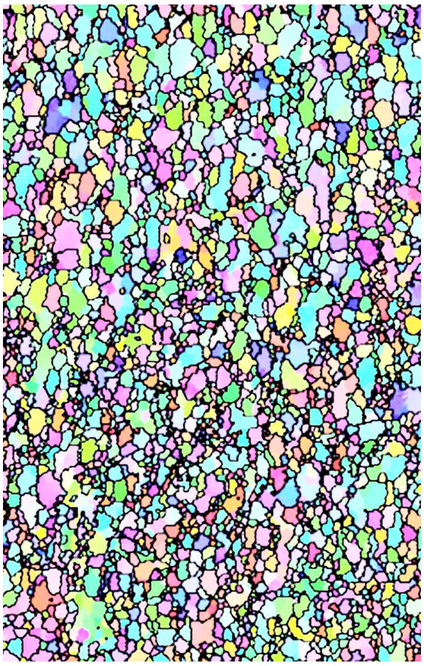
[121] Dievčatá si mali zvoliť tie, ktoré sa im páčia, chlapci tie, ktoré by radi videli napríklad na oblečení svojich spolužiačok. Motiváciou k ankete bol záujem Technickej univerzity v Liberci použiť niektoré z obrázkov rezov polykryštalických látok vyrobených EBSD metódou ako vzor pre skutočnú látku na šaty.

[122] Pedagogická a sociálna akadémia, Kmeťovo stromoradie 5, Prešov.

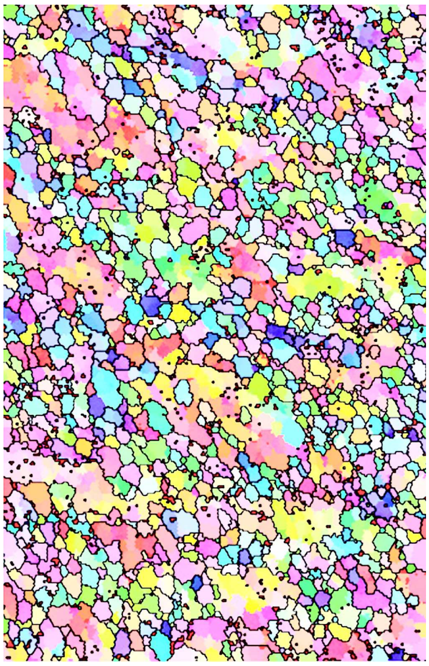
pondenti prehlásili za úplne nevhodné na vzor na látku (v Príloha VI je uvedených 5 podľa ankety „najnevhodnejších“ vzoriek).



a)

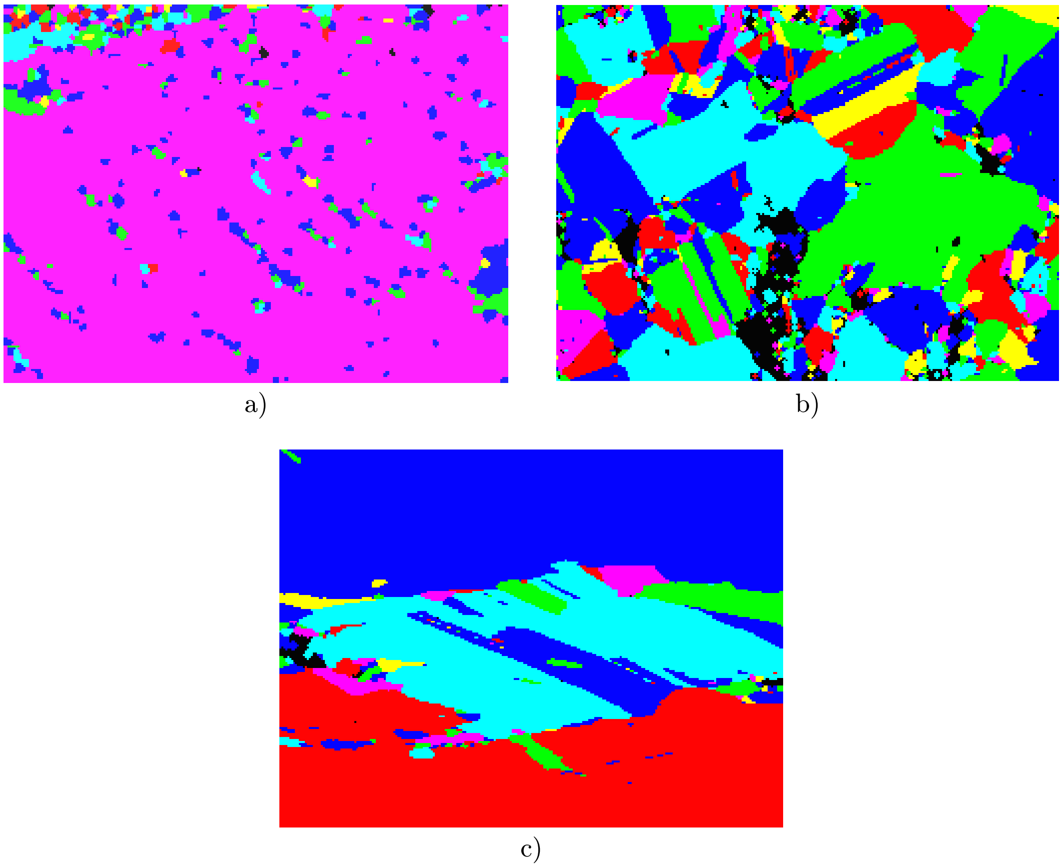


b)



c)

Obr. 73 Tri obrázky (rezy polykryštalických látok – Cu, Al), ktoré respondenti vyhodnotili v ankete ako najvhodnejšie vzory na látku pre dievčenské/dámske oblečenie.



Obr. 74 Tri obrázky (rezy polykryštalických látok – Cu, AlSc), ktoré respondenti vyhodnotili v ankete ako najnevhodnejšie vzory na látku pre dievčenské/dámske oblečenie.

Kapitola 3

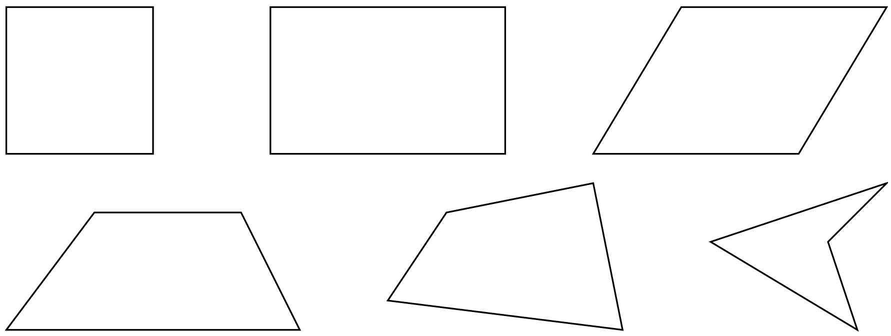
Rovinné teselácie v didaktike matematiky

Po prehľade základných matematických poznatkov týkajúcich sa teselácií a príkladoch ich využitia v umení či v rôznych vedných oblastiach uvedených v kapitolách 1 a 2 je dôležité pozrieť sa na teselácie z pohľadu didaktiky matematiky. Vytváranie teselácií (v rámci školských aktivít, ale i voľného času) je výrazne ovplyvnené rôznymi faktormi, medzi ktorými sa predstavivosť a tvorivosť daného jedinca javia ako najdôležitejšie. Na vplyv týchto faktorov by som sa chcela zamerať v podkapitolách 3.1 a 3.2, podkapitola 3.3 sa venuje postaveniu teselácií vo vyučovaní matematiky, ako uvádzajú niektoré výskumy a literatúra.

Chcela by som upozorniť, že pri vytváraní teselácií je veľmi zložité od seba oddeliť predstavivosť a tvorivosť, pretože sú navzájom úzko prepojené. V literatúre sa tiež často chápe predstavivosť vo vzťahu k teseláciám ako tvorivosť pri konštrukcii ciel escherovských teselácií (napríklad [Ranucci, Teeters, 1977]) alebo ornamentov na nich. Preto sa pokúsim vymedziť obsah pojmov predstavivosť a tvorivosť tak, ako im rozumiem v súvislosti s teseláciami, pričom sa tieto faktory v mnohých charakteristikách navzájom prelínajú, a porovnám ich s už zavedeným chápaním z niektorých výskumov a prác.

3.1 Rovinné teselácie a rovinná predstavivosť

Pod pojmom geometrická predstavivosť sa často intuitívne rozumie „videnie“, resp. „nevidenie“, najmä pri riešení konštrukčných úloh v rovine alebo v priestore a úloh zo stereometrie vo všeobecnosti, prípadne v oblasti umenia. V skutočnosti vystupuje geometrická predstavivosť dennodenne v živote každého človeka; výnimkou nie je ani vytváranie teselácií. Vplyv predstavivosti na túto činnosť a jej obsah, resp. zložky, sa pokúsim vysvetliť na úlohách, ktoré boli žiakom a študentom zadané v jednotlivých experimentoch (kapitoly 4 a 5).



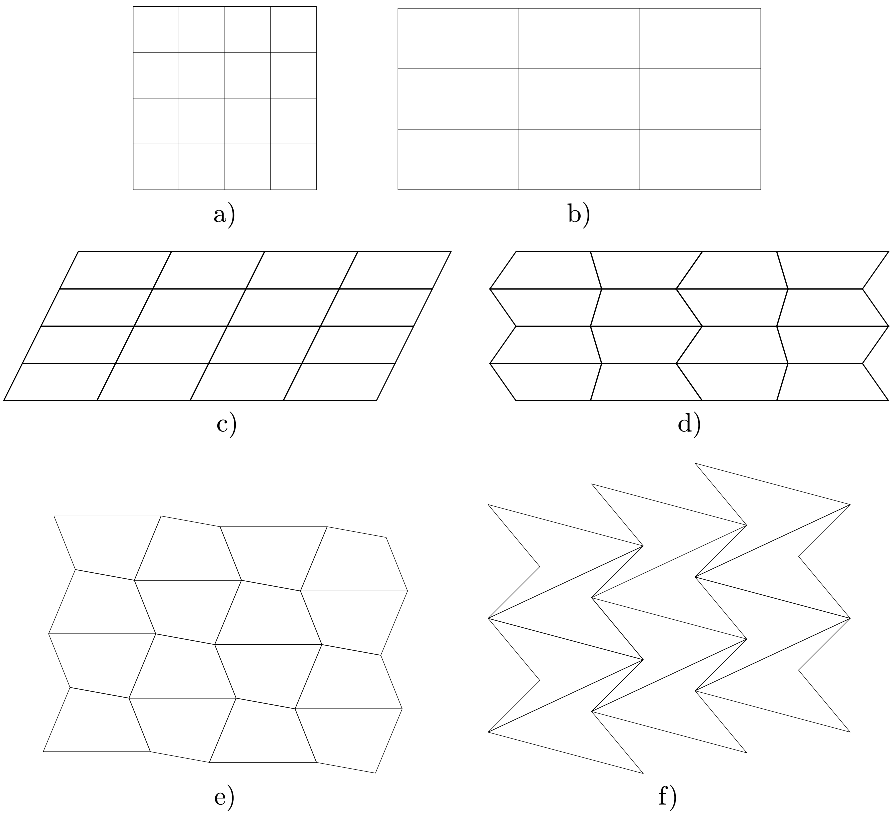
Obr. 75 Šesť rôznych typov štvoruholníka použitých v jednom z experimentov (časť 4.1.1).

V experimente týkajúcom sa štvoruholníkových teselácií (bližšie viď časť 4.1.1) sa predkladajú otázky, či je možné každý zo šiestich rôznych typov štvoruholníka (obr. 75) využiť pri vytvorení monoedrálnej teselácie (t. j. pri kachličkovaní steny alebo pri parketovaní podlahy). Úlohou je teda vytvoriť teselácie, keď sú zadané cely (kompozičný prístup – prechod od cely k teselácii). Štvorcovú alebo obdĺžnikovú teseláciu (a nielen typ strana k strane) si „predstaví“ každý človek na základe svojich skúseností, kosodĺžnik ako celu teselácie je schopný použiť ako analógiu s obdĺžnikovým prípadom. Pri vytváraní lichobežníkovej teselácie je možné poskladať „pásy“[123], ktoré sa k sebe „rovnobežne“ priložia. S teseláciami z ďalších dvoch štvoruholníkových ciel všeobecného tvaru je to ale zložitejšie; človek musí uvažovať o niečom, s čím sa ešte nestretol. Tieto teselácie (obr. 76e, f) môže vytvoriť stratégiou „pokus–omyl“ (t. j. náhodným prikladaním útvarov a zisťovaním, či útvary k sebe „pasujú“), alebo skúma vlastnosti jedného útvaru a viacerých (vytvárajúcich už časť teselácie), a hľadá (a nájde) vzťahy medzi stranami a uhlami, resp. opakujúci sa vzor. Na základe úplne alebo čiastočne objavených pravidiel[124] (viď nižšie) potom vytvorí príslušné teselácie. Pri vytváraní každej teselácie tak človek využíva určité schopnosti, ktoré je možné zhrnúť do pojmu *predstavivosť*; preto sa opieram o definíciu predstavivosti uvedenú v publikácii [Půlpán a kol., 1996, str. 22]:

[123] Pod pojmom *pás* rozumiem skupinu zhodných útvarov, ktoré sú k sebe prikladané príslušnými stranami (t. j. stranami s rovnakou dĺžkou) v smere osi x (horizontálny pás) alebo v smere osi y (vertikálny pás) tak, aby medzi nimi neboli medzery a nevznikli ani prekrytia.

[124] Použitie pravidiel pri vytváraní teselácií môže byť intuitívne alebo uvedomelé, a úplné alebo čiastočné.

Představivost chápeme jako základní psychickou funkci, jež zajišťuje možnost aktuálního psychického zpřítomnění jevů, jež nejsou de facto přítomny, a to jak ve smyslu rekonstruujícím, t. j. ve smyslu nového vyvolání již známých podnětů z minulosti, tak ve smyslu konstruktivním, invenčním, t. j. z hlediska tvorby originálních, pouze na představách založených a de facto dosud neexistujících produktů.



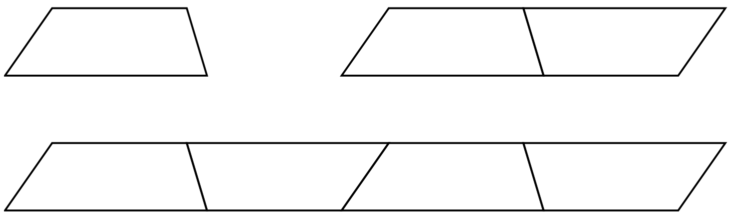
Obr. 76 Príklady monoedrálnych štvoruholníkových teselácií s celami z obr. 75. (Všetky uvedené teselácie sú typu strana k strane; v prípadoch e) a f) iná možnosť usporiadania ciel ako strana k strane nie je.)

Rozlišujem tak predstavivosť *rekonštruktívnu*, ktorá je založená na skúsenostiach (výsledkom sú napríklad teselácie na obr. 76a, b, c), a *konštruktívnu*, ktorú je možné chápať ako súhrn predstáv a schopností človeka uvažovať o niečom, čo reálne ešte neexistuje, resp. existuje, len o tom ešte nepočul, nevidel to alebo nezažil, alebo o niečom, čo reálne bolo alebo je, ale jedinec má o tom nedostatočné informácie.[125] Výsledkom konštruktívnej

[125] Obsahom rekonštruktívnej predstavivosti sú *pamätné predstavy* (odrážajú predmet tak, ako bol vnímaný), obsahom konštruktívnej *myslené predstavy* (javia sa ako nové obrazy po myšlienkovom spracovaní uloženého materiálu a vytvárajú sa na základe pamätných predstáv) [Jirotková, 1990].

predstavivosti sú, minimálne pre daného jedinca, nové produkty (napríklad teselácie na obr. 76d, e, f). Keďže práca pri vytváraní rovinných teselácií prebieha v rovine, príslušnú predstavivosť nazvem *rovinnou.*

Medzi stranami a uhlami ciel vytvárajúcich štvoruholníkové monoedrálne teselácie a medzi celami navzájom (pre jednoduchosť beriem do úvahy teselácie typu strana k strane) sú určité vzťahy, ktoré nazvem *pravidlo príslušných strán*, *pravidlo príslušných uhlov*, *pravidlo symetrie* (alebo tiež *vzoru*) a *pravidlo pokrývania roviny štvoruholníkmi.*[126] Pod *pravidlom príslušných strán* rozumiem to, že v štvoruholníkovej teselácii prikladám k sebe jednotlivé cely stranami s rovnakou, teda príslušnou dĺžkou, *pravidlo príslušných uhlov* hovorí o tom, že súčet veľkostí vnútorných uhlov ciel pri každom vrchole musí byť 360°. *Pravidlo symetrie* je založené na pozorovaní pravidelného opakovania dvoch a viacerých už spojených ciel v teselácii, a vyjadruje skutočnosť, že existuje minimálny počet útvarov vytvárajúcich časť teselácie, na základe ktorej je možné odhaliť opakovanie v celej teselácii. Príkladom môže byť lichobežníková cela, ku ktorej sa ďalšia cela pripojí pomocou stredovej súmernosti (podľa stredu jednej zo strán), výsledkom je kosodĺžnik. Ten je možné ďalej opakovať pomocou posunutia, pričom vzniká pás (obr. 77). Zrkadlením podľa jedného okraja pásu vzniká výsledná teselácia. Pod *pravidlom pokrývania roviny štvoruholníkmi* potom rozumiem to, že ľubovoľný štvoruholník je možné v rovine opakovať bez medzier a prekrytí, t. j. pomocou neho vytvoriť teseláciu. Pri escherovských teseláciách vyjadrujú vzťahy medzi celami navzájom a ich časťami *pravidlo opakovania jedného útvaru*, *pravidlo zachovania obsahu útvaru* a *pravidlo symetrie*, pri Voronojových *pravidlo stredu*, *pravidlo kolmosti* a *pravidlo určenia časti osi úsečky ako časti hranice cely.* (Bližšie vysvetlenie jednotlivých pravidiel je v kapitole 4.)



Obr. 77 Vytvorenie lichobežníkovej teselácie.

Ako som už spomenula, pri vytváraní štvoruholníkových teselácií (a n-uholníkových vo všeobecnosti) sa využíva rekonštruktívna i konštruktívna predstavivosť podľa zložitosti tvaru ciel a skúseností dieťaťa. Pri es-

[126] Keďže pri práci detí nebola dôležitá presná formulácia vzťahov medzi útvarmi, ale ich objavenie a aplikácia, nazývam tieto matematické vzťahy pravidlá. Ich názvy som si zvolila sama.

cherovských je to najmä konštruktívna predstavivosť, pretože dieťa s touto činnosťou nemá skúsenosti. V prípade, že napodobňuje (alebo úplne kopíruje) teselácie predložené ako ukážky, prebieha etapa učenia sa a predstavivosť je rekonštruktívna. Ak pri konštrukcii Voronojových teselácií dieťa nepozná algoritmus konštrukcie, je to konštruktívna predstavivosť, ak ho však pozná a vie ho použiť, tak rekonštruktívna.

Pri odhaľovaní a aplikovaní spomenutých pravidiel sa prejavujú nasledujúce predstavy a schopnosti, ktoré považujem za zložky rovinnej predstavivosti v spojení s rovinnými teseláciami:

mnohouholníkové, resp. štvoruholníkové teselácie

- predstavy o vlastnostiach cely ako útvaru (tvar, veľkosti vnútorných uhlov, dĺžky strán),
- predstavy o možných vzájomných polohách susedných ciel,
- predstavy o symetriách v cele (t. j. aký je opakujúci sa základ – časť cely – pri grupách symetrií) a v teselácii,
- predstavy o možnostiach rôznych zobrazení pri manipulácii s útvarmi a vytváraní teselácií,
- schopnosť použiť rôzne zobrazenia pri lokálnom usporiadaní útvarov,
- schopnosť pokračovať v správnom usporiadaní „donekonečna" (schopnosť pokračovať v myšlienke, zachovať poriadok v usporiadaní útvarov),

escherovské teselácie

- predstava o možnej deformácii jednotlivých strán a schopnosť túto deformáciu zostrojiť,
- predstavy o možnostiach rôznych zobrazení,
- predstava o zachovaní obsahu pôvodného útvaru,
- predstava o zachovaní tvaru a veľkosti všetkých ciel v monoedrálnej teselácií,
- predstavy o požadovanej pravidelnosti symetrie v opakovaných motívoch na celách,
- schopnosť použiť rôzne zobrazenia,
- schopnosť pokračovať v správnom usporiadaní „donekonečna" (schopnosť pokračovať v myšlienke, zachovať poriadok v usporiadaní útvarov),

Voronojove teselácie

- predstava o polohách „susedných" generátorov,
- predstava o roli osi súmernosti jednotlivých dvojíc generátorov na charakter hraníc ciel teselácie,
- schopnosť zostrojiť os súmernosti úsečky ako množiny bodov s určitou vlastnosťou,

– schopnosť zostrojiť hranice ciel ako časti osí súmerností určitých dvojíc generátorov.

V literatúre sa väčšinou pojmy geometrická a priestorová predstavivosť[127] nevysvetľujú, resp. ich obsah je intuitívne chápaný a rôzne interpretovaný. Niektorí autori ich odlišujú, pričom niekedy sa priestorová chápe ako podmnožina geometrickej (napríklad [Kuřina, 1987]), inokedy naopak (napríklad [Šarounová, 1982], [Jirotková, 1990]).

A. Šarounová [Šarounová, 1982] vymedzuje priestorovú predstavivosť ako

> *... soubor dílčích schopností, týkajících se našich představ o prostoru, o tvarech a vzájemných vztazích mezi předměty a námi, a konečně o prostorových vztazích našeho těla navzájem. Tyto dílčí schopnosti se uplatňují v našem běžném životě i v jednotlivých předmětech školní výuky.*

Následne autorka vymedzuje zložky geometrickej predstavivosti, ktorými sa ďalej zaoberá: A – schopnosť rozoznávať rovinné útvary, B – predstavy o niektorých vzťahoch medzi útvarmi v rovine, C – schopnosť rozoznávať základné telesá v priestore, D – predstavy o vzájomnej polohe telies a rovín v priestore.

Podľa D. Jirotkovej [Jirotková, 1990, str. 280] sa

> *... prostorovou představivostí rozumí intelektová schopnost – dovednost vybavovat si – představit si*
>
> *a) dříve viděné – vnímané objekty v trojrozměrném prostoru a vybavit si jejich vlastnosti, polohu a prostorové vztahy,*
>
> *b) dříve nebo v daném momentě viděné – vnímané objekty v jiné vzájemné poloze než v jaké byly nebo jsou skutečně vnímány,*
>
> *c) objekt v prostoru na základě jeho rovinného obrazu,*
>
> *d) neexistující reálný objekt v trojrozměrném prostoru na základě jeho slovního popisu.*

a ďalej

> *... geometrickou představivostí rozumí schopnost – dovednost:*
>
> *A) poznávat geometrické útvary a jejich vlastnosti,*

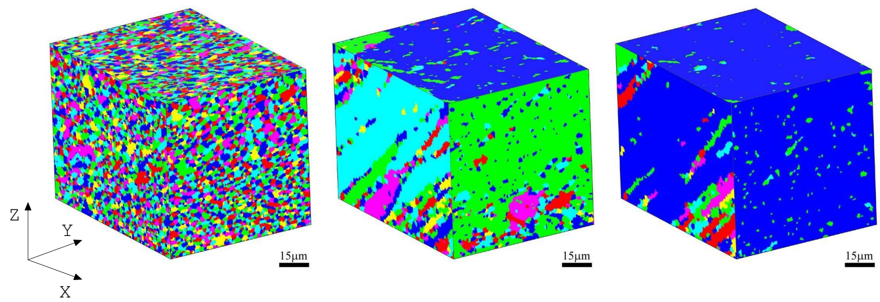
[127] Okrem spomenutých prác v texte sa priestorovou predstavivosťou a jej rozvíjaním zaoberajú dizertačné práce ako napríklad [Leischner, 2003] a [Dvořák, 2006]; cenným zdrojom základných informácií o priestorovej predstavivosti je publikácia [Molnár, 2004].

B) abstrahovat z reálné skutečnosti – konkrétních objektů jejich geometrické vlastnosti a vidět v nich geometrické útvary v jejich čisté podobě,

C) na základě rovinných obrazů si představit geometrické útvary v nejrůznějších vzájemných vztazích a to i v takových, v nichž nemohou být předvedeny pomocí hmotných modelů geometrických útvarů (např. průnik dvou těles),

D) mít zásobu představ geometrických útvarů a schopnost vybavovat si jejich nejrůznejší podoby (např. pod pojmem čtyřúhelník si představit i čtyřúhelník nekonvexní apod.),

E) představit si geometrické útvary a vztahy mezi nimi i na základě jejich popisu.



Obr. 78 Kocky vytvorené spojením troch rezov polykryštalického materiálu – hliníka – v troch rôznych na seba kolmých rovinách.

Body B), C) a E) z predchádzajúcej definície geometrickej predstavivosti sú zaujímavé z pohľadu telesácií. Podľa bodu B) medzi schopnosti geometrickej predstavivosti patrí pochopiť určité reálne systémy prvkov ako teselácie, a to napríklad tak, že sa zanedbá tretí rozmer a medzery medzi jednotlivými prvkami (viď Úvod, napríklad obr. 7). Bod E) vysvetľuje nájdenie vzťahov medzi útvarmi navzájom a ich časťami (sformulované do už spomentých pravidel). Nakoniec bod C) zdôrazňuje dôležitý jav, ktorý predstavuje v stereometrii, ale i v stereológii veľký problém.[128] Na obr. 78 sú tri kocky, ktorých steny predstavujú dvojrozmerné rezy trojrozmerného telesa z hliníka v troch na seba kolmých rovinách XY, XZ a YZ. Z bočnej steny (rovina XZ) na prvej kocke je možné usudzovať, že v celom objeme materiálu sú zrná s približne rovnakým tvarom a objemom; tento predpoklad dokazujú aj ďalšie dva rezy. Z bočnej steny druhej kocky sa zdá, že

[128] Z vlastných skúseností učiteľky môžem povedať, že napríklad konštrukcia rezov a projekcií rôznych telies na papier v stereometrii bola pre niektorých študentov prekážkou, napriek tomu, že požadovaný rez vo svojich trojrozmerných predstavách vytvorili.

okrem jedného veľkého zrna (tyrkysová farba) rez zachytil aj zrná menšie, ktorých objem na prvý pohľad nie je zanedbateľný. Pri pohľade na prednú a hornú stenu je však jasné, že tieto zrná sú pretiahnuté najmä v rovine bočnej steny XZ. Podobne to platí pre tretiu kocku s rozdielom, že pretiahnutie je výrazné len v rovine bočnej steny XZ. Zo skúseností je možné povedať, že deti (resp. vyšším vzdelaním nezaťažení jedinci) nemajú problém predstaviť si možnú veľkosť a tvar zŕn trojrozmernej teselácie na základe takýchto rezov, ale napríklad inžinieri, fyzici, zaoberajúci sa štruktúrou materiálov áno.

Pojmu rovinná predstavivosť sa v literatúre nevenuje pozornosť ako špeciálnemu samostatnému pojmu, javu, keďže „videnie", resp. „nevidenie" v priestore (priestorová predstavivosť), sa javí v školskej matematike ako výraznejší problém. Okrem toho sa predstavivosť v rovine automaticky chápe ako súčasť priestorovej predstavivosti. Napriek tomu sa ale daný pojem vyskytuje napríklad v publikácii M. Kupčákovej [Kupčáková, 2001], ktorá v časti, kde pracuje s teseláciami – mozaikami, hovorí (str. 74):

> *Hračky – mozaiky z různých materiálů – jsou prvým impulsem rozvíjení rovinné představivosti, která se musí pěstovat stejně trpělivě, jako prostorová.*

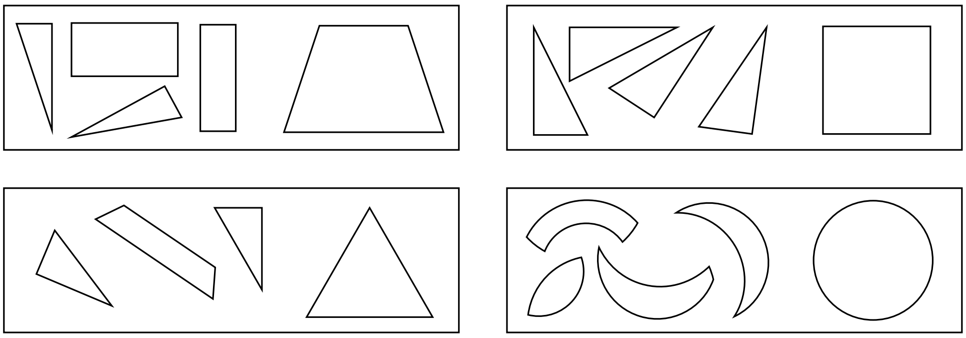
Pojmom „rovinná predstavivosť" sa však ďalej v práci už autorka nezaoberá. Pojem „plošná predstavivosť" sa uvádza i v už spomínanej práci [Šarounová, 1982], ktorá sa zaoberá geometrickou predstavivosťou detí predškolského a mladšieho školského veku. Podľa autorky s plošnou predstavivosťou súvisí celkové rozvrhnutie grafických prejavov detí na liste papiera, vnímanie tvarov, plochy a vzájomné polohy niekoľkých rovinných útvarov súčasne.[129] K ďalším aktivitám vyžadujúcim rovinnú predstavivosť by som pripojila vytváranie grafov a schém a čítanie informácií z nich.

Napriek absencii literatúry o predstavivosti v rovine v psychologickej diagnostike existuje niekoľko štandardizovaných a neštandarizovaných testov, ktoré môžu zisťovať úroveň predstavivosti v rovine, napríklad test

129 Autorka uvádza, že okrem takýchto typicky „geometrických" záležitostí, sa plošná predstavivosť týka aj problémov v škole pri nácviku písomného sčítania, odčítania, násobenia a delenia (t. j. činnosti, pri ktorých má dieťa nielen určiť akú cifru napíše, ale tiež kam ju napíše, [Šarounová, 1982, str. 46]). Vo všetkých najbežnejších školských činnostiach na základnej škole (čítanie, písanie a písomné počítanie) musí žiak vedieť rozlišovať tvary a vnímať usporiadanie tvarov navzájom.

štvorcov[130] alebo test PFB, ktorý je pre moju prácu zaujímavý.[131]

Test PFB[132] je už dlhodobo používaný neverbálny inteligenčný test zameraný na zisťovanie úrovne rovinnej (plošnej) predstavivosti. V teste sa vyžaduje zakresliť do rovinného obrazca ako celku (štvorce, kruhy, trojuholníky, lichobežníky ap.), ako je potrebné takýto útvar deliť, aby sa dal rozčleniť na jednotlivé časti zakreslené vedľa vľavo – napríklad obr. 79. Test obsahuje 56 položiek a pracuje sa na ňom 15 minút. Východiskom hodnotenia je počet správne vyriešených úloh; test je normalizovaný pre vekovú skupinu detí a mládeže v rozpätí 11,6 – 19 rokov. Významné korelácie boli dosiahnuté medzi výsledkami testu a školskými známkami v predmetoch matematika, fyzika, chémia a deskriptívna geometria.



Obr. 79 Ukážky z testu PFB.

Princíp riešenia úloh v PFB teste je podobný ako pri teseláciách. Jednotlivé úlohy z testu môžu byť riešené kompozične, ale i dekompozične. V prvom prípade sa rieši problém, ako poskladať diely tak, aby výsledkom

130 V *teste štvorcov* je súbor určitých rovinných obrazcov skonštruovaných tak, že spojením dvoch rôznych bodov na ich obvode úsečkou, prestrihnutím útvaru po úsečke a pripojením týchto dvoch nových vytvorených častí k sebe môže vzniknúť štvorec. Takéto zostavenie štvorca sa ale prevádza len v predstavách respondenta. Výsledok testu pritom nezávisí výlučne na priestorovej predstavivosti, ale je ovplyvnený i úrovňou všeobecnej inteligencie a kognitívnej flexibility. Preto dobré výsledky môžu dosiahnuť aj veľmi inteligentné osoby s priemernou priestorovou predstavivosťou, alebo slabšie výsledky dosahujú osoby, ktoré sa horšie prispôsobujú [Molnár, 2004]. Ukážky z testu som nemala k dispozícii, ale predpokladám, že príkladom takéhoto obrazca môže byť rovnoramenný lichobežník so základňami $3a$, a a výškou $2a$. Ten je možné rozdeliť úsečkou, ktorej jeden koncový bod je totožný s vrcholom na kratšej základni a druhý je priesečníkom dlhšej základne a kolmice na ňu spustenej z prvého bodu.

131 Napriek tomu, že tieto dva spomenuté testy obsahujú úlohy, v ktorých vystupuje práca s rovinnými útvarmi, uvádzajú sa niekedy ako testy na diagnostiku úrovne priestorovej predstavivosti.

132 Autorom testu je slovenský psychológ Ján Vonkomer. Význam skratky PFB sa mi nepodarilo zistiť ani v literatúre, ani v spoločnosti Psychodiagnostika a. s., ktorá sa zaoberá vytváraním a predajom psychologických testov, vrátane PFB testu. Jeden internetový zdroj síce podával vysvetlenie, že je to skratka anglického spojenia *planar feedback*, ale zdroj nebol dostatočne dôveryhodný.

bol celok, v druhom prípade ako rozdeliť celok na jednotlivé predložené časti.

3.2 Rovinné teselácie a tvorivosť

Pri vytváraní teselácií sa intuitívne považujú za najdôležitejšie kritériá pre hodnotenie úrovne tvorivosti *novosť* a *zaujímavosť* (alebo tiež jedným slovom *originalita*) najmä v súvislosti s tvarom ciel teselácie a motívom na nich, prípadne farebnosťou ciel. V centre záujmu je teda „vzhľad“ cely, resp. teselácie, a ornamentu na celách. Tento pohľad je ale obmedzený, pretože prejavy tvorivosti sú nielen viditeľné vo výsledkoch ako sú obrázky – teselácie, ale vyskytujú sa aj pri samotnom procese ich vytvárania. K bližšiemu vysvetleniu tejto problematiky použijem všeobecné prístupy k tvorivosti ako psychologickému javu.

Pod *tvorivosťou* sa rozumie duševná schopnosť vychádzajúca z poznávacích i motivačných procesov, v ktorej hraje dôležitú rolu tiež inšpirácia, fantázia a intuícia. Prejavuje sa nachádzaním takých riešení, ktoré sú nielen správne, ale súčasne nové, nezvyčajné, nečakané [Průcha a kol., 2003, str. 253]. Tvorivosť je tak považovaná za mnohostranný jav, ku ktorému je nutné pristupovať rôzne. Preto je možné vnímať napríklad štyri nasledujúce prístupy k tvorivosti podľa toho, čo je v centre pochopenia problému (pre porovnanie viď [Mooney, 1963]):

– *tvorivé prostredie*,
– *tvorivý proces*,
– *tvorivý produkt*,
– *tvorivá osoba*.

Tvorivým prostredím (alebo tiež tvorivou klímou, situáciou alebo miestom) sa rozumie prostredie, v ktorom prebieha tvorenie, a súčasne zahŕňa komplex situácií, v ktorých sú procesy tvorivosti stimulované a aj v nich prebiehajú. Pod tvorivým prostredím je možné chápať napríklad prostredie školy, triedy, resp. domáce prostredie, a celkovo podmienky, v ktorých dieťa dostáva úlohy a rieši ich. Ja si ale širší pojem prostredie zúžim na pojem riešiteľské prostredie[133], a tak pod pojmom *tvorivé riešiteľské prostredie* vo svojom výskume rozumiem problematiku rovinných teselácií, resp. jednotlivé problémy z tejto problematiky, ktoré sú jedincovi buď predložené k riešeniu, alebo si ich sám nájde a snaží sa vyriešiť.

[133] Riešiteľským prostredím môže byť napríklad Cabri geometria alebo kalkulačka, pomocou ktorých sa dieťa učí určité schopnosti a poznatky (v Cabri geometrii to môže byť pochopenie vzťahov medzi prvkami v trojuholníku). Nevýhodou je, že dané prostredie môže nejakú činnosť potlačiť, obmedzovať (pri použití Cabri geometrie sa nerozvíja konštrukcia útvarov pomocou rysovacích potrieb).

Tvorivým procesom rozumiem cestu (alebo tiež spôsob) vytvárania tvorivého produktu (viď nižšie), ktorú jedinec dostane alebo si ju musí sám nájsť. V prípade escherovských teselácií sú to escherovské postupy, ktorými je možné skonštruovať celu, alebo aj modifikácie týchto postupov, ktoré sú potom ale súčasne v pozícii tvorivého procesu i produktu. Pri vytváraní štvoruholníkových teselácií to bude najprv vytvorenie teselácie na základe rekonštruktívnej predstavivosti, pri použití ďalších štvoruholníkov všeobecnejšieho tvaru si musí dieťa samé postup vytvárania nájsť (napríklad objavením pravidiel a ich aplikáciou). Výsledkom vytvárania teselácie ako tvorivého procesu ale nemusí byť vždy teselácia vyznačujúca sa tvorivými prvkami (napríklad vytvorenie štvorcovej teselácie malým dieťaťom).

Tvorivým produktom bude výsledok procesu tvorivosti, a to v dvoch smeroch: proces vytvárania teselácie a obrázok – teselácia[134]. V prvom prípade – proces vytvárania ako tvorivý produkt – je pohľad na tvorivosť komplikovanejší. Ak riešiteľ nedostane postup (návod), ako má zadanú úlohu riešiť, alebo mu predložený postup nevyhovuje, a sám si ho vymyslí, tak tento postup je tiež tvorivým produktom, prípadne postup vytvárania môže byť modifikáciou toho predloženého. Takže pod tvorivým produktom potom chápem proces – vytváranie/konštrukciu – teselácie v nasledujúcich podobách:

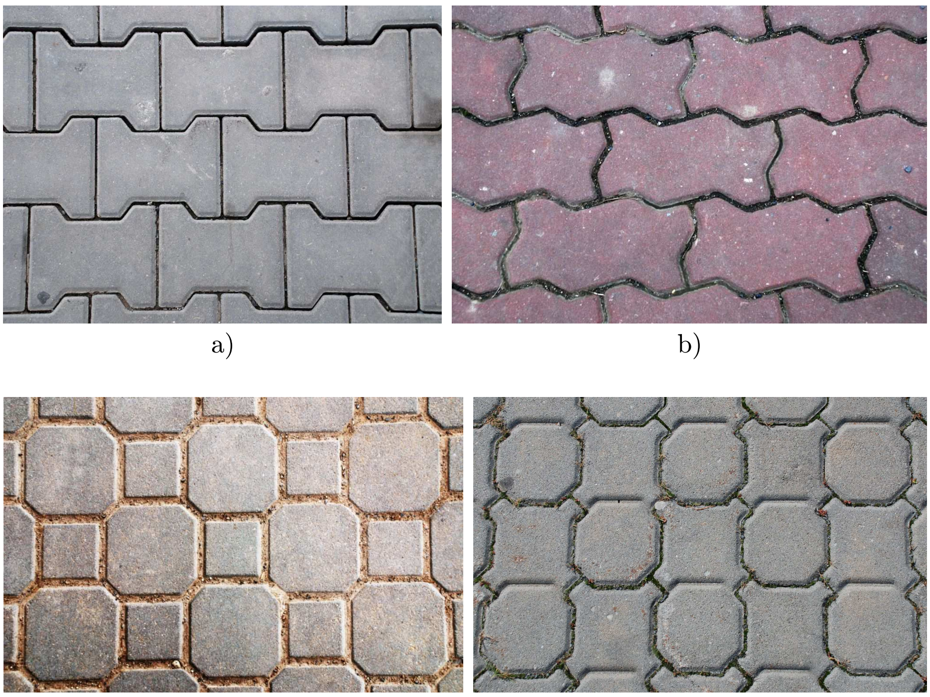
– vytvorenie teselácie (mnohouholníkovej alebo escherovskej) z predložených ciel ak je to v prípade predstavivosti konštruktívnej (nezaloženej na skúsenostiach) a nie je nariadený postup práce,
– rozdelenie časti roviny na rovinné útvary, ktoré vytvárajú rovinnú teseláciu, v prípade, že nie sú zadané požiadavky na tvar, postup (napríklad rozstrihnutie pohľadnice za účelom vytvorenia skladačky),
– zostrojenie hraníc ciel Voronojovej teselácie zo zadaného bodového systému v prípade, že tento problém je pre riešiteľa nový, neznámy (t. j. že riešiteľ nepozná, resp. neovláda postup riešenia),
– konštrukcia cely originálneho tvaru (napríklad cela escherovskej teselácie alebo cela v tvare päťuholníka, resp. n-uholníka) a vytvorenie príslušnej teselácie (bližšie viď časti 5.1.2 a 5.2.2).

V druhom prípade – teselácia ako tvorivý produkt – je evidentne v centre pozornosti „vzhľad“ teselácie (escherovskej alebo mnohouholníkovej, ktorej cely sú „ozdobené“ motívom) ako celku, ale aj jej detailných častí ako jednotlivé cely a zdeformované strany ciel, takže je možné sa zamerať na:

[134] Výsledkom práce nemusí byť vždy teselácia, ale i „obrázok“, ktorý môže mať vlastnosť charakteristickú pre teselácie (viď podkapitola 4.4). Príkladom môže byť pravidelné opakovanie neuzavretého motívu – vzor (obr. 24b).

– zložitosť deformácií na stranách,
– násobnosť deformácií na stranách,
– motív (rovnaký/rôzny) na celách a výsledný ornament,
– abstraktnosť/konkrétnosť cely s motívom (cela predstavuje napríklad zvierací alebo rastlinný motív alebo je to len abstraktný tvar),
– farebnosť ciel, resp. celej teselácie.

Bez ohľadu na úroveň svojej tvorivosti je *tvorivou osobou* jedinec, ktorý sa na týchto procesoch tvorivosti zúčastňuje a výsledkom jeho práce je tvorivý produkt. Pri posudzovaní hodnoty tvorivého produktu je nevyhnutné rozlišovať hodnotu z hľadiska spoločnosti a z hľadiska jednotlivca. V prípade, že malé dieťa vytvorí zo štvorcových modelov štvorcovú teseláciu, je to prínos len pre rozvoj dieťaťa (a samozrejme radosť pre jeho najbližších) a hodnota takéhoto produktu z pohľadu tvorivosti je osobná. Hodnota teselácií vytvorených napríklad maurskými umelcami v Alhambre alebo Escherom, prípadne ako na obr. 80, je ale neodškriepiteľne celospoločenská.



a) b)

c) d)

Obr. 80 Rôzne tvary dlaždíc na chodníkoch.

Z pohľadu tvorivého procesu a produktu je možné u osoby rozlišovať päť nasledujúcich stupňov tvorivosti (pre porovnanie viď L. R. Taylor (1959), uvedené v [Torrance, 1988, str. 46]):

1. *expresívna tvorivosť* (príkladom sú spontánne detské kresby),
2. *prínosná, užitočná* tvorivosť (príkladom môžu byť umelecké alebo vedecké výsledky, pri ktorých sú stanovené určité požiadavky kontrolu-

júce voľnosť práce, ale aj výsledky „obyčajnej" práce ako napríklad postavenie záhradného domčeka v zložitom teréne),

3. *vynaliezavá* tvorivosť (dôvtipnosť jedinca sa na takejto úrovni prejavuje pohrávaním s materiálmi, metódami a technikami),
4. *priekopnícka* tvorivosť (pokrok nastáva cez zmeny vyžadujúce konceptualizovanie schopností),
5. *mimoriadna* tvorivosť (príkladom sú úplne nové princípy alebo predpoklady, na základe ktorých sa mohli rozvíjať a prekvitať nové školy a hnutia).

Keď sa hovorí o tvorivosti, tak veľa ľudí myslí práve až na posledný, piaty stupeň. Ten je ale zriedkavý; preto sú v štúdiách venujúcich sa tvorivosti práve nižšie stupne chápané ako tvorivé správanie. Pri analýze prác detí ma zaujíma práve druhý stupeň tvorivosti, kedy sú žiakom zadané určité obmedzenia – napríklad dodržanie escherovských postupov alebo použitie ciel predložených tvarov. Ak ale deti nesplnia predložené požiadavky (napríklad usporiadanie útvarov nie je bez medzier a prekrytí alebo pri vytváraní ciel escherovských teselácií dieťa nedodržalo požiadavku zachovania obsahu), ale sú presvedčené o správnosti, tak sa kresby vyznačujú expresívnou tvorivosťou, vo výnimočných prípadoch i vynaliezavou tvorivosťou. (Objavovanie nových, doteraz neznámych teselujúcich päťuholníkových ciel by už bolo tretím alebo i štvrtým stupňom, keďže tu už nie je predložený postup práce, a záleží na jedincovi, ako si s problémom poradí.)

Ako som už spomenula, tvorivosť nie je izolovaný jav, je ovplyvnená mnohými ďalšími podmienkami, medzi ktoré patrí napríklad historický a kultúrny kontext, vedomosti a skúsenosti, technické a umelecké schopnosti, napodobňovanie a motivácia. Tieto vplyvy sa pokúsim vysvetliť na problematike teselácií.

Pri posudzovaní tvorivosti je nevyhnutné brať do úvahy *historický* a *kultúrny* kontext, pretože napríklad nezvyčajná africká maska sa môže zdať Európanovi ako produkt tvorivého génia, ale takéto masky sa vyrezávajú v Afrike presne rovnako už storočia [Csikszmentmihalyi, 1988]. Podobné je to v islamskom umení – vzory a teselácie so zložitými abstraktnými tvarmi sú pre nás fascinujúce, v ich kultúre sú ale také bežné, zaužívané, s tradíciou niekoľkých storočí, že nakoniec tvorivosť nie je až taká prekvapujúca. Na tomto mieste sa vynára otázka, či by maurskí umelci vyvinuli také jedinečné geometrické tvary a ornamenty, keby im islam nezakazoval zobrazovanie živých tvorov.

Vzdelanie a *skúsenosti* môžu mať pri vytváraní teselácií pozitívny i negatívny vplyv. Na jednej strane práve štúdium odbornej literatúry týkajúcej sa rovinných grúp symetrií (napríklad článok G. Pólyu z roku 1924) pomohlo Escherovi pri vytváraní zložitejších teselácií, na druhej strane v už spomínanom probléme päťuholníkových teselácií informácie o Reinhardtových či Kershnerových dôkazoch mohli byť pre matematikov významnou prekážkou pri objavovaní ďalších teselujúcich päťuholníkov (to ale neplatilo pre laikov ako napríklad M. Riceová). To isté platí o vplyve *technických* a *umeleckých schopností* na vytváranie teselácií. Kvalita teselácie sa so zvyšujúcou úrovňou týchto schopností môže výrazne zvýšiť, (subjektívne či objektívne) presvedčenie človeka o nízkej kvalite týchto svojich schopností však môže predstavovať prekážku, ktorá mu zabráni nielen vytvoriť zaujímavú teseláciu, ale niekedy aj len začať v práci.

Pri vytváraní teselácií má *napodobňovanie* veľmi dôležitú úlohu a to najmä v prvotnej etape, keď sa človek zoznamuje s problémom a potrebuje sa uistiť o správnosti pochopenia napríklad escherovských postupov alebo požiadavky na výslednú teseláciu.[135] Napodobňovanie motívov pri práci použil aj Escher, keď venoval mnoho času štúdiu a obkresľovaniu motívov z alhambrských teselácií a nechal sa nimi inšpirovať vo svojej ďalšej tvorbe.

Motivačná myšlienka pri procese tvorenia môže byť *umeleckej*, *technickej* alebo *teoretickej* povahy [Torrance, 1988, str. 43]. Pri vytváraní teselácií bola pre Eschera umeleckou motivačnou myšlienkou tvorba maurských umelcov v Alhambre, jeho grafiky zase priťahujú ľudí už niekoľko desaťročí. Technickou myšlienkou môže byť záujem zistiť, ako bola cela teselácie vytvorená (napríklad jašterica v Escherovom obraze – obr. 102), príkladom teoretickej motivácie môže byť objavovanie nových päťuholníkových teselácií napríklad R. B. Kershnerom. V prípade M. Riceovej a jej objavovania päťuholníkových teselácií je zase dôležitý z hľadiska tvorivosti tzv. *vnútorný motivačný princíp tvorivosti* [Hennessey, Amabile, 1988, str. 11], podľa ktorého sú ľudia najtvorivejší, keď sa cítia primárne motivovaní záujmom, radosťou, spokojnosťou, a výzvou práce samej, nie vonkajšími tlakmi. Kým pre deti môže byť dostatočnou motiváciou novosť problému a samotné kreslenie, pre študentov to môže byť napríklad tvorba Eschera, prípadne problematika grúp symetrií. Z vlastnej skúsenosti môžem povedať, že pre dospelých môžu byť tieto obidva dôvody dostatočne motivačné.

---

[135] Aj keď sa v prípade napodobňovania tvaru cely alebo motívu nedá hovoriť o tvorivosti (ani keby človek napodobňoval napríklad niektorú z Escherových grafík), „kopírovanie“ má v procesoch tvorivosti a učenia dôležité miesto. Ewa Swoboda mi pri jednom rozhovore povedala: „... nevadí, že deti kopírujú to, čo im učiteľ ukázal. To len znamená, že sa dieťa musí ešte učiť, necíti sa na svoju vlastnú tvorbu. A ak sa naučí, tak môže postupovať samo. Problém nastáva vtedy, keď dieťa nevie ani zopakovať to, čo mu bolo predložené.“

3.3 Postavenie rovinných teselácií v didaktike matematiky a v školskej matematike

Napriek bohatosti a príťažlivosti problematiky, a na rozdiel od niektorých krajín (napríklad Veľká Británia, Austrália), teselácie nie sú zaradené do našich (t. j. českých a slovenských) vzdelávacích programov ako samostatná téma. V učebniciach sa ale vyskytuje niekoľko úloh z tejto oblasti a existuje veľké množstvo populárno-náučnej literatúry. V tejto podkapitole chcem zhrnúť, aké sú možnosti pre využitie teselácií vo vyučovaní matematiky podľa literatúry, a ako literatúra chápe teselácie vo všeobecnosti.

Na základe doteraz preštudovanej literatúry môžem povedať, že teselácie vo vzdelávaní vystupujú v dvoch pozíciách (tie nie je ale možné striktne odlíšiť, navzájom sa prelínajú):

- *obsah*,
- *prostredie*, resp. *prostriedok*.

V pozícii obsah vystupujú teselácie ako samostatná, uzavretá téma, do školskej matematiky zaradená väčšinou ako rozširujúce alebo doplnkové učivo, často na spestrenie hodín. Dôraz sa pritom nekladie na aplikáciu poznatkov a schopností, ktoré si žiak osvojil, ale na výsledok činnosti – vytvorenie rovinnej teselácie, väčšinou vo forme obrázku. Príkladom môže byť hľadanie rôznych tvarov pre dlaždice, kreslenie escherovských teselácií, atď., pričom po činnosti väčšinou nenastáva zhrnutie prác žiakov zo strany učiteľa. V tejto pozícii vystupujú teselácie aj vo väčšine populárno-náučnej literatúry. [136]

Prostredím (alebo prostriedkom) sa problematika teselácií stáva v prípade, keď sa dôraz nekladie na výsledok – obrázok teselácie, ale využívajú sa v určitej etape vyučovacieho procesu (propedeutika, zavedenie pojmu, opakovanie, atď.) v súvislosti s nejakým poznatkom alebo schopnosťou, ktoré sú v centre pozornosti.[137]

Do austrálskeho kurikula matematiky sú teselácie zaradené „... viac ako prostriedok rozvíjania pochopenia geometrických myšlienok u študentov než ako užitočná matematická myšlienka vlastným pričinením“[138] [Callingham, 2004, str. 184]. [Orton, 1994] predkladá možnosti použitia teselácií

---

[136] Ako príklad uvediem [Ranucci, Teeters, 1977], [Opava, 1989] alebo [Levitin, 1991].

[137] Pri pozícii obsah môžu mať žiaci pocit, že sa na hodine matematiky „nepočítalo“, ale kreslilo; pri pozícii prostredie vytváranie teselácií nemusí byť pre žiakov tak príťažlivé. Závisí od učiteľa, či tieto dve pozície dokáže prepojiť. V prípade, že som skúmala ako žiaci postupujú pri vytváraní teselácií, úlohy zamerané na vytváranie rôznych typov teselácií boli prostredím pre môj výskum.

[138] [... as a means of developing students' understanding of geometrical ideas, rather than as a worthwhile mathematical idea in its own right.]

pri vyučovaní matematiky nasledujúcich poznatkov a operácií na monoedrálnej teselácii vytvorenej nepravidelným trojuholníkom:

- súčet veľkostí vnútorných uhlov,
- pojmy: súhlasné, striedavé uhly,
- podobnosť, pomer dĺžok strán,
- mnohouholníky,
- otočenie, zrkadlenie.

Okrem zaradenia problematiky do kurikúl rôzni autori v príspevkoch uznávajú dôležitú úlohu práce detí s teseláciami. Napríklad podľa [Carniel, Knapstein, 2004, str. 116] ťažisko práce s parketami leží najmä na heuristických stratégiách pri vytváraní parkiet, objavovaní zákonov pravidelnosti a na podporovaní vnímania základných útvarov.[139] Podľa [Radatz, Rickmeyer, 1991, str. 101] práca s parketami podporuje „... nielen fantáziu a tvorivosť, ale aj geometrický pohľad...“[140].

V českom a slovenskom kurikule sa teselácie ako samostatná téma nevyskytujú; ich využitie v učebniciach je väčšinou pomocné alebo doplnkové, a podľa môjho názoru stoja v pozícii obsahu. Príkladom je úloha v učebnici Matematika 7 [Šarounová a kol., 1998 II., str. 67] týkajúca sa teselácie vytvorenej zo štvorcov, ktorá predstavuje vydláždičkovanú stenu komory; úloha je ale zameraná na deliteľnosť prirodzench čísel. V tematickom celku Čtyřúhelníky [str. 20] je zaradená úloha formulovaná ako otázka, ako je možné vydláždiť podlahu lichobežníkovými dlaždicami tak, aby špáry medzi dlaždicami vytvorili pekné vzory. V kapitole 11 Matematická herna je taktiež opísaný návod ako je možné pomocou zhodných zobrazení zo štvorcovej a trojuholníkovej siete vytvoriť návrh na zámkovú dlažbu na chodník (t. j. escherovské postupy). V slovenskej učebnici Matematika pre 6. ročník ZŠ [Šedivý a kol., 1999] sa síce úlohy zamerané priamo na rovinné teselácie nevyskytujú, ale na jej koniec bola zaradená strana s nadpisom Ukážky použitia geometrických útvarov pri riešení dlažieb [str. 127], na ktorej je dvanásť obrázkov mnohouholníkových teselácií.[141]

[139] Autorky opisujú priebeh projektu zameraný na parketovanie štvoruholníkovými parketami realizovaný v 2. ročníku základnej školy. Ako počiatočná otázka je deťom predložený problém, ktoré zo štvoruholníkových parkiet je možné použiť na pokrytie podlahy, pričom je od začiatku deťmi chápaný ako problém z geometrie a nie z umenia. Deti na piatich vyučovacích hodinách pracujú so štyroma modelmi štvoruholníkových parkiet, ktoré si po vstupnej diskusii sami vybrali; ako najzložitejší sa im pre prácu javil všeobecný nekonvexný štvoruholník.

[140] [... nicht nur Phantasie und Kreativität, sondern auch das geometrische Sehen...]

[141] V danej učebnici je síce tematický celok Štvoruholníky, ktorý s touto témou súvisí, ale v texte sa nenachádza žiaden odkaz na obrázky.

Článok [Orton, 1993] opisuje priebeh a výsledky výskumu zaoberajúceho sa detským vnímaním vzorov [patterns] vo vzťahu k tvaru použitých útvarov. Ako východiskový dôvod je uvedený fakt, že napriek tomu, že rozpoznávanie vzorov je považované za dôležitú stratégiu v školskej matematike, nie je jasné, či deti (resp. ľudia vo všeobecnosti) chápu vzor rovnako. Deťom vo veku 5–11 rokov bolo predložených 5 obrázkov a otázka, či na daných obrázkoch je alebo nie je vzor; svoje tvrdenia mali následne odôvodniť. Odpovede bolo možné roztriediť do niekoľkých klasifikačných skupín, ktoré boli charakteristické pre určité vekové kategórie. Najčastejšia charakteristika vzoru u najmladších detí (5-ročné) bola spojená s útvarmi tvoriacimi vzory, pre najstarších (9 a 11-ročných) bolo znakom pre vzory opakovanie. V skupine 7-ročných detí sa vyskytli odpovede týkajúce sa symetrie a teselácií.

R. Callinghamová opisuje v svojom príspevku [Callingham, 2004] úvod výskumu chápania teselácií u detí na základe úrovní geometrického myslenia podľa van Hieleových. V centre pozornosti stáli dve otázky: ako žiaci prvého stupňa opisujú opakovanie útvarov v teseláciách? a sú úrovne geometrického myslenia van Hieleových užitočné pri opisovaní chápania teselácií u detí? V štúdii bolo skupine 5–6-ročných detí predložených 8 obrázkov rôznych rovinných teselácií a deti mali určiť útvary použité v každej teselácií a vysvetliť čo najdetailnejšie ako tieto útvary vytvorili dané teselácie. Z výsledkov vyplýva, že väčšina detí rozpoznávala a opisovala použité útvary v teseláciách, ale len na úrovni vizualizácie (úroveň 0; rozpoznanie a pomenovanie útvarov). Ďalšie dve úrovne – analýza a abstrakcia (rozpoznanie útvarov a neformálne opisovanie použitých zobrazení pri vytvorení teselácií; opisovanie útvarov aj zobrazení použitím technického jazyka) boli dosiahnuté vo vyššej miere len v prípade známych útvarov (štvorcová teselácia a teselácia vytvorená kombináciou štvorcov a rovnostranných trojuholníkov). Podľa autorky sú príčinou všeobecné problémy detí daného veku s chápaním dvojrozmerných reprezentácií. Použitie úrovní van Hieleových sa prejavilo ako vhodný prostriedok pre analýzu detského chápania teselácií.[142]

Z domácej oblasti je možné spomenúť dizertačnú prácu [Marcinek, 2001] venovanú problematike monoedrálnych escherovských teselácií (autor používa pojem „krivočiare výplne“) z hľadiska teórie symetrií. Hlavnou časťou práce je analýza procesu tvorby výplne na základe informácií získaných od respondentov rôznych vekových kategórií a s rôznymi skúsenosťami pri

---

[142] Autorka už v tomto výskume ale nepokračovala, pretože podľa jej slov (z našej súkromnej korešpondencie) nevidela možnosť, ako ďalej pokračovať.

tvorbe teselácií. Deti mladšieho školského veku (8–10-roční) riešili vytváranie mnohouholníkových teselácií pomocou stavebnice experimentovaním (okrem prípadu štvorca), pri analýze ciel monoedrálnych escherovských teselácií prejavili tvorivosť. Starší žiaci (12–15-roční) prejavili menšiu ochotu a záujem o experiment, pri tvorbe escherovských teselácií (metódou „strihaj a prilep") však boli manuálne zručnejší. Výsledné escherovské teselácie vytvorené respondentmi autor hlbšie neanalyzuje, ale uvádza, že z pozorovaní vyplýva dobrá aplikovateľnosť tvorby teselácií už v mladšom školskom veku, pričom vytvorenie cely je ovplyvnený modelom, ktorý vytvoril experimentátor (učiteľ); s vekom sa ale táto závislosť znižuje [str. 92–93]. Na druhej strane, pri určovaní vlastností útvarov vytvárajúcich teselácie (symetrie) boli deti mladšieho veku samostatné, ale starší žiaci a dospelí sa bez jednoduchej pomoci experimentátora nezaobišli [str. 92]. Hoci práca zhrňuje poznatky napríklad v oblasti didaktických aplikácií problematiky teselácií a symetrií a využitia softvérov pri ich výuke, vlastná téma (analýza procesu tvorby výplne) je však skôr rozpracovaná, ale bez hlbších záverov. Vo výskumnej časti práce sa autor problematikou tvorivosti na základe získaných informácií a vytvorených teselácií respondentmi nezaoberá, ale v závere práce uvádza ako jeden z výsledkov, že samotný matematický poznatok týkajúci sa teselácií nie je koncovým produktom; je iba prostriedkom k dosahovaniu vyšších cieľov – rozvoj mentálnych návykov, akými sú napríklad tvorivé myslenie a kritické myslenie [Marcinek, 2001, str. 101].

Ďalšou zaujímavou je práca [Swoboda, 2006], v ktorej autorka skúma schopnosť detí vytvárať pravidelný vzor z pripravených štvorcových kartičiek ozdobených motívom a ich vnímanie takýchto pravidelností. Z výskumu vyplýva, že zmysel pre geometrickú pravidelnosť sa vyskytuje už u detí predškolského veku.

Zaradiť vlastný výskum medzi spomenuté výskumy v didaktickej oblasti je zložité. Keďže v našich podmienkach sa táto téma vyskytuje výnimočne, žiaci a študenti, ktorým by boli predkladané podobné problémy ako napríklad vo výskumoch [Callingham, 2004] a [Orton, 1994], by boli v úplne odlišnej situácii. Okrem toho slovenské či české preklady pojmov „pattern" a „to tessellate" sú v tomto prípade náhradou, ktorá nemusí evokovať rovnaké myšlienkové pochody. Preto som svoj výskum na začiatku oprela aspoň o nasledujúce body:

- Vhodnou základnou pomôckou pre prácu detí, ktoré sa s danou problematikou oboznamujú, je papier [Carniel, Knapstein, 2004]. Napríklad z práce [Marcinek, 2001] vyplýva, že takmer všetci dospelí respondenti bez skúseností s tvorbou teselácií použili pre prácu papier narozdiel od skúsených respondentov, ktorí väčšinou využili kombinovanú formu práce (ručne a s počítačom) alebo pomocou počítača.

- Pri práci s mnohouholníkmi je dôležitá skúsenosť; v úlohách pokrývania roviny modelmi mnohouholníkov je štvorec hneď označený deťmi ako útvar, ktorý pokrýva rovinu bez medzier a prekrytí [Marcinek, 2001]. Dôležitým prvkom práce je, aby náročnosť útvarov postupne gradovala [Kurosawa a kol., 2000] [143], t. j. aby deti prechádzali od útvarov známych z reálnych teselácií (štvorce, obdĺžniky) k menej známym (všeobecný konvexný a nekonvexný štvoruholník).
- Úlohy zamerané na mnohouholníkové teselácie (hľadanie možných tvarov dlaždíc) je vhodné kvôli motivácii a skúsenostiam formulovať ako problémy z reálneho života (parketáž, dlaždičkovanie, patchwork, atď.); escherovské teselácie sami ukrývajú v sebe dostatočne silnú motiváciu zo strany umenia.
- Využitie teselácií pri rozvíjaní geometrickej predstavivosti a tvorivosti, resp. fantázie, doteraz nebolo priamo predmetom konkrétneho štúdia, v prácach sa vyskytujú len pripomienky a odporúčania k tejto téme, napr. [Ranucci, Teeters, 1977, str. 137], [Radatz, Rickmeyer, 1991, str. 101], [Marcinek, 2001, str. 101]. Dôvodom je možno skutočnosť, že rozvíjanie tvorivosti je pri vytváraní vlastných návrhov teselácií až príliš evidentné.
- Tvorba teselácií nie je len produktom činnosti respondentov na základe získaných skúseností a schopností [Marcinek, 2001], ale aj cenným vstupným materiálom pre analýzu myslenia respondentov.

[143] V jednom z projektov žiaci 5. ročníka základnej školy riešia problém, či je možné zhodné štvoruholníkové časti v rovine naskladať bez medzier. Význam projektu spočíva v tom, že deti si neosvoja znalosť o pokrývaní roviny len špeciálnymi typmi štvoruholníka, ale osvoja si platnosť pravidla pokrývania roviny ľubovoľným štvoruholníkom so zdôvodnením a pochopením.

Kapitola 4

Predmet, ciele a metódy výskumu

V tejto kapitole najprv stručne opíšem priebeh a výsledky experimentov zameraných na vybrané typy rovinných teselácií prevedených v rámci predvýskumu (podkapitola 4.1), na základe ktorých sa stanovili ciele (podkapitola 4.2) a metódy pre získavanie a analýzu dát pre hlavnú časť výskumu (podkapitola 4.3), a nakoniec podám klasifikáciu javov a kategórií charakteristických pre zadané úlohy (podkapitola 4.4).

4.1 Experimenty predvýskumu

V rámci predvýskumu boli realizované tri experimenty – *štvoruholníkové* (časť 4.1.1), *escherovské* (časť 4.1.2) a *Voronojove teselácie* (časť 4.1.3). Prvé dva som previedla so žiakmi sama, tretí v spolupráci s učiteľkou, ktorá svojim žiakom zadala mnou sformulovanú úlohu; výskumnú vzorku tvorili žiaci vo veku 10 – 16 rokov. Pred realizáciou jednotlivých experimentov som mala len nejasné predstavy o tom, čo by som chcela skúmať. Preto som sa rozhodla zamerať najprv na opis priebehu práce žiakov pri riešení zadaných úloh a na výsledky tejto práce (objavenie a formulácia pravidla, vytvorenie požadovanej teselácie pomocou modelov alebo vo forme obrázku, atď.) s tým, že ďalšie dôležité javy sa postupne vykryštalizujú. V závere každého experimentu pridávam krátke zhrnutie.

4.1.1 Štvoruholníkové teselácie

Prvý experiment predvýskumu bol zameraný na vytvorenie monoedrálnych teselácií zo šiestich rôznych zhodných štvoruholníkov, a bol realizovaný podobne ako experiment z mojej diplomovej práce [Ilucová, 2002]. Zatiaľ čo v pôvodnom experimente z diplomovej práce som pracovala počas dvoch vyučovacích hodín s celou triedou žiakov deviateho ročníka základnej školy, v tomto experimente som sa rozhodla zamerať na prácu dvojíc (tri dvojice žiakov základnej školy[144] a dve dvojice žiakov osemročného gymnázia[145]); predpokladala som, že v dvojiciach sa budú žiaci pri práci dopĺňať a skôr objavia a aplikujú pravidlá. Priebeh práce som zaznamenala videokamerou a diktafónom (okrem prvých dvoch dvojíc), na základe záznamu vypracovala podrobný protokol, z ktorého som sa snažila získať čo najviac materiálu pre analýzu.

Všetky dvojice postupne odpovedali na nasledujúce otázky; obtiažnosť štvoruholníkových útvarov sa stupňovala (od najjednoduchšieho útvaru – štvorca – až po všeobecný konvexný a nekonvexný štvoruholník):

Otázka 1: *Keby sme chceli vykachličkovať stenu v kúpeľni, mohli by sme použiť obkladačky rovnakého štvorcového tvaru?*
Otázka 2: *Mohli by sme použiť parkety rovnakého obdĺžnikového tvaru na pokrytie podlahy?*
Otázka 3: *Mohli by sme použiť parkety rovnakého kosodĺžnikového tvaru?*
Otázka 4: *Mohli by sme použiť parkety rovnakého lichobežníkového tvaru?*
Otázka 5: *Mohli by sme použiť parkety takéhoto*[146] *štvoruholníkového tvaru? (všeobecný konvexný štvoruholník)*
Otázka 6: *Mohli by sme použiť parkety takéhoto štvoruholníkového tvaru? (všeobecný nekonvexný štvoruholník)*

Po týchto parciálnych otázkach nasledovali otázky smerujúce k zovšeobecneniu a sformulovaniu pravidla pre pokrývanie roviny štvoruholníkmi:

Otázka 7: *Je možné použiť parkety ľubovoľného štvoruholníkového tvaru na pokrytie podlahy? Ak áno, prečo? / Ak nie, nájdite také parkety štvoruholníkového tvaru, ktoré nemôžeme použiť na pokrytie podlahy.*

Pre riešenie zadaných problémov si žiaci mohli vybrať z predložených pomôcok: súbor bielych papierových modelov zložený zo šiestich štvoruholníkov[147] (obr. 81), biele, farebné a štvorčekované papiere, ceruzky, nožnice.

---

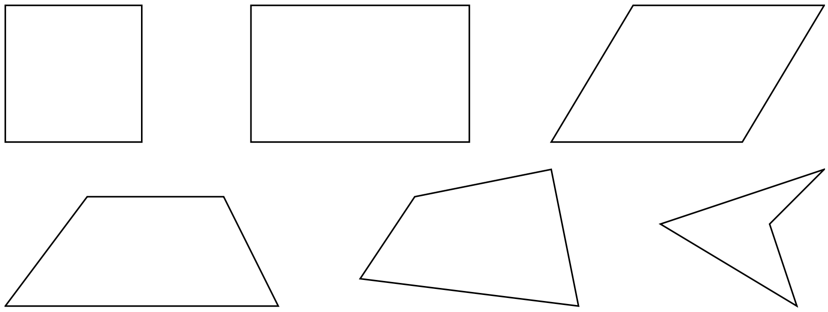
[144] Základní škola Campanus, Jírovcovo náměstí 1782, Praha – Chodov.

[145] Křesťanské gymnázium, Kozinova 1000, Praha – Hostivař.

[146] V prípadoch konvexného a nekonvexného štvoruholníka som namiesto konkrétnych pojmov v úlohách radšej poukázala na dané útvary, pretože pojmy *konvexný* a *nekonvexný* sú zaradené až v matematike 1. ročníka strednej školy.

[147] Papierové modely som z časového dôvodu pripravila pred experimentom, aj keď uznávam, že takto som žiakom „vnútila“ rozmery a tvary daných štvoruholníkov, najmä lichobežníka, konvexného a nekonvexného všeobecného štvoruholníka. Medzi modely nebol zaradený napríklad deltoid napriek svojej zaujímavosti; chcela som, aby dvojice pracovali so všetkými pripravenými štvoruholníkmi a počet útvarov by sa zvýšil na úkor ich pozornosti. Prvé dva prípady štvoruholníkov (štvorec, obdĺžnik) sú z pohľadu teselácií „prirodzené“, lebo reálne kachličky a parkety majú tvar týchto útvarov. Ostatné útvary sa zdajú byť „umelé“, ale práve tieto prípady umožňujú najviac rozvíjať predstavivosť (žiaci sú postavení pred otázky „pripustiť alebo nepripustiť možnosť takýchto parkiet?“,

Po ukončení rozhovorov som všetkým dvojiciam zadala ešte domácu úlohu: mali sa zamyslieť nad tým, či by bolo možné na vydláždenie podlahy použiť aj parkety iného ako štvoruholníkového tvaru (napríklad v tvare trojuholníka, päťuholníka, šesťuholníka, atď.), a nakresliť čo najviac parketáží s týmito n-uholníkovými parketami.[148]



Obr. 81 Štvoruholníky zo súboru papierových modelov.

Predtým, ako sa budem venovať stručnému opisu práce dvojíc na základe analýzy protokolov jednotlivých rozhovorov, zavediem niekoľko pojmov, ktoré v texte používam:

– *problém rozmerov* – situácia, kedy žiaci zdôrazňujú význam deliteľnosti rozmerov steny a štvorcovej (obdĺžnikovej, atď.) obkladačky, a namiesto geometrickej úlohy tak riešia aritmetickú,[149]

– *problém okrajov* – rôzne situácie, kedy žiaci zdôrazňujú napríklad pri kosodĺžnikových útvaroch, že je možné ich použiť, ale na okrajoch budú musieť byť doložené vhodne nasekané kúsky, resp. keď žiaci pri vytváraní teselácie ukladajú útvary na „podložku“ (papier formátu A4) tak, že daný útvar „oprú“ o okraje podložky,

– *správne usporiadanie* útvarov – usporiadanie útvarov bez medzier a prekrytí, v ktorom je možné neobmedzene pokračovať vo všetkých smeroch, t. j. výsledkom je vytvorenie teselácie (napríklad obr. 82a),

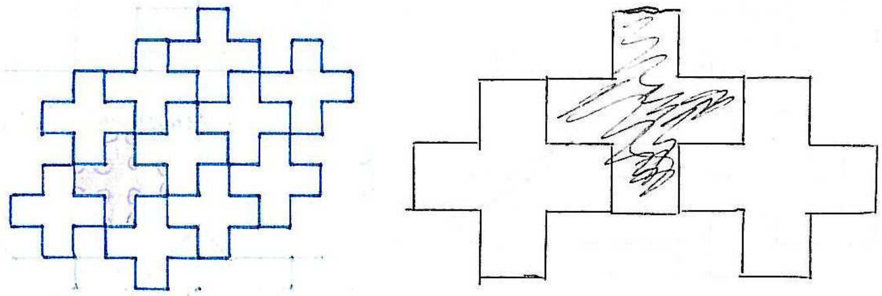
– *nesprávne usporiadanie* útvarov – môžu nastať dva prípady: usporiadanie útvarov je síce bez medzier a prekrytí, ale je to len lokálna „správnosť“, pre-

„ako s takýmito nezvyčajnými parketami pracovať?“, atď.).

[148] Pri experimente z mojej diplomovej práce žiaci (deviataci) pracovali s rovnakými papierovými modelmi v skupinách a boli im položené rovnaké otázky. Žiaci vytvárali monoedrálne teselácie z jednotlivých zhodných štvoruholníkov, pričom som sa snažila viesť ich k správnemu riešeniu, a nakoniec sme pravidlo o pokrývaní roviny štvoruholníkmi sformulovali spoločne. Výhodou bolo, že modely si žiaci vytvorili sami, a tak sme mohli porovnávať vytvorené teselácie. Napriek tomu, že tvar a veľkosť napríklad lichobežníkových modelov sa medzi skupinkami líšili, v prípade, že nejaká skupina príslušnú teseláciu vytvorila, tak aj ostatní žiaci boli presvedčení, že sa im to musí podariť.

[149] Tento jav je pravdepodobne výsledkom riešenia podobne sformulovaných úloh, ktoré sa pri téme deliteľnosť čísel často vyskytujú.

tože nie je možné neobmedzene pokračovať vo všetkých smeroch (napríklad obr. 84c), alebo usporiadanie útvarov sa viditeľne vyznačuje prekrytiami alebo medzerami globálne (napríklad obr. 82b).



a) b)

Obr. 82 a) Správne usporiadanie ciel v tvare nekonvexného dvanásťuholníka, b) nesprávne usporiadanie (obrázky nakreslené študentmi – gymnazistami v časti 5.1.3).

V texte pod obrázkami, ktoré nakreslili žiaci v experimentoch z predvýskumu, uvádzam kategórie, do ktorých som obrázky zaradila; ich význam vysvetľujem v podkapitole 4.4.

Charakteristiky práce jednotlivých dvojíc[150]:

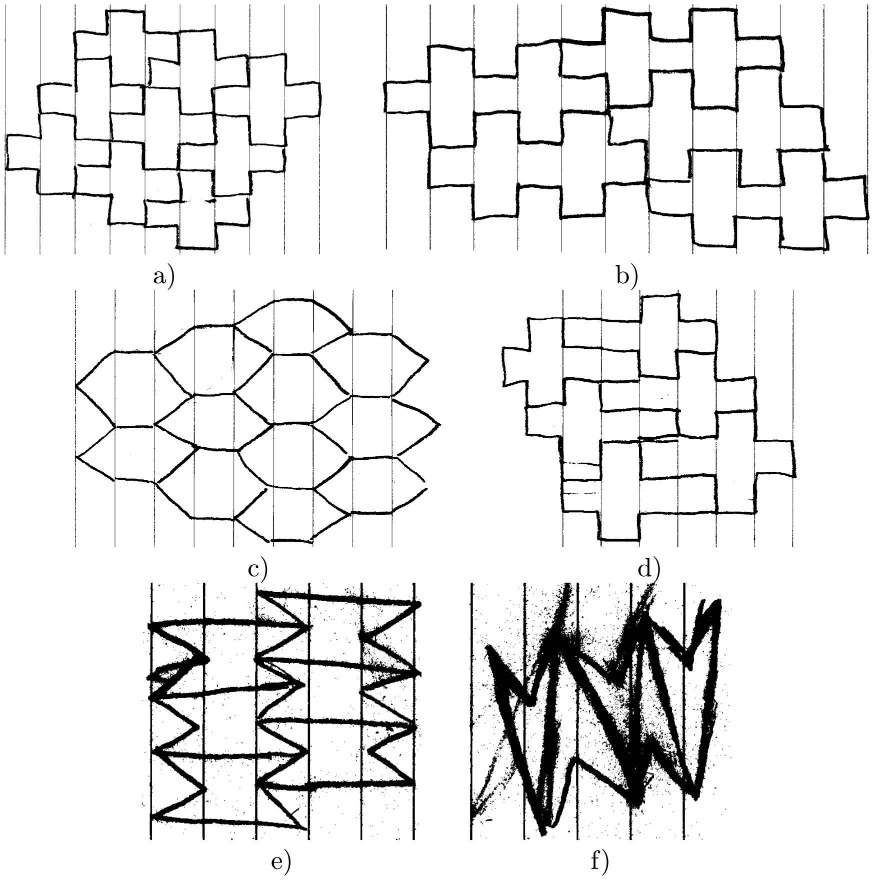
S dvojicami **Milan, Petr** a **Kristína, Táňa** (M+P, K+T, sekunda 8-ročného gymnázia, obr. 83, obr. 84) bola jednoduchá spolupráca, pretože všetci štyria žiaci boli veľmi komunikatívni.[151] Vytvorili teselácie zo všetkých predložených štvoruholníkov, dokonca viaceré možné usporiadania útvarov, a odhalili, že jednotlivé pásy útvarov je možné navzájom posunúť o ľubovoľnú vzdialenosť a otočiť o ľubovoľný uhol. Všetci štyria intuitívne (aj slovne) objavili a použili pravidlo príslušných strán i príslušných uhlov. Napriek tomu ale dvojica dievčat v závere nebola presvedčená, že by bolo možné vytvoriť teseláciu opakovaním ľubovoľného štvoruholníka, pretože „je možné, že existuje ešte nejaký iný štvoruholník, s ktorým to nejde“[152],

[150] Prvé dve dvojice (M+P, K+T) sa sami aktívne prihlásili, ďalšie tri (T+J, H+V, G+P) vybrala ich učiteľka matematiky. Dievčenská dvojica K+T ma poznala (pracovala som s nimi na experimente týkajúcom sa zlomkov), s ostatnými som sa stretla po prvýkrát. Všetci ale vedeli, že sa zaoberám matematikou. Rozhovory trvali od 17 do 27 minút; s dvojicami M+P a K+T prebehli vo veľmi tvorivej atmosfére, ostatné tri dvojice boli pri práci upätejšie.

[151] Keďže tieto rozhovory boli realizované hneď na začiatku môjho výskumu, kedy som mala s didaktickým výskumom veľmi malé skúsenosti, rozhovory som si nahrávala len na diktafón a písala som si poznámky. Preto som dodatočne nemohla zisťovať (po vytypovaní skúmaných javov), presne v ktorej etape riešenia žiaci odhalili jednotlivé pravidlá.

[152] Tento prístup je možné chápať pozitívne, pretože žiačky boli vo veku, kedy sa ešte len začína so zovšeobecňovaním matematických (alebo geometrických) vlastností

kým z dvojice chlapcov M vyhlásil, že by to bolo možné, pretože všetky ďalšie štvoruholníky sa „podobajú“ tým predloženým. Tvorivosť a dobré schopnosti oboch dvojíc sa prejavili aj pri obrázkoch, ktoré dodatočne nakreslili – obr. 83, obr. 84.



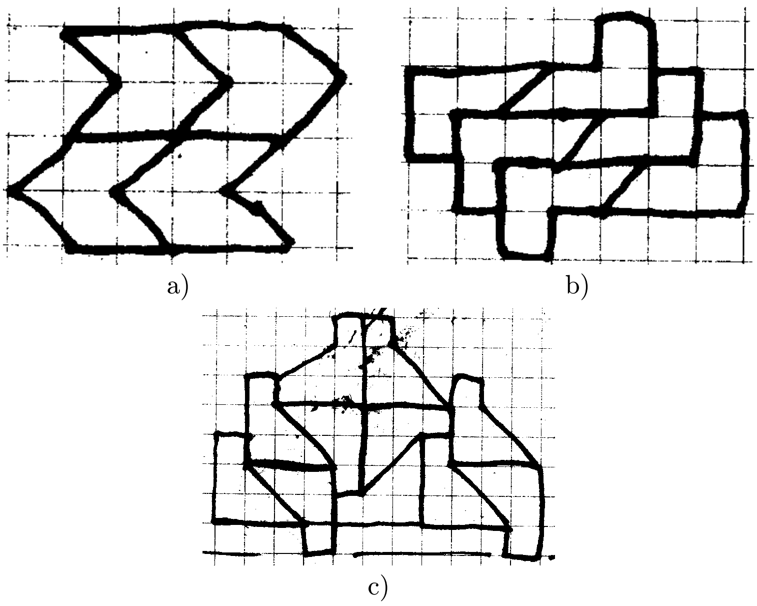
Obr. 83 Monoedrálne teselácie vytvorené dvojicou M+P: a) grupa $p4$, kategória koberček, b) grupa $p2$, kategória koberček, c) grupa cmm, kategória koberček, d) grupa $p2$, kategória koberček, e) grupa cmm, kategória koberček, f) grupa pmg, kategória solitér.

Dvojica **Tomáš, Jan** (T+J, 9. ročník základnej školy, obrázky neodovzdali) bola pri rozhovore veľmi nervózna[153], obaja žiaci ale dobre navzájom spolupracovali. V úvode výrazne vstúpil problém rozmerov a okrajov („tá stena je štvorcová? aké má rozmery?“), ktorý sa potom už vyskytol pri všetkých typoch štvoruholníkov. Dvojica v prípade štvorcov, obdĺžnikov i lichobežníkov kreslila jednotlivé obkladačky na papier, na ktorom si nakreslila obdĺžniky predstavujúce steny; tieto teselácie boli typu strana k strane. Pri lichobežníkoch som žiakom ponúkla pre prácu modely; po

objektov a dôkazy sa v školskej matematike ešte nevyskytujú.

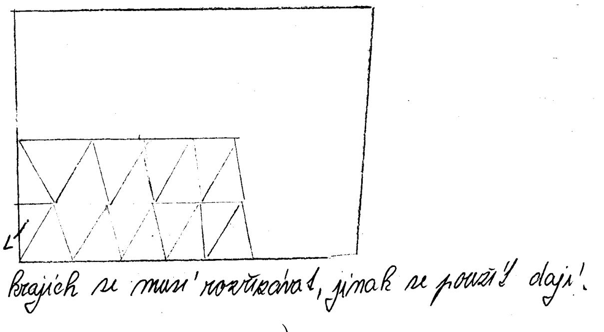
[153] Dôvodom nervozity žiakov mohlo byť, že ma nepoznali, ale aj moja slovenčina, pretože sa často uisťovali opakovaním otázky, či dobre rozumeli.

prvotnom neúspechu intuitívne použili pravidlo príslušných strán i príslušných uhlov, teselácia bola ale zase len strana k strane. Pri všeobecnom konvexnom štvoruholníku vytvorili usporiadanie, v ktorom nebolo možné pokračovať bez medzier a prekrytí (slabá štruktúra), pri nekonvexnom sa síce podarilo, ale len lokálne správne, takže parkety daných tvarov podľa nich nebolo možné použiť. Ani jeden žiak z dvojice neodovzdal obrázky ďalších teselácií.

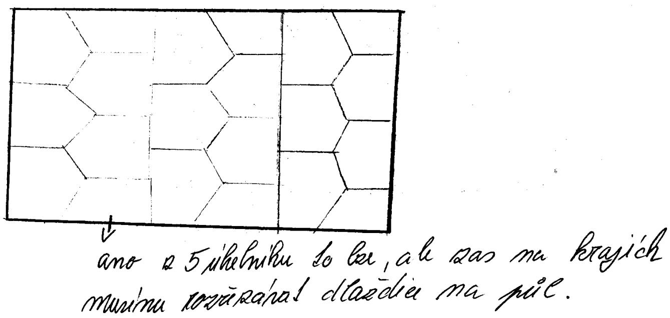


Obr. 84 Obrázky nakreslené dvojicou K+T: a) grupa *pmg*, kategória pásy (môže byť aj koberček), b) grupa *p*2, kategória koberček, c) slabá štruktúra (teseláciu nie je možné ďalej rozširovať).

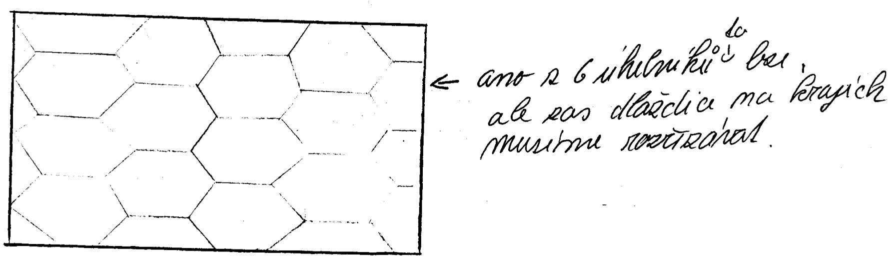
Z dvojice **Henrieta, Vikina** (H+V, 9. ročník základnej školy, obr. 85) bola H hlavným komunikátorom dvojice, V bola pasívnejšia. Pri prvej a druhej otázke H svoju kladnú odpoveď podmienila deliteľnosťou rozmerov steny rozmerom štvorca bezo zvyšku, inak sa musia obkladačky rezať. Takto formulovaný problém rozmerov a okrajov sa vyskytol potom pri všetkých typoch štvoruholníkov a dokonca aj v nakreslených teseláciách – obr. 85. Všetky vytvorené teselácie touto dvojicou boli strana k strane; žiačky pripúšťali aj ďalšie možnosti, ale vtedy otočili celú pôvodnú teseláciu o určitý uhol. Pri lichobežníkoch H použila pravidlo príslušných strán a čiastočne aj príslušných uhlov („musí sa to striedať…“), to však už žiačky nepoužili pri všeobecnom konvexnom ani nekonvexnom štvoruholníku, keď vytvorili usporiadanie, ktoré nie je možné ďalej rozširovať, t. j. slabá štruktúra. V závere H odpovedala, že je možné použiť akúkoľvek štvoruholníkovú parketu, ale pri posledných dvoch prípadoch vzniknú často medzery, tak je nutné ich doplniť narezanými časťami. Z dvojice obrázky teselácií odovzdala len žiačka H.



a)



b)



c)

Obr. 85 Monoedrálne teselácie vytvorené žiačkou H z dvojice H+V; žiačka aj v obrázkoch zdôrazňuje problém rozmerov a okrajov: a) grupa *pgg*, kategória pásy (môže byť aj nekonečno, pretože žiačka práve v tomto prípade pravdepodobne zistila, že je možné v teselácii pokračovať), b) grupa *pmg*, kategória nekonečno, c) grupa *cmm*, kategória nekonečno.

Obaja z dvojice **Gina, Pavel** (G+P, 8. ročník základnej školy, obrázky neodovzdali) reagovali rýchlo na moje otázky, navzájom ale nespolupracovali, a vo väčšine prípadov každý z nich vytváral sám „vlastnú“ teseláciu. P sa od začiatku prejavil ako dominantný v dvojici, a tak som sa nechtiac zamerala na jeho činnosť a nevenovala dostatočnú pozornosť G. V prípade štvorcov sa objavil problém rozmerov i okrajov, ďalej sa už nevyskytol. Pri prechode od štvorca k obdĺžniku využili analógiu („... je to rovnaké...“); ďalej P používal viac stratégiu „pokus-omyl“[154], G premýšľala a modelo-

[154] Pod *stratégiou riešenia* rozumiem postupnosť krokov (metód), ktoré sa žiak rozhodne použiť pri riešení, a o ktorých sa domnieva, že by mohli viesť k nájdeniu výsledkov danej úlohy; *stratégia pokus-omyl* sa vyznačuje náhodným „skúšaním“.

vala v mysli. Pri lichobežníkoch už G použila vedome pravidlo príslušných strán a intuitívne aj príslušných uhlov, to ale pri všeobecnom konvexnom štvoruholníku nevedela použiť. Pri nekonvexnom štvoruholníku bola dvojica úspešná až po mojom vyzvaní, že som už niečo také videla. V závere po otázke 7 odhalil P pravidlo príslušných strán, ale G ešte sformulovala aj náznak pravidla symetrie („keby do seba [štvoruholníkové útvary] zapadali, tak áno [t. j. je možné vytvoriť teseláciu]… keby ale nebolo možné zložiť ani zo štyroch [útvarov] nič, tak nie…“). Po vyzvaní, aby tieto pravidlá použili pri všeobecnom konvexnom štvoruholníku, nevedeli ich použiť. Obrázky teselácií dvojica neodovzdala.

Záver:

- Pred rozhovormi som predpokladala, že žiaci aspoň na intuitívnej úrovni odhalia význam veľkostí vnútorných uhlov štvoruholníka pri usporiadaní rovnakých štvoruholníkových ciel v teselácií a následne pravidlo o pokrývaní roviny štvoruholníkmi. To sa nestalo, a vďaka tomu som sa zamerala na detekciu výskytu čiastkových úspechov, čo viedlo k „rozdeleniu“ pravidla pokrývania roviny štvoruholníkmi na jednotlivé čiastkové pravidlá. (Prvotnú analýzu experimentu som spracovala v článku [Ilucová, 2005b].)
- Prácu žiakov ovplyvňoval problém okrajov a problém rozmerov, s výskytom ktorých som v takej miere nepočítala, napriek tomu, že pri takto formulovaných otázkach, boli prirodzené. Pri práci dvoch dvojíc (T+J, H+V) mali však tieto problémy tak silné zastúpenie, že predstavovali prekážku v hľadaní pravidiel pre pokrývanie roviny štvoruholníkmi, a žiaci mali tendenciu úlohu „počítať“. (Žiaci ako podklad pre prácu používali papier formátu A4, na ktorom si ale tieto dve dvojice ešte sami nakreslili obdĺžnik predstavujúci stenu v kúpeľni, pretože mali silnú potrebu si vymedziť, v akej oblasti sa pohybujú.)
- Do realizácie experimentu s týmito dvojicami bolo moje chápanie teselácií viac matematické ako praktické. Matematici si totiž teselácie zjednodušujú, a tak zanedbávajú „hrúbku“ hraníc, pri vytváraní teselácií z ciel začínajú akoby „od stredu papiera“, a samozrejme vyžadujú, aby teseláciu bolo možné rozširovať do nekonečna. Vďaka reakciám žiakov (problémy okrajov a rozmerov, medzery medzi skutočnými kachličkami, lokálne správne usporiadanie útvarov, atď.) som si uvedomila skutočný význam teselácií okolo nás. Ak majú byť teselácie nástrojom pre riešenie problémov z praktického života a preto zaradené do vyučovania matematiky, je nevyhnutné myslieť aj na vlastnosti reálnych teselácií.
- Pri porovnaní jednotlivých dvojíc z hľadiska priebehu práce a komuni-

kácie, medzi dvojicami boli výrazné rozdiely. U mladších žiakov (M+P a K+T) síce bola viditeľná neistota v terminológii (často sa uisťovali, či pracujú so správnym útvarom), pracovali však rýchlejšie, s väčším záujmom a ich výsledky boli lepšie ako výsledky starších žiakov. Myslím si ale, že tieto rozdiely boli zapríčinené rôznymi schopnosťami žiakov.[155] Na druhej strane ale mladší žiaci (okrem žiaka M), ktorí síce vytvorili teselácie zo všetkých predložených štvoruholníkových ciel, neboli presvedčení, že dané vybrané štvoruholníky zastupujú všetky štvoruholníky, a že každý štvoruholník je možné použiť.

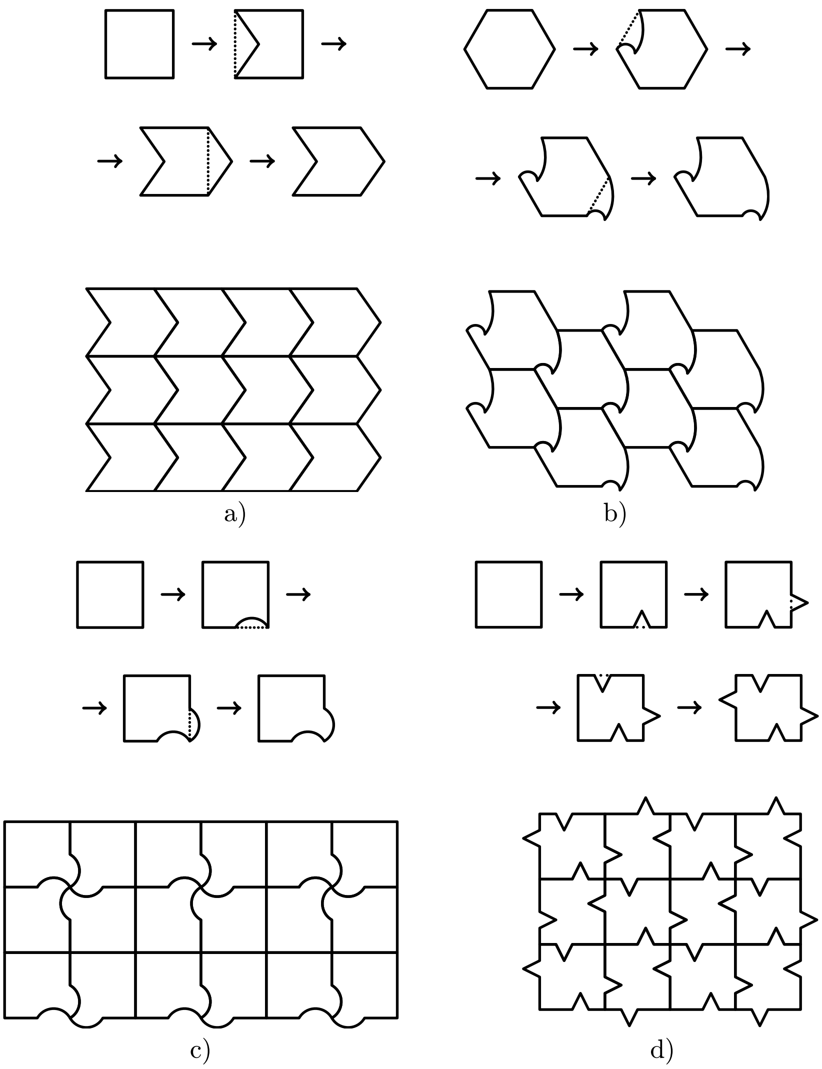
- Pri štvorcoch, obdĺžnikoch, kosodĺžnikoch, t. j. pri útvaroch známych z hodín matematiky, používali žiaci analógiu, pri lichobežníkoch vytvárali pásy. Keď sa ale stretli s všeobecným konvexným a nekonvexným štvoruholníkom, tak už často nevedeli použiť predchádzajúce skúsenosti a zmätkovali. Pri vytváraní teselácie z nekonvexných štvoruholníkov boli však úspešnejší, pretože práve jeho nepravidelnosť pomáha naviesť na pravidlo príslušných strán a potom aj na pravidlo príslušných uhlov.
- Predpokladala som, že tvorivosť a predstavivosť žiakov sa prejavia najmä v hľadaní čo najväčšieho počtu možností usporiadania pre jednotlivé štvoruholníkové cely. Prekvapila ma ale ich tvorivosť a predstavivosť pri hľadaní ďalších teselujúcich ciel, ktorých tvar je rôzny od štvoruholníkov. Pri kreslení si žiaci zvolili také útvary, ktoré ich zaujali, a v nich predviedli svoje pochopenie (alebo nepochopenie) teselácie ako pevnej či slabej štruktúry.
- Myslím si, že riešenie problému štvoruholníkových teselácií by prebiehalo prirodzenejšie, keby otázky neboli zadané formou kaskády, ale formulované ako jedna otázka: *ktorý z predložených útvarov by bolo možné použiť ako tvar obkladačiek pri obkladaní steny kúpeľne alebo ako tvar parkiet pri pokrývaní podlahy v izbe?*, pričom by si žiaci sami zvolili postupnosť útvarov.
- Pri zaradení štvoruholníkových teselácií do vyučovania matematiky základnej školy by bolo vhodné, keby si žiaci sami v skupinkách pripravili modely štvoruholníkov (mnohouholníkov), aby sa tvary útvarov líšili, a aby tejto aktivite predchádzala „klasifikácia“ štvoruholníkov (t. j. hľadanie rovnakých a odlišných vlastností jednotlivých štvoruholníkov).

4.1.2 Escherovské teselácie

K zaradeniu vytvárania escherovských teselácií (viď podkapitola 1.1.2) medzi experimenty ma viedlo presvedčenie, že Escherove grafiky s témou

[155] Žiaci z dvojíc M+P a K+T boli podľa slov ich vyučujúcej veľmi aktívni a bystrí.

pravidelného delenia roviny (a im podobné, t. j. escherovské teselácie) vzbudzujú u ľudí záujem a chuť ich napodobniť (v lepšom prípade vytvoriť niečo úplne nové), a preto naučiť sa postupy pre ich vytváranie nebude ani pre žiakov nudné a zložité. Escherovské teselácie kreslili žiaci šiesteho a deviateho ročníka základnej školy[156] počas dvoch vyučovacích hodín matematiky.

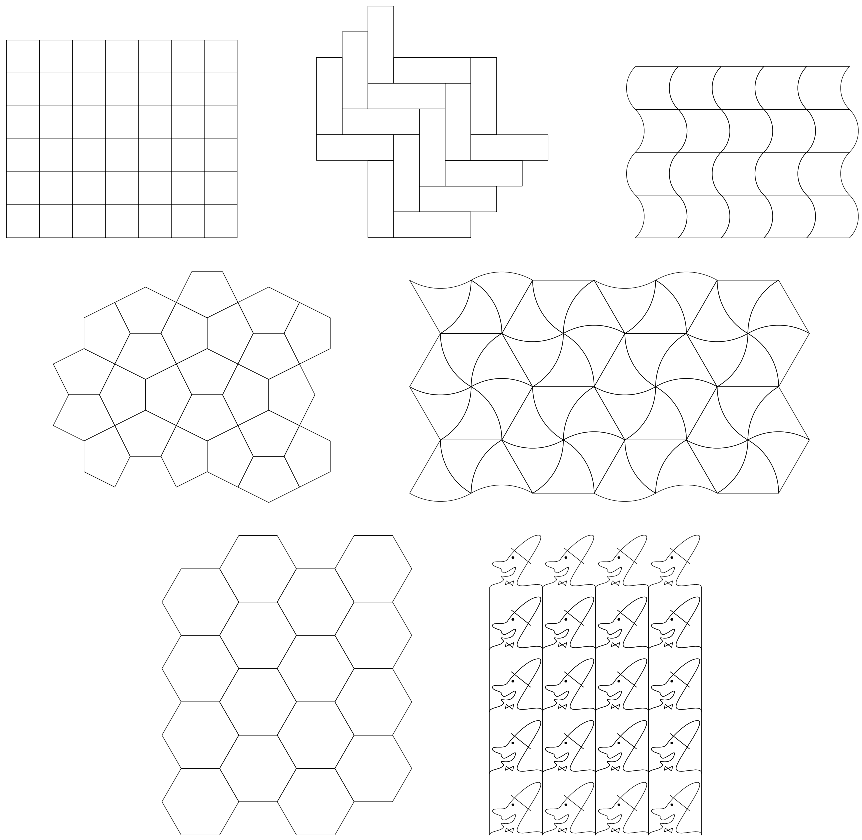


Obr. 86 Papierové modely použité pri vysvetľovaní postupov pre vytváranie escherovských teselácií: a), b) použitie posúvania, c), d) použitie otáčania.

Escherovské postupy som žiakom vysvetlila v triedach pomocou papierových modelov (obr. 86, obr. 141); obidva postupy (použitie posúvania

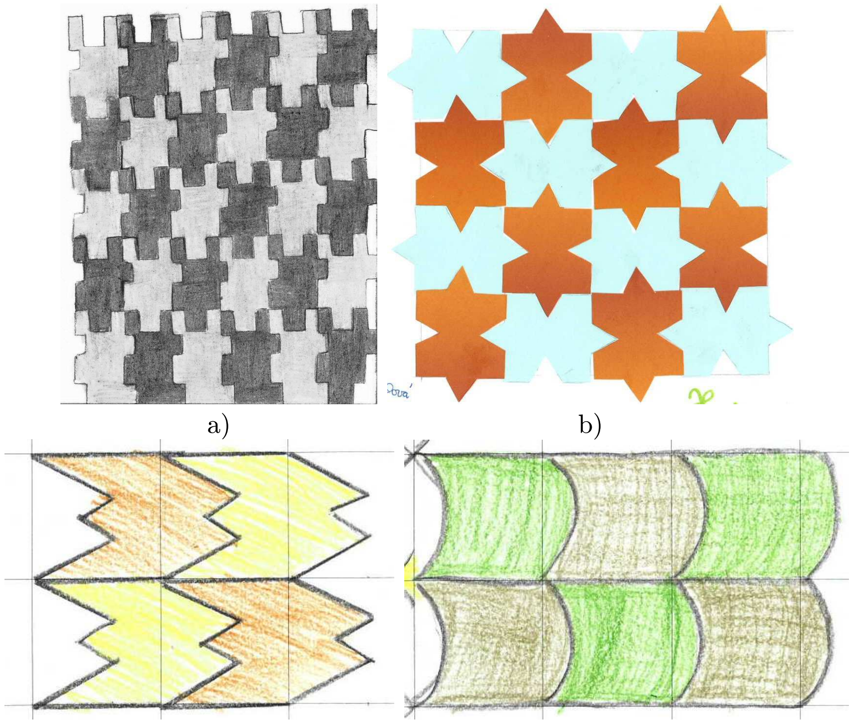
[156] Základní škola Campanus, Jírovcovo náměstí 1782, Praha – Chodov. Téma nenadväzovala na učivo matematiky (napríklad planimetria alebo zobrazenia), bola zaradená v rámci zastupovania v neprítomnosti ich učiteľky matematiky. V triede deviatakov bola dvojica G+P z časti 4.1.1, ostatní žiaci ma nepoznali. Podľa slov ich učiteľky matematiky boli šiestaci v matematike šikovní, zatiaľ čo deviataci boli prospechovo slabí.

i otáčania) boli vysvetlené naraz. Motiváciou k práci boli aj ďalšie teselácie na obr. 87 (najmä teselácia vytvorená z veselých šašov). Úlohou žiakov bolo nakresliť „podobný" obrázok, pričom pri kreslení mali použiť predvedené postupy. Dôraz bol kladený na to, že obrázok má byť zložený z opakujúcich sa rovnakých útvarov, ktoré vznikli zo štvorca alebo pravidelného šesťuholníka pomocou deformácie ich strán a následného posunutia alebo otočenia tejto deformácie; deformácia a jej posunutie alebo otočenie museli byť také, aby sa zachoval obsah pôvodného útvaru. K práci mohli žiaci použiť pripravené štvorcové a šesťuholníkové siete, farebné papiere, ale i ďalšie ľubovoľné pomôcky (napríklad nožnice, pravítko, atď.). Žiakov som požiadala, aby mi na konci druhej hodiny odovzdali všetky kresby, ktoré nakreslia.



Obr. 87 Monoedrálne teselácie použité ako motivačné obrázky (štyri teselácie z nich síce nie sú escherovské, ale je na nich dobre viditeľná požiadavka opakovania jedného útvaru; posledná teselácia je ozdobená ornamentom).

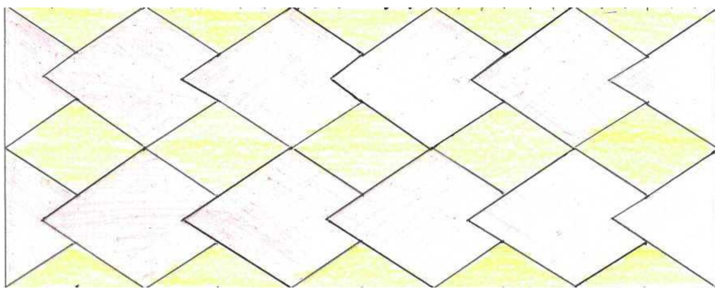
Šiestaci boli pri vysvetľovaní postupov veľmi pozorní; napriek tomu, že sa ešte téme zobrazenia na matematike nevenovali, „procesom" posúvania a otáčania rozumela väčšina (aj keď intuitívne). Ďalšie otázky mi nekládli a do práce sa pustili s veľkým nadšením a hravosťou. Na obr. 88 je niekoľko monoedrálnych escherovských teselácií, ktoré nakreslili šiestaci.



a) b)

c) d)

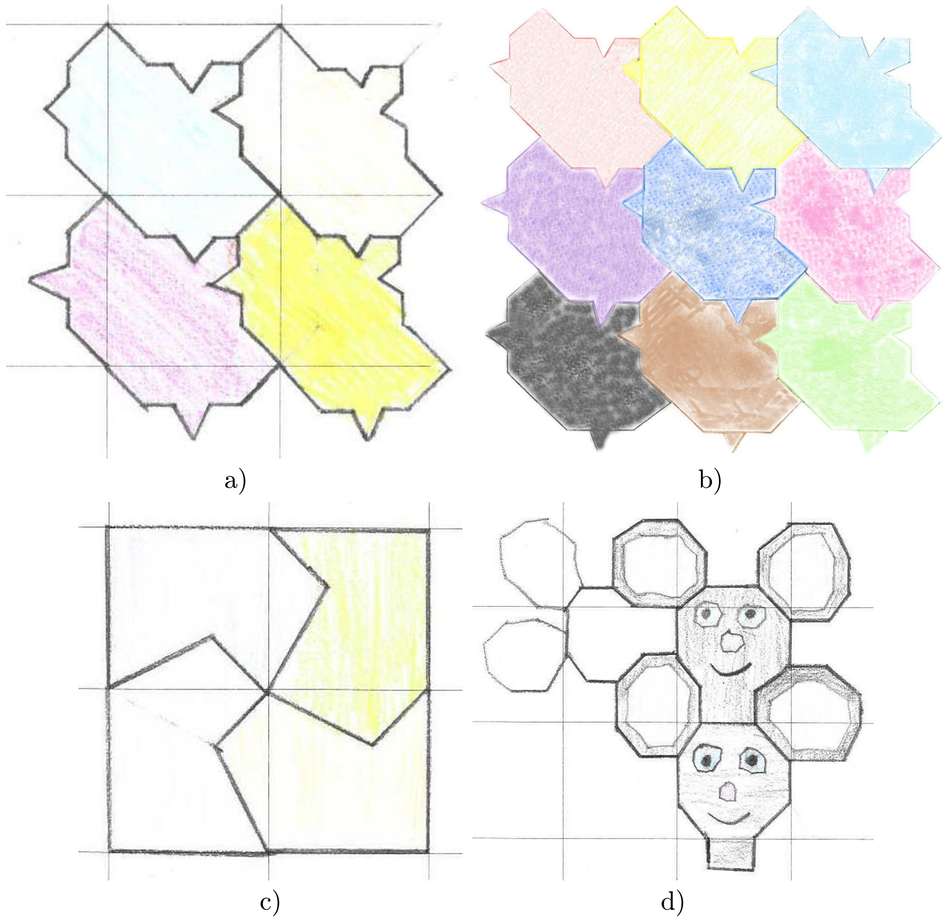
Obr. 88 Monoedrálne teselácie nakreslené žiakmi 6. ročníka: a) grupa $p1$, kategória nekonečno, b), grupa $p4g$, kategória nekonečno, c) grupa pm, kategória koberček, d) grupa pm, kategória koberček.



Obr. 89 Príklad nie monoedrálnej teselácie nakreslenej žiakom 6. ročníka (kategória koberček).

Počas kreslenia mi niektorí žiaci s radosťou ukazovali svoje kresby v rôznych etapách. Mnohí sa pýtali, či pracujú správne; v prípade, že nie, snažila som sa im vysvetliť postup (alebo ich chybu) ešte raz. Napriek tomu výsledkom bolo niekoľko teselácií, ktoré neboli monoedrálne (napríklad obr. 89), alebo pri kreslení žiak nepoužil ani jeden z postupov a výsledkom nebola teselácia. Mnohé zo žiackych kresieb „napodobňovali“ predložené ukážky[157], niektorí žiaci ale vytvorili teselácie s originálnymi celami (napríklad obr. 90).

[157] Šiestakom som ukázala Escherove jašteričky len na ukážku, veľmi sa im páčil motív, ale nikto neprejavil záujem napodobniť ho.



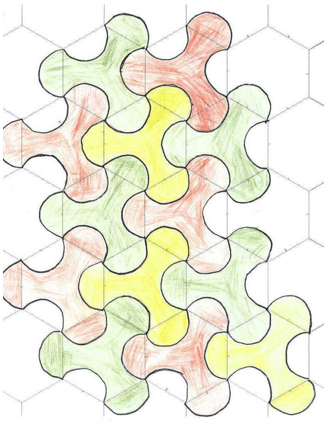
Obr. 90 Aďa (6. ročník): a), b) monoedrálna teselácia s celou veľmi originálneho tvaru[158] (grupa cm, kategória koberček), c) štvorcová dlaždica zložená zo štyroch ciel vytvorených zo štvorca pomocou otočenia deformovanej strany (grupa $p4/p4g$, kategória solitér), d) ďalší obrázok chcela žiačka nakresliť tak, aby bol vtipný, so zvieracím motívom, útvar ale teseláciu nevytvára.

Deviataci sa prejavili typicky pre svoj vek, boli unudení, nechcelo sa im kresliť, napriek tomu pracovali. Pri kreslení som niektorým žiakom poradila, ako môžu ďalej postupovať a upozornila na prípadné chyby, prípadne som ich povzbudila.[159] Niektoré z teselácií, ktoré nakreslili, sú na obr. 91. Deviatakom sa Escherova grafika s jašteričkami veľmi páčila. Jedna zo žia-

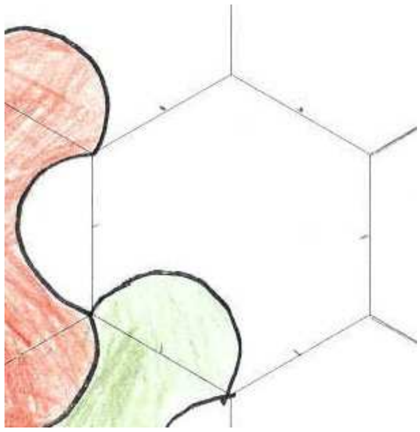
[158] Cela vznikla zo štvorca pomocou dvojnásobného posunutia dvoch rovnako deformovaných susedných strán (ten istý tvar je možné získať otáčaním deformovanej strany). Žiačka odovzdala teseláciu dvakrát – na štvorcovej sieti a prekreslenú na biely papier (je zaujímavé, že bez štvorcovej siete ako podkladu nie je na prvý pohľad zreteľný štvorec ako útvar, z ktorého sa vychádza).

[159] Trieda deviatakov bola podľa slov ich učiteľky matematiky prospechovo slabá. Na hodine bolo viditeľné „rozdelenie“ triedy na dve skupiny – „vodcov“, ktorých učenie a aktivity na hodinách nezaujímali a bezcieľne si kreslili na siete, a „tých ostatných“, ktorých téma zaujala a snažili sa splniť úlohu. Za svoje kresby sa ale trochu hanbili a to pravdepodobne preto, že považovali svoje obrázky za „nie dosť dobré“.

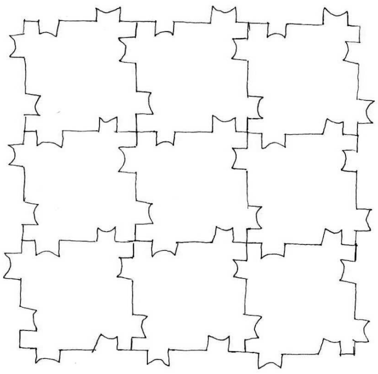
čok sa snažila jaštericku a k nej príslušnú teseláciu aj nakresliť, obrázok chcela dokončiť doma; na druhej hodine už ale chýbala a kresbu neodovzdala.



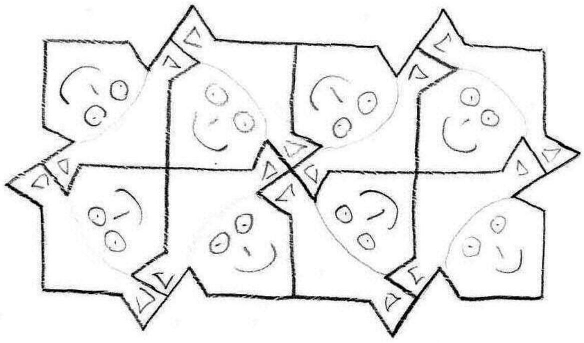
a)



b)



c)



d)

Obr. 91 Monoedrálne teselácie nakreslené žiakmi 9. ročníka (všetky teselácie sú z kategórie koberček): a) grupa $p31m$, b) detail teselácie (z obrázku je viditeľná snaha o čo najpresnejšie vytvorenie teselácie), c) grupa $p4$, d) grupa $p4g$.

Záver:

- Mladší žiaci boli výrazne motivovaní obrázkami, ktoré som im ukázala (napríklad veselý šašo na obr. 87); nebol potrebný ani výraznejší stimul z mojej strany. Starší žiaci boli zaujatí grafikami Eschera (nielen pravidelným delením roviny, ale aj ďalšími z knihy [Escher, 2003]), a napriek svojej počiatočnej nechuti nakreslili niekoľko veľmi pekných teselácií. Ďalším silným motivačným činiteľom bola radosť žiakov z kreslenia samého a u mladších žiakov samozrejme prestíž pred vyučujúcou (niektoré žiačky zo šiesteho ročníka sa ma niekoľkokrát pýtali, či pracujú dobre, a bolo vidieť, že očakávajú pochvalu); na druhej strane boli žiaci, ktorí napriek tomu, že nevyžadovali kontrolu, ani povzbudenie, vytvorili veľmi peknú a originálnu teseláciu (napríklad obr. 90).

- Napriek tomu, že sa mladší žiaci téme zobrazenia v rovine ešte nevenovali, neboli v porovnaní so staršími žiakmi pri použití zobrazení pri vytváraní escherovských teselácií znevýhodnení. Obidve skupiny pochopili bez väčších problémov postup práce, a následne ho aj väčšina žiakov použila pri kreslení (chyby, ktoré sa vyskytli pri kreslení obrázkov a vo výsledných obrázkoch, boli podobné ako v hlavnej štúdii, viď 5.1.2, 5.2.2).
- Podľa toho, či žiaci napodobňovali alebo realizovali vlastný nápad, je možné rozlišovať rekonštruktívnu (napodobňovanie) či konštruktívnu (nový nápad) predstavivosť. Predložené postupy boli zamerané na predvedenie postupov ako vytvoriť jednu celu, postup vytvorenia celej teselácie si žiaci mali zvoliť sami. Niektorí žiaci vytvorili teseláciu tak, že najprv vytvorili jednu celu, ktorú postupne obkresľovali, alebo vystrihli cely z farebných papierov a následne z nich „skladali“ teseláciu. Tvorivosť aj v procese vytvárania je preto v tejto práci veľmi dôležitý faktor.
- Pôvodne som zvolila vysvetlenie postupov s použitím oboch zobrazení naraz. Myslím si ale, že najmä u mladších žiakov je vhodnejšie, keď sa postupy vysvetlia oddelene, a pre každý z nich tak žiak nakreslí 2 obrázky/teselácie. (U starších žiakov je už možné vysvetliť obidva postupy naraz, aby ich mohli skombinovať a vytvoriť celu zložitejšieho tvaru.)
- Tvorivosť pri vytváraní ciel rôznych tvarov z teselácií nakreslených žiakmi v experimentoch z častí 4.1.1 a 4.1.2 som stručne opísala v príspevkoch [Ilucová, 2005a] a [Ilucová, 2006].

4.1.3 Voronojove teselácie

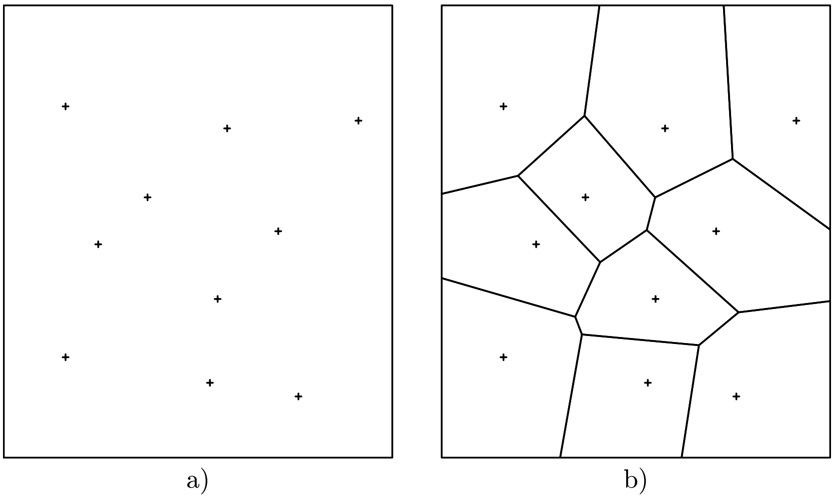
Dôvodom výberu tejto témy do výskumu bolo, že Voronojove teselácie sú častým modelom pre rozdelenie roviny/priestoru, resp. ich časti, na oblasti odpovedajúce prvkom bodovému systému v rôznych vedných disciplínach (viď podkapitoly 2.2, 2.3) a ich konštrukcia je primárne založená na jednoduchej schopnosti zostrojiť os súmernosti úsečky.

Žiakom primy (10–11 rokov) osemročného matematického gymnázia[160] bola predložená úloha o rozdelení určitej časti mesta s nasledujúcim zadaním:

Na obrázku (obr. 92a) *sú schematicky vyznačené zastávky autobusov v určitej časti mesta. Každý človek pracujúci v tejto časti mesta pritom využíva*

[160] Osemročné gymnázium v Košiciach, Alejová 1, Slovensko. Ich učiteľka matematiky bola študentkou doktorandského štúdia didaktiky matematiky na Prírodovedeckej fakulte v Košiciach, a tak boli žiaci zvyknutí na riešenie úloh v rámci rôznych výskumov.

k doprave len tú zastávku autobusu (bez ohľadu na číslo linky), ktorá je k jeho pracovisku najbližšie. Rozdeľte túto časť mesta na oblasti podľa zastávok tak, aby každý človek pracujúci v danej oblasti mal najbližšie k príslušnej zastávke (berieme do úvahy vzdialenosť vzdušnou cestou).[161]



Obr. 92 a) Obrázok so zadanými bodmi – generátormi, b) Voronojova teselácia – správne riešenie úlohy.

Podľa vyučujúcej bola reakcia žiakov nasledujúca: „Žiakom som zadala problém bez bližšieho vysvetlenia. Samú ma zaujímalo, ako 10–11-roční žiaci takto zadanú úlohu pochopia a interpretujú. Väčšina z nich ju riešila tak, že pospájali „zastávky autobusov", a tak vytvorili cestu."

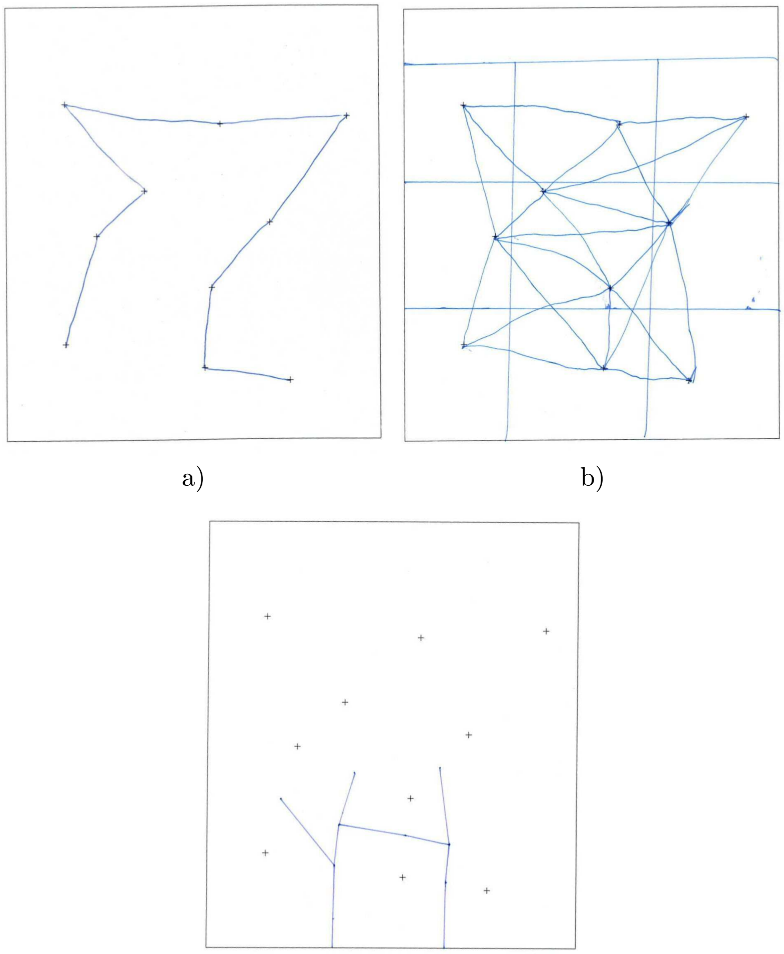
Odovzdaných 26 obrázkov nakreslených žiakmi je možné rozdeliť do troch skupín:

- zadané body na plániku sú spojené uzavretou alebo otvorenou nepretínajúcou alebo i pretínajúcou sa lomenou čiarou – napríklad obr. 93a (16 prípadov),
- časť mesta je rozdelená na štvorcové alebo obdĺžnikové oblasti a body sú taktiež vzájomne spojené lomenou čiarou – napríklad obr. 93b (6 prípadov),[162]
- na plániku je nakreslených niekoľko ciel (1–4 ciel), ktorých hranice boli skonštruované na základe pravidla stredu, ale proces delenia časti mesta nie je ukončený – napríklad obr. 93c (4 prípady)[163].

[161] Vyznačené body na obrázku predstavovali zastávky autobusov, ich polohy boli totožné s polohami bodov, ktoré boli použité ďalej v experimentoch – viď 5.1.1, 5.2.1. Takisto zadanie bolo rovnaké, len sa týkalo staníc metra alebo prístreškov proti dažďu v lese.

[162] Tieto prípady zahrňujú dve rôzne riešenia; pravdepodobne prvým bolo spojenie generátorov lomenou čiarou, druhým rozdelenie na štvoruholníkové oblasti.

[163] Autormi boli dve dievčatá a dvaja chlapci.



a) b) c)

Obr. 93 Príklady k jednotlivým prípadom pri prvom riešení úlohy.

Veľmi zaujímavou bola následná reakcia žiakov; pokračovanie slov vyučujúcej: „Žiaci bez môjho pokynu nad zadaným problémom samostatne premýšľali. Na druhý deň prišlo za mnou niekoľko z nich so svojimi postrehmi a s radostným konštatovaním, že úlohu pochopili. Prosili ma, aby som im znovu rozdala „čisté“, nevypracované pracovné materiály.“[164]

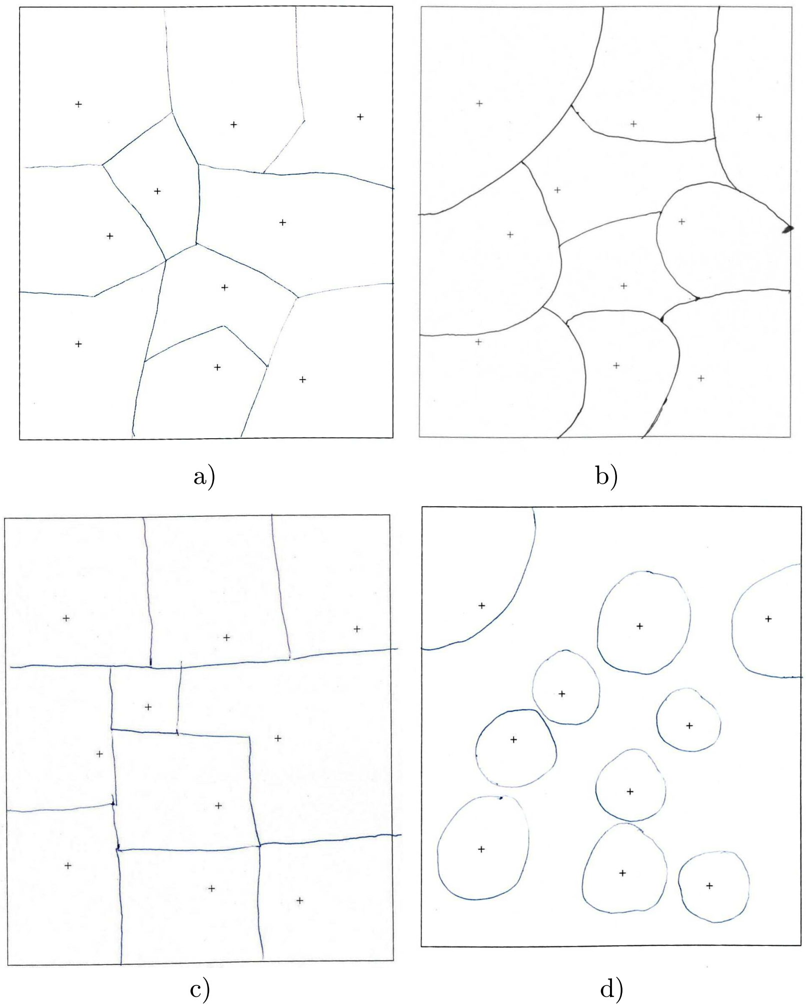
Po opakovanom riešení sa už obrázky, v ktorých by žiaci spojili zadané body lomenou čiarou, nevyskytli, a týchto 26 obrázkov je možné rozdeliť do štyroch skupín:

- teselácie, pri konštrukcii ich hraníc bolo použité pravidlo stredu alebo výnimočne aj pravidlo kolmosti, to sa ale žiakom nedarilo dodržať vo všetkých prípadoch[165] – napríklad obr. 94a (6 prípadov),

[164] Z dodatočného rozhovoru vyplynulo, že žiaci sa hanbili, že úlohu vyriešili nesprávne, a že sa takéto nesprávne riešenia pošlú do Prahy a použijú pre výskum.

[165] Predpokladám, že pravidlo kolmosti žiaci použili neuvedomelo.

– časť mesta je rozdelená na zaoblené oblasti – napríklad obr. 94b (6 prípadov, v 2 z nich sú viditeľné snahy skonštruovať hranice oblastí na základe pravidla stredu),
– časť mesta je rozdelená na pravouhlé oblasti (štvorcové a obdĺžnikové s jedným generátorom v každom pravouholníku) – napríklad obr. 94c (10 prípadov, vo väčšine z nich je určitá malá časť hraníc skonštruovaná na základe stredu, ale pravdepodobne neuvedomelo),
– oblasti sú skonštruované ako kružnice s generátormi vo svojich stredoch – napríklad obr. 94d (4 prípady).



Obr. 94 Príklady k jednotlivým prípadom pri opakovanom riešení úlohy.

Záver:

- Žiaci riešili zadanú úlohu veľmi intuitívne; na hodinách matematiky ešte nepreberali pojem os úsečky. Napriek tomu si myslím, že nad úlohou premýšľali, a aj bez priameho zásahu učiteľa sa v mnohých obrázkoch vyskytujú náznaky správneho riešenia, ktoré sa prejavuje použitím pravidla stredu. Pod vedením učiteľa by žiaci určite mohli v rámci tejto úlohy dôjsť k zavedeniu pojmu osi úsečka (s menším počtom vyznačených bodov).

- Problém okrajov sa v obrázkoch vyskytoval výnimočne; žiaci pri okraji papiera, resp. pri hranici vyznačenej časti papiera, nezaobľovali hranice ciel.
- Silnou motiváciou žiakov bola ich prestíž. Táto trieda bola podľa slov ich učiteľky veľmi hravá a žiaci sa vyznačovali veľkou samostatnosťou.

4.2 Ciele výskumu

Výskum bol od začiatku koncipovaný ako kvalitatívny, jeho úlohou bolo predviesť možnosti vytvárania rovinných teselácií v školskej matematike a schopnosti žiakov pri ich vytváraní/konštrukcii. Priebeh výskumu bol ovplyvnený nasledujúcimi cieľmi, ktoré sa postupne vykryštalizovali na základe výsledkov experimentov z predvýskumu:

1. Pochopiť ako prebieha práca žiakov pri riešení geometricko-výtvarného problému a aké problémy týkajúce sa rovinných teselácií sú žiaci schopní riešiť (aké úlohy do vyučovania zaradiť a ako ich formulovať tak, aby sa do školskej matematiky nezaviedol ďalší nový umelý pojem, poznatok alebo schopnosť).
2. Zistiť, aké javy a kategórie sa pri riešení úloh žiakmi a výsledkoch práce (kresby/konštrukcie) vyskytujú, a charakterizovať úlohy pomocou týchto javov.
3. Opísať priebeh prác niektorých žiakov pri riešení úloh na základe pozorovania a analýzy nakreslených obrázkov.
4. Na základe výsledkov experimentov navrhnúť spôsob zaradenia teselácií do školskej matematiky a zhodnotiť prínos tohoto zaradenia.

Keďže činnosti, ktoré žiaci mali vykonávať pri experimentoch, neboli činnosťami bežnými pre školskú matematiku, vedľajším cieľom bolo naučiť žiakov použiť poznatky a schopnosti z geometrie pri umelecky zadanej úlohe alebo úlohe, v ktorej nebol matematický aparát explicitne požadovaný, a upozorniť ich na výskyt teselácií okolo nás. Obrázky, ktoré žiaci nakreslili, by pravdepodobne bez zadania týchto úloh nevznikli.

4.3 Metódy výskumu

V čase, keď som realizovala prvý experiment v rámci zamerania dizertačnej práce (Štvoruholníkové teselácie – časť 4.1.1), bola moja skúsenosť s výskumom v oblasti didaktiky matematiky veľmi malá. Napriek príprave pred rozhovormi, pri zostavovaní protokolov a analýze priebehu jednotlivých rozhovorov som si uvedomovala svoje mylné predpoklady o práci žiakov a zásahy, ktoré mali negatívny vplyv na ich konanie. Okrem toho mi do analýzy vstupovalo veľké množstvo „sociálnych“ javov (vzájomná spolupráca/nespolupráca žiakov v dvojici, dominancia alebo pasivita jedného z dvojice, atď.) a nevedela som sa sústrediť na geometricko-výtvarný obsah činnosti žiakov. Túto etapu som preto zahrnula do časti predvýskumu.

Obrázky, ktoré ale tri dvojice žiakov nakreslili po týchto rozhovoroch (a ďalší žiaci pri aktivitách v častiach 4.1.2 a 4.1.3), boli presvedčivým dôkazom o ich tvorivosti, dobrej rovinnej predstavivosti a cite pre symetriu. Myslím si, že vznikali prirodzenejšie bez detailného „monitorovania“ celého priebehu práce videokamerou, a „povedali“ mi o svojich autoroch viac, ako som sa snažila zistiť počas rozhovorov. Preto som sa rozhodla použiť ako hlavný zdroj informácií pre analýzu práce žiakov vo svojom výskume práve nimi nakreslené obrázky počas činností, ktorých cieľom je vytvorenie rôznych typov rovinných teselácií. Keďže sa v centre pozornosti ocitol obrázok, musela som sa naučiť pracovať s ním tak, aby mi poskytol čo najviac informácií nielen o statickej zložke činnosti žiaka (výsledkom práce žiaka je alebo nie je teselácia, vzhľad obrázku, atď.) ale aj dynamickej (aký postup práce žiak pri vytváraní obrázku/teselácie zvolil). Až po tomto dlhodobom procese, v ktorom som ja bola žiačkou a žiaci/študenti, resp. nimi nakreslené obrázky mojimi učiteľmi, som sa mohla vrátiť k videozáznamom a nájsť tam to, čo som naozaj chcela skúmať.[166] (Veľmi cennou publikáciou o detskej kresbe je napríklad práca [Kupčáková, 2005].)

Keďže som chcela získať viac obrázkov, a aktivity počas vyučovacej hodiny z častí 4.1.2 a 4.1.3 vyhovovali môjmu zámeru, zvolila som si ako výskumnú vzorku žiakov triedy na vyučovacej hodine. Výskumným nástrojom boli rovnaké (alebo podobne formulované) úlohy ako v dvoch experimentoch z predvýskumu zamerané na konštrukciu escherovských a Voronojových teselácií. Vzhľadom k tomu, že som nemohla zaznamenať postup kreslenia u každého jedinca videokamerou, rozhodla som sa použiť pre záznam priebehu činnosti žiakov/študentov pozorovanie (prípadne zaznamenanie určitých etáp práce fotoaparátom) a výsledný obrázok. Ako pomôcku pre konštrukciu teselácií mohli žiaci/študenti používať siete a schémy s umiestnenými bodmi, ktoré som im rozdala; kresliť mohli ceruzkami (i farebnými) a perami a žiaci nemohli používať pravítka (pre študentov toto obmedzenie neplatilo; pri escherovských teseláciách som dovolila použiť nožnice na vystrihnutie cely).

Nakreslené obrázky som sa snažila analyzovať v dvoch fázach; najprv

[166] Videozáznamy z prvého experimentu boli ale okrem záznamu práce žiakov cenným zdrojom informácií o mne ako výskumníkovi, na základe ktorých som sa mohla pri ďalších aktivitách vyvarovať chýb.

vystupoval obrázok ako *statický prvok* predstavujúci finálny výsledok vytvárania/konštrukcie a potom ako *dynamický prvok* zaznamenajúci proces vytvárania/konštrukcie. Otázky, ktoré som si položila, boli nasledujúce:

A) obrázok ako *statický prvok*

1. predstavuje nakreslený obrázok teseláciu? alebo vzor? ak obrázok nie je teseláciou ani vzorom, prečo ho žiak nakreslil (ak je to možné zistiť bez dodatočného rozhovoru so žiakom)?
2. opakujú sa útvary (cely/motívy) v obrázku pravidelne (mnohouholníkové a escherovské teselácie)? je rozdelenie časti roviny rovnaké ako správne skonštruovaná teseláciá (Voronojove teselácie)? vyskytujú sa v obrázku chyby alebo odchýlky/nepresnosti viditeľné na prvý pohľad?
3. ako vyzerajú jednotlivé cely/motívy? sú rovnaké (mnohouholníkové a escherovské teselácie)? sú cely skonštruované na základe rovnakého pravidla (Voronojove teselácie)?
4. odlišujú sa cely/motívy navzájom od seba, resp. postup ich vytvárania/konštrukcie? v čom spočíva odlišnosť?

B) obrázok ako *dynamický prvok*

1. čo nakreslil žiak ako prvé?
2. ako postupoval pri vytváraní/konštrukcii druhej, tretej, štvrtej, ... cely/motívu?
3. mal žiak nejakú stratégiu pri vytváraní/konštrukcii cely a teselácie? menil ju? vylepšoval ju alebo zotrvával v nej? využil stratégiu „pokus–omyl“?
4. menila sa medzi jednotlivými úlohami daná stratégia? menila sa stratégia v jednotlivých častiach escherovskej teselácie?

A tak na základe analýzy „krok-za-krokom“ som sa snažila určiť jednotlivé javy a kategórie opisujúce obrázok a činnosť, ktorá k jeho vytvoreniu viedla.

4.4 Analýza úloh, skúmané javy a kategórie

V tejto podkapitole podám analýzu úloh z hľadiska obsahu a možného riešenia a predložím javy a kategórie charakteristické pre zadané úlohy. Na rozdiel od predvýskumu som sa rozhodla pre hlavnú časť výskumu zadať len úlohy týkajúce sa Voronojových a escherovských teselácií[167]. Spoločnou charakteristikou všetkých zadaných úloh je vytvorenie/konštrukcia požadovanej teselácie; rovnako ako v experimentoch predvýskumu pri Voronojových teseláciách by ale žiakom nebol vysvetlený postup konštrukcie, pri escherovských by im boli predložené postupy pre vytvorenie jednej cely.

[167] Študentom gymnázia som dodatočne ešte zaradila aj mnohouholníkové teselácie – viď podkapitola 5.1.3.

4.4.1 Voronojove teselácie

Vytváranie Voronojových teselácií, resp. hraníc ich ciel, nazvem konštrukciou, pretože správny výsledok riešenia zadania je jasný, jednoznačný, o tvorivosť a hlavne predstavivosť ide najmä v procese konštrukcie.

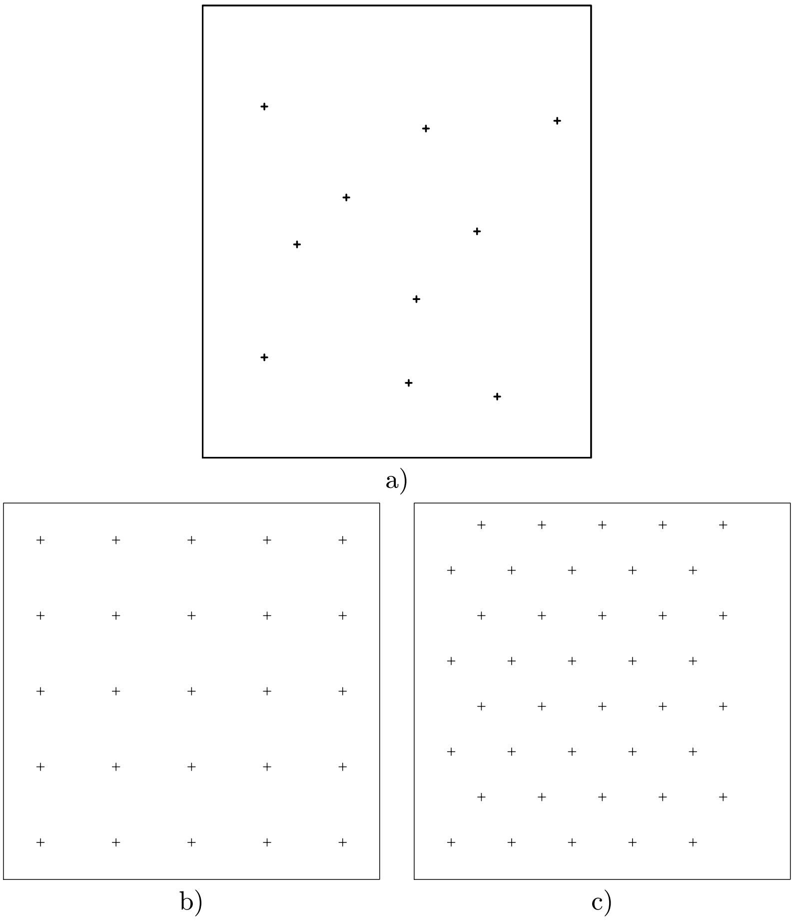
Pri správnej konštrukcii Voronojových teselácií sa vyskytuje *pravidlo stredu*, *pravidlo kolmosti* a k tomu ešte *pravidlo určenia časti osi úsečky ako časti hranice cely* (ďalej už iba *pravidlo určenia*). Prvé pravidlo hovorí o tom, že časť hranice cely prechádza stredom úsečky spájajúcej dva generátory, druhé, že časť hranice je kolmá na túto úsečku (t. j. jednotlivé časti hranice cely sú skonštruované ako časti osí úsečiek dvojíc generátorov), tretie, posledné o tom, že zo skonštruovanej osi je len časť hranicou cely (viď podkapitola 1.2). Pri žiackych riešeniach sa vyskytli aj ďalšie pravidlá, tie sa ale prejavili v prípadoch, kedy žiaci nezostrojili Voronojovu teseláciu, resp. výsledkom konštrukcie nebola vôbec telesácia (viď časť 5.2.1). Príkladom je *pravidlo obsahu*, kedy žiak konštruoval okolo každého generátora hranicu cely tak, aby obsah každej bol približne rovnaký, a *pravidlo tvaru*, kedy žiak konštruoval hranice ciel tak, aby všetky cely mali rovnaký tvar (najčastejšie obdĺžnika), v niektorých prípadoch medzi celami môžu byť medzery.

Pre experiment v hlavnej časti výskumu som zvolila konštrukciu Voronojových teselácií pre nasledujúce prípady bodových systémov:

- bodový systém rozmiestnený „náhodne“[168] – obr. 95a,
- bodové systémy s počtom generátorov 2, 3, 4 a 5, ktorých rozmiestnenie si mali žiaci zvoliť sami,
- bodový systém s generátormi rozmiestnenými vo vrcholoch štvorcovej mriežky – obr. 95b, pričom toto rozmiestnenie navádzalo na tvar ciel výslednej teselácie,
- bodový systém s generátormi rozmiestnenými vo vrcholoch kosoštvorcovej mriežky – obr. 95c, pričom rozmiestnenie navádzalo na tvar ciel menej, resp. ešte mohlo žiakov zmiasť.

Úloha, v ktorej mali žiaci sami rozmiestniť generátory, je zaujímavá svojou „dvojstupňovosťou“. Kým v ostatných úlohách sú bodové systémy vopred zadané, v tejto úlohe je cieľom konštrukcia celej štruktúry Voronojovej teselácie – rozmiestnenie bodového systému i konštrukcia hraníc príslušných ciel.

[168] Polohu bodov určovala poloha zvolených staníc metra v centre Prahy, viď Príloha VII.



Obr. 95 Rozmiestnenie generátorov: a) nepravidelné, b), c) pravidelné (generátory rozmiestnené vo vrcholoch štvorcovej a kosoštvorcovej mriežky).

Pri rozmiestnení generátorov na obr. 95b, c vystupuje dôležitý faktor, ktorý ovplyvnil riešenie u mnohých žiakov – pravidelnosť rozmiestnenia bodového systému. Tá spôsobuje, že už zadaný bodový systém predstavuje pevnú vizuálnu štruktúru (je to nielen množina prvkov – generátorov, ale aj vzťah medzi nimi – rozmiestnenie prvkov vo vrcholoch štvorcovej a kosoštvorcovej mriežky), ktorá je tak dominantná, že sama určuje (správne či nesprávne) tvar oblastí ciel.[169] Rozmiestnenie generátorov vo vrcholoch štvorcovej siete navádza na správne riešenie (obr. 115a, c), vo vrcholoch kosoštvorcovej siete môže byť zavádzajúce (obr. 115b, d). Úlohu som zaradila, pretože ma zaujímalo, či žiaci, ktorí sa naučili (intuitívne či uvedomelo) konštruovať hranice ciel v predchádzajúcich úlohách, budú vedieť objavený postup aplikovať práve na tieto pravidelne rozmiestnené bodové systémy, a či a ako bude pravidelnosť rozmiestnenia ovplyvňovať tvar hraníc ciel.

Skúmané javy a kategórie vyskytujúce sa v úlohách s Voronojovými tese-

[169] Tento jav je možné nazvať izomorfizmus na zrakovej úrovni.

láciami (obrázok ako statický prvok):

tvar ciel

- *oblé:* kružnice, „bubliny“, ...
- *hranaté:* mnohouholníky, „krabičky“, ...

vyplnenie časti plániku

- *solitér* – na obrázku je skonštruovaná jedna, dve alebo niekoľko málo ciel (bez ohľadu na správnosť),
- *„nekonečno“* – cely sú skonštruované pre väčšinu generátorov (bez ohľadu na správnosť).

Skúmané javy a kategórie vyskytujúce sa v úlohách s Voronojovými teseláciami (obrázok ako dynamický prvok):

štruktúra týkajúca sa spôsobu konštrukcie hraníc ciel

- *pevná* – pri konštrukcii hraníc všetkých ciel je dodržaná rovnaká stratégia (všetky alebo aspoň väčšina hraníc ciel je skonštruovaná podľa rovnakého pravidla),
- *slabá* – pri konštrukcii hraníc ciel sa mení stratégia,[170]

použitie zhodných zobrazení – správne/nesprávne

- *stredová súmernosť*,
- *osová súmernosť*,

stratégia riešenia

- *„pokus-omyl“*,
- *prebratie riešenia* (z predchádzajúcej úlohy),
- *použitie pravidiel.*[171]

4.4.2 Escherovské teselácie

Pri monoedrálnych escherovských teseláciách vyjadrujú vzťahy medzi celami navzájom a ich časťami *pravidlo opakovania jedného útvaru*, *pravidlo zachovania obsahu útvaru* a *pravidlo symetrie*. Prvé dve pravidlá vyplývajú priamo z toho, ako je monoedrálna escherovská teselácia zavedená, tretia vyjadruje pravidelné opakovanie cely alebo protocely v teselácii.[172]

Pre escherovské teselácie som stanovila javy, ktoré sa môžu v obrázkoch vyskytovať, spolu s odpovedajúcimi kategóriami. Názvy javov a kategórii som si zvolila sama, pojem kategória koberček [dywanik] je prevzatý z práce

[170] Špeciálny prípad nastáva vtedy, ak žiak mení stratégiu konštrukcie, pričom výsledkom je pochopenie správneho pravidla a jeho aplikácia pri konštrukcii.

[171] Ďalšie javy a kategórie k tejto úlohe sú v podčasti 5.2.1.1.

[172] Pri zavedení pojmov týkajúcich sa rovinných grúp symetrií v časti 1.1.3 som uviedla, že teselácia je špeciálnym prípadom vzoru; pri analýze nakreslených obrázkov však tieto pojmy odlišujem – obrázok nazvem teseláciou, ak bude opakujúci sa útvar uzavretý, t. j. cela, ak sa bude v rovine opakovať neuzavretý motív, tak tento prípad nazvem vzorom.

[Swoboda, 2006]. Prehľad skúmaných javov s charakteristikami jednotlivých kategórií je nasledujúci:

Skúmané javy a kategórie vyskytujúce sa v úlohách s escherovskými teseláciami (obrázok ako statický prvok):

tvar ciel/motívov

- *zložitosť deformácie strany*,
- *násobnosť deformácie strany* – jedno/dvoj/trojnásobnosť,
- *„rovnakosť“* – všetky cely/motívy sú tvarovo rovnaké/rôzne,

farebnosť

- *k-farebnosť* – použitie *k* rôznych farieb v teselácii/vzore,
- *dokonale/nedokonale farebná* – farebnosť teselácie/vzoru je/nie je pravidelná,

pravidelnosť opakovania útvarov

- *grupa symetrie* – vytvorená teselácia/vzor sa vyznačuje jednou zo 17 rovinných grúp symetrie,
- *bez pravidelnosti* – obrázok sa nevyznačuje pravidelnosťou,

teselácia/vzor ako **štruktúra**

- *pevná* – teseláciu/vzor je možné rozširovať donekonečna,
- *slabá* – teseláciu/vzor nie je možné rozširovať donekonečna (dôvodom môže byť napríklad „neteselujúci“/rozdielny tvar opakujúceho sa útvaru),

vyplnenie časti papiera/siete

- *solitér* – na obrázku je niekoľko málo vytvorených, prípadne len naznačených ciel/motívov,
- *pás* – niekoľko ciel alebo opakujúce sa motívy vytvárajú pás v jednom smere[173],
- *koberček* – na sieti je nakreslená teselácia/vzor vytvárajúca „obdĺžnikový“ (pri šesťuholníkovej sieti „kosodĺžnikový“) útvar,
- *nekonečno* – teselácia alebo vzor sú zakreslené na celej sieti, v niektorých prípadoch sú naznačené časti ciel až po okraj.

Skúmané javy a kategórie vyskytujúce sa v úlohách s escherovskými teseláciami (obrázok ako dynamický prvok):

použitie zhodných zobrazení

- *posunutie* – správne/nesprávne použitie nielen pri vytváraní jednej cely ale i celej teselácie,
- *otočenie* – správne/nesprávne použitie nielen pri vytváraní jednej cely ale i celej teselácie,

[173] Počet ciel/motívov a ich usporiadanie je ale dostatočné k tomu, aby bolo zrejmé, že žiak splnil úlohu.

stratégia riešenia

– *„pokus-omyl“*,
– *použitie analógie*,
– *použitie pravidiel*,

zameranie práce na...[174]

– *splnenie zadanej úlohy*,
– *tvar* opakujúceho sa útvaru/motívu a/alebo vytvorený *ornament* na ňom,
– *vyplnenie siete*,
– *proces vytvárania*.

[174] Bližšie vysvetlenie jednotlivých kategórií tohoto javu je priamo v podčasti 5.2.2.1.

Kapitola 5

Experimenty a ich analýza

Pre experimenty v hlavnej časti výskumu som si nakoniec zvolila za skúmanú vzorku dve skupiny – študentov štvorročného gymnázia[175] a žiakov primy osemročného gymnázia[176] (pre jednoduchosť budem skupinu stredoškolákov väčšinou nazývať študenti, mladších žiakov žiaci). Dôvodom zaradenia skupiny študentov bolo to, že som ich učila matematiku a videla som tak príležitosť porovnať prácu (a jej výsledky) žiakov základnej školy, ktorí nemali skúsenosť so zhodnými zobrazeniami v školskej matematike, s prácou stredoškolákov, pre ktorých zhodné zobrazenia predstavovali známu matematickú tému. Pri oboch skupinách som sa snažila, aby experimenty prebehli v podmienkach vyučovania (alebo takých, ktoré sa budú od takýchto podmienok čo najmenej odlišovať – napríklad 5.2.1), resp. v rámci domácej prípravy na vyučovanie. Pri experimentoch som chcela získať nielen čo najviac informácií a obrázkov pre výskum, dúfala som, že sa žiaci a študenti naučia vytvárať teselácie (pod mojím vedením, vedením vyučujúcej v danej triede alebo na základe samostatnej práce) a uvedomia si existenciu teselácií okolo nás.

V úlohách sa žiaci a študenti venovali dvom, resp. trom zvoleným typom teselácií:[177]

- *Voronojove teselácie* (časť 5.1.1, 5.2.1),
- *escherovské teselácie* (časť 5.1.2, 5.2.2),
- *mnohouholníkové monoedrálne teselácie* (len študenti, časť 5.1.3).

[175] Gymnázium Bernarda Bolzana, V Holešovičkách 2, Praha 8 (od septembra 2009 zrušené).

[176] Gymnázium J. Gutha – Jarkovského, Truhlářská 22, Praha 1.

[177] Postupnosť tém sa odlišovala od postupnosti z predvýskumu; pre študentov gymnázia som to považovala za prirodzenejšie, u žiakov primy som potom postupnosť zachovala, aby som mohla výsledky oboch skupín aspoň v niektorých bodoch porovnať.

Získané obrázky (teselácie ale aj ostatné, ktoré spĺňali určité pravidlo charakteristické pre požadované teselácie) som tak posudzovala podľa nasledujúcich oblastí:

- *zhodné zobrazenia* pri vytváraní/konštrukcii jednotlivých ciel (hraníc ciel) a/alebo celej teselácie,
- teselácia/vzor ako systém prvkov (útvarov/motívov), medzi ktorými sú určité vzťahy – *štruktúra*,
- konštruktívna a rekonštruktívna *rovinná predstavivosť* a jej zložky pri vytváraní/konštrukcii cely a teselácie (tak ako som ich vymedzila v podkapitole 3.1),
- *tvorivý proces* a *tvorivý produkt* pri vytváraní/konštrukcii cely a teselácie (tak ako som si ich vymedzila v podkapitole 3.2).

Vymenované oblasti sú úzko prepojené a navzájom sa ovplyvňujú, takže často nie je možné ich rozlíšiť.

V ďalšom texte sa najprv zaoberám opisom práce študentov (podkapitola 5.1 – Gymnazisti), ktorý uvádzam najmä kvôli porovnaniu (nepodávam ale detailnú analýzu ich prác), potom predkladám analýzu prác žiakov (podkapitola 5.2 – Primáni) primy v dvoch rovinách – riešenia žiakov v jednotlivých úlohách a riešenia niektorých žiakov, ktorých práca ma zaujala.

5.1 Gymnazisti

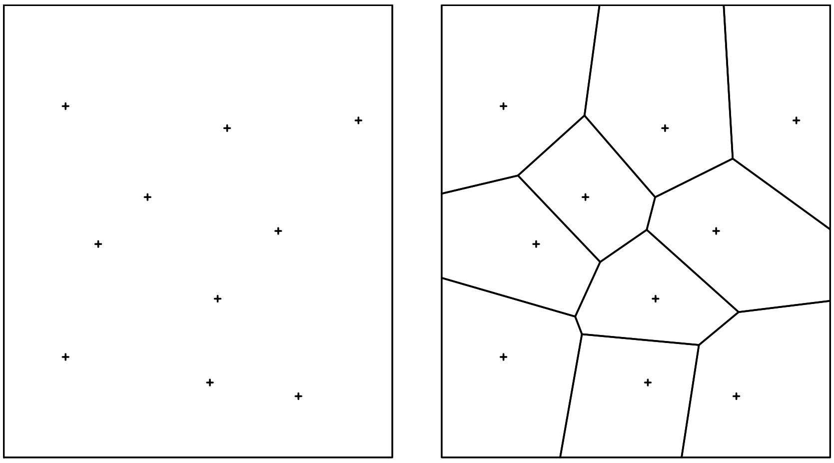
Charakteristika triedy: triedu tvorilo 8 dievčat a 11 chlapcov (štvorročné všeobecno-vzdelávacie gymnázium); matematiku som ich učila tri roky (2. – 4. ročník). Prospech z matematiky pokrývali klasifikačné stupne 1 – 4; v mnohých prípadoch známka nevyjadrovala ich schopnosti a možnosti, bola ale ovplyvnená ich lenivosťou a nepozornosťou. Z triedy sa nadpriemernými matematickými schopnosťami prejavovala jedna študentka, ďalší traja boli na veľmi dobrej úrovni. V prípade úloh, ktoré neboli štandardnými matematickými úlohami, a študenti nečakali ich výskyt v písomných prácach, neboli veľmi ochotní pracovať (to sa odrazilo aj v počtoch odovzdaných obrázkov, ktoré študenti v rámci výskumu odovzdali).

5.1.1 Voronojove teselácie

Na začiatku školského roku v 2. ročníku bola študentom zadaná úloha[178] sformulovaná nasledovne:

[178] Úloha bola zadaná ako zaujímavý problém, nesúvisela s témou, ktorej sme sa v danom období venovali.

Na obrázku (obr. 96a) *sú schematicky vyznačené stanice metra v centre Prahy (viď mapa)*[179]*. Každý človek pracujúci v tejto časti Prahy pritom využíva na cestu domov z práce len tú stanicu metra (bez ohľadu na trasu A, B, C), ktorá je k jeho zamestnaniu najbližšie. Rozdeľte centrum Prahy na oblasti podľa staníc metra tak, aby každý človek pracujúci v danej oblasti mal najbližšie k príslušnej stanici metra (berieme do úvahy vzdialenosť vzdušnou cestou).*[180]



a) b)

Obr. 96 a) Vyznačené body predstavujú stanice metra vo vybratej časti centra Prahy[181], b) Voronojova teselácia generovaná zadaným bodovým systémom.

Po zadaní úlohy nastala medzi študentmi krátka diskusia týkajúca sa tvaru požadovaných oblastí („... sú [hranice jednotlivých oblastí] to kružnice?“, „nie, budú hranaté...“, „budú to mnohouholníky? ... štvorce?“), do ktorej som aktívne nevstupovala. Úlohu mali vyriešiť v rámci domácej prípravy a písomné riešenie odovzdať do jedného týždňa. (Počas tohoto obdobia nikto zo študentov neprišiel za mnou úlohu konzultovať.)

Bolo odovzdaných 12 obrázkov, ktoré je možné rozdeliť do troch skupín:

– správne skonštruované Voronojove teselácie, pri konštrukcii ich hraníc boli použité všetky tri pravidlá – napríklad obr. 97a, b (4 prípady, presnosť konštrukcie je porovnateľná s konštrukciou vytvorenou počítačom – obr. 96b),

---

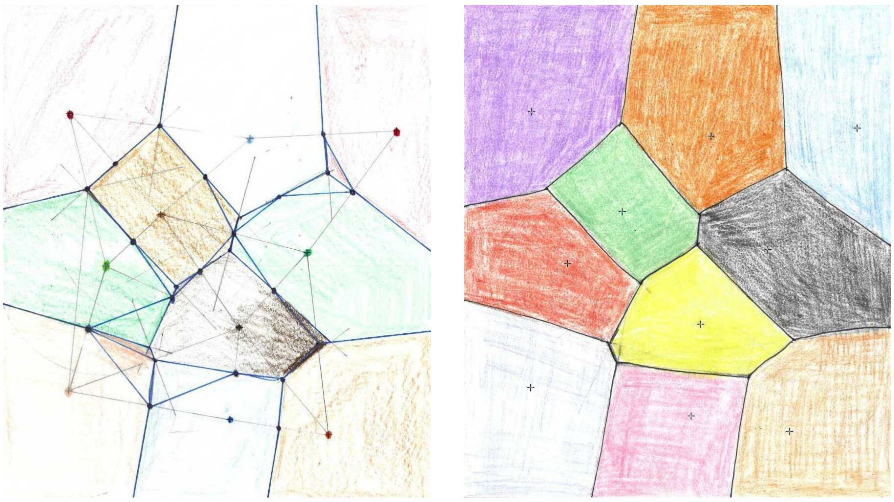
179 Mapa viď Príloha VII.

180 Rozšírením úlohy by mohlo byť vytvorenie hraníc jednotlivých oblastí s prihliadnutím k efektivite jednotlivých staníc (t. j. počet pasažierov za deň alebo iný časový interval).

181 Vyznačené stanice metra: linka A – Staroměstská, Můstek, Muzeum, Náměstí míru, linka B – Florenc, Náměstí republiky, Můstek, Národní, Karlovo náměstí, linka C – Florenc, Hlavní nádraží, Muzeum, I. P. Pavlova (kvôli jednoduchosti bol pri každej stanici metra zvolený len jeden výstup).

– teselácie, pri konštrukcii ich hraníc bolo použité pravidlo stredu alebo pravidlo kolmosti (alebo obidve pravidlá súčasne), vytvorená teselácia ale nie je pevnou štruktúrou a lokálne sa vyznačuje chybami – napríklad obr. 98, obr. 99a (5 prípadov, dva obrázky z nich boli nakreslené voľnou rukou),
– obrázky, v ktorých majú oblasti (cely) tvar kruhov alebo ich hranice sú zaoblené a nevykazujú použitie ani jedného z pravidiel – napríklad obr. 99b (3 prípady, kreslené voľnou rukou, resp. kružidlom).

V teselácii na obr. 97a je dobre viditeľné riešenie, v ktorom boli použité všetky tri očakávané pravidlá. Na obr. 97b sú viditeľné časti kružníc a priamok zostrojených ako osi jednotlivých úsečiek spájajúcich generátory (niektoré „čiary" sú vygumované a skonštruované opäť, aby konštrukcia bola najpresnejšia); študentka nakoniec konštrukciu hraníc prekryla vyfarbením ciel. Veľmi zaujímavé sú nesprávne (alebo čiastočne nesprávne) riešenia, ktoré sú niekedy cennejším zdrojom informácií o myslení študenta ako tie správne. Na obr. 99a je rozdelenie časti roviny pomocou zakrivených čiar (v jednotlivých rovnobežných pásoch študent ďalej oddeľuje od seba oblasti, pričom sa pri rozdeľovaní snaží dodržať pravidlo stredu)[182]. Ďalšie zaujímavé riešenie je na obr. 99b, kde študent zostrojil kružnice s generátormi ako stredmi; keď som ho upozornila, že ľudia môžu pracovať aj mimo týchto kružníc, pokrčil plecami.



a) b)

Obr. 97 Správne skonštruované Voronojove teselácie: a) Jana, b) Alena.

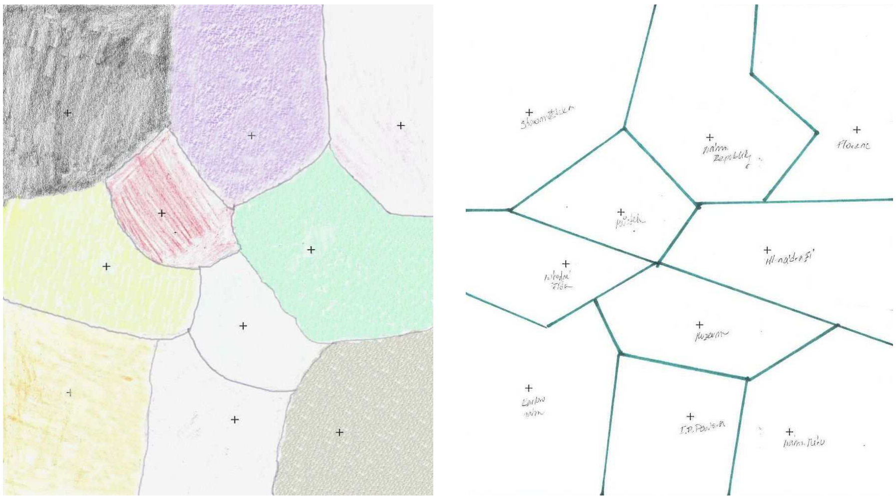
Keď som sa študentov po odovzdaní opýtala, ako úlohu riešili, väčšina z nich odpovedala stručne, že „... normálne". Preto som im zadala pokra-

[182] Taktiež je možné, že študent nemal rysovacie potreby a preto radšej, ako by mal nakresliť nerovné čiary, zvolil si tieto „zvlnené" hranice.

čovanie úlohy, v ktorom mali skonštruovať rovnaké rozdelenie časti mesta pre menší počet staníc metra – 2, 3, 4 a 5 (rozmiestnenie bodov si mali zvoliť sami), a požiadala som ich, aby k obrázkom napísali slovný popis postupu práce. Rozšírenie úlohy som odôvodnila tým, že niektoré ich riešenia neboli úplne správne, a že s menším počtom bodov bude konštrukcia pre nich jednoduchšia. Úroveň týchto odovzdaných konštrukcií sa od úrovne konštrukcie pre 10 generátorov veľmi nelíšila (napríklad obr. 100), ale bolo v nich jednoduchšie sledovať postup a „správnosť“ riešení. Z postupov, ktoré študenti pripojili, je jasné, že princíp konštrukcie väčšina pochopila úplne alebo aspoň čiastočne:

Alena (obr. 97b, obr. 100): „Pomocou kružníc nájdeme stredy medzi najbližšími bodmi, skonštruujeme osi. Vzniknú nám čiary a podľa nich sa dá určiť, ku ktorej stanici metra je to najbližšie.“

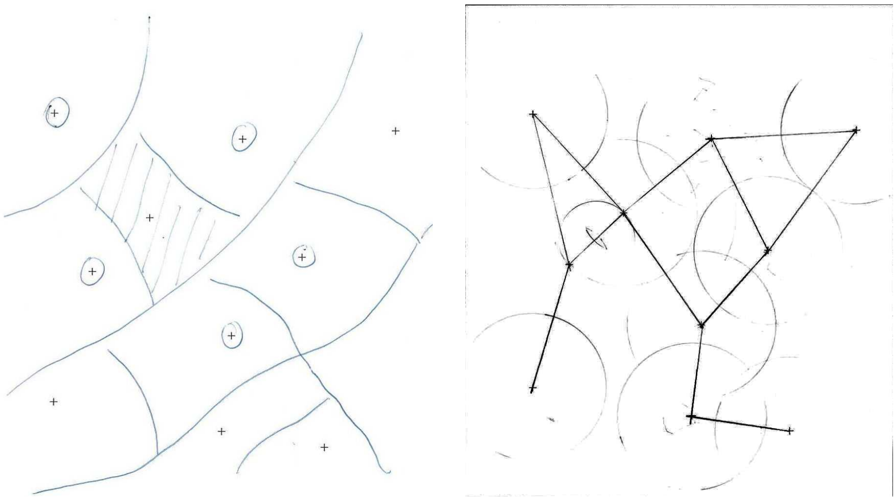
Jana (obr. 97a): „1. Pre každé dva body (napríklad A a B) určíme priamku, ktorá je kolmá na úsečku (AB), a prechádza jej stredom. 2. Vymedzíme územie pre daný bod, to je určené narysovanými priamkami. Vyberieme tie, ktoré sú k bodu najbližšie; zistíme, ako sa pretínajú. Plochu, ktorú chceme získať, ohraničujú všetky priamky. 3. To isté urobíme pre ďalšie body. Poznámka: Niekedy nie je územie ohraničené priamkou, ale napríklad okrajom papiera, či iným ohraničením plochy.“



a) b)

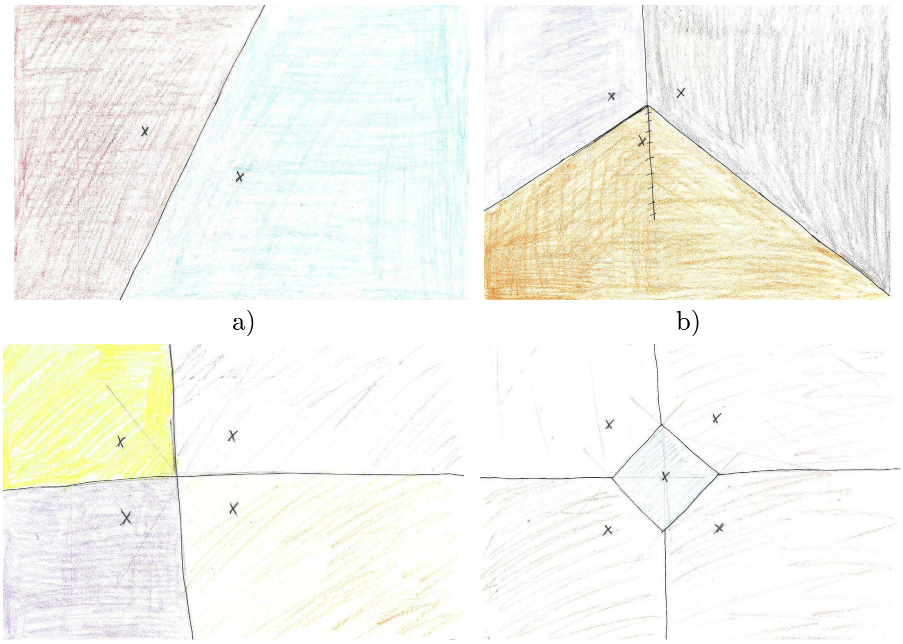
Obr. 98 a) Martin: teselácia skonštruovaná voľnou rukou, študent zachováva pravidlo stredu a pri niektorých dvojiciach generátorov sa snaží zachovať aj pravidlo kolmosti, keďže ale konštrukcia je nepresná (prevedená voľnou rukou), jednotlivé hranice by sa mu „nestretli“ vo vrcholoch, a tak ich „zaobľuje“[183], b) Táňa: hranice ciel teselácie skonštruované len na základe pravidla stredu.

[183] Obrázok nebolo možné lepšie digitálne spracovať, preto som hranice oblastí dodatočne vyznačila.



a) b)

Obr. 99 a) Václav: študent sa snažil použiť pri konštrukcii hraníc ciel pravidlo stredu (zakrúžkovanie generátorov nesúvisí priamo so zadanou úlohou), b) Norbert: oblasti skonštruované ako systém kružníc (študent konštrukciu nedokončil).



a) b)

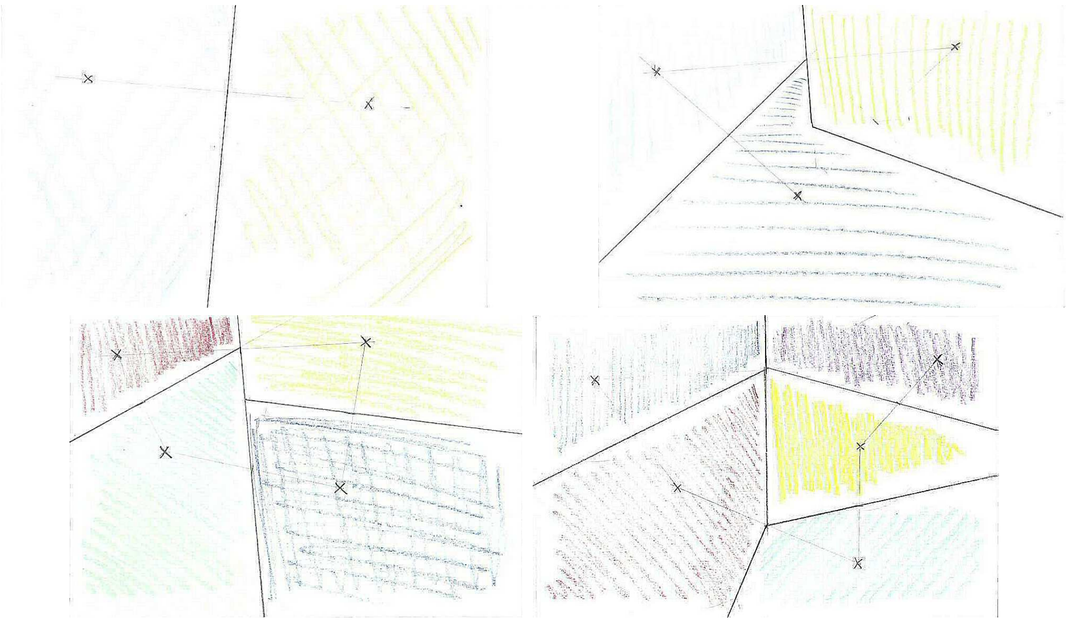
c) d)

Obr. 100 Alena: Voronojove teselácie s menším počtom generátorov. (Zaujímavosťou je usporiadanie generátorov; pri pridávaní ďalšieho bodu využíva predchádzajúci prípad s menším počtom generátorov.)

Nevýhodou bolo, že študenti, ktorých konštrukcia Voronojovej teselácie v prvom prípade nebola správna, konštrukcie pre menší počet generátorov neodovzdali, a tak som nemohla zistiť, či došlo k zmene zmýšľania. (Ako dôvod neodovzdania jeden zo študentov vyhlásil, že zadaná úloha bola „blbosť“.)

Zaujímavé sú teselácie na obr. 101 od študentky, ktorá skonštruovala aj teseláciu na obr. 98b. Jej opis postupu: „Postup pri všetkých obrázkoch je rovnaký. Vždy som si zvolila daný počet bodov (ľubovoľne). Všetky body som spojila priamkami a pomocou kružidla som našla stredy týchto priamok. Potom som tieto stredy spojila a vznikli mi výsledné obrazce.“ Študentka si naozaj spojila dvojice bodov, vyznačila ich stredy, a úsečky viedla cez ne (pravidlo stredu použila takmer vo všetkých prípadoch), pravidlo kolmosti použila nevedome približne v tretine dvojíc; výsledkom konštrukcií sú tak teselácie s „lomenými“ časťami hraníc medzi niektorými dvojicami generátorov.

K riešeniam študentov sme sa vrátili na hodine matematiky. Vysvetlila som im, na akom princípe bolo postavené riešenie úloh (konštrukcia osi úsečky), ukázala som im, aké malo byť správne riešenie, a kto z nich mal teselácie skonštruované správne. Zhrnuli sme, prečo niektorí z nich urobili chyby, resp. prečo sa konštrukcie niektorých líšili (viac či menej) od správneho riešenia. Nakoniec som im prezradila názov teselácie, ktorú skonštruovali (to sa im zdalo veľmi zábavné) a jej aplikáciu v praxi. Asi o dva mesiace sme sa k Voronojovým teseláciám vrátili na hodine fyziky pri modele rastu zŕn polykryštalických látok zo zárodočných jadier (obr. 35).

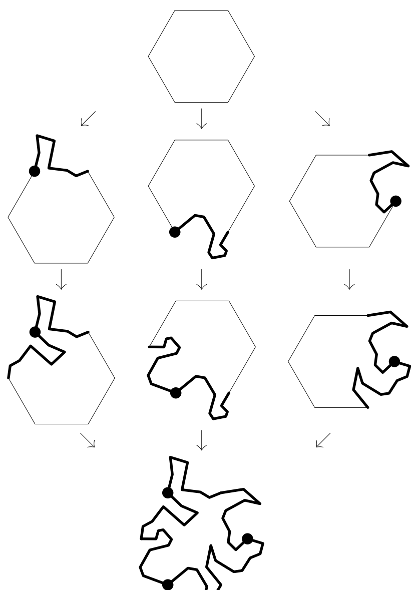


Obr. 101 Táňa: nesprávne skonštruované Voronojove teselácie s menším počtom generátorov (študentka využila len pravidlo stredu).

Napriek jednoduchému princípu a skúsenostiam študentov, nie všetci boli schopní správne konštrukciu realizovať. Aj to dokazuje formálnosť osvojenia poznatku o množine bodov danej vlastnosti zo školskej geometrie. Okrem toho, zadanie úlohy sa zdalo študentom neodôvodnené, nelogické a detské. Je možné, že ak by úloha bola formulovaná čisto matematicky (t. j. rozdeľte rovinu na oblasti prislúchajúce jednotlivým bodom – generátorom – tak, aby body v oblastiach boli bližšie k danému generátoru ako k iným), študenti by ju neprijali tak odmietavo. Na druhej strane pre väčšinu študentov predstavovala nimi vytvorená teselácia pevnú štruktúru, pretože v celej konštrukcii zachovali rovnaký postup.

5.1.2 Escherovské teselácie

Na konci tematického celku *Zobrazenia* v 3. ročníku som študentom ukázala niektoré Escherove grafiky využívajúce motív teselácií.[184] Porozprávala som príbeh jašterice z Escherovho obrazu (viď podkapitola 2.1). Na rovnakých papierových modeloch ako v experimente z predvýskumu (obr. 86) som vysvetlila escherovské postupy využívajúce posunutie a otočenie; na obr. 102 som predviedla postup, akým mohol byť teselujúci útvar (jašterička) skonštruovaný. Zadala som študentom úlohu: *nakresliť „podobný“ obrázok, v ktorom by sa opakoval útvar vytvorený zo štvorca alebo pravidelného šesťuholníka pomocou vysvetlených postupov tak, aby obsah vytvoreného útvaru bol rovnaký ako obsah pôvodného.* K práci dostali štvorcové a šesťuholníkové siete.



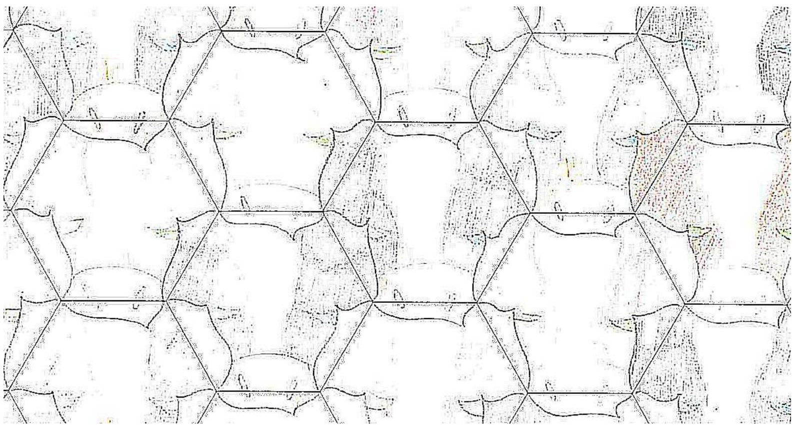
Obr. 102 Postup, ktorý je možné použiť pri konštrukcii útvaru v tvare jašteričky z pravidelného šesťuholníka.

[184] S niektorými Escherovými grafikami sa študenti stretli už na hodinách fyziky ako s optickými klammi. Študenti sa zoznámili aj s publikáciami [Escher, 2003] a [Bool a kol., 2000]; Escherova tvorba sa im veľmi páčila.

Napriek veľkému a reálnemu záujmu študentov o Escherove grafiky, úloha nimi nebola prijatá pozitívne; k vlastnej tvorbe boli veľmi apatickí, odôvodňovali to svojím nenadaním pre kreslenie (dokonca jeden študent povedal, či by sme sa nemohli radšej venovať „normálnej“ matematike).[185]

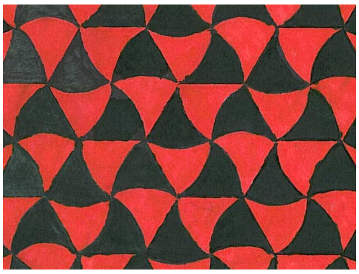
Väčšina študentov kreslila obrázky až doma (počas dvoch vyučovacích hodín čmárali po papieri a rozprávali sa; na moju otázku, prečo nepracujú, mi odpovedali, že vymýšľajú motív). Bolo odovzdaných 12 prác od jedenástich študentov; 3 práce boli nakreslené na štvorcových sieťach, ostatné na šesťuholníkových. Niektorí zo študentov nevytvorili monoedrálnu teseláciu, ale vo všeobecnosti vzor alebo mozaiku, pretože nedodržali pravidlo uzavretosti útvaru alebo pravidlo opakovania jedného útvaru, napriek tomu, že som dané požiadavky zdôraznila. Odovzdané obrázky je možné rozdeliť do nasledujúcich skupín:

- escherovská teselácia (len 3 prípady zo všetkých) – obr. 103, obr. 104, obr. 105,
- monoedrálna mnohouholníková teselácia, ktorá nevznikla použitím escherovských postupov (2 prípady) – napríklad obr. 106,
- obrázok – mozaika/vzor – splňujúci určitú požiadavku charakteristickú pre escherovské teselácie (5 prípadov) – napríklad obr. 107,
- teselácia – mozaika (viacero rôznych útvarov, ktoré sa v určitom usporiadaní opakujú; 3 prípady) – napríklad obr. 108.

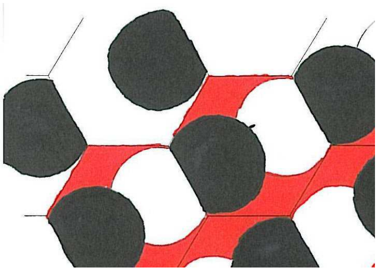


Obr. 103 Dáša: cela escherovskej teselácie predstavuje hlavu kravičky, pri jej vytvorení študentka použila posunutie (grupa $p1$, kategória nekonečno).

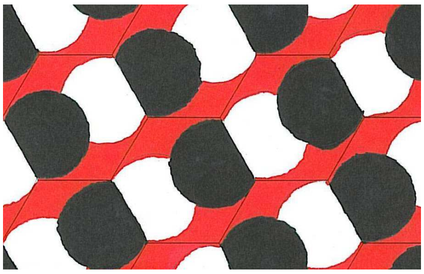
185 Pri tejto aktivite práve presvedčenie študentov o svojich slabých umeleckých schopnostiach bolo výraznou prekážkou v tvorivej činnosti. Na druhej strane študenti z tejto triedy vytvorili z matematiky dve skvelé seminárne práce, v ktorých prejavili svoje tvorivé schopnosti (prvá bola zameraná na zobrazenia, pričom študenti mali odfotiť budovy alebo predmety vyznačujúce sa symetriami; v druhej seminárnej práci štatisticky spracovávali hodnoty kvalitatívnych a kvantitatívnych štatistických znakov získaných v anketách, ktoré sami vytvorili, a v nich aj odpovedali na zadané otázky).

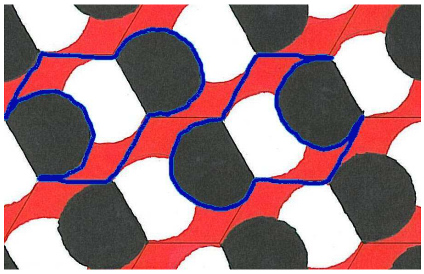


Obr. 104 Vojtěch: escherovská teselácia (grupa $p3$, kategória nekonečno)[186].



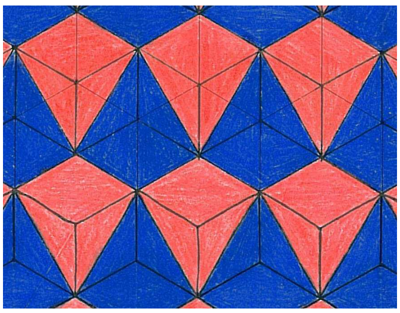
a)





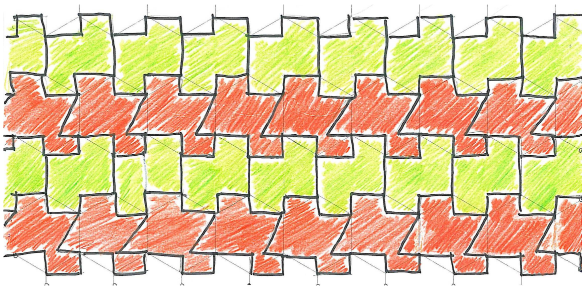
b) c)

Obr. 105 Tomáš: a) naznačený postup vytvorenia jednej cely, b) študent nevyznačil výrazne hranicu výslednej cely, preto na prvý pohľad nie je jasná správnosť (pri vytvorení cely bolo použité posunutie, pri vytvorení teselácie posunutie a zrkadlenie), c) teselácia s vyznačenými hranicami dvoch ciel (grupa pmg, kategória nekonečno).

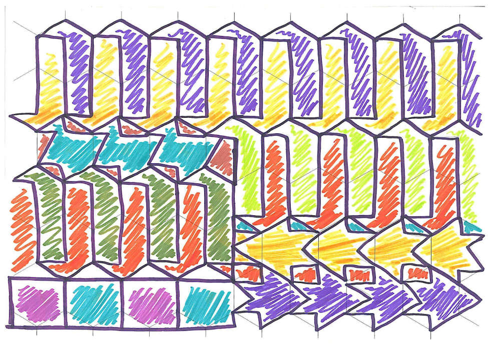


Obr. 106 Alena: celu teselácie vytvára deltoid (ako časť pravidelného šesťuholníka) opakujúci sa v dvoch zrkadlových „pásoch“ (obrázok čiastočne vyvolá trojrozmerný pocit; grupa pmg, kategória nekonečno).

[186] Študent sa nechal inšpirovať jednou z teselácií na obr. 87, ktoré som im ukázala.



Obr. 107 Darina: diedrálna teselácia zložená z dvoch „pásov“, základnou celou prvého je teselujúci schodovitý útvar (svetlá/zelenožltá farba), ktorý je deformovaný, cela druhého pásu (tmavšia/červená) je vytvorená escherovským postupom z prvej cely (kategória koberček).



Obr. 108 Karin: na jednej šesťuholníkovej sieti vytvorila štyri teselácie s pravidelnými farebnými zmenami, ani jedna z nich ale nie je escherovská (dôležité je pre ňu opakovanie tvaru a farebnosti; kategória koberček).

Vytváranie escherovských teselácií chápali študenti dvojako. Na jednej strane to bola činnosť „pod ich úroveň“, „kreslenie“ vhodné pre malé deti (tento vplyv mohli mať aj jednoduché teselácie, ktoré som im predviedla ako ukážky). Na druhej strane bola požadovaná činnosť „nad ich úroveň“, pretože svoje nápady porovnávali s motívmi na Escherových obrazoch a nedôvera v svoje schopnosti bola veľkou prekážkou pri vymýšľaní motívu. Obrázky, v ktorých študenti nakreslili vzor alebo mozaiku (nie escherovskú teseláciu), dokazujú aj ich roztržitosť a slabú schopnosť hľadať spoločné a odlišné vlastnosti (charakteristiky) predložených ukážok a svojich vlastných nápadov, s čím som sa stretávala často počas práce s nimi. Všetky odovzdané obrázky (aj tie neuvedené) predstavovali ale pevnú štruktúru, v ktorej študenti prísne zachovali pravidelnosť opakujúceho sa motívu.

5.1.3 Mnohouholníkové monoedrálne teselácie

So zaradením tejto úlohy som pôvodne nepočítala, úlohu som zadala spontánne na odľahčenie témy počas seminára z matematiky[187] a samos-

[187] Seminár z matematiky v 3. ročníku bol zameraný na funkcie, diferenciálny a integrálny počet.

tatné riešenie vyplynulo prirodzene z ich záujmu (mala som pocit, že študentov tento problém naozaj zaujal, napriek tomu, že bol v porovnaní s predchádzajúcimi abstraktnejší).[188] Otázka, ktorú som položila študentom navštevujúcim tento seminár, znela nasledujúco: *ktorý mnohouholník je možné v rovine opakovať bez medzier a prekrytí tak, že jeho strany vytvoria sieť (podobne ako strany štvorca)?* Na hodine sme úlohu riešili spoločne pre štvoruholníkové cely: pre prípad obdĺžnika, kosoštvorca a kosodĺžnika slovne (sami študenti navrhli hneď tieto typy štvoruholníka ako možný základ pre sieť), teselácie z ďalších štvoruholníkových ciel (lichobežník, všeobecný konvexný a nekonvexný štvoruholník) si študenti kreslili na papier. Študenti sami objavili a sformulovali pravidlo príslušných strán a príslušných uhlov pre štvoruholníkové teselácie (v celách si vyznačili vnútorné uhly). Ako domácu úlohu som im zadala, aby nakreslili desať rôznych mnohouholníkových útvarov (nie štvoruholníkov a trojuholníkov), ktorých strany pri opakovaní v rovine bez medzier a prekrytí vytvárajú siete. Návod na riešenie som im nedala, ani študenti mi nepoložili ďalšie otázky. Pri zadávaní tejto úlohy neprejavili nezáujem, prekvapila ma aj ich nasledovná vzájomná diskusia k tejto téme počas prestávok; úlohu chápali ako „normálnu“ úlohu z geometrie, pravdepodobne z dôvodu jeho abstraktnosti.

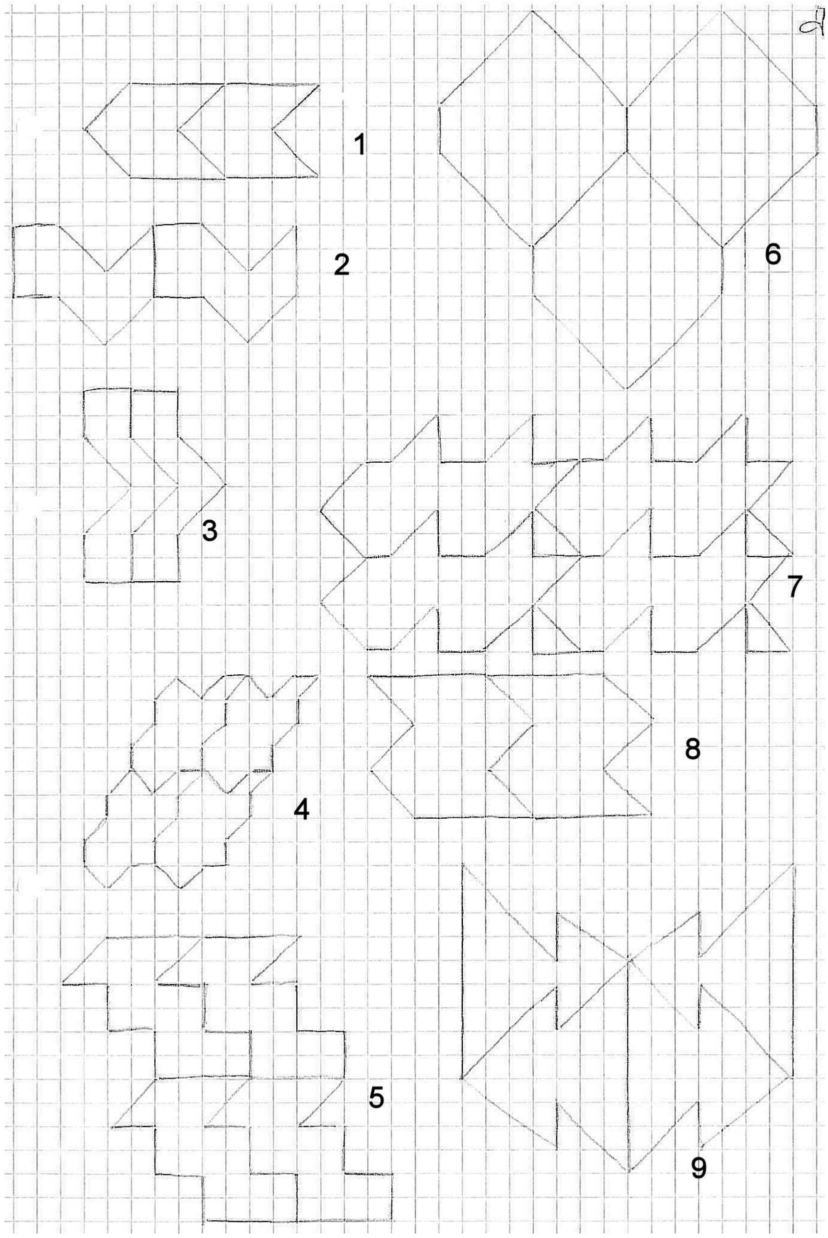
Po odovzdaní teselácií som bola veľmi prekvapená, aké zložité a nezvyčajné mnohouholníky vytvárajúce monoedrálne teselácie študenti vymysleli, a aké veľké množstvo z nich bolo vytvorené na základe použitia escherovských postupov (napriek tomu, že o kreslenie escherovských teselácií neprejavili veľký záujem). Pri vytváraní cely (jednej alebo viacerých, ktoré potom predstavujú „základ“ – protocela) v jednotlivých teseláciách mohli byť použité nasledujúce postupy (niektoré cely mohli byť skonštruované rôznymi postupmi, resp. kombináciou dvoch alebo viacerých postupov):

- nakreslenie známeho[189] teselujúceho útvaru alebo jeho malá obmena,
- rozdelenie známeho teselujúceho útvaru – cely alebo spojenie dvoch zhodných teselujúcich útvarov,
- vytvorenie schodovitého útvaru,
- použitie escherovských postupov.

Výsledky použitia vymenovaných postupov sú na obr. 109, obr. 110, obr. 111, obr. 112, obr. 113.

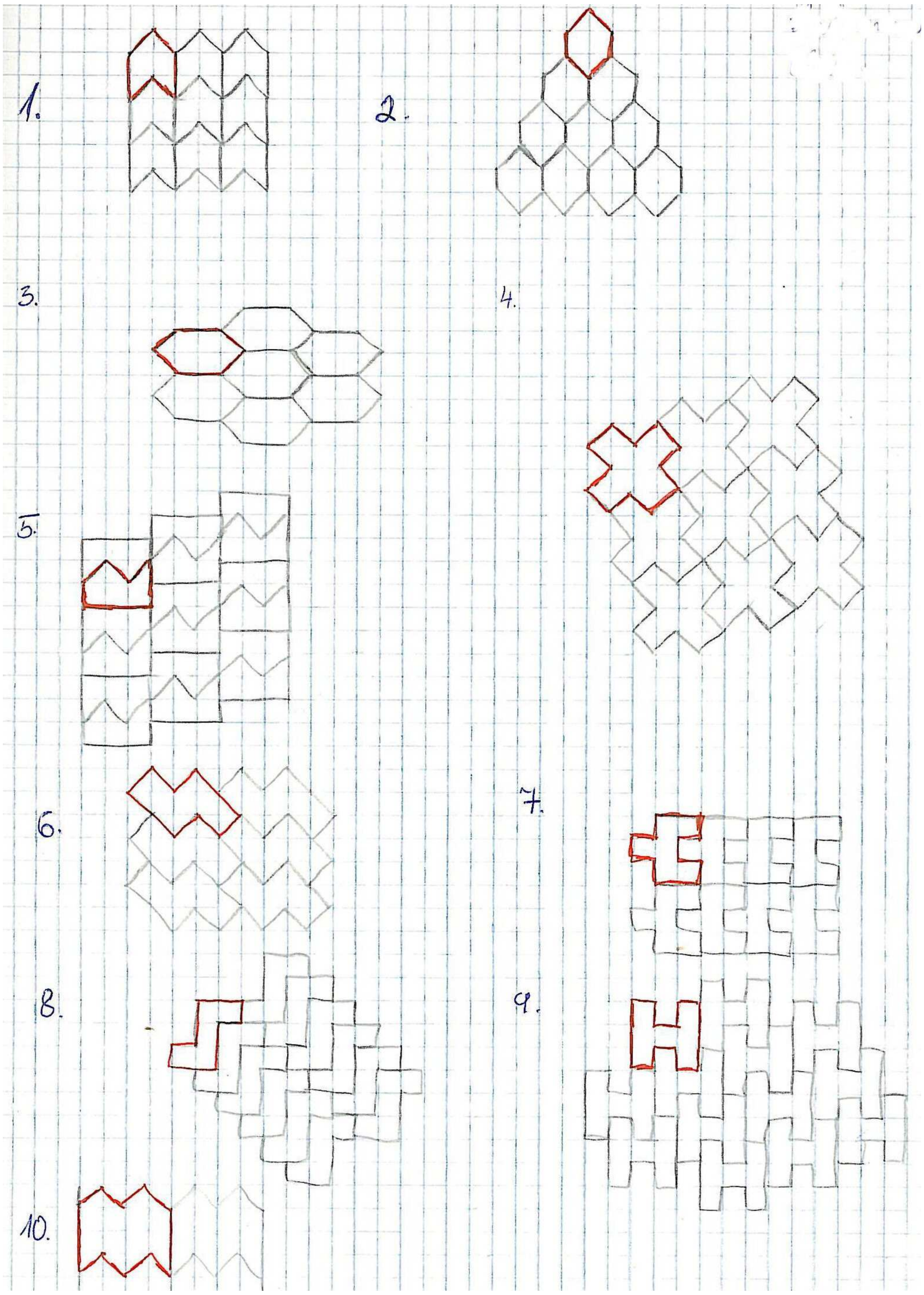
[188] Predpokladám, že motivačná myšlienka vedúca k tvorivosti pri tejto úlohe bola vo väčšine prípadov technická.

[189] Pod pojmom známy teselujúci útvar chápem napríklad tvar dlaždice z dláždenia chodníkov alebo parkety obdĺžnikového tvaru z parketáže.



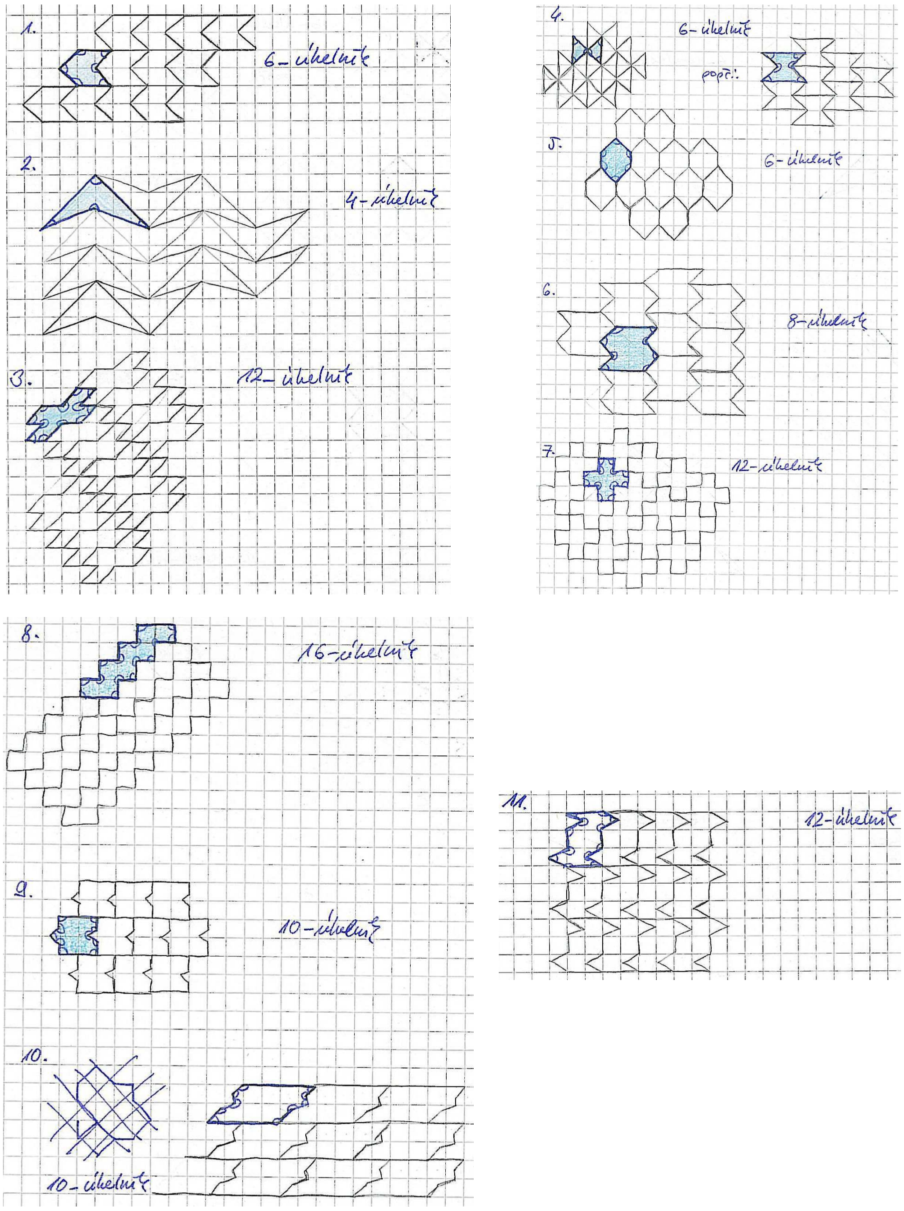
Obr. 109 Dáša: monoedrálne mnohouholníkové teselácie (teselácie 2, 3, 4, 5, 7: grupa $p1$, teselácia 1: grupa pm, teselácia 8: grupa $p2$, teselácie 6, 9: grupa pmm).

Šesť z deviatich teselácií na obr. 109 (1, 2, 3, 4, 7, 8) má cely vytvorené na základe escherovských postupov, šesťuholník (6) je známy (základnú celu predstavuje trochu „stlačený“ pravidelný šesťuholník v smere vertikálnej osi). Zaujímavým tvarom sa vyznačuje sedemuholník – „šípka“ (9), ktorý mohol byť vytvorený napríklad kombináciou dvoch postupov – rozdelením útvaru – kosodĺžnika a escherovskými postupmi. V teselácii v ľavom dolnom rohu (5) je základnou celou schodovitý útvar (jeho horná časť je „naklonená“).



Obr. 110 Alena: monoedrálne mnohouholníkové teselácie (teselácie 1, 7, 10: grupa *pm*, teselácie 2, 3: grupa *pmm*, teselácie 6, 8: grupa *p*2, teselácie 4, 9: grupa *p*4*m*, teselácia 5: grupa *pgg*).

Na obr. 110 je desať monoedrálnych mnohouholníkových teselácií, cely troch z nich (1, 7, 10) vznikli použitím escherovských postupov, cela jednej (5) rozdelením teselujúceho štvorca na dve zhodné časti, cely štyroch teselácií (2, 3, 4 a 9) predstavujú známe teselujúce útvary a v dvoch teseláciách (6, 8) sú celami schodovité útvary (princíp parkiet).

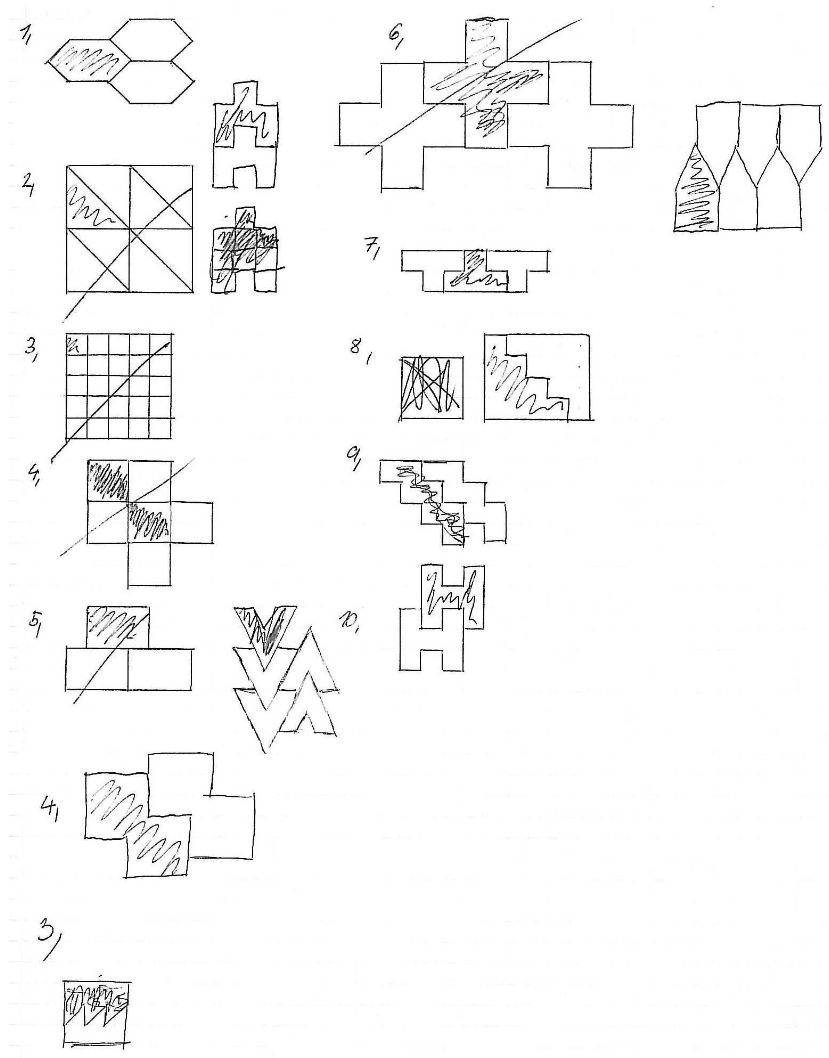


Obr. 111 Tamara: monoedrálne mnohouholníkové teselácie (teselácie 1, 2: grupa *pm*, teselácie 3, 8, 10: grupa *p*1, teselácie 4, 5: grupa *pmm*, teselácia 6: grupa *pmg*, teselácia 7: grupa *p*4*m*, teselácia 9: grupa *cm*, teselácia 11: grupa *p*2).

Na obr. 111 je 12 monoedrálnych mnohouholníkových teselácií[190]. Za známe útvary považujem cely teselácií (3, 5, 7), schodovitým útvarom je cela jednej teselácie (8), escherovské postupy boli použité v piatich prípadoch (1, 6, 9, 10, 11). Celu z teselácie 4 študentka získala otočením

[190] Po odovzdaní úlohy som upozornila študentku, že obrázky 2 a 4 nevyhovujú, pretože ich základom je štvoruholník a trojuholník; študentka preto nakreslila teseláciu 11 a šesťuholníkovú teseláciu pri čísle 4. Zaujímavosťou je, že študentka v jednej cele každej teselácie vyznačila vnútorné uhly: odôvodnila to tým, že to, či útvar vytvára sieť alebo nie, závisí na uhloch, a že sme to predsa takto robili na hodine.

pôvodnej teselácie o 90°, pričom z dvoch zhodných trojuholníkov vytvorila šesťuholník.

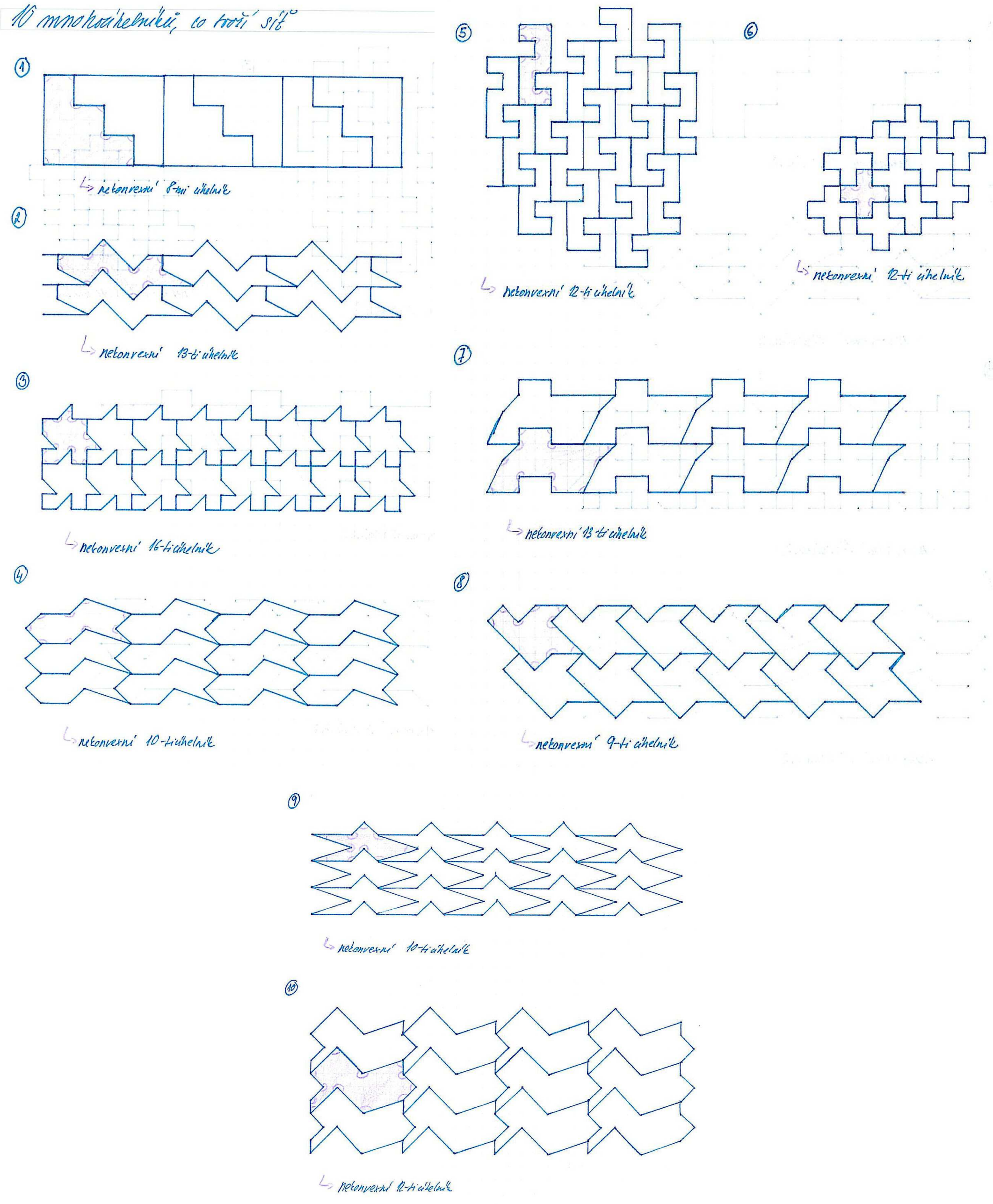


Obr. 112 Lukáš: monoedrálne mnohouholníkové teselácie (keďže študent vo väčšine prípadov nenakreslil „rozšírenie“ teselácie tak, aby bolo pokračovanie jednoznačne určené a nebolo viac možností, je zložité určiť grupu symetrie pre jednotlivé prípady). (Obrázky sú nakreslené na štvorčekovanom papieri, farba čiar siete je slabomodrá.)

Študent pri kreslení teselácií na obr. 112 pravdepodobne ani raz nepoužil escherovské postupy[191], väčšina je založená na „schodovitom“ princípe (napríklad 4, 8, 9). Po odovzdaní úlohy som študenta upozornila, že základný opakujúci sa tvar v obrázkoch 2, 3, 4 a 5 nevyhovuje požiadavke úlohy (cela bola v tvare trojuholníka alebo štvoruholníka), a v obrázku 6 nie je možné pokračovať ďalej; preto nakreslil ďalšie teselácie. (Študent

[191] Tento študent väčšinou „ignoroval“ naučené postupy a snažil sa nájsť vlastné postupy riešenia.

moje upozornenie pochopil tak, že útvar v tvare „kríža“ z pôvodnej teselácie 6 nie je možné použiť ako základ pre sieť, nad iným usporiadaním týchto útvarov sa nepozastavil. V tomto prípade si myslím, že to nebolo zapríčinené nedostatkom rovinnej predstavivosti, kde študent sa zaoberá len tvarom a neberie do úvahy aj usporiadanie, ale skôr nepozornosťou.) Zaujímavý je šesťuholník pod číslom 5 (grupa pmg).



Obr. 113 Jana: monoedrálne mnohouholníkové teselácie (teselácie 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10: grupa $p1$, teselácie 1, 5: grupa $p2$, teselácia 6: grupa $p4$). (Obrázky sú nakreslené na štvorčekovanom papieri, farba čiar siete je slabomodrá.)

Pri kreslení požadovaných teselácií na obr. 113 použila študentka všetky štyri postupy: známy tvar cely (6), delenie teselujúceho jednoduchšieho útvaru (1), schodovitý útvar (5), pri vytváraní ciel až siedmych teselácií postupy pre vytvorenie escherovských teselácií (študentka pri vytváraní escherovských teselácií odovzdala obrázok, ktorý ale nespĺňal požiadavky pre escherovskú teseláciu).

V porovnaní s predchádzajúcimi úlohami v podkapitolách 5.1.1 a 5.1.2 bola táto úloha abstraktnejšia, a študentmi chápaná ako geometrický problém. Vytváranie takto požadovaných teselácií už nepovažovali za „kreslenie“[192], ale za geometrickú činnosť, pri ktorej sa bohato prejavila ich tvorivosť. Zložitosť tvarov ciel a technická vynaliezavosť pri ich vytváraní to dokazujú. Napriek môjmu predpokladu, že študenti si neosvojili escherovské postupy (pretože pri escherovských teseláciách neboli, až na výnimky, úspešní), vysvetlené postupy použili správne práve v tejto úlohe pri vytváraní mnohých ciel. Zaujímavosťou nakreslených mnohouholníkových teselácií je, že všetky patria do kategórie solitér alebo koberček, čo v mnohých prípadoch dokazuje presvedčenie študentov o možnom pokračovaní v ich „sieťach“ ďalej (t. j. jednotlivé teselácie predstavujú pevnú štruktúru). Myslím si však, že niektorí zo študentov si nepotrebovali overiť, či je možné pokračovať v teselácii až „do nekonečna“, postačovala im možnosť pokračovania v „rozumnej“ časti roviny (opieram sa aj o ďalšie skúsenosti s týmito študentmi, napríklad pri dôkazoch matematických tvrdení).

Zaujímavosťou je, že ak je niektorú z uvedených monoedrálnych mnohouholníkových teselácií možné považovať za escherovskú, t. j. pri vytváraní jej ciel boli použité escherovské postupy, tak sa často vyznačuje „najjednoduchšou“ grupou symetrie $p1$ (to je možné vidieť najmä na obr. 113). Na druhej strane, cely teselácií vyznačujúce sa „zložitejšími“ grupami symetrie (napríklad teselácie 1 a 6 na obr. 109 alebo teselácia 4 na obr. 110) je možné často považovať za známy teselujúci útvar. Za najtvorivejšie teselácie z pohľadu zložitosti a netradičnosti tvaru základnej opakujúcej sa cely považujem nasledujúce: teselácia 9 na obr. 109, teselácia 6 na obr. 110, teselácia 3 na obr. 111, teselácia 5 na obr. 112, teselácie 5, 8, 10 na obr. 113.

Pre zaradenie rovinných teselácií do stredoškolskej matematiky by som odporučila nasledujúci postup:

1. Na vyučovacej hodine riešiť úlohu, aké mnohouholníkové útvary by mohli byť použité ako základ pre siete. Sformulovať (a dokázať) pravidlo pre pokrývanie roviny štvoruholníkmi a trojuholníkmi a pravidel-

[192] Pri týchto teseláciách sa už neočakávalo, že obrázok, resp. základný opakujúci sa útvar, má niečo pripomínať.

nými mnohouholníkmi.

2. V rámci domácej úlohy nájsť ďalšie teselujúce útvary (iného ako štvoruholníkového a trojuholníkového tvaru).
3. Na hodine vysvetliť escherovské postupy (ako ukážky zvoliť zložitejšie deformácie strán ako na obr. 86). Pomocou nich nakresliť ďalšie teselujúce útvary.
4. Ukázať študentom niektoré Escherove grafiky. V rámci domácej úlohy zadať nakreslenie „podobných“ obrázkov.
5. Zaradenie konštrukcie Voronojových teselácií zvoliť buď v súvislosti s rastovým modelom zŕn polykryštalických látok zo zárodkov (obr. 35) alebo ako abstraktné zadanie, a až po pochopení princípu vysvetliť aplikáciu v rôznych vedných disciplínach a vyriešiť úlohy na tému obslužnosti (podkapitoly 2.2, 2.3).

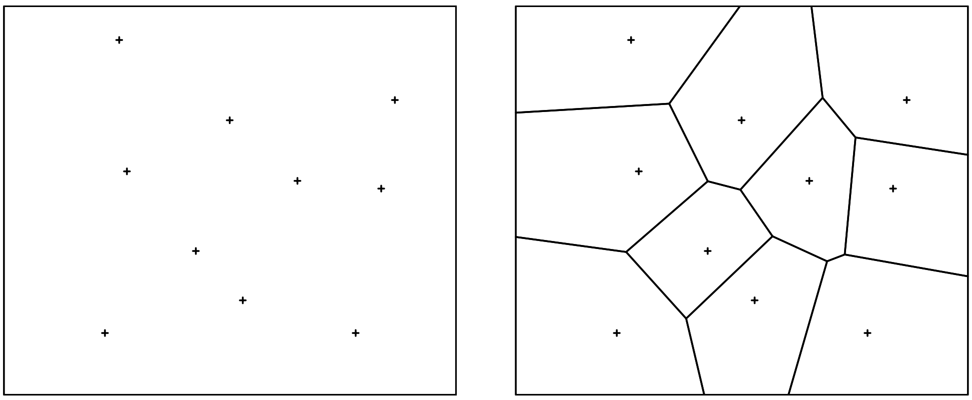
5.2 Primáni

Charakteristika triedy[193]: triedu tvorí 17 dievčat a 13 chlapcov. Sú veľmi pracovití, je ale nevyhnutné ich stále zamestnávať a kontrolovať, pretože keď sú neistí, sú nežiadúco hyperaktívni. Známky žiakov sú v celom rozsahu klasifikačnej stupnice. Podľa prospechu a schopností v matematike je možno žiakov rozdeliť do troch skupín: veľmi dobrí žiaci, žiaci s priemerným prospechom (sú medzi nimi i veľmi šikovní, ktorí ale svoje schopnosti využívajú len čiastočne) a žiaci, ktorí školu (nielen matematiku) z rôznych dôvodov nezvládajú.

5.2.1 Voronojove teselácie

Žiaci riešili prvé tri úlohy počas pobytu v Škole v prírode na začiatku školského roku. Od svojej učiteľky matematiky dostali tri papiere (dva papiere s vyznačenými bodmi – obr. 114a, obr. 115a, b, jeden papier bol čistý pre riešenie úlohy 2) a zadanie úloh bolo nasledovné:

Úloha 1: *Na obrázku* (obr. 114a[194]) *sú schematicky vyznačené prístrešky proti dažďu vo vybranej časti lesa. Keď je človek v lese na prechádzke a začne pršať, tak sa snaží schovať pod najbližší prístrešok. Rozdeľte les na oblasti podľa prístreškov tak, aby jednotlivé oblasti obsahovali len tie miesta lesa, ktoré sú k danému prístrešku bližšie ako k iným.*



a) b)

Obr. 114 a) Rozmiestnenie prístreškov proti dažďu vo vybranej časti lesa, b) Voronojova teselácia generovaná zadaným bodovým systémom.

---

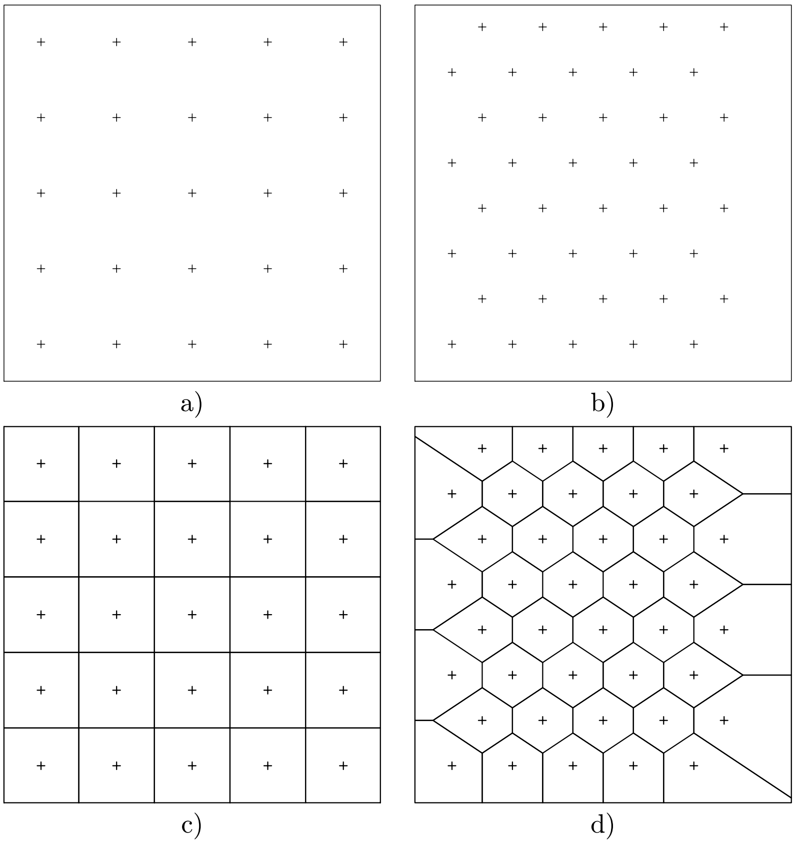
[193] Ich triedna a súčasne ich učiteľka matematiky je študentkou doktorandského štúdia na KMDM Pedagogickej fakulty UK v Prahe.

[194] Rozmiestnenie generátorov a výsledná Voronojova teselácia z prvej úlohy sú rovnaké ako v úlohe z predvýskumu 4.1.3 alebo v úlohe z 5.1.1, ktorá bola zadaná gymnazistom. Keďže ale žiaci dostali na papieri formátu A4 dve schémy s rovnakým rozmiestnením generátorov a úlohu riešili na papier položený väčšinou vo vodorovnej polohe, zadaná schéma i uvádzané výsledné konštrukcie žiakov sú voči obrázkom z 5.1.1 (a voči mape centra Prahy – Príloha VII) pootočené o 90° v protismere hodinových ručičiek.

Úloha 2: *Urobte rovnaké rozdelenie lesa pre menší počet prístreškov (2, 3, 4, 5); rozmiestnenie prístreškov si zvoľte sami.*

Úloha 3: *Predpokladajme, že prístrešky sú rozmiestnené pravidelne* (obr. 115a, b). *Ako vyzerajú príslušné oblasti?*

Úloha 4 im bola zadaná po dvoch mesiacoch na vyučovacej hodine: *Predpokladajme, že prístrešky sú rozmiestnené tak ako na zadanom obrázku* (obr. 116a). *Ako vyzerajú príslušné oblasti?*

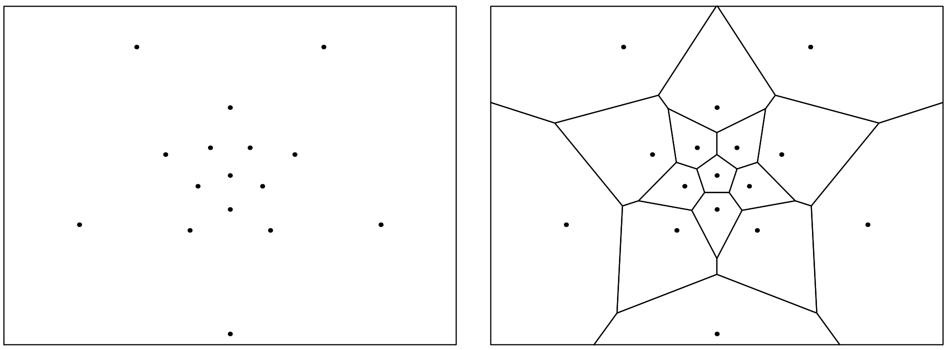


Obr. 115 a), b) Pravidelné rozmiestnenie prístreškov proti dažďu (bodových systémov), c), d) výsledné Voronojove teselácie.

Po zadaní úlohy 1 sa vyučujúca snažila žiakov priamo vtiahnuť do fiktívnej situácie (práve oni sú tí, ktorí sú v lese a v prípade dažďa majú vyhľadať najbližší prístrešok).[195] Na začiatku im nebolo jasné, ako to majú vyriešiť, keď nevedia, kde sú. Preto im vyučujúca ukázala na schéme prstom niekoľko bodov a spýtala sa ich, ktorý z prístreškov si v prípade búrky vyberú. Zdôraznila, že hľadajú „hranice“, ktoré rozhodnú, kam sa v prípade dažďa vyberú. Počas práce na prvom obrázku žiaci individuálne často žiadali vyučujúcu, aby skontrolovala správnosť ich konštrukcie. V prípade,

[195] Pri realizácii som nebola prítomná, priebeh nebol zaznamenaný ani videokamerou, ani diktafónom, opísala mi ho vyučujúca.

že hranice boli chybné, tak im ukázala nejaký bod lesa, ktorý bol nesprávne zaradený k prístrešku („má to blíž sem nebo sem?"). Po týchto upozorneniach žiaci konštruovali hranice oblastí ešte raz v druhej schéme bez zásahu vyučujúcej. (Na papieri mali vedľa seba dvakrát to isté rozmiestnenie 10 bodov. Keď niektorí žiaci chceli chybné časti v obrázku prekresliť, vyučujúca im odporučila použiť inú farbu, aby bol obrázok pre nich prehľadnejší.) Po vyriešení úlohy 1 spoločne prešli na úlohu 2, pričom si čistý papier rozdelili na štyri časti: v každej z nich si mali ľubovoľne zvoliť polohu 2, 3, 4 a 5 prístreškov, a pre každý z týchto prípadov rozdeliť papier na rovnakom princípe ako v úlohe 1. Úlohu 3, v ktorej boli generátory pravidelne rozmiestnené vo vrcholoch štvorcovej a kosoštvorcovej mriežky, riešili už žiaci samostatne. Po ukončení im vyučujúca všetkým vysvetlila, ako malo riešenie vyzerať, a intuitívne im vysvetlila pojem *os úsečky*, s ktorým budú neskôr na hodine pracovať.



a) b)

Obr. 116 a) Prístrešky usporiadané pravidelne na sústredných kružniciach pre úlohu 4, b) výsledná Voronojova teselácie v tvare vianočnej hviezdy[196].

Po dvoch mesiacoch, keď sa už žiaci zoznámili s požadovaným pojmom a konštrukciou osi úsečky na hodinách matematiky, som sa rozhodla im zadať úlohu 1 ešte raz a pripojiť aj úlohu 4, v ktorej bolo rozmiestnenie bodov pravidelné – obr. 116. Zaujímalo ma, či (a ako) dané osvojené poznatky použijú pri riešení. Najprv som im spolu s ich vyučujúcou pripomenula zadané úlohy, ktoré riešili, a pochválila som ich, že riešenia boli zaujímavé (väčšina žiakov si na dané úlohy spomenula[197]). Upozornila som ich, že niektoré riešenia neboli správne, ale že sa už na matematike učili niečo, čo by im mohlo pomôcť pri kreslení. Zopakovali sme si spoločne pojem os

[196] Tento experiment prebehol v predvianočnom čase a výsledná Voronojova teselácia pripomínala vianočnú hviezdu (obr. 116b). Rozmiestnenie generátorov bolo síce pravidelné, ale nenavádzalo na výslednú Voronojovu teseláciu tak ako v úlohe 3.

[197] To, že si žiak nespomenul na úlohy, môže byť výhodou, pretože so znovuzadanou úlohou pracuje ako s úplne novou situáciou (pôvodné riešenie neovplyvňuje opätovné riešenie).

úsečky a postup jej konštrukcie. Zhrnuli sme, že práve tie osi budú hranicami hľadaných oblastí. Pri práci nemohli používať pravítko a kružidlo; niektorí žiaci boli zaskočení, že to nebude presné, ako dôvod som uviedla, aby mali rovnaké podmienky. Žiaci boli pri kreslení veľmi ticho, takmer každý pracoval samostatne, asi len tri dvojice si svoje konštrukcie porovnávali alebo sa radili.[198] Po odovzdaní (kreslenie oboch obrázkov im trvalo od 10 do 25 minút) som im ukázala, ako mali vyzerať správne riešenia a prešli sme na kreslenie escherovských teselácií – časť 5.2.2.

Odovzdané kresby som analyzovala dvakrát: prvýkrát jednotlivé úlohy s javmi, ktoré sa v nich vyskytli – časť 5.2.1.1, druhýkrát, keď som si zvolila konštrukcie niektorých žiakov, ktoré ma z nejakého dôvodu zaujali – časť 5.2.1.2.

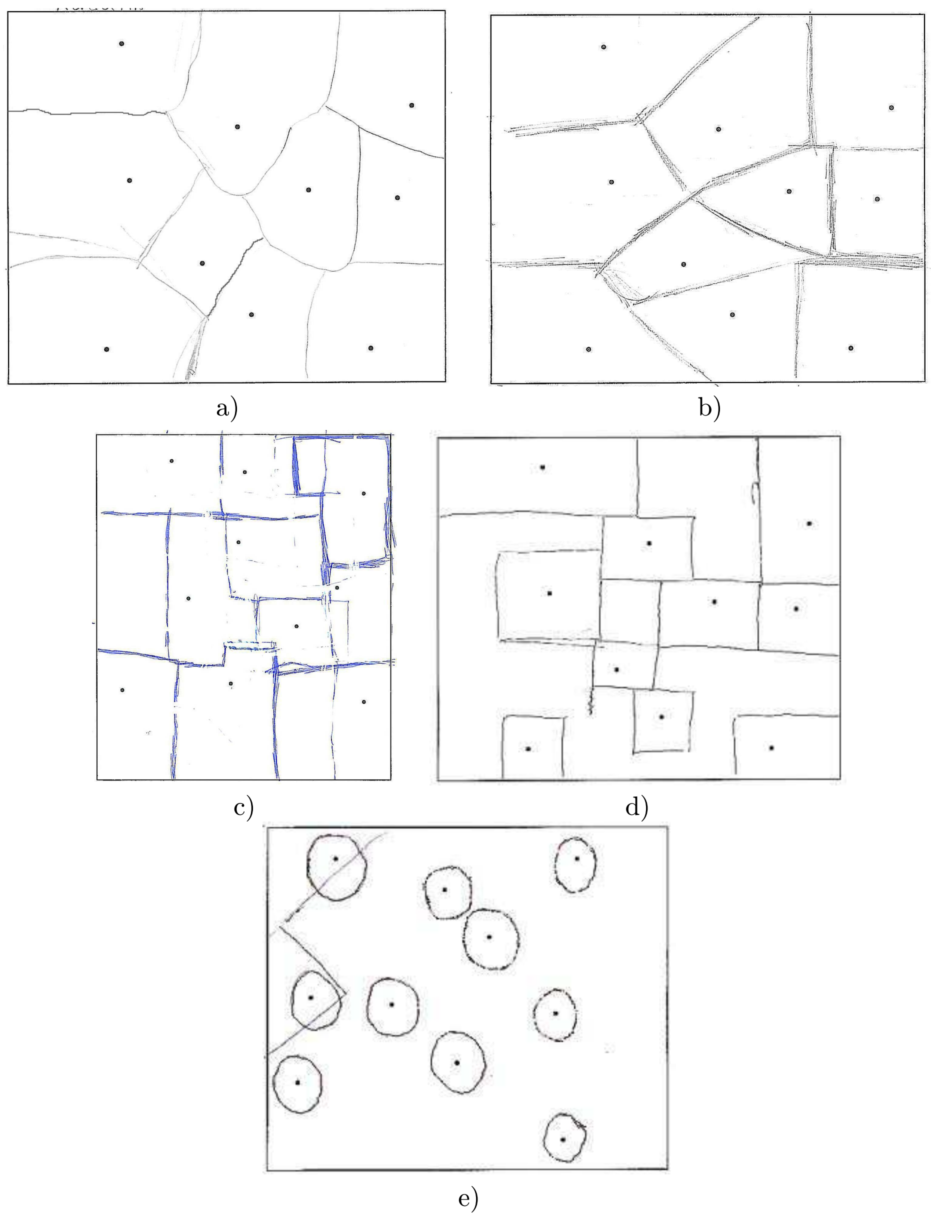
5.2.1.1 Analýza žiackych riešení jednotlivých úloh

Úlohu 1 žiaci riešili trikrát; dvakrát v Škole v prírode, pričom prvé riešenie bolo realizované hneď po zadaní a v ňom sa prejavuje spontánne pochopenie úlohy žiakmi, druhé potom, ako ich učiteľka upozornila na niektoré chyby (napríklad na medzery medzi oblasťami). Tretie riešenie bolo realizované po dvoch mesiacoch počas vyučovania. V porovnaní so študentmi – gymnazistami, ktorým k prvotnému pochopeniu úlohy stačila krátka diskusia na hodine (časť 5.1.1), bola táto úloha pre žiakov veľmi dôležitá, pretože práve v nej sa na základe svojich pokusov a omylov zoznámili so situáciou.

Pri riešení úlohy žiaci využili okrem už troch vymenovaných pravidiel pre konštrukciu hraníc ciel Voronojovej teselácie – *pravidlo stredu*, *pravidlo kolmosti* a *pravidlo určenia*, ešte aj ďalšie dve – *pravidlo rovnakého tvaru ciel* (najmä v tvare štvorca alebo obdĺžnika) a *pravidlo rovnakého obsahu ciel*. Použitie posledných dvoch pravidiel pri konštrukcii hraníc oblastí ale neviedlo k Voronojovej teselácii.

---

198 Priebeh experimentu – práca žiakov na hodinách – nebol nahrávaný, pri kreslení som sa snažila obrázky detí fotiť v rôznych štádiách, takže som mala niektoré čiastočné riešenia k dispozícii. Okrem toho, pri väčšine obrázkov je možné zistiť, ako postupovalo dieťa pri konštrukcii hraníc oblastí. Pri práci bolo v triede veľké ticho a aj na moje otázky veľmi nereagovali (pravdepodobne sa trochu hanbili). Keďže som chcela, aby kreslenie teselácii brali ako zábavnú aktivitu, pri ktorej sa niečo naučia, a nie primárne ako výskum (to, že ide o výskum, im pripomenula učiteľka na začiatku prvej hodiny), tak som sa snažila nerušiť žiakov pri kreslení (nechcela som byť príliš zvedavá, a tak ich rozptyľovať). Okrem týchto spomínaných okolností musím vziať do úvahy aj jazykovú bariéru, ktorá mohla vzniknúť. Ich učiteľka bola počas oboch vyučovacích hodín prítomná, myslím si ale, že to prácu detí neovplyvňovalo.



Obr. 117 Príklady rozdelenia časti roviny na oblasti prislúchajúce generátorom pri prvom riešení: a) Bára (cely z dvoch kategórií – „bubliny“ a mnohouholníky), b) Vanda (kategória mnohouholníky), c) Jakub (kategória „krabičky“), d) Jarka (kategória „krabičky“), e) Lenka (kategória kružnice).

Obrázky[199], ktoré žiaci nakreslili pri prvom riešení (t. j. hneď po zadaní), je možné rozdeliť do nasledujúcich skupín:

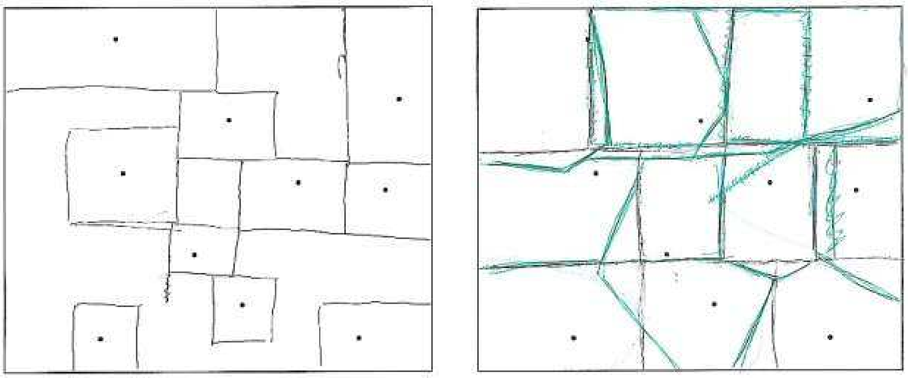
– teselácie, pri konštrukcii hraníc ich hraníc bolo použité pravidlo stredu a v niektorých prípadoch aj pravidlo kolmosti, výsledkom ale nebola Voronojova teselácia, pretože hranice ciel boli často zaoblené – naprí-

[199] Obrázky nakreslené žiakmi uvádzam v takej orientácii, ako si ich žiaci očíslovali, resp. ako som pri analýze zistila, že úlohu riešili. Preto sú niektoré rovnako orientované ako obrázky nakreslené študentmi v časti 5.1.1 a niektoré pootočené o 90°.

klad obr. 117a (10 prípadov),

- teselácia, ktorej hranice ciel boli skonštruované na základe pravidla stredu (ale pravidlo nie je dodržané všade), ale pravidlo kolmosti nebolo použité – napríklad obr. 117b (10 prípadov),
- teselácia, ktorej takmer všetky cely majú štvorcový, resp. obdĺžnikový, tvar a nie sú medzi nimi medzery – napríklad obr. 117c (5 prípadov),
- súbor väčšinou obdĺžnikových oblastí prislúchajúcich niektorým generátorom, medzi oblasťami sú ale medzery – napríklad obr. 117d (3 prípady, 1 z nich s oblasťami kruhového tvaru – obr. 117e).

Práve v dvoch posledných skupinách použili žiaci pravidlo rovnakého tvaru ciel, kedy sa snažili každý zadaný generátor ohraničiť celou štvorcového alebo obdĺžnikového tvaru, a pravidlo rovnakého obsahu ciel, kedy sa snažili každému generátoru priradiť celu s rovnakým obsahom bez ohľadu na tvar (často tak vznikali cely schodovitého tvaru).



a) b)

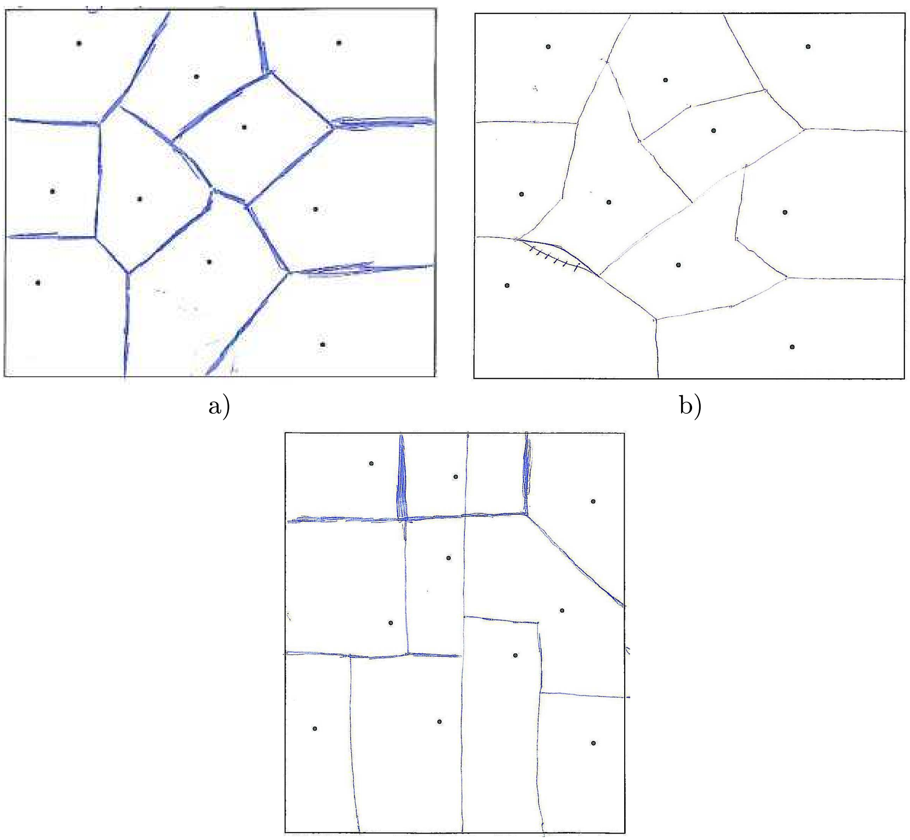
Obr. 118 Jarka: prechod od a) obdĺžnikových oblastí s medzerami k b) obdĺžnikovým celám bez medzier (žiačka nakoniec zelenou farbou vyznačila ešte raz hranice ciel, tie sa snažila skonštruovať pomocou pravidla stredu).

Po opakovanom riešení (po upozorneniach vyučujúcej na dané chyby) sa už medzi nakreslenými obrázkami nevyskytol obrázok, ktorý by nepredstavoval teseláciu (t. j. medzi oblasťami by boli medzery). Pri porovnaní prvej a druhej, resp. tretej, konštrukcie je tak zaujímavé sledovať, aká zmena nastala v myslení dieťaťa (napríklad obr. 118a, b). Po druhom riešení je možné rozdeliť obrázky nasledovne:

- takmer správne skonštruovaná Voronojova teselácia (uvedomelo dodržané pravidlo stredu a vo väčšine prípadov aj pravidlo kolmosti; v porovnaní s prvom skupinou pri prvom riešení je toto presnejšie) – napríklad obr. 119a (5 prípadov),
- teselácia, ktorej hranice ciel sú skonštruované na základe pravidla stredu, žiaci sa ale veľmi zamerali na to, aby hranica prechádzala stredom

spojnice dvoch generátorov, a tak sa často v ňom „láme“ – napríklad obr. 119b (15 prípadov),

– teselácia, pri ktorej konštrukcia hraníc ciel sa neopiera ani o pravidlo stredu, ani o pravidlo kolmosti – napríklad obr. 119c (8 prípadov).



a) b) c)

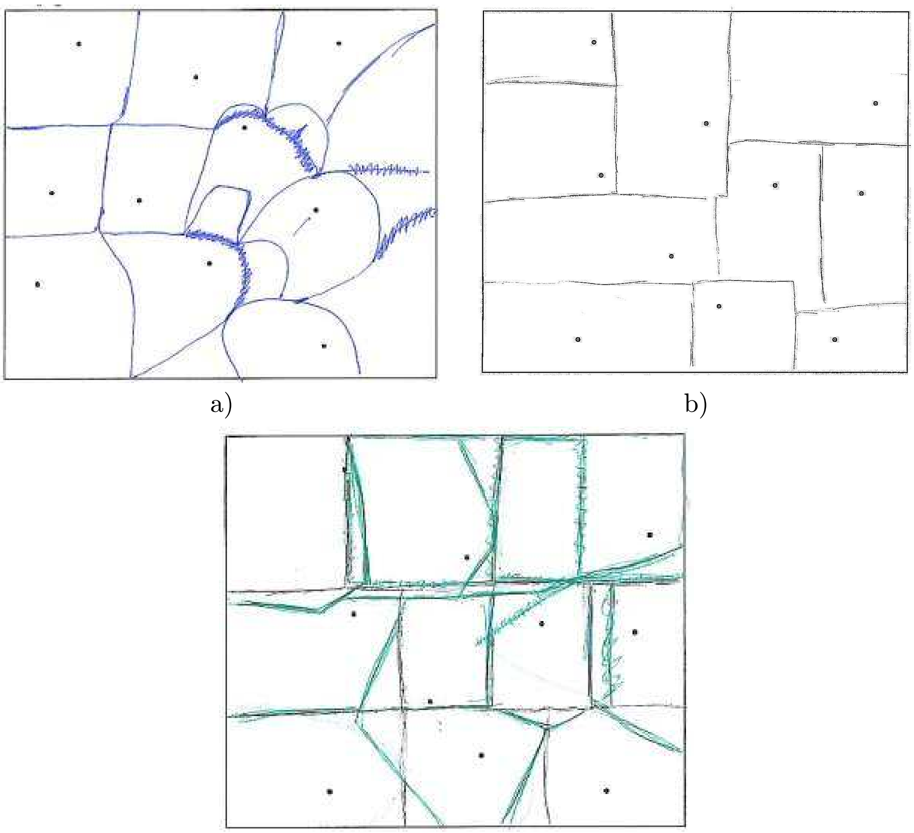
Obr. 119 Príklady rozdelenia časti roviny na oblasti prislúchajúce generátorom pri druhom riešení: a) Michaela, b) Daniel, c) Jakub.

Zaujímavým javom konštrukcií bol tvar ciel; zatiaľ čo pri prvom riešení sa vyskytovali „oblé“ cely (kategórie: kružnice a „bubliny“) až v 9 prípadoch, pri druhom riešení počet prípadov s oblými hranicami klesol na 3. „Hranaté“ cely (kategórie: mnohouholníky a „krabičky“) sa pri prvom riešení našli v 19 prípadoch.

To, ako žiak pri konštrukcii postupoval, záviselo od jeho pochopenia významu generátorov a podstaty hranice cely. Na základe konštrukcií (pri prvom i druhom riešení) zostrojených žiakmi je možné žiacke postupy rozdeliť do nasledujúcich troch skupín:

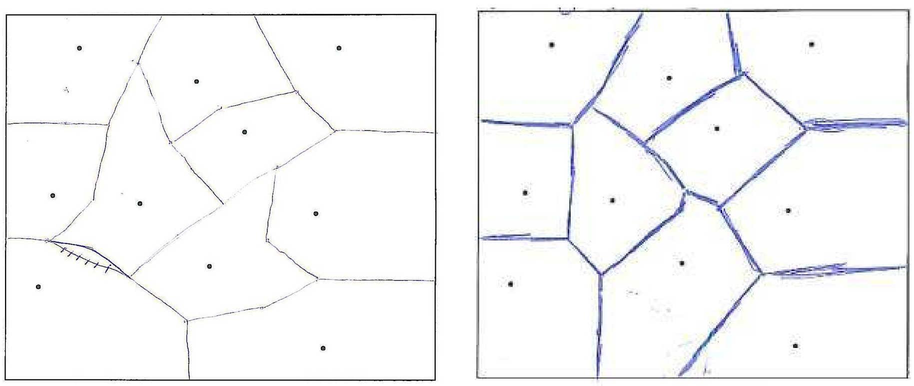
1. Žiak vnímal generátory ako izolované objekty, ktoré navzájom neovplyvňujú tvar hraníc, hranice ciel skonštruoval podľa rôznych pravidiel; výsledkom ale nebola správne skonštruovaná Voronojova teselácia a medzi celami sa vyskytli často medzery. Príkladom môžu byť prípady, v ktorých

žiaci použili pravidlo rovnakého obsahu – napríklad obr. 120a alebo pravidlo rovnakého tvaru (najmä obdĺžnikového) – napríklad obr. 120b, c.



c)

Obr. 120 Postup 1: a) Michaela (prvé riešenie), b) Bára (prvé riešenie), c) Jarka (druhé riešenie).



a) b)

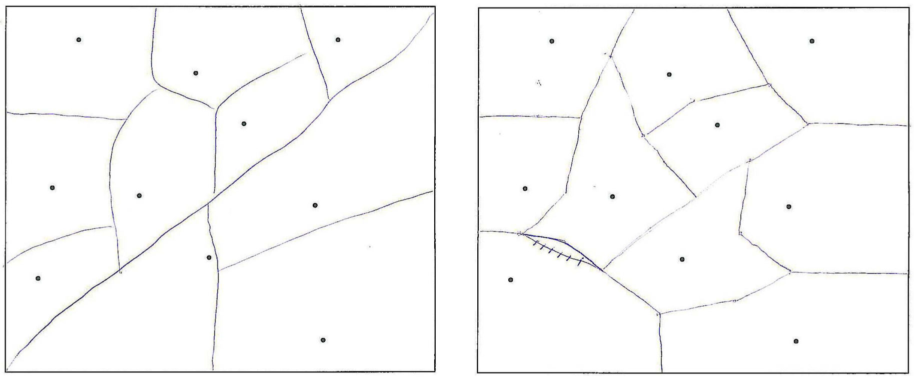
Obr. 121 a) Daniel (druhé riešenie): postup 2, b) Michaela (druhé riešenie): postup 3.

2. Žiak pochopil podstatu konštrukcie hranice cely, ale nekonštruoval ju komplexne. V každom kroku vzal do úvahy úsečku spájajúcu dva generátory a vytvoril pre ňu os súmernosti. V týchto prípadoch často vznikajú lo-

kálne štruktúry (t. j. konštrukcia hranice cely sa vyznačuje správnosťou len pre niektoré generátory) a nekonvexnosť hraníc ciel – napríklad obr. 121a.

3. Žiak chápal bodový systém ako komplex prvkov, vzal do úvahy, že tvar hranice cely daného generátora ovplyvňujú všetky najbližšie generátory k nemu. Výsledkom je väčšinou správne skonštruovaná Voronojova teselácia – napríklad obr. 121b.

Aj pri riešení tejto úlohy (podobne ako pri štvoruholníkových teseláciách v časti 4.1.1) nastáva tzv. „problém okrajov“, keď žiaci nevedeli presne, čo sa deje pri okrajoch vymedzenej plochy, a tak tam „zaobľovali“ hranice ciel – napríklad obr. 128, alebo umelo vytvárali nekonvexné cely[200]. Zaujímavosťou je prechod od „oblých“ k „hranatým“ hraniciam – napríklad obr. 122 a to, že pri druhom riešení sa už nevyskytli medzery medzi celami. Z uvedených počtov vyplýva zreteľná preferencia „hranatosti“ ciel (napriek tomu, že väčšina z nich sa vyskytovala pri prvom riešení), presnejšie ciel v tvare obdĺžnika, vyplývajúca z bohatého a niekedy aj výlučného zastúpenia tohto rovinného útvaru v školskej geometrii. Pri takomto tvare ciel sa nevyskytol ani problém okrajov, žiaci ani „nezaobľovali“ okraje hraníc ciel, čo sa často vyskytlo pri n-uholníkových celách s $n > 4$.



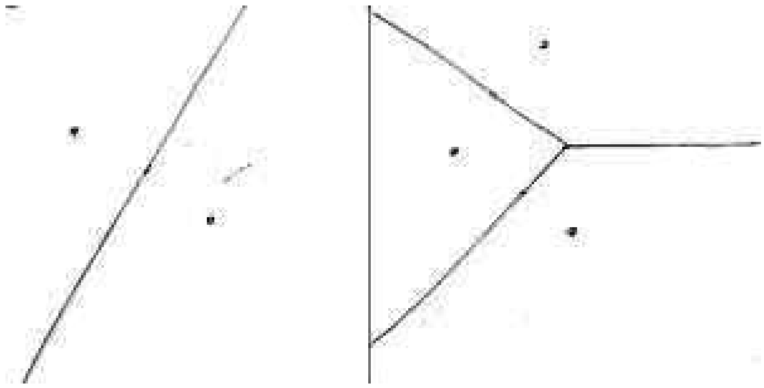
a) b)

Obr. 122 Daniel: prechod od a) oblých hraníc k b) hranatým.

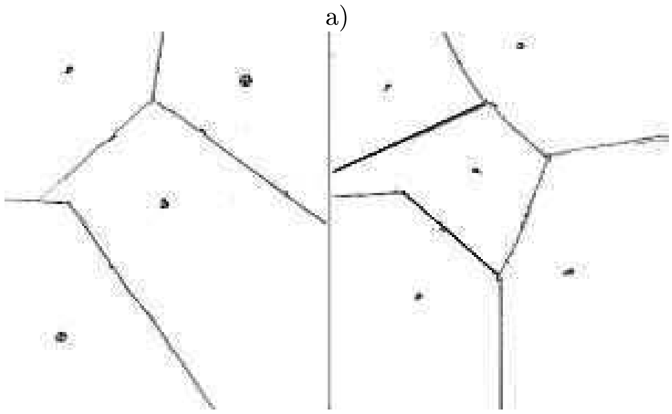
Pri opakovanom riešení tejto prvej úlohy po dvoch mesiacoch bolo odovzdaných 29 riešení (17 žiačok, 12 žiakov). Na prvý pohľad nebolo zreteľné, že by žiakom znalosť pojmu a procesu konštrukcie osi úsečky výrazne pomohla, väčšina z nich pokračovala v svojom pôvodnom postupe, ktorí si vytvorili a zachovávali ho aj naďalej. To znamená, že to nebola náhodná myšlienka, ale niektorí žiaci museli byť naozaj presvedčení, že to, čo robia, je správne.

200 Takéto riešenie predstavovalo kompromis medzi úplným ohraničením cely – uzamknutím bodu – a medzi nechaním „otvorenej“ cely.

V obrázkoch, ktoré sú výsledkom riešenia **úlohy 2**, je možné pozorovať vývoj stratégie (či nastalo „vylepšenie“ stratégie alebo celkovo zmena oproti úlohe 1), resp. či žiak naozaj pochopil predložený problém (pri menšom počte generátorov je konštrukcia jednoduchšia). Pri riešeniach sa môže uplatňovať kompozičný i dekompozičný prístup. Pri kompozičnom prístupe žiak rozmiestňoval generátory a podľa tohto rozmiestnenia vytváral hranice ciel; pri dekompozičnom boli pre žiaka dôležité najprv tvary oblastí – ciel, a následné rozmiestnenie bodov bolo týmito tvarmi ovplyvnené.



a)



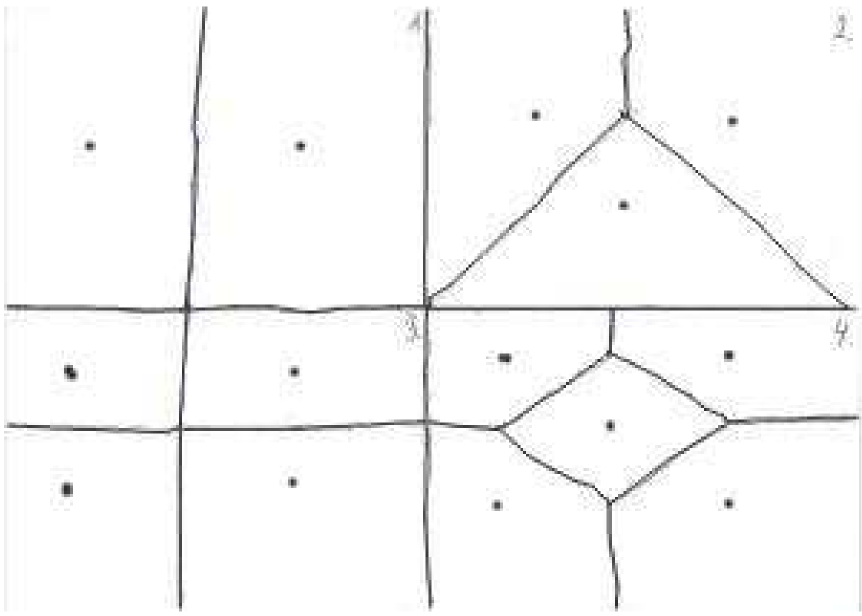
b)

Obr. 123 Barbora: teselácie pre 2, 3, 4 a 5 generátorov (je viditeľné postupné dopĺňanie ďalšieho bodu do už existujúceho systému generátorov).

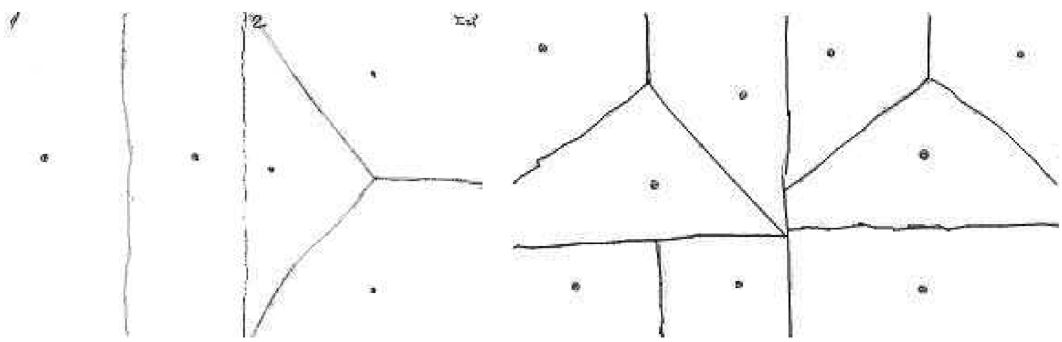
Pri rozmiestňovaní generátorov je zo žiackych konštrukcií možné zaznamenať nasledujúce javy s príslušnými kategóriami:

- *proces pridávania generátorov*, v ktorom vystupujú kategórie: „pridávanie naraz“ alebo „postupné pridávanie“, „pridávanie s prihliadnutím na už rozmiestnené generátory, resp. vytvorené cely“, napríklad „vkladanie“ bodu medzi už rozmiestnené generátory (v niektorých obrázkoch je možné vidieť opravovanie hraníc pri postupnom pridávaní) alebo „pridávanie bez prihliadnutia“ – napríklad obr. 123, obr. 126b,
- *pravidelnosť rozmiestnenia generátorov* s kategóriami: „pásy“ (naprí-

klad obr. 127), „vlajky“[201] (napríklad obr. 125a, obr. 124a), „iné“; v súvislosti s pravidelnosťou, resp. nepravidelnosťou si myslím, že takmer vo všetkých prípadoch sa žiaci snažili, aby rozmiestnenie bodov bolo viac-menej pravidelné, predpokladám, že to bolo zapríčinené najmä tým, že generátory mali predstavovať praktický objekt – prístrešky proti dažďu, a tie by mali byť rozmiestnené rovnomerne; sú ale aj výnimky ako napríklad obr. 126b.



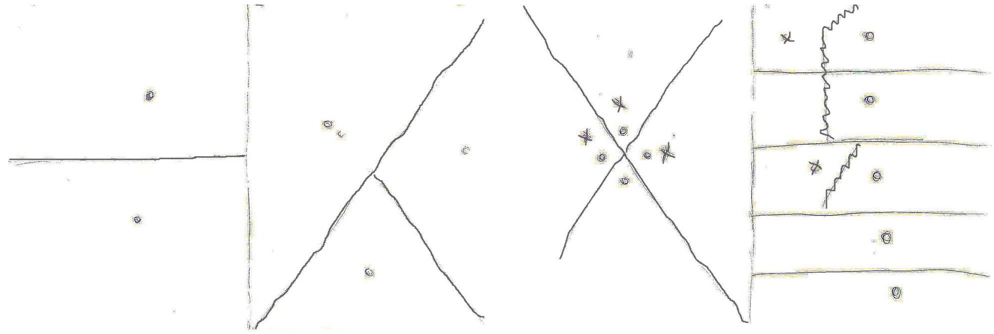
Obr. 124 Daniel: teselácie pre 2, 3, 4 a 5 generátorov.



a) b)

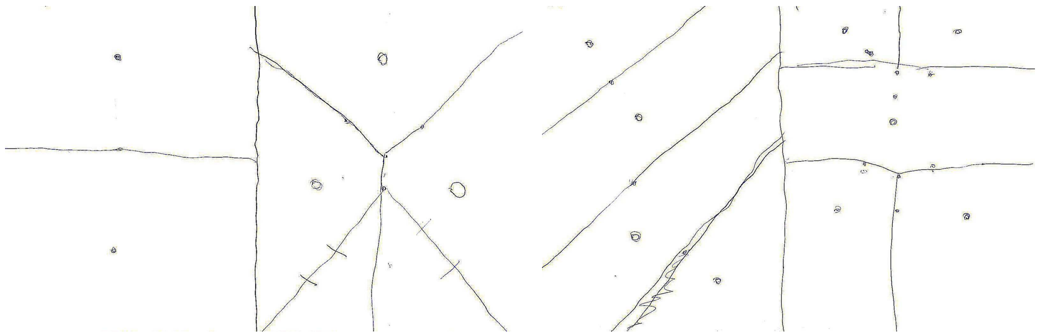
Obr. 125 Iveta: teselácie pre 2, 3, 4 a 5 generátorov.

[201] Táto kategória môže byť ovplyvnená zlomkami.



a) b)

Obr. 126 Lucia: teselácie pre 2, 3, 4 a 5 generátorov (v prípade b) je viditeľné, že sú to dve rôzne situácie).



a) b)

Obr. 127 František: teselácie pre 2, 3, 4 a 5 generátorov.

a) b)

Obr. 128 Denisa: teselácie pre 2, 3, 4 a 5 generátorov (je zaujímavé „zaoblenie“ koncových častí hraníc vo všetkých 4 prípadoch).

Konštrukcia hraníc ciel bola ovplyvnená viacerými javmi:

– *rozmiestnenie generátorov* – napríklad obr. 124 alebo obr. 125,

– *preberanie stratégie z riešenia úlohy 1* bez ohľadu na to, či bola stratégia správna alebo nie – napríklad obr. 128,

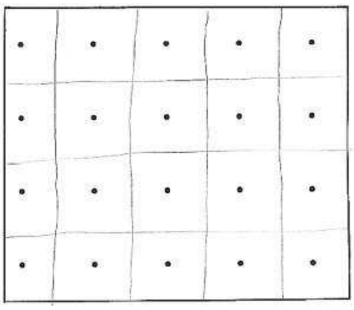
– *spojitosť medzi jednotlivými prípadmi – 2, 3, 4 a 5 bodov* (ak napríklad žiak „vložil“ ďalší bod do predchádzajúceho bodového systému a hranice ciel z predchádzajúceho obrázku len jednoducho „posunul“ alebo len doplnil) – napríklad obr. 125b, obr. 124b.

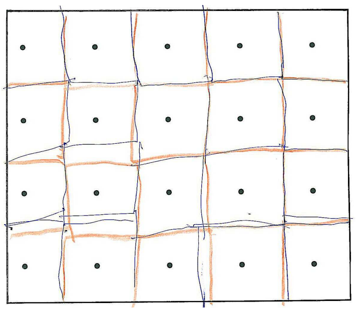
Pri rozmiestnení bodového systému vo vrcholoch štvorcovej mriežky v **úlohe 3** boli hranice oblastí vo všetkých obrázkoch skonštruované správne, t. j. každý obrázok predstavoval Voronojovu teseláciu typu „strana k strane“ s celami v tvare štvorcov. Zaujímavosťou sú postupy, akými žiaci hranice skonštruovali:

1. hranice ciel vznikli ako výsledok dvoch sústav na seba kolmých horizontálnych a vertikálnych rovnobežiek (19 prípadov) – napríklad obr. 129a,[202]

2. v schéme bola načrtnutá sústava horizontálnych rovnobežiek, cely v takto vzniknutých „pásoch“ boli potom oddelené „čiarkami“ (6 prípadov),

3. hranice ciel boli skonštruované spôsobom „cela za celou“, t. j. hranica bola skonštruovaná postupne okolo každej cely (3 prípady) – napríklad obr. 129b.



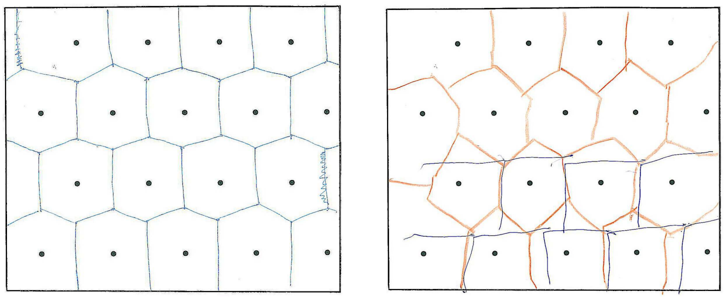


Obr. 129 a) Elena: hranice ciel ako výsledok dvoch sústav na seba kolmých rovnobežiek, b) Martin: konštrukcia hraníc postupom „cela za celou“.

Pri generátoroch rozmiestnených vo vrcholoch kosoštvorcovej mriežky boli z 28 prípadov len 3 správne (autormi všetkých troch boli chlapci) – napríklad obr. 130a, b, v jednom ďalšom (autorom bolo dievča) bol náznak správnosti. Hranice ciel na ďalších obrázkoch neboli správne skonštruované a obrázky je možné rozdeliť do nasledujúcich skupín:

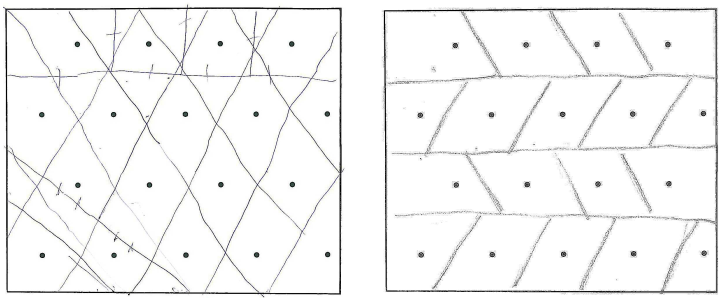
- kosoštvorcová/kosodĺžniková teselácia typu „strana k strane“, v strede ciel sú generátory – napríklad obr. 131a (10 prípadov),
- štvorcová/obdĺžniková/kosoštvorcová teselácia, ktorá nie je typu „strana k strane“ – napríklad obr. 131b, c, d (11 prípadov),
- iné – napríklad obr. 131e (5 prípadov).

[202] Pri štvorcovej mriežke je to výrazne procesuálne riešenie, pretože nie je v centre pozornosti jedna cela ale proces konštrukcie hraníc ako jednej sústavy.

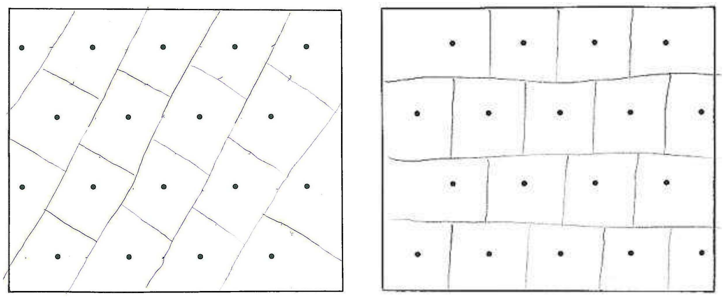


a) b)

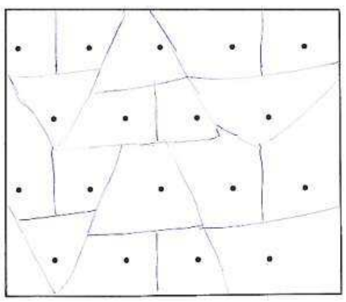
Obr. 130 Správne skonštruovaná Voronojova teselácia pre generátory rozmiestnené vo vrcholoch kosoštvorcovej mriežky: a) Oto, b) Martin[203].



a) b)



c) d)



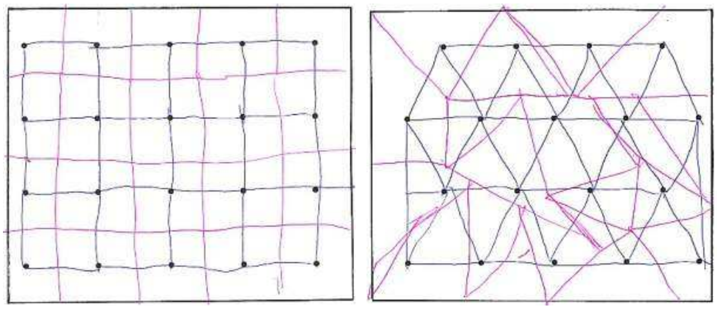
c)

Obr. 131 Nesprávne rozdelenie časti roviny pre bodový systém rozmiestnený vo vrcholoch kosoštvorcovej mriežky: a) František, b) Kristýna, c) Daniel, d) Elena, e) Lenka.

---

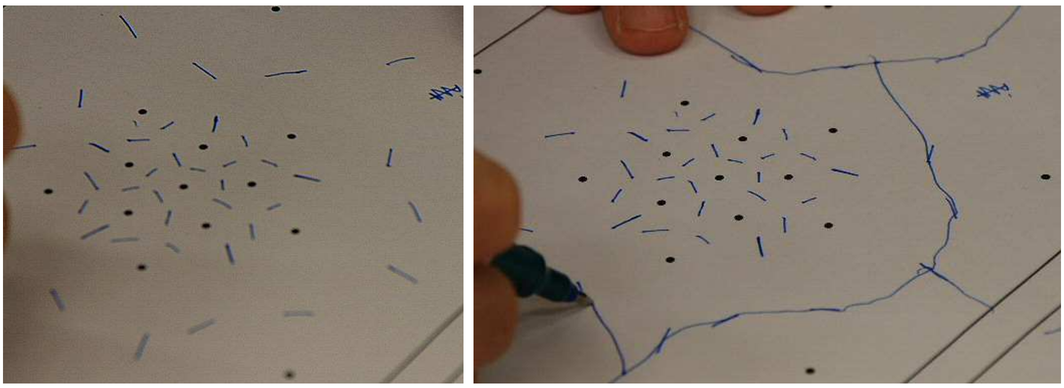
203 Napriek tomu, že hranice oblastí majú správny šesťuholníkový tvar, myslím si, že sa žiak inšpiroval nápadom Ota, pretože hranice z prechádzajúcich úloh nemal Martin správne skonštruované a jeho obrázky boli dosť chaotické.

Prvé dve skupiny nesprávnych riešení boli zapríčinené tým, že rozmiestnenie generátorov priamo navádzalo na „kosoštvorcové“ riešenie, žiaci si už neuvedomovali pôvodné slovné zadanie úloh, rozdeľovali časť roviny na oblasti a induktívne preniesli riešenie z predchádzajúceho rozmiestnenia (ako napríklad obr. 132).



Obr. 132 Lukáš: prenos riešenia medzi štvorcovou a kosoštvorcovou sieťou.

Pri konštrukcii teselácie pripomínajúcej vianočnú hviezdu v **úlohe 4** sú cely teselácií v riešeniach všetkých žiačok mnohouholníkové (tu je vidieť vplyv toho, že mysleli na to, že hranicami sú osi úsečiek, resp. ich časti, a že to aj použili), u žiakov boli 3 riešenia, v ktorých sú cely alebo čiastočne alebo úplne oblé, napríklad obr. 133.



a) b)

Obr. 133 Martin: a) na začiatku si vyznačil stredy úsečiek spájajúcich dvojice najbližších generátorov, b) hranice ciel však kreslí ako zaoblené čiary.

V 14 riešeniach žiačok sú naznačené stredy medzi dvojicami a následne zostrojená časť osi úsečky, len v jednom riešení (obr. 137) neboli zvýraznené stredy. Pravdepodobným dôvodom bolo to, že táto žiačka skonštruovala hranice teselácií správne už v predchádzajúcich úlohách, takže je možné, že hranice ciel už zostrojovala priamo, alebo boli vyznačené veľmi slabo, takže nie sú viditeľné. Vo všetkých riešeniach žiakov sú vyznačené stredy, v 4 riešeniach sa vo vyznačených stredoch hranice ciel lámu.

5.2.1.2 Záver

Pri analýze obrázkov, ktoré nakreslili žiaci, bolo zreteľné, že úloha 1 bola pre nich veľmi zložitá. Výrazné zlepšenie konštrukcie hraníc ciel nenastalo ani po tom, ako sa žiaci s osou súmernosti zoznámili na hodinách a spolu sme si pred kreslením konštrukciu osi súmernosti zopakovali. (Jedinou výhodou bolo, že už sa medzi obrázkami vyskytli už len 4, v ktorých mali hranice ciel zaoblený tvar.) Pri úlohe 2, kde si volili sami žiaci rozmiestnenie generátorov a ich počet bol 2 – 5, boli schopní skonštruovať hranice pomocou pravidla stredu a pravidla kolmosti pre 2 a 3 generátory, pri 4 a 5 generátoroch už väčšina z nich nevedela dodržať pravidlo kolmosti.

V prvej úlohe mali predložený problém pochopiť, v druhej naučiť sa správne konštruovať hranice a v tretej túto schopnosť aplikovať na zadané bodové systémy pravidelne rozmiestnené. Niektoré deti ale súvislosť medzi jednotlivými úlohami nebrali do úvahy (vo všetkých troch úlohách to bola síce tá istá situácia, v ktorej mali „vytvoriť“ oblasti, ale nebol to pre nich ten istý matematický problém), a preto rozlišujem nasledujúce skupiny:

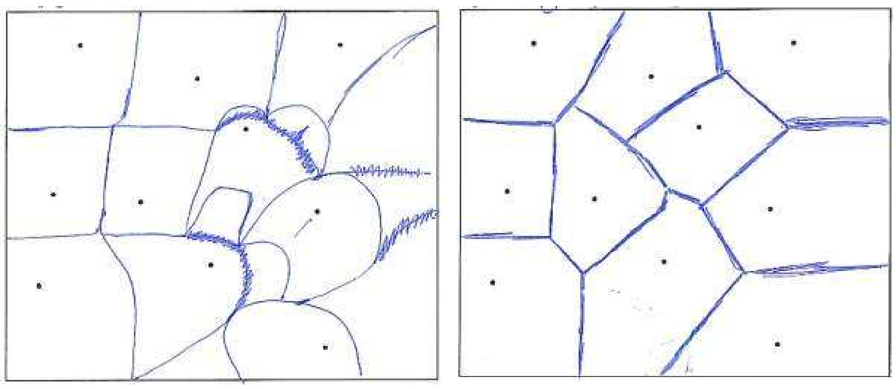
1. žiak rieši jednotlivé úlohy bez súvislostí (každá úloha predstavuje úplne iný, nový problém izolovaný od ostatných; tento typ myslenia sa prejavil najmä pri riešení tretej úlohy),

2. žiak preberá postupne riešenie, stratégiu, tá ale nie je správna,

3. žiak preberá stratégiu, chápe, že rieši ten istý problém, na ktorý je možné použiť tú istú stratégiu (môže byť viditeľné jej postupné „vylepšovanie“).

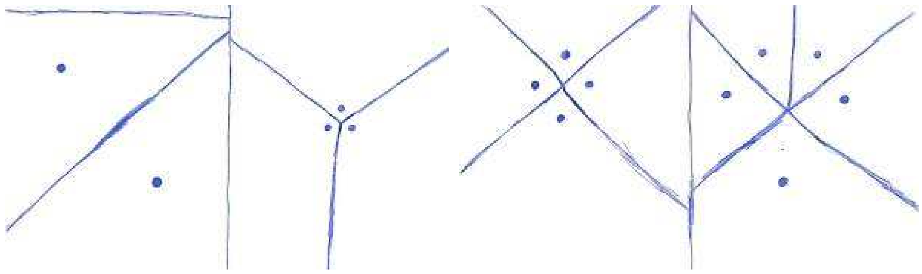
5.2.1.3 Analýza prác niektorých detí

V prvom riešení úlohy 1 (obr. 134a) **Michaela** síce vzala do úvahy vzťah viacerých najbližších generátorov a používala pravidlo stredu, pri konštrukcii hraníc bol ale pre ňu dôležitý obsah a tvar cely. Cely vytvárala postupne, pri konštrukcii novej hranice sa opierala o predchádzajúce. Pre dvojicu generátorov v ľavom dolnom rohu už nevedela vytvoriť štvorcové cely (nemohla umiestniť generátory približne do stredu štvorcových ciel), preto začala konštruovať hranice zaoblené. (Je zaujímavé sledovať, ako žiačka opravila hranice tak, aby mali cely približne rovnaký obsah; výsledkom je aj vznik oblastí bez generátorov.) V druhom riešení (obr. 134b) už využila žiačka pravidlo stredu, aj pravidlo kolmosti, to ale nie pri konštrukcii všetkých hraníc, takže teselácia nie je úplne správna. Generátory pri okrajoch obrázku už nepotrebovala „uzamknúť“. Riešenia ďalších úloh sú na obr. 135, obr. 136 a obr. 137.

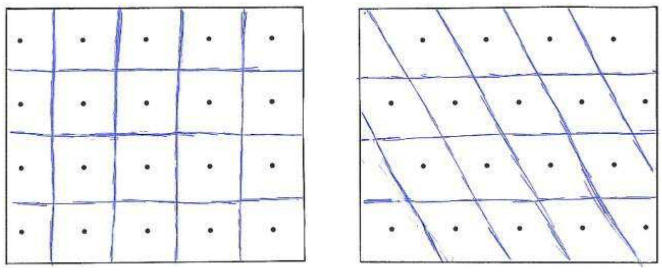


a) b)

Obr. 134 Michaela: a) prvá a b) druhá konštrukcia z úlohy 1.

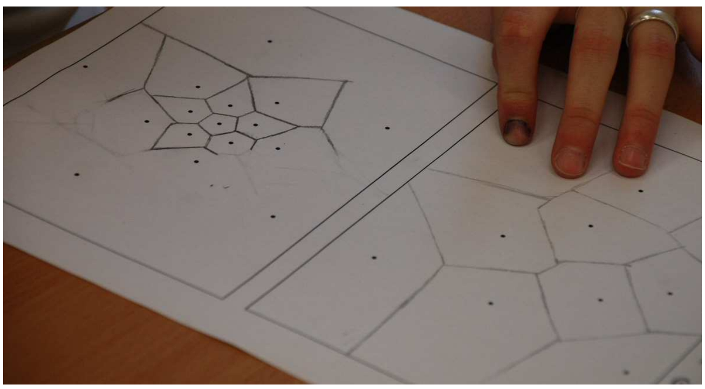


Obr. 135 Michaela: úloha 2 – teselácie pre 2, 3, 4 a 5 generátorov (pri 3, 4 a 5 generátoroch je zrejmé ich postupné pridávanie).



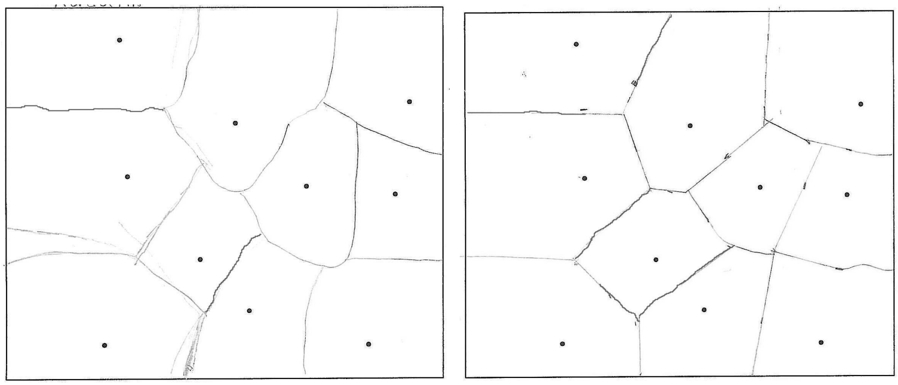
a) b)

Obr. 136 Michaela: úloha 3 (prenos riešenia).



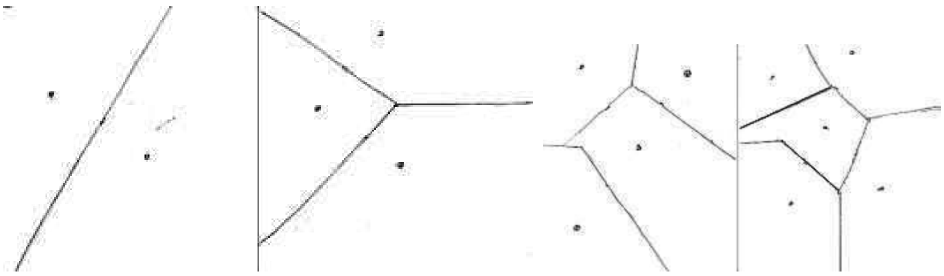
Obr. 137 Michaela: opakovaná konštrukcia Voronojovej teselácie a teselácia v tvare vianočnej hviezdy.

Barbora riešila prvú úlohu podobne ako Michaela, pri prvom riešení (obr. 138a) však netrvala na pravidle rovnakého obsahu ciel, preto napriek tomu, že sú cely zaoblené, nie sú z kategórie bubliny. V druhom riešení (obr. 138b) vyznačila žiačka stredy úsečiek spájajúcich najbližšie generátory, ktorými prechádzajú hranice, pravidlo kolmosti je ale zachované asi len v polovici prípadov. Riešenia ďalších úloh sú na obr. 139 a obr. 140.

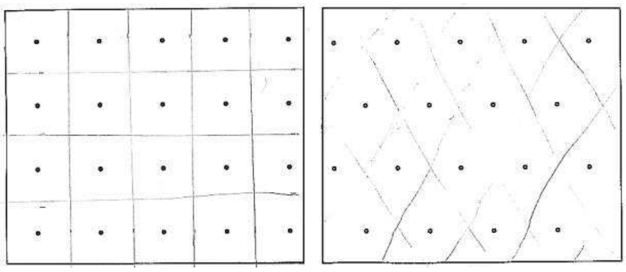


a) b)

Obr. 138 Barbora: a) prvá a b) druhá konštrukcia z úlohy 1.



Obr. 139 Barbora: úloha 2 – teselácie pre 2, 3, 4 a 5 generátorov (je zrejmé pridávanie bodu medzi prípadmi pre 2 a 3 generátory a 3 a 4).

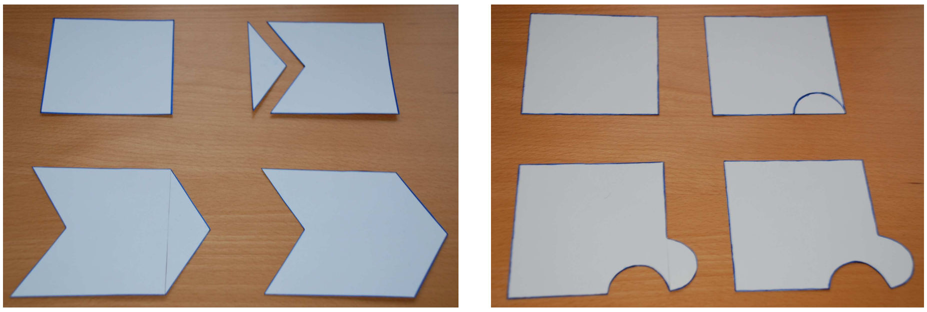


a) b)

Obr. 140 Barbora: úloha 3 (prenos riešenia).

5.2.2 Escherovské teselácie

Po odovzdaní obrázkov s Voronojovými teseláciami sme pokračovali v práci. Na príklade štvorcovej a šesťuholníkovej siete som so žiakmi zhrnula, že obe siete sú vytvorené z rovnakých útvarov tak, aby neboli medzi nimi medzery. Ukázala som im niekoľko teselácií (obr. 87), upozornila som ich na veselý obrázok cirkusových šašov. Na papierových modeloch (obr. 141a) som vysvetlila postup využívajúci posunutie, použila som pojem posunutie v spojení „... a to, čo som odstrihla, to posuniem na protiľahlú stranu“. Vysvetlila som žiakom, že ich úlohou bude vymyslieť a nakresliť podobné obrázky ako tie, ktoré som im ukázala, pričom majú kresliť na pripravené siete a použiť vysvetlený postup (ten som ešte raz zopakovala: stranu základného útvaru siete deformovať/zmeniť a takúto zmenu posunúť na protiľahlú stranu tak, aby obsah útvaru zostal nezmenený). Obrázok mohli žiaci dokresliť alebo vyfarbiť, aby niečo pripomínal. Zdôraznila som, že to, čo budú kresliť, má byť ich vlastný originálny nápad.[204] Mohla to byť zložitá sieť, dlažba, parketáž, alebo obraz do galérie (táto myšlienka sa im zdala veľmi zábavná).

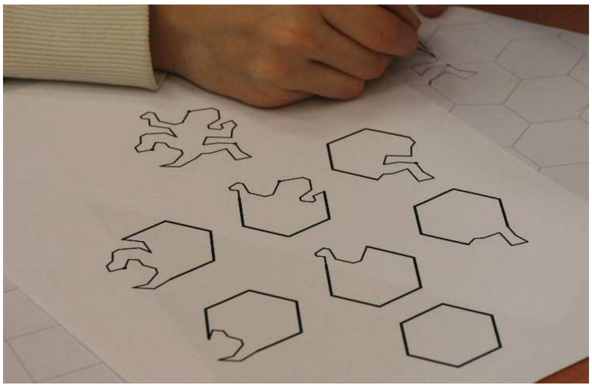


a) b)

Obr. 141 Papierové modely použité pri vysvetľovaní escherovských postupov: a) použitie posunutia, b) použitie otočenia.

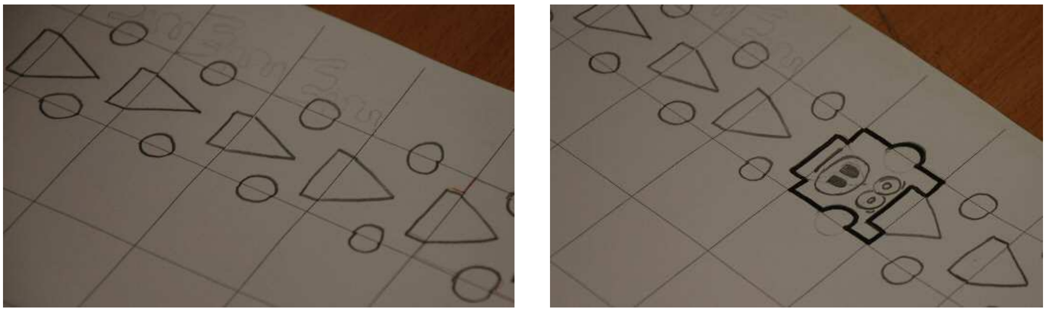
Na ďalšej hodine som žiakov pochválila za už odovzdané kresby a pokračovali sme v kreslení, pričom som im ukázala postup pre vytvorenie ciel pomocou otočenia na modeloch (obr. 86, obr. 141b). Ukázala som im tiež Escherovu grafiku *Jašterice*, na ktorú sami reagovali, že jašterica má podobný tvar ako pravidelný šesťuholník, a že muselo byť veľmi zložité vymyslieť taký komplikovaný útvar, ktorý je možné opakovať bez medzier a prekrytí. Na obrázku som im preto ukázala postup, aký mohol Escher použiť pri vytváraní jednej jašteričky. Žiaci povedali, že je to veľmi ťažké, ale dve dievčatá si vzali obrázok s postupom a skúsili napodobniť jašteričky ako teseláciu (len jedna z nich obrázok odovzdala – obr. 142). Do konca hodiny sa už potom venovali kresleniu.

[204] Traja žiaci si vypýtali papier s príkladmi escherovských teselácií, ktoré som im ukazovala; dve dievčatá hneď na začiatku, mali pocit, že majú nakresliť rovnaké obrázky (vysvetlila som im, že tie obrázky sú len pre inšpiráciu) a jeden chlapec počas kreslenia (ukázal mi dva svoje „pokusy“, pričom v oboch prípadoch nakreslil opakovanie motívu, cely neboli uzavreté; preto chcel svoje kresby porovnať s príkladmi, a tak sám nájsť princíp).



Obr. 142 Kristýna: napodobňovanie motívu jašterice na základe predlohy.[205]

Niektorým žiakom som do práce pri kreslení vstupovala, napríklad ak mali už niečo nakreslené a nevedeli, čo ďalej. Vyzvala som ich, aby vzniknutú teseláciu dokreslili alebo vyfarbili, prípadne som im navrhla smer, ktorým by sa mohli vydať (napríklad obr. 143, Príloha VIII). Často som ale musela individuálne vysvetľovať, že musia zvýrazniť hranicu útvaru, ktorý vytvorili a ktorý chcú opakovať (t. j. uzavrieť motív a tak vytvoriť výslednú celu), pretože sa na sieťach objavovali len motívy, ktoré žiaci opakovali posúvaním alebo otáčaním, a tak vytvárali vzor.



a) b)

Obr. 143 Karolína: a) nakreslený opakujúci sa motív, b) vznik cely.[206]

Medzi prácou chlapcov a dievčat bol znovu rozdiel, a to nielen v procese tvorby, ale aj vo výslednom obrázku. Dievčatá pracovali samostatne, pred začiatkom kreslenia väčšina z nich premýšľala, prípadne sa niektoré z nich rozprávali o úlohe v dvojiciach a následne starostlivo kreslili. Chlapci sa

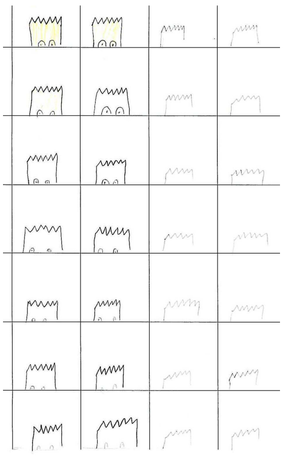
[205] Motiváciou bolo technické zvládnutie – „napodobnenie“ – geometricky zložitého útvaru (otočenie deformácie strany pri vytváraní útvaru nevystupovalo).

[206] Žiačka pri použití posunutia pri vytváraní základného útvaru nakreslila na štvorcovú sieť opakujúci sa motív – obr. 143a (dodržiavala pravidlo „čo odoberiem, to musím pridať“ , aby sa nezmenil obsah útvaru, k zachovaniu obsahu útvaru ale nedošlo) a nevedela, čo ďalej. Vyzvala som ju, aby vyznačila výsledný opakujúci sa útvar a dokreslila ho. Výsledkom bola úprava motívu a následné vyznačenie cely v tvare prasiatka (obr. 143b). Žiačka bola svojim výsledným obrázkom veľmi nadšená. Výsledná teselácia je v Príloha VIII.

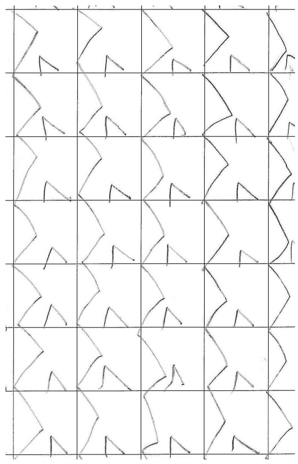
nechali viesť prvým nápadom, pracovali spontánne, mnohí z nich na sieťach nakreslili niekoľko rôznych „obrázkov", pričom netrvali na ich estetickom vzhľade. S prácou boli rýchlo hotoví a čoskoro sa už rozprávali v dvojiciach.

5.2.2.1 Analýza žiackych prác

Väčšina žiakov bola prítomná na oboch vyučovacích hodinách, ale len 8 z nich odovzdalo všetky štyri siete s obrázkami (na štvorcovej i šesťuholníkovej sieti použili posunutie a otočenie); ostatní žiaci odovzdali dve siete s obrázkami – pre každé zobrazenie jednu alebo pre jedno zobrazenie dve siete (ak na jednej hodine chýbali).



a)



b)

Obr. 144 Opakovanie neuzavretého motívu: a) Šimon: žiak pochopil požiadavku opakovania, a tak do každého štvorca – nakreslil hornú časť hlavy obľúbenej kreslenej postavičky (motiváciou mohol byť aj šašo z ukážkových teselácií; grupa *pm*, kategória nekonečno), b) Jirka: štvorce siete dokreslené ornamentom (grupa *p*1, kategória nekonečno).[207]

Zo 63 odovzdaných obrázkov predstavuje 26 teselácie, ostatné je možné rozdeliť podľa použitého pravidla, ktoré je charakteristické pre monoedrálne escherovské teselácie, ale jeho použitím nebola vytvorená escherovská teselácia:[208]

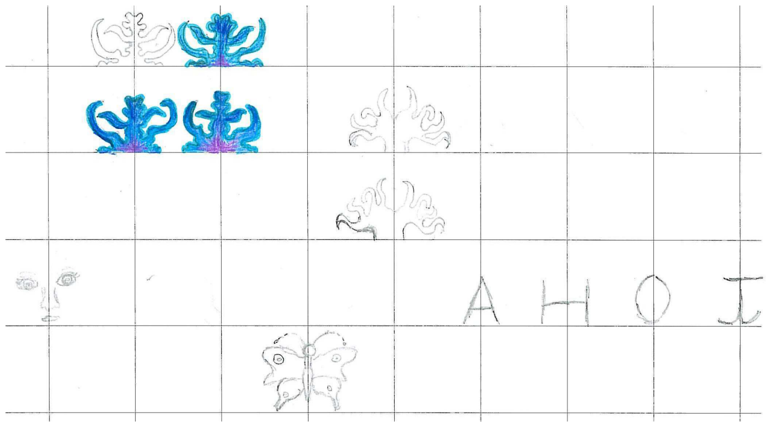
- *pravidlo opakujúceho sa útvaru* – v obrázku sa pravidelne neopakuje uzavretá cela, ale len motív vytvárajúci vzor (21 prípadov, napríklad obr. 144a, b),

---

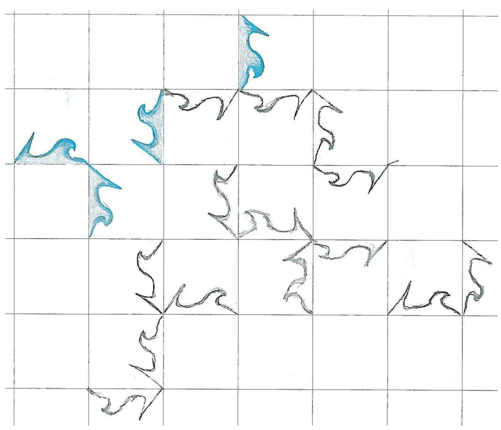
[207] Možnosť, že žiaci chápali štvorec ako opakujúci útvar a ten dokreslili ornamentom, nepredpokladám, pretože som zdôrazňovala, že sa tvar základného útvaru – štvorca či pravidelného šesťuholníka – musí zmeniť.

[208] V niektorých obrázkoch („neteseláciách") boli dodržané dve alebo i tri pravidlá, preto počet prípadov s daným pravidlom uvádzam len pri prvom z nich. Medzi odovzdanými obrázkami sa nevyskytol prípad, v ktorom by obrázok nespĺňal ani jedno z pravidiel.

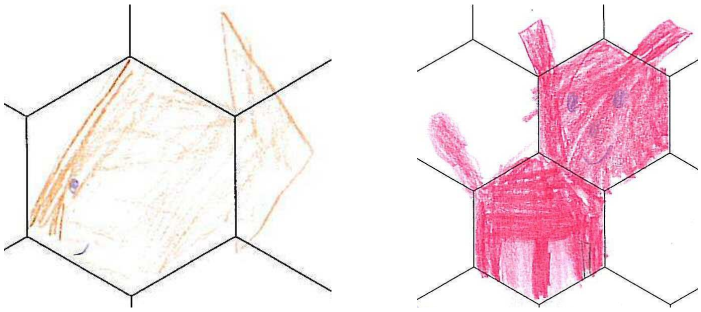
- *pravidlo symetrie* – v obrázku sa vyskytujú obrazce, ktoré sa vyznačujú symetriou (napríklad obr. 145, obr. 146),
- *pravidlo zachovania obsahu útvaru* – v obrázku sa vyskytujú také obrazce, ktoré majú rovnaký obsah ako pôvodný útvar (štvorec, pravidelný šesťuholník), pri ich vytvorení ale neboli použité escherovské postupy, a nie sú to cely, opakovaním ktorých by bolo možné monoedrálnu teseláciu vytvoriť (napríklad obr. 147).



Obr. 145 Vanda: na sieti sa okrem opakovaného osovo súmerného ornamentu (základom je zložitý rastlinný motív) vyskytuje aj ľudská tvár a motýľ, pričom osami súmernosti všetkých nakreslených figúr sú vertikálne priamky. (Zaujímavosťou je ešte slovo AHOJ, ktorého prvé tri písmená sú osovo súmerné, štvrté žiačka zrkadlovo dokresľuje.)



Obr. 146 Jarka: na sieti je naznačený začiatok procesu vytvárania cely – zložitá deformácia strany, jej otočenie o 90° je niekedy aj správne, ale niekedy nie, takže aj keby žiačka vytvorila uzavreté útvary, vďaka nezachovaniu obsahu útvaru by nevznikla teselácia (nezachováva požiadavku, čo sa odoberie z pôvodného útvaru, to sa k nemu musí pridať).



a) b)

Obr. 147 Stano: využitie „zvieracieho“ námetu a použitie pravidla o zachovaní obsahu pôvodného útvaru. (Uvedené obrázky boli vybraté z 5 obrázkov, ktoré žiak nakreslil na šesťuholníkovú sieť; všetky spĺňajú pravidlo zachovania obsahu útvaru.)[209]

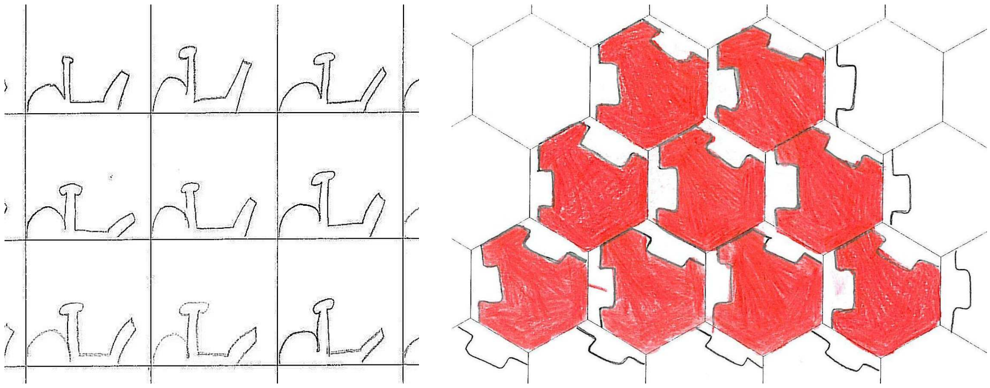
Napriek tomu, že sa vyskytlo veľa obrázkov, ktoré neboli teseláciami, niektoré z nakreslených vzorov sa vyznačujú veľmi zložitými motívmi dokazujúcimi vysokú tvorivosť žiakov (napríklad obr. 145, obr. 146). Na druhej strane práve táto zložitosť deformácií strán bola pravdepodobne prekážkou pri vytvorení teselácie, pretože žiaci neboli schopní správne vytvoriť celu.

Podľa správnosti pravidelného opakovania útvaru (cely alebo motívu) je možné rozdeliť obrázky (teselácie alebo vzory) do dvoch skupín:

- *pevná štruktúra*,
- *slabá štruktúra*.

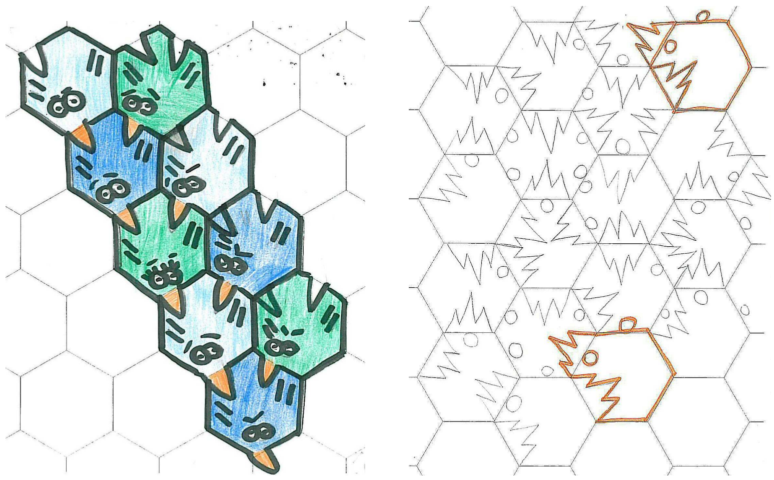
Pri pevných štruktúrach sa obrázok (teselácia alebo vzor) vyznačuje správnosťou v pravidelnom opakovaní cely alebo motívu, t. j. žiak nakreslil obrázok, v ktorom sa bez chýb opakuje rovnaký útvar (napríklad obr. 148a, b). V prípade geometricky zložitých tvarov ciel (resp. zložitých deformácií strán) sa môžu lokálne vyskytovať nejaké chyby, obrázok je ale možné považovať za pevnú štruktúru (napríklad obr. 151a). Príkladom slabej štruktúry sú obrázky vyznačujúce sa lokálnou pravidelnosťou (napríklad obr. 149a, b), v ktorých nie je možné rozšíriť opakovanie cely alebo motívu do ďalších smerov. obr. 149b je typickým príkladom výsledku procesu, v ktorom žiak správne vytvorí celu (dole – hrubšie zvýraznená; vo väčšine takýchto prípadov má cela zložitejší tvar), ale už ju nevie ďalej zopakovať tak, aby vytvárala teseláciu.

[209] Pri prvom pohľade som bola veľmi prekvapená, prečo žiak nakreslil dané obrázky. Po analýze bolo jasné, že chlapca oslovil „zvierací“ námet, a tak sa na jeho šesťuholníkovej sieti objavuje psík a rybička. Zaujímavé na oboch figúrach zvieratiek je, že boli kreslené s dodržaním pravidla o zachovaní obsahu – psík sa skladá z dvoch šesťuholníkov, pričom z toho, ktorý predstavuje trup, sú odobraté dva kúsky a uši majú približne takú dĺžku a ešte sú aj „šikmo“ zastrihnuté (aby kopírovali šikmosť odobratých častí). V útvare rybička je zo šesťuholníka odobratá trojuholníková časť, a z nej je vytvorený chvost.



a) b)

Obr. 148 Marianna: príklady pevných štruktúr, obrázky nepredstavujú monoedrálne escherovské teselácie, ale vzory (a) grupa $p1$, kategória nekonečno, b) grupa cm, kategória koberček[210]).



a) b)

Obr. 149 Príklady slabých štruktúr: a) Karolína[211], b) Daniel.

Niektorí žiaci na jednotlivé siete nakreslili len jednu teseláciu alebo vzor, pričom opakovaním daného útvaru zaplnili celú sieť alebo jej veľkú časť, iní žiaci predviedli viacero nápadov s menším počtom opakujúcich sa útvarov. Z pohľadu veľkosti plochy vyplnenej siete daným obrázkom je tak možné zaradiť obrázky do nasledujúcich kategórií (viď časť 4.4.2):

- *solitér* – napríklad obr. 150a, c,
- *pás* – napríklad obr. 150b,

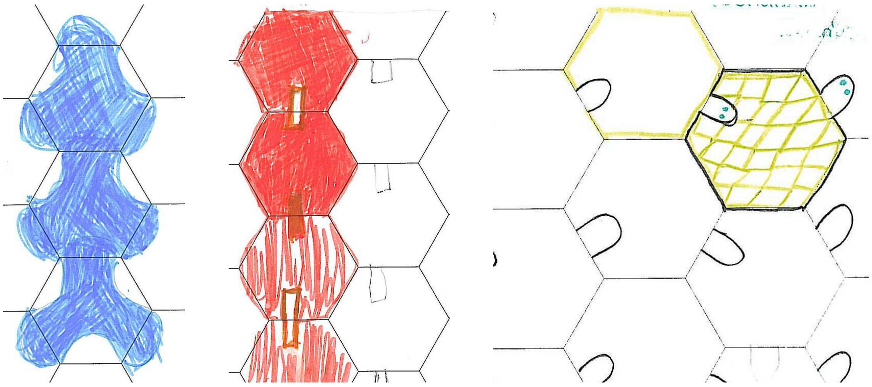
[210] Obrázok je možné považovať za diedrálnu teseláciu zloženú z dvoch útvarov – svetlý a tmavý, ale i za vzor, ale nie za monoedrálnu escherovskú teseláciu, pretože žiačka nevyznačila hranicu cely.

[211] Pravdepodobne ako prvý útvar žiačka nakreslila horného svetlého vtáčika, potom správne pokračovala v celom diagonálnom páse ceruzkou a načrtla aj druhý vedľajší pás. Pri dokresľovaní ciel ornamentom sa ale rozhodla, že vtáčiky v druhom páse budú pootočené (bolo to v rámci druhej hodiny s použitím otočenia); v tomto kroku vznikajú chyby v tvare ciel i v ornamente na nich.

– *koberček* – napríklad obr. 151a,

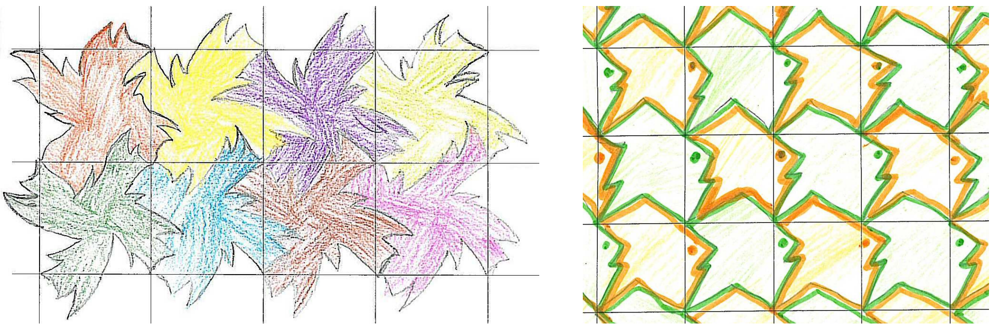
– *nekonečno* – napríklad obr. 151b.

Najviac zastúpenou kategóriou medzi nakreslenými obrázkami bola pri použití posunutia kategória nekonečno, pri použití otočenia koberček. (Pravdepodobným dôvodom je to, že žiaci pochopili po nakreslení prvého obrázku s použitím posunutia, že je možné opakovanie útvarov, t. j. teseláciu alebo vzor, rozširovať donekonečna.)



a) b) c)

Obr. 150 a) Matěj: kategória solitér (3 cely), grupa $p31m$ b) Matěj: kategória pás, grupa $p1$, b) Ivana: ak je obrázok chápaný ako vzor, tak je to kategória nekonečno, ak ako len jedna cela, tak kategória solitér, grupa $p1$.



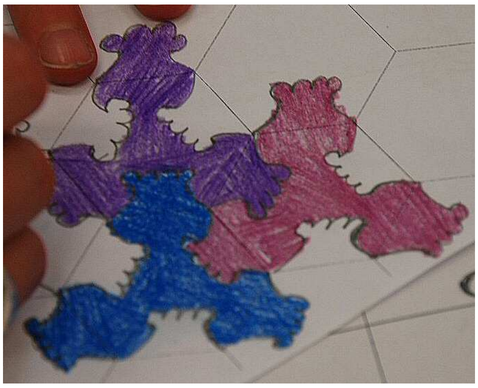
a) b)

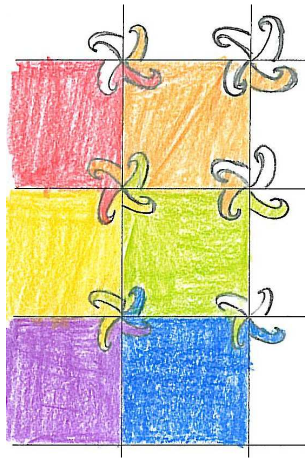
Obr. 151 a) Patrícia: kategória koberček, grupa $p4$ b) Aneta: kategória nekonečno (žiačka detailne zakreslila jednotlivé časti ciel aj na okrajoch siete), grupa $p1$.

Žiakom som na hodinách predviedla postupy, ktorými je možné vytvoriť jednu celu escherovskej teselácie; spôsob ako vytvoria celú teseláciu závisel od ich tvorivosti a rovinnej predstavivosti. A tak postupy žiakov pri vytváraní teselácie alebo vzoru je možné rozdeliť do troch prelínajúcich sa skupín[212]:

[212] Toto delenie som vytvorila na základe pozorovania žiakov pri práci, analýzy ich obrázkov a vlastnej skúsenosti. V niektorých prípadoch žiaci postupy kombinovali.

1. Žiak najprv vytvoril jednu celu (alebo niekoľko ciel alebo motívov) pomocou escherovského postupu, a tú opakoval už ako uzavretý útvar (pri opakovaní použil vo väčšine prípadov posunutie). Myslím si, že tento postup bol najčastejší a že ho žiaci využili v prípadoch, keď sa cela vyznačovala výraznou symetriou a možnosť opakovania bola veľmi zrejmá (napríklad obr. 152a).

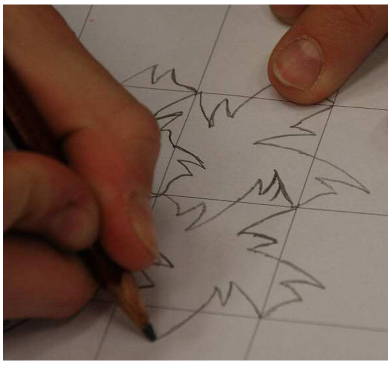

a)

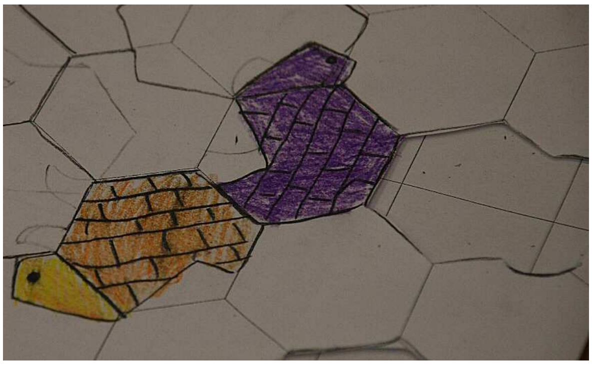

b)

Obr. 152 Michaela: a) postup 1, b) postup 3.

2. Ak je tvar cely geometricky zložitý (napríklad obr. 153a), žiak mohol každú celu vytvoriť pomocou rovnakého escherovského postupu.[213] Pomôckou pritom mohla byť z papiera vystrihnutá cela, ktorú žiak posúva alebo otáča a obkresľuje (napríklad obr. 153b).

Prvá a druhá skupina postupov vytvárania teselácií alebo vzorov je založená na prechode *od cely k teselácii*, resp. *vzoru*.


a)


b)

Obr. 153 Postup 2: a) Patrícia, b) Linda.

3. Žiak naznačil časť procesu vytvárania cely na celej sieti alebo jej časti

[213] Teselácia na obr. 153a vznikla skutočne tak, že žiačka každú celu vytvorila samostatne podľa predvedeného postupu s použitím otočenia deformovanej strany.

(napríklad deformované strany), a až dodatočne vytvoril cely (napríklad obr. 152b). Pri tomto postupe nastáva prechod *od vzoru k cele*.

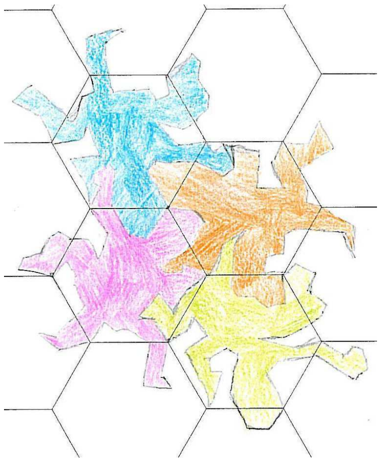
V prvej skupine postupov vystupujú zhodné zobrazenia v rovine (posunutie a otočenie) *staticky*, v druhej a tretej *dynamicky*.

Cieľom tejto činnosti bolo, aby sa žiaci naučili na základe predvedených postupov vytvoriť escherovské teselácie a aj ich vytvorili. Z nakreslených obrázkov je možné usudzovať, že žiaci sa pri kreslení zamerali na nasledujúce kategórie:[214]

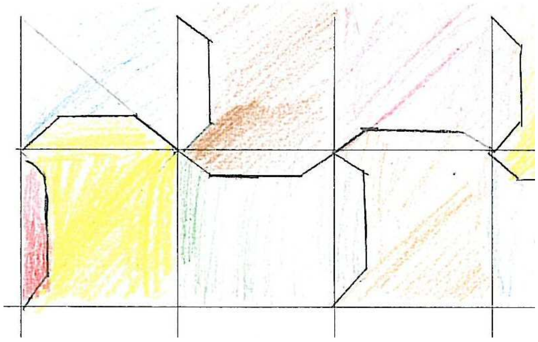
– *splnenie zadanej úlohy*,
– *tvar* opakujúceho sa útvaru a/alebo vytvorený *motív* na ňom a výsledný *ornament*,
– *vyplnenie* siete,
– *proces vytvárania*.

Podľa môjho názoru prvý prípad nastal, keď sa žiak snažil splniť úlohu ako klasickú školskú úlohu s cieľom, aby obrázok, ktorý nakreslí, bol „správny“, t. j. aby vyhovoval požiadavkám, nedbajúc na zložitosť útvarov alebo postup vytvorenia. Práve tu mohlo dôjsť k napodobňovaniu predložených ukážok, pretože sa žiak obával, že keď vymyslí vlastný nápad, tak nemusí byť správny. Druhý prípad mohol nastať, keď je na sieti menší počet ciel alebo motívov (počet 1 až 5, väčšinou sú to obrázky z kategórie solitér, koberček alebo pás) so zložitým tvarom (napríklad obr. 154), alebo žiak nenakreslil cely, ale len zložité deformácie strán (napríklad obr. 146), ktoré aj zobrazil pomocou posunutia alebo otočenia, k vytvoreniu výslednej cely ale nedošlo. V tomto prípade sú spomenuté detaily väčšinou dôležitejšie pre žiaka ako použitie zobrazení alebo teselácia, resp. výsledný obrázok. K zameraniu na vyplnenie siete dochádza v prípadoch, keď teselácia alebo vzor spadá do kategórie nekonečno (žiak vyplní celý papier alebo jeho podstatnú časť). Zameranie na proces vytvárania sa prejavilo, keď žiak vytvoril na jednej sieti viacero obrázkov, pričom na základe ich analýzy je možné určiť niekoľko rôznych postupov (napríklad obr. 155). V takýchto prípadoch vystupuje proces vytvárania ako tvorivý produkt a tento prístup k riešeniu úlohy sa vyskytuje vo veľkej miere u chlapcov. Naopak prvý a tretí (zameranie na splnenie úlohy a vyplnenie siete) je typickejší pre dievčatá.

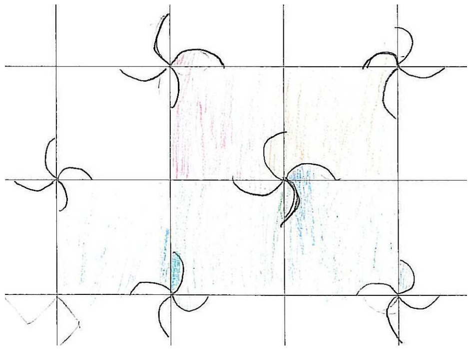
[214] Pre jednotlivé kategórie neuvádzam počet prípadov, pretože žiaci pri kreslení využívali nielen jednu kategóriu ale aj viacero; vo väčšine prípadov obrázkov bola ale jedna z nich dominantná. Je však možné povedať, že prvé tri kategórie sa vyskytovali najčastejšie, posledná mala malé zastúpenie.



Obr. 154 Kristína: zameranie na tvar cely.[215]



a)



b)

Obr. 155 Tomáš a jeho zameranie na proces vytvárania ciel a teselácie: a) postup 2, b) postup 3.

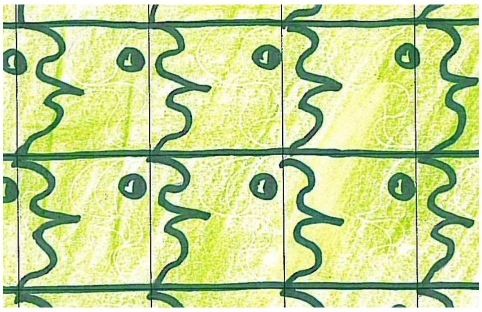
5.2.2.2 Analýza prác niektorých detí

V tejto časti predvediem escherovské teselácie štyroch žiačok a jedného žiaka, ktorých práce sú podľa môjho názoru veľmi zaujímavé z hľadiska tvorivosti a rovinnej predstavivosti.

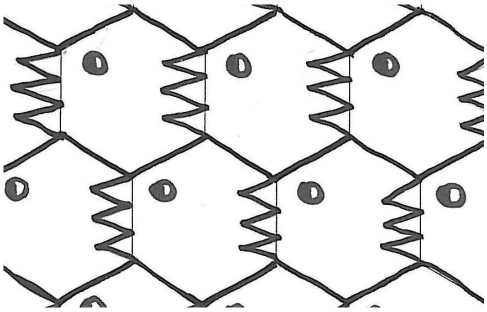
Lucia odovzdala štyri siete, na každej z nich bola jedna teselácia (každá predstavovala kategóriu nekonečno). Cely teselácií na obr. 156a, b boli vytvorené na základe jednonásobného posunutia jednej deformácie strany, ktorá je zložitejšia ako na predvedených ukážkach; výslednú teseláciu vyzdobila „ornamentom“. Pri vytvorení prvej cely teselácie (alebo niekoľko

[215] Žiačka na prvej hodine chýbala, Escherove jašterice ju ale zaujali hneď a boli pre ňu výzvou. Najprv sa snažila nakresliť jednu jaštericu (v porovnaní s ostatnými žiakmi jej kreslenie trvalo dlho, ale adekvátne k zložitosti tvaru), vyzvala som ju, aby pokračovala ďalej a nakreslila aspoň štyri jašteričky, čo aj zrealizovala. Pracovala sústredene celú hodinu. Pravdepodobne prvou bola ružová jašterica (vyzerá najpresnejšie). Proces kreslenia bol od začiatku založený na „kopírovaní“ predlohy, pričom otáčanie deformovanej strany pri práci nepoužila. Žiačka sa snažila, aby všetky štyri útvary boli rovnaké (a čo najviac „podobné“ originálu), a každý prislúchal jednému šesťuholníku.

prvých) na obr. 157a bolo použité dvojnásobné otočenie jednej deformácie, na šesťuholníkovej sieti (obr. 157b) trojnásobné otočenie. Je pravdepodobné, že pri kreslení ďalších ciel žiačka nepoužila otočenie, ale najprv nakreslila opakujúce sa deformované strany na základe symetrie a posunutia, a tie následne vytvorili cely (t. j. najprv vytvorenie jednej, resp. viacerých ciel, potom prechod od vzoru k cele).

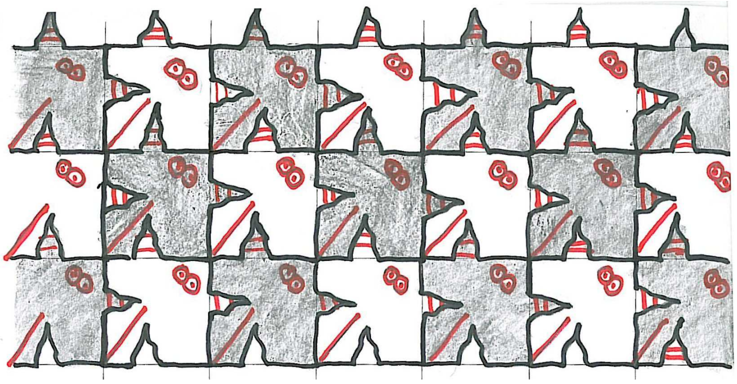


a)

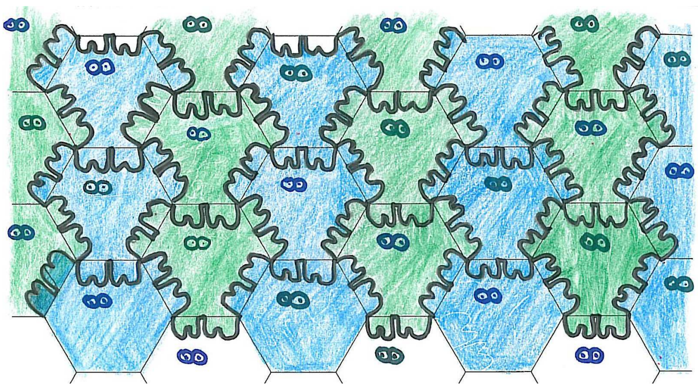


b)

Obr. 156 Lucia: teselácie, ktorých základná cela bola vytvorená pomocou posunutia (obidve teselácie sú reprezentantmi rovinnej grupy symetrií $p1$, kategória nekonečno).



a)

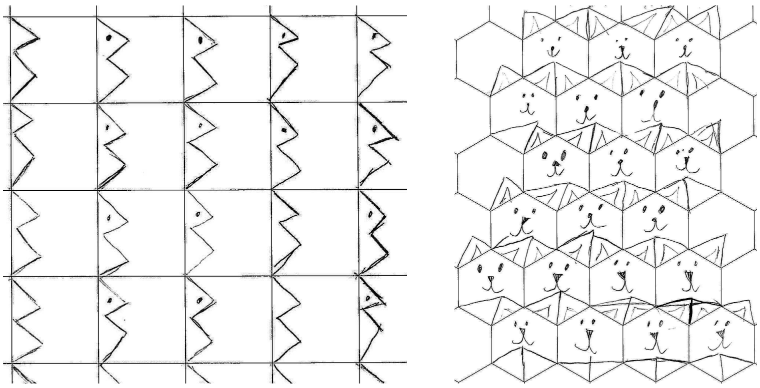


b)

Obr. 157 Lucia: teselácie, ktorých základná cela bola vytvorená pomocou otočenia (a) grupa pm, b) grupa cm; obidve teselácie sú dokonale 2-farebné, kategória nekonečno).

Tieto štyri teselácie patria k najkrajším, ktoré žiaci z tejto triedy nakreslili. V prvých dvoch teseláciách (obr. 156a, b) sa žiačka zamerala na tvar ciel, každá z teselácií na obr. 157 je pevnou štruktúrou s dvoma významnými charakteristikami – tvar ciel a ich farebnosť. Žiačka zachovala obidve charakteristiky, pričom tvar predstavuje statiku, farebnosť dynamiku.

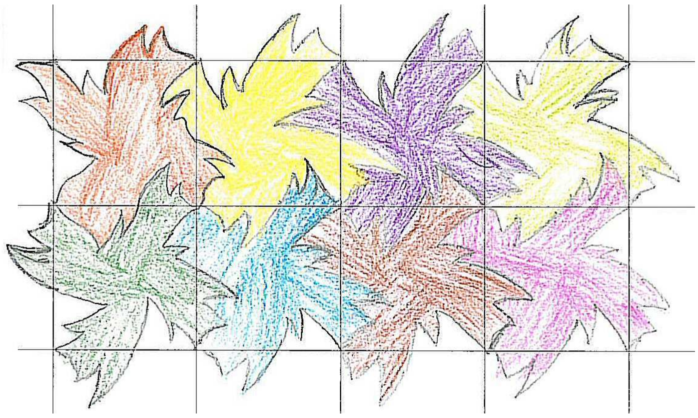
Patrícia odovzdala obrázky na štyroch sieťach. Z prvých dvoch, v ktorých pri vytváraní základného opakujúceho sa útvaru použila posunutie, je len jedna teseláciou. Na štvorcovej sieti (obr. 158a) je opakujúci sa motív rybky, motívy však nie sú explicitne uzavreté a výsledný obrázok nie je teseláciou ale vzorom (kategória nekonečno). Na šesťuholníkovej sieti (obr. 158b) je opakujúci sa útvar pripomínajúci mačaciu hlavu s detailným dokreslením (kategória koberček), ktorý je už možné napriek malým nepresnostiam považovať za uzavretý a teda za celu teselácie. Na oboch sieťach na obr. 159 sú teselácie, ktorých základnou celou je útvar pripomínajúci list. Pri vytváraní týchto teselácií (obe predstavujú kategóriu koberček) využíva postup 2 (viď obr. 153a). U tejto žiačky je viditeľný posun, a to nielen v tvorivosti (prešla od jednoduchého motívu ku geometricky zložitým deformáciám strán), ale aj v pochopení teselácie ako štruktúry, ktorú je možné ďalej rozširovať: pri kreslení prvého a druhého obrázku sa naučila, že k jednoznačnému „určeniu“ opakovania stačí vyplniť len časť siete, a tak prechádza od kategórie nekonečno ku kategórii koberček a namiesto vyplnenia siete sa pri použití otočenia sústreďuje na deformáciu strany pôvodného útvaru a tvar výslednej cely.



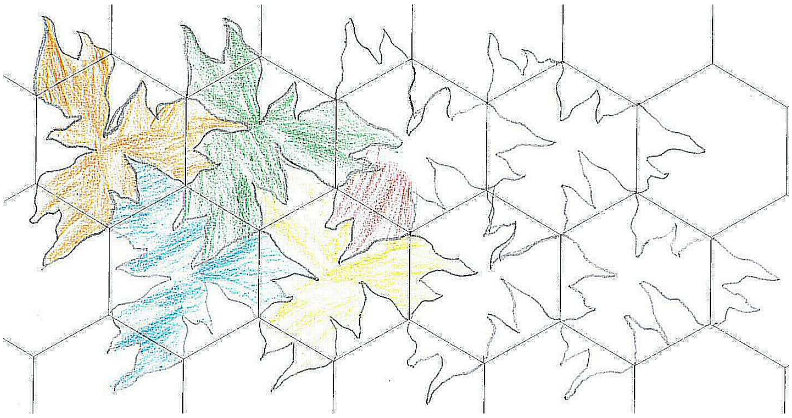
a) b)

Obr. 158 Patrícia: a) vzor, ktorého základný motív bol vytvorený pomocou posunutia (grupa $p1$, kategória nekonečno), b) teselácia, ktorej základná cela bola vytvorená pomocou posunutia (grupa cm, kategória koberček).

V porovnaní s niektorými ďalšími deťmi, ktoré nakreslili teselácie so zložitými tvarmi ciel (napríklad obr. 156, obr. 157 alebo obr. 160) a ešte svoju teseláciu aj vyfarbili s určitou pravidelnosťou, v tomto prípade žiačka farebnú symetriu nevyužila napriek tomu, že jednotlivé cely od seba farebne odlíšila. Po dvoch mesiacoch som sa s ňou stretla znovu; nevedela mi vysvetliť, ako ju napadlo opakovať taký zložitý uzavretý motív a podľa jej slov farby zvolila náhodne.[216]



a)

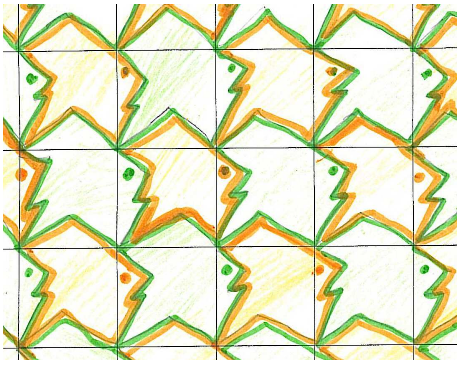


b)

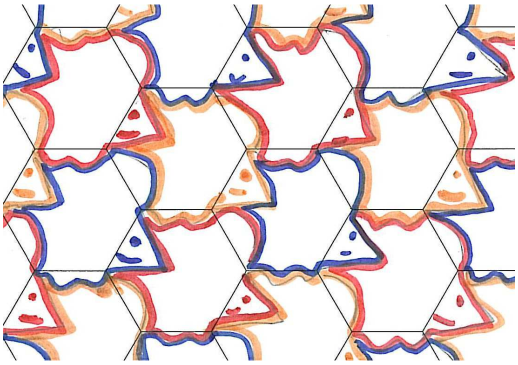
Obr. 159 Patrícia: teselácie, ktorých základná cela bola vytvorená pomocou otočenia (a) grupa $p4$, kategória koberček, b) grupa $p1$, kategória koberček).

Aneta odovzdala dve teselácie, v ktorých použila posunutie pri vytváraní základnej cely (na ďalšej hodine chýbala). V oboch prípadoch predstavujú základné cely akvarijné rybičky (obr. 160a, b). Vyplnila nimi celé siete (zamerala sa ale nielen na vyplnenie siete ale aj tvar opakujúceho sa útvaru, obidve teselácie sú z kategórie nekonečno), dokonca na oboch sieťach naznačila na okraji možnosť ďalšieho rozširovania (časti rybičiek). Pri oboch teseláciách žiačka použila posunutie dvoch, resp. troch rôznych deformácií. V tom sa líši od predložených jednoduchých ukážok a touto zložitosťou tak napodobňuje Escherove jašterice. Dôležitou a zaujímavou charakteristikou týchto teselácií je ornament na teselácií a farebná symetria v diagonálnych smeroch.

216 Žiačka nechodí do ľudovej školy umenia, a ani sa špeciálne nevenuje kresleniu.



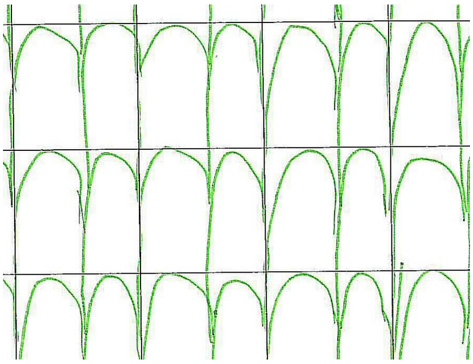
a)



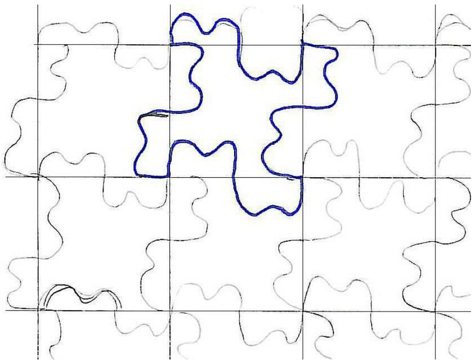
b)

Obr. 160 Aneta: teselácie vytvorené pomocou posunutia (a) grupa $p1$, kategória nekonečno, dokonale 2-farebná, b) grupa $p1$, kategória nekonečno, dokonale 3-farebná).

Ondřej odovzdal obrázky na dvoch sieťach. Na štvorcovej sieti je vzor zložený z opakovaných „kopčekov“ – obr. 161a. Pri použití otočenia na štvorcovej sieti však vytvára zložitú deformáciu strany, ktorú otáča (aspoň pri vytvorení niekoľko prvých ciel, pri ostatných je vytvorenie teselácie už založená na použití posunutia a symetrie) – obr. 161b.[217] Obidva obrázky sú z kategórie nekonečno.



a)



b)

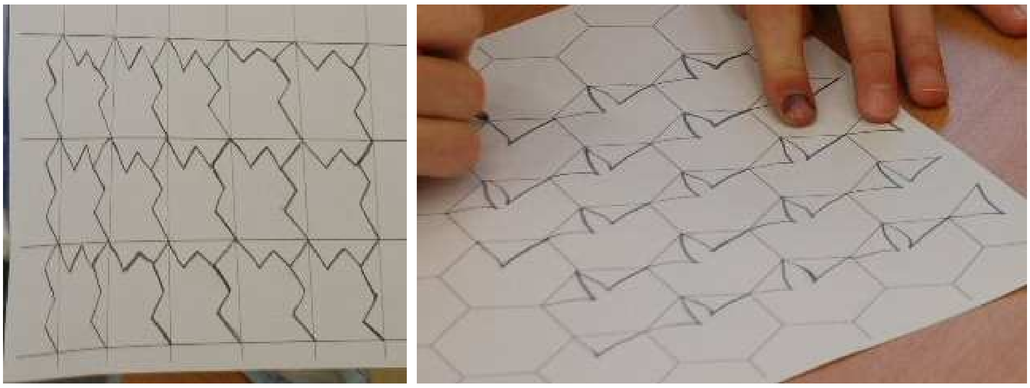
Obr. 161 Ondřej: a) vzor, ktorého základný motív bol vytvorený pomocou posunutia (grupa pm, kategória nekonečno), b) teselácia, ktorej základná cela bola vytvorená pomocou otočenia (grupa $p4$, kategória nekonečno).

Michaela[218] bola pri kreslení escherovských teselácií na oboch hodinách. Teselácie z prvej hodiny neodovzdala, sú ale zachytené na fotkách – obr. 162 (obe teselácie predstavujú kategóriu nekonečno). Pri použití otočenia (obr. 162, kategória koberček) vytvára celu zložitého tvaru pomocou

[217] Žiak mal pri konštrukcii Voronojovej teselácie problémy; napriek tomu, že sa mu snažili úlohu a jej riešenie vysvetliť spolužiaci, nevedel konštrukciu zrealizovať. Preto pri druhom obrázku – obr. 161b, ktorý odovzdal, mal veľkú radosť, že úlohu splnil a že som ho pochválila (žiak si bol vedomý, že úlohu splnil veľmi dobre).

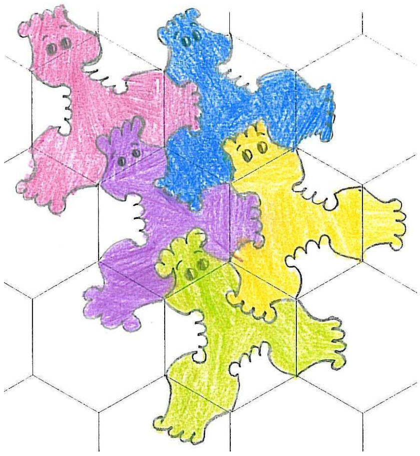
[218] Michaela sa prejavila ako zaujímavá riešiteľka už pri konštrukcii Voronojových teselácií – napríklad obr. 134.

trojnásobnej deformácie strán; pri kreslení ďalších ciel pravdepodobne už otočenie deformovaných strán nahrádza posunutím celého útvaru – cely.



a) b)

Obr. 162 Michaela: teselácia a vzor, ktorých základná cela a motív boli vytvorené pomocou posunutia (a) grupa $p4g$, kategória nekonečno, b) grupa cm, kategória nekonečno).



Obr. 163 Michaela: teselácia, ktorej základná cela bola vytvorená pomocou otočenia (grupa cm, kategória koberček).

5.3 Porovnanie práce žiakov a študentov

1. Z pohľadu úspešnosti riešenia zadaných úloh považujem žiakov primy osemročného gymnázia za úspešnejších pri vytváraní teselácií, a to najmä escherovských, ale aj Voronojových. U študentov som síce predpokladala, že úspešnosť bude väčšia, pretože všetky poznatky k riešeniu zadaných úloh mali, svoj potenciál ale nevyužili. Na druhej strane sa žiaci primy snažili vymyslieť správne riešenie.
2. Takmer všetky teselácie (Voronojove, escherovské i mnohouholníkové) študentov – gymnazistov – patrili k pevných štruktúram. Študenti dodržiavali počas vytvárania celého obrázku pravidlá, na základe ktorých pracovali od začiatku. Myslím si, že u nich je vyvinutý už silnejší cit pre pevnú štruktúru.
3. V oboch výskumných vzorkách sa vyskytli jedinci, ktorí si neuvedomili, že teselácia je nielen súbor prvkov – ciel určitého tvaru, ale že medzi týmito prvkami sú vzťahy týkajúce sa ich usporiadania. K nim patria napríklad autori ciel na obr. 112 (preškrtnutá teselácia 6) alebo obr. 149b. Tento problém súvisí s rovinnou predstavivosťou.
4. Zaujímavosťou je, že v obrázkoch/teseláciách študentov sa nevyskytol problém okrajov; hranice ciel nezaobľujú pri okrajoch papiera. Myslím si, že už chápu, že dané „rozdelenie“ je možné ďalej rozširovať.
5. U niektorých escherovských teselácií nakreslených žiakmi sa vyskytol zaujímavý jav: kým pri použití posunutia žiaci vytvárajú teseláciu alebo vzor z kategórie nekonečno, pri použití otočenia patrí obrázok už do kategórie koberček – napríklad obr. 158, obr. 159. Predpokladám, že sa žiaci na prvých obrázkoch naučili postup a podstatu úlohy (obrázok je možné rozširovať do všetkých strán), potom sa už viac zamerali na tvar cely alebo motívu a na ornament na teselácii alebo vzore.
6. Zatiaľ čo žiaci primy nevenovali pozornosť „umelému“ začleneniu úloh do matematiky, študenti nevideli význam, prečo by sa úlohám, ktoré sa netýkajú preberaného učiva, mali venovať. Vhodnejšie zaradenie Voronojových teselácií na strednej škole považujem v rámci fyziky pevných látok, kde by študenti zostrojili hranice zŕn podľa rastového modelu zo zárodkov.

Kapitola 6

Zhrnutie

Mojím cieľom bolo zistiť, ako prebieha práca žiakov základnej školy a študentov strednej školy s teseláciami, zmapovať javy v riešeniach jednotlivých úloh i v celkovom prístupe. Teselácie, ktoré skonštruovali riešitelia v jednotlivých experimentoch, odhaľujú viacero skutočností:

a) Predpokladala som, že rozdiely medzi prácou žiakov základnej školy a študentov strednej školy budú výraznejšie. Očakávala som, že gymnazisti budú zvýhodnení, pretože použijú príslušné matematické poznatky, ktoré si osvojili už na základnej škole, a konštrukcia teselácií bude pre nich veľmi jednoduchá. Tieto predpoklady sa však nesplnili. Gymnazisti neboli pri konštrukcii Voronojových teselácií vzhľadom k svojim možnostiam až takí úspešní pravdepodobne aj vďaka formálne naučenému poznatku; konštrukcia escherovských teselácií bola pre nich zase činnosťou súčasne „pod“ aj „nad ich úroveň“. Výhodou žiakov základnej školy je ich radosť z kreslenia a hravosť.

b) Väčšina riešiteľov (bez ohľadu na vek) pri konštrukcii Voronojových teselácií nepoužila (resp. neuvedomovala si pri aplikácii) požadované matematické poznatky a schopnosti a postup riešenia úlohy si hľadajú sami. Dokonca aj v prípade, že žiaci – primáni – opakujú riešenie úlohy (konštrukciu Voronojových teselácií) po osvojení pojmu os úsečky a jej konštrukcii, nie sú schopní použiť tento poznatok a schopnosť. Aj táto činnosť potvrdila formálnosť nadobudnutia poznatkov v školskej geometrii.

c) Napriek tomu, že v škole sú žiakom a študentom väčšinou priamo predkladané algoritmy na riešenie úloh, sú schopní riešiť úlohy aj bez zadaného postupu (pri Voronojových teseláciách), prípadne s malou pomocou učiteľa, alebo vedia zadaný algoritmus obmeniť, resp. rozšíriť (pri escherovských teseláciách).

d) Žiaci a študenti sa často vyhýbajú jednej z etáp riešenia úloh, a to návratu k zadaniu po vyriešení úlohy (kontrola zhody riešenia so zadaním). To sa prejavilo aj pri zadaných úlohách. Pri Voronojových teseláciách si žiaci a študenti neskontrolovali, či rozdelenie časti roviny na cely (oblasti) spĺňa požiadavku zo zadania, pri escherovských teseláciách či majú ich „obrázky“ všetky znaky charakteristické pre predvedené (modelové) teselácie.

e) Obrázky nakreslené žiakmi a študentmi preukázali ich úžasnú tvorivosť, ktorá sa často v škole pri riešení bežných algoritmických úloh neprejaví.

Všetky tieto skutočnosti však nie sú výnimočné pre prácu s teseláciami, sú viditeľné aj v iných činnostiach spojených so školskou matematikou. Sú ale ďalšie dôležité skutočnosti, ktoré sú charakteristické a jedinečné práve pre prácu s teseláciami:

f) Považujem za dôležité ukázať deťom teselácie a upozorniť ich na ne, pretože okrem svojich reálnych podôb okolo nás (dlažby, parketáže, systémy buniek alebo zŕn polykryštalických materiálov, mozaiky v umení) majú aj široké uplatnenie ako matematický model reálnych objektov a situácií. O tomto som sa snažila presvedčiť v kapitole 2.[219]

g) Mladší žiaci na intuitívnej úrovni, ale väčšinou správne, použili zhodné zobrazenia ako posunutie a otočenie. Je to dôkaz toho, že v škole často učíme svojich žiakov a študentov niečo, čo už dávno vedia a potom sú v pomykove, že sa učia známe veci ako niečo nové. Práve zobrazenia v geometrii sú presne tým, s čím môžeme na vyučovaní rátať ako s niečím známym.[220]

h) Na základnej škole sa pri teseláciách žiaci stretnú so zložitejšími geometrickými tvarmi v roli cely ako sa obyčajne stretávajú.[221]

i) Stredoškolská geometria je silno prealgebraizovaná, študenti neradi kreslia/konštruujú, a preto aj konštrukčné úlohy v planimetrii a stereometrii patria k ich slabým miestam. Teselácie by svojou zábavnosťou a širokou aplikáciou mohli aspoň trochu tento stav zmeniť.

---

[219] Keď sa ma moji študenti pýtali, o čom je moja dizertačná práca, boli prekvapení, že napríklad systém buniek, kryštalické látky, Escherove obrazy, dopravná obslužnosť a kachličky v kúpeľni môžu mať niečo spoločné.

[220] Z vlastnej skúsenosti žiačky/študentky môžem povedať, že v mnohých prípadoch som bola v škole zaskočená, keď sme preberali nejakú tému a učiteľ nevyužil naše poznatky a skúsenosti, ale pristupoval k nám ako k „čistej tabuli“. Ako príklad môžem uviesť súvislosť medzi goniometrickými funkciami ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku a goniometrickými funkciami uhla vedúcimi k grafom týchto funkcií, ktorú som pochopila až pri príprave na maturitu.

[221] Na základe školskej geometrie by bolo možné usudzovať, že väčšina rovinných útvarov patrí k trojuholníkom alebo štvoruholníkom a to isté platí aj pre objekty reálneho sveta, alebo školská geometria vôbec nie je o nás a svete okolo nás.

j) Teselácie sú zaujímavé ešte z jedného dôvodu: na jednej strane sú teselácie vyznačujúce sa výraznou pravidelnosťou (týkajúcou sa tvaru ciel, ich usporiadania či farebnosti), na druhej strane existuje výrazná nepravidelnosť napríklad v tvare ciel Voronojových teselácií. Žiaci a študenti si musia uvedomiť, že na svete majú obe – pravidelnosť a nepravidelnosť – svoje nezastúpiteľné miesto.

Preto si myslím, že teselácie by mali vystupovať vo vzdelávaní nielen ako zábavné, tvorivosť a rovinnú predstavivosť podporujúce *prostredie* použité pre zavedenie, precvičovanie, aplikáciu či opakovanie určitých matematických poznatkov a schopností, ale aj ako *obsah*, ktorý upozorní malých i veľkých na rôznorodosť sveta.

Nakoniec by som chcela ešte uviesť skúsenosť pani učiteľky Mgr. Michaely Votípkovej, ktorá sa zúčastnila mojej dielne v rámci seminára Dva dny s didaktikou matematiky 2005 zameraného na konštrukciu Escherovských teselácií[222]:

> *V závěru školního roku při celkovém opakování učiva jsem zařadila do výuky rozšiřující učivo posunutí a otáčení z kapitoly „shodnost“. Po výkladu jsem žákům ukázala i netradiční využití posunutí a otáčení ve výtvarném umění. Technika „escherovských teselací“ žáky zaujala, a proto jsem je požádala o vytvoření vlastních výtvarných mozaikových děl. Žáci to přijali jako zpříjemnění hodin matematiky v závěru školní docházky, kdy se jim už počítat příliš nechtělo. Časová náročnost nebyla velká. Jednu hodinu jsme věnovali bližšímu seznámení se s výtvarnou technikou a tvorbou obrázků, a další dvě hodiny žáci již samostatně pracovali. Několik žáků svou práci dokončovalo doma. Z výsledných prací měli radost žáci i já a využili jsme je na výzdobu třídy.*

Šesť teselácií, ktoré vytvorili deti pod vedením tejto pani učiteľky, sú obsahom Príloha IX až Príloha XIV.

[222] Postupy pre tvorbu escherovských teselácií som stručne vysvetlila v príspevku [Ilucová, 2005a].

Záver

Výsledkom viac než šiestich rokov naplnených mojou „honbou“ za teseláciami v oblasti matematiky, umenia, histórie, vedy či didaktiky matematiky nie je len táto práca, ktorá (dúfam) odkryje čitateľovi časť fascinujúceho sveta okolo nás, ale i radosť mnohých malých i väčších autorov zo svojich (často netušených) schopností preukázaných pri vytváraní rovinných teselácií. Veľmi si ale tiež cením svoj obrovský posun vo vnímaní geometrie v reálnom svete a v citlivosti na prácu žiakov a študentov. Pri hľadaní informácií o teseláciách som si cvičila svoju trpezlivosť, pri riešení plánovaných úloh a kontrole žiackych a študentských riešení svoju predstavivosť, a pri analýzach obrázkov schopnosť nachádzať detaily a prepojiť ich.

Ľudia, ktorých prácu som sa snažila v krátkosti opísať v kapitolách 1 a 2 a žiaci a študenti, ktorí vystupovali v úlohe výskumných vzoriek, sa pri študovaní rôznych materiálov a konkrétnych kresieb stali pre mňa nie anonymnými ľuďmi, ale individualitami, ktoré objavujú krásy sveta. A počas písania dizertačnej práce sa mi vďaka svojim obrázkom, knihám a článkom „nasťahovali“ nielen do bytu ale aj do života. Chcela by som ešte poďakovať ľuďom, ktorí síce o mne nevedia, ale veľmi mi pomohli pri písaní práce svojimi článkami a publikáciami ako napríklad D. Schattschneiderová a dvojica B. Grünbaum a G. C. Shephard, alebo ma inšpirovali svojím nadšením a umeleckým nadaním pri vytváraní teselácií ako K. Moser, M. C. Escher a M. Riceová.

Dúfam, že táto práca nie je len prácou dizertačnou, ale prináša prehľad základných poznatkov o teseláciách a geometrickej predstavivosti a tvorivosti, ako som ich vnímala ja, a môže inšpirovať mnohých učiteľov k tomu, aby prebudili nadšenie pre geometriu v svojich žiakoch a študentoch. Aby sme mohli povedať, že škola nás nenaučila len čítať, písať a počítať, ale otvorila nám oči, ktoré sú citlivé na „geometrický svet“ okolo nás.

Literatúra

1. Bool, F. H., Ernst, B., Kist, J. R., Locher, J. L., Wierda, F. *Escher. The Complete Graphic Work.* New York: Thames & Hudson, 2000.
2. Brown, H., Bülow, R., Neubüser, J., Wondratschek, H., Zassenhaus H. *Crystallographic Groups of Four-Dimensional Space.* New York: Wiley, 1978.
3. Callingham, R. Primary students' understanding of tessellation: an initial exploration. In Hoines, M. J., Fuglestad, A. B. (Eds.), *Proceedings of the 28th PME 2004* vol. 2., 2004, str. 183–190.
4. Carniel, D., Knapstein, K. Parkettieren mit unregelmäßigen Vierecken. *Beiträge zur Reform der Grundschule MATHEMATIK FÜR KINDER – MATHEMATIK VON KINDERN*, Grundschulverband – Arbeitskreis Grundschule e. V. Frankfurt am Main, 2004, str. 116–127.
5. Coxeter, H. S. M. *Regular Polytopes.* 3rd edition. Dove, New York: Courier Dover Publications, 1973.
6. Coxeter, H. S. M. *Introduction to Geometry.* 2nd edition. New York: J. Wiley & Sons, 1989.
7. Crompton, A. Lifelike Tessellations. In McKennan, G. (Ed.), *Manchester Architectural Papers.* The Manchester School of Architecture, 2000, str. 17–24.
8. Csikszmentmihalyi, M. Society, culture, and person: a system view of creativity. In Sternberg, R. J. (Ed.), *The nature of creativity. Contemporary psychological perspectives.* Cambridge: Cambridge University Press, 1988, str. 325–339.
9. Daems, J. Escher for the mathematician. (Interview N.G. de Bruijn and Hendrik Lenstra.) *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/9, Nr. 2, 2008, str. 134–137.
10. Darvas, G. *Symmetry (Cultural-historical and ontological aspects of science-arts relations).* Berlin: Birkhäuser, 2007.
11. Dunlap, R. A. *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers.* Singapore: World Scientific Publishing, 1997.

12. Dvořák, P. *Vnímání reprezentací prostoru zprostředkovaných výpočetní technikou.* Dizertačná práca. Praha: PedF UK, 2006.
13. Escher, M. C. *M. C. Escher, Grafika a kresby.* Köln: Taschen, 2003.
14. Galiulin, R. V. To the 150th Anniversary of the Birth of Evgraf Stepanovich Fedorov (1853–1919). *Crystallography Reports* vol. 48, No. 6, 2003, str. 965–980.
15. Grünbaum, B., Shephard, G. C. Tilings by regular polygons. *Mathematics magazine* vol. 50, No. 5, 1977, str. 227–245.
16. Grünbaum B., Shephard G. C. Some Problems on Plane Tilings. In Klarner D. (Ed.), *The Mathematical Gardner.* Boston, MA: Prindle, Weber, and Schmidt, 1981, str. 167–196.
17. Grünbaum B., Shephard G. C. Symmetry in Moorish and other ornaments. *Computers and Mathematics with Applications* 12B, 1986, str. 641–653.
18. Grünbaum, B., Shephard, G. C. *Tilings and Patterns.* New York: W. H. Freeman and Company, 1987.
19. Grünbaum, B. What Symmetry Groups Are Present in the Alhambra? *Notices of the AMS* vol. 53, No. 6, 2006, str. 670–673.
20. Hargittai, I., Hargittai, M. *In Our Own Image: Personal Symmetry in Discovery.* New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2000.
21. Hennessey, B. A., Amabile, T. M. The conditions of creativity. In Sternberg, R. J. (Ed.), *The nature of creativity. Contemporary psychological perspectives.* Cambridge: Cambridge University Press, 1988, str. 11–38.
22. van Hiele, P. M. *Structure and Insight.* Orlando, Florida: A Theory of Mathematics Education Academic Press, 1986.
23. Ilucová, L. *Rovinné mozaiky vo vyučovaní matematiky.* Diplomová práca. Košice: PrF UPJŠ, 2002.
24. Ilucová, L. Escherovské teselácie. In Stehlíková, N., Jirotková, D. (Eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2005*, zborník k semináru. Praha: PedF UK, 2005a, str. 68–74.
25. Ilucová, L. Tessellations by Polygons in Mathematics Education. In Hudson, B., Fragner, J. (Eds.), *Researching the Teaching and Learning of Mathematics II. Proceedings of MATHED 2004 and 2005 Intensive Programmes.* Linz: Pädagogische Akademie des Bundes OÖ, 2005b, str. 161–177.
26. Ilucová, L. Creativity in the Creation of the Tessellating Regions (poster). In Novotná, J. (Ed.), *Proceedings of SEMT 05.* Prague: Faculty of Education, Charles University, 2005c, str. 350–351.

27. Ilucová, L. Tessellating plane – Creative Human Activity. *Department of Mathematics Report Series* vol. 14, 2006. České Budějovice: University of South Bohemia, 2006, str. 73–76.
28. Ilucová, L., Saxl, I., Svoboda, M., Sklenička, V., Král, P. Structure of Ecap Aluminium after Different Number of Passes. *Image Analysis and Stereology* vol. 26, 2007a, str. 37–43.
29. Ilucová, L., Ponížil, P., Svoboda, M., Saxl, I. Computer simulation and metallography of locally non-homogeneous materials. In Longauerová, M., Hrivňák, I., Longauer, S., Janák, G. (Eds.), *Acta Metallurgica Slovaca* 1/2007 (ročník 13), Special Issue, 2007b, str. 84–90.
30. Ilucová, L. Rovinné grupy symetrií vo výtvarnom umení. In Bečvář, J., Bečvářová, M. (Eds.), *Sborník sylabů 28. mezinárodní konference Historie matematiky.* Jevíčko, 22.–26. 8. 2008. matfyzpress, Praha 2008, str. 123–130.
31. Ilucová, L. História pentagonálnych teselácií. In Bečvář, J., Bečvářová, M. (Eds.), *Sborník sylabů 30. mezinárodní konference Historie matematiky.* Jevíčko, 21.–25. 8. 2009. matfyzpress, Praha 2009, str. 128–133.
32. Irwin, R. *Alhambra.* Praha: BB/art, 2004.
33. Jirotková, D. Rozvoj prostorové představivosti žáků. *Komenský* 114, 5, 1990, str. 278–281.
34. Joyce, D. E. *History of crystallographic groups and related topics.* Copyright 1997 [citované 17. 1. 2010].
`http://www.clarku.edu/~djoyce/wallpaper/history.html`
35. Kershner, R. B. On Paving the Plane. *American Mathematical Monthly* 75, 1968, str. 839–844.
36. Král, P. *Vliv mikrostruktury na mechanické vlastnosti ultrajemnozrnného hliníku po extrémní plastické deformaci (ECAP).* Dizertačná práca. Brno: VUT, 2006.
37. Kupčáková, M. *Geometrie ve světě dětí a dospělých.* Hradec Králové: Gaudeamus, 2001.
38. Kupčáková, M. *Geometrie jako tvorba.* Dizertačná práca. Praha: MFF UK, 2005.
39. Kuřina, F. Geometrická představivost a vyučování stereometrii. *MFvŠ* 18, 3, 1987, str. 201–212.
40. Kurosawa, S., Morozumi, T., Sakamoto, M. Examples in Elementary School Level. (What examples of schema formation are there in the teaching of 'Figure and Space'?) In Odaka, T. (Ed.), *A Curriculum Improvement Of 'Figure & Space'.* [2000], str. 50–83.
41. Kuřina, F. *10 geometrických transformací.* Praha: Prometheus, 2002.

42. Leischner, P. *Rozvíjení prostorové představivosti žáků středních škol.* Dizertačná práca. Praha: MFF UK, 2004.
43. Levitin, K. *Geometrická rapsódie.* Praha: SNTL, 1991.
44. Marcinek, T. *Vyplňovanie roviny v kontexte moderných trendov vyučovania matematiky.* Dizertačná práca. Bratislava: PedF UK, 2001.
45. Mecke, J., Schneider, R. G., Stoyan, D., Weil, W. R. R. *Stochastische Geometrie.* Basel, Boston, Berlin: Birhäuser Verlag, 1990.
46. Molland, A. G. An examination of Bradwardines's 'Geometry'. *Arch. History Exact. Sci.* 19(2), 1978, 113–175.
47. Møller, J. *Lectures on Random Voronoi Tessellations.* Lecture Notes in Statistics 87. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1994.
48. Molnár, J. *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii.* Olomouc: Univerzita Palackého, 2004.
49. Mooney, R. L. A conceptual model for integrating four approaches to the identification of creative talent. In Taylor, C. W. & Barron, F. (Eds.), *Scientific creativity: its recognition and development.* New York: Wiley, 1963, str. 331–340.
50. Niven, I. M. *Maxima and Minima Without Calculus.* Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
51. Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K. *Spatial Tessellations.* Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore: J. Wiley & Sons, 1992.
52. Opava, Z. *Matematika kolem nás.* Praha: Albatros, 1989.
53. Orton, J. What is pattern? *Mathematics In School* vol. 22, No. 1, 1993, str. 8–10.
54. Orton, T. Tessellations in the curriculum. *Mathematics In School* vol. 23, No. 4, 1994, str. 12–15.
55. Peregrin, J. *Význam a struktura.* Praha: OIKOYMENH, 1999.
56. Pérez-Gómez, R. The Four Regular Mosaics Missing in the Alhambra. *Comput. Math. Applic.* vol. 14, No. 2, 1987, str. 133–137.
57. Ponížil, P. *Prostorové teselace.* Teze k rigorózní zkoušce. Brno: VUT, 1998.
58. Ponížil, P., Sidorenková, J., Kovářová, M., Kovář, P., Herben, T., Saxl, I. Spatial pattern of anthill location. Book of Abstracts 12th Workshop on *Stochastic Geometry, Stereology and Image analysis.* August 25–29, 2003, str. 30.
59. Pradlová, J. Rovinné mozaiky aneb Keplerova harmonie světa. *Učitel matematiky* ročník 9, č. 2 (38), 2001, str. 85–97.
60. Průcha, J., Walterová, E., Mareš, J. *Pedagogický slovník.* 4. aktualizované vydání. Praha: Portál, 2003.

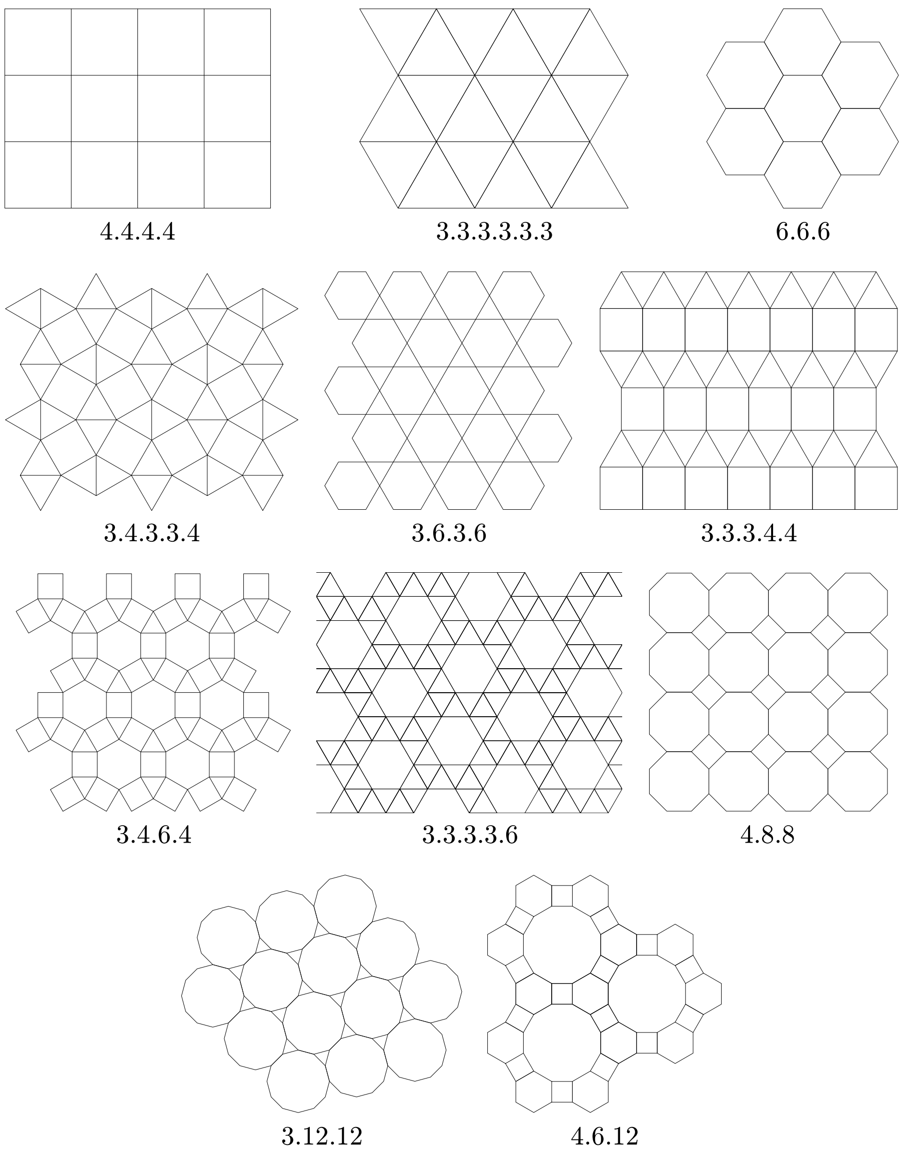
61. Půlpán, Z., Kuřina, F., Kebza, V. *O představivosti a její roli v matematice.* Praha: Academia, 1992.
62. Radatz, H., Rickmeyer, K. *Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen.* Hannover: Schroedel, 1991.
63. Ranucci, E. R. Master of tessellations: M. C. Escher, 1898–1972. *The Mathematics Teacher* vol. 67, 4, 1974, str. 299–306.
64. Ranucci, E. R., Teeters, J. L. *Creating Echer-type drawings.* Palo Alto: Creative publications, 1977.
65. Saxl, I., Pelikán, K., Rataj, J., Besterci, M. *Quantification and Modelling of Heterogeneous Systems.* Cambridge: Cambridge Int. Science Publishing, 1995.
66. Saxl, I., Kohútek, I., Besterci, M. Voronoiovy teselace shlukových polí s pravidelnými shluky. *Pokroky práškové metalurgie* (VÚPM Šumperk) 35, No.1, 1997, str. 46–67.
67. Saxl, I., Ponížil, P. Grain size estimation: *w*-*s*-diagram. *Materials Characterization* 46, 2001, str. 113–118.
68. Saxl, I., Sklenicka, V., Ilucova, L., Svoboda, M., Kral, P. Structure Development during ECAP and Subsequent Creep of Aluminium. *Materials Science Forum* vol. 539–543, 2007, str. 493–498.
69. Saxl, I., Kalousová, A., Ilucová, L., Sklenička, V. Grain and subgrain boundaries in ultrafine-grained materials. *Materials Characterization* vol. 60, 2009, str. 1163–1167.
70. Schattschneider, D. Tiling the Plane with Congruent Pentagons. *Mathematics Magazine* vol. 51, No. 1, 1978a, str. 29–44.
71. Schattschneider, D. The Plane symmetry groups: their recognition and notation. *Amer. Math. Monthly* 85, 1978b, str. 439–450.
72. Schattschneider, D. Will It Tile? Try the Conway Criterion! *Mathematics Magazine* 53, No. 4, 1980, str. 224–233.
73. Schattschneider, D. In Praise of Amateurs. In Klarner D. (Ed.), *The Mathematical Gardner.* Boston, MA: Prindle, Weber, and Schmidt, 1981, str. 140–166.
74. Schattschneider, D. The Pólya-Escher Connection. *Mathematics Magazine* vol. 60, No. 5, 1987, str. 293–298.
75. Schulte, E. Tilings. In Gruber, P. M., Wills, J. M. (Eds.), *Handbook of Convex Geometry.* vol. B. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1993, str. 899–932.
76. Stoyan, D., Kendall, W. S., Mecke, J. *Stochastic Geometry and its Applications.* Chichester: J. Wiley & Sons, 1987.

77. Swoboda, E. *Przestrzen, regularnosci geometryczne i ksztalty w uczeniu sie i nauczaniu dzieci.* Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, 2006.
78. Šarounová, A. *Geometrická představivost.* Dizertačná práca Praha: UK, 1982.
79. Šarounová, A. a kol. *Matematika* 7, II. díl. Praha: Prometheus, 1998.
80. Šedivý, O. a kol. *Matematika pre 6. ročník ZŠ*, II. časť. Bratislava: SPN, 1999.
81. Taylor, C. W. Various approaches to and definitions of creativity. In Sternberg, R. J. (Ed.), *The nature of creativity. Contemporary psychological perspectives.* Cambridge: Cambridge University Press, 1988, str. 99–124.
82. Teeters, J. L. How to draw tessellations of the Escher type. *The Mathematics Teacher* vol. 67, No. 4, 1974, str. 307–310.
83. Torrance, E. P. The nature of creativity as manifest in its testing. In Sternberg, R. J. (Ed.), *The nature of creativity. Contemporary psychological perspectives.* Cambridge: Cambridge University Press, 1988, str. 43–75.
84. Velgosová, O., Saxl, I., Besterci, M. Size estimation of uniform grain: dispersion strengthened Cu-based system. *Eng. Mechanics* 10, 2003, str. 181–190.
85. *Webster's New Collegiate Dictionary*, 1989.
86. van de Weygaert, R. Fragmenting the universe III. *Astron. Astrophys.* 283, 1994, str. 361–406.

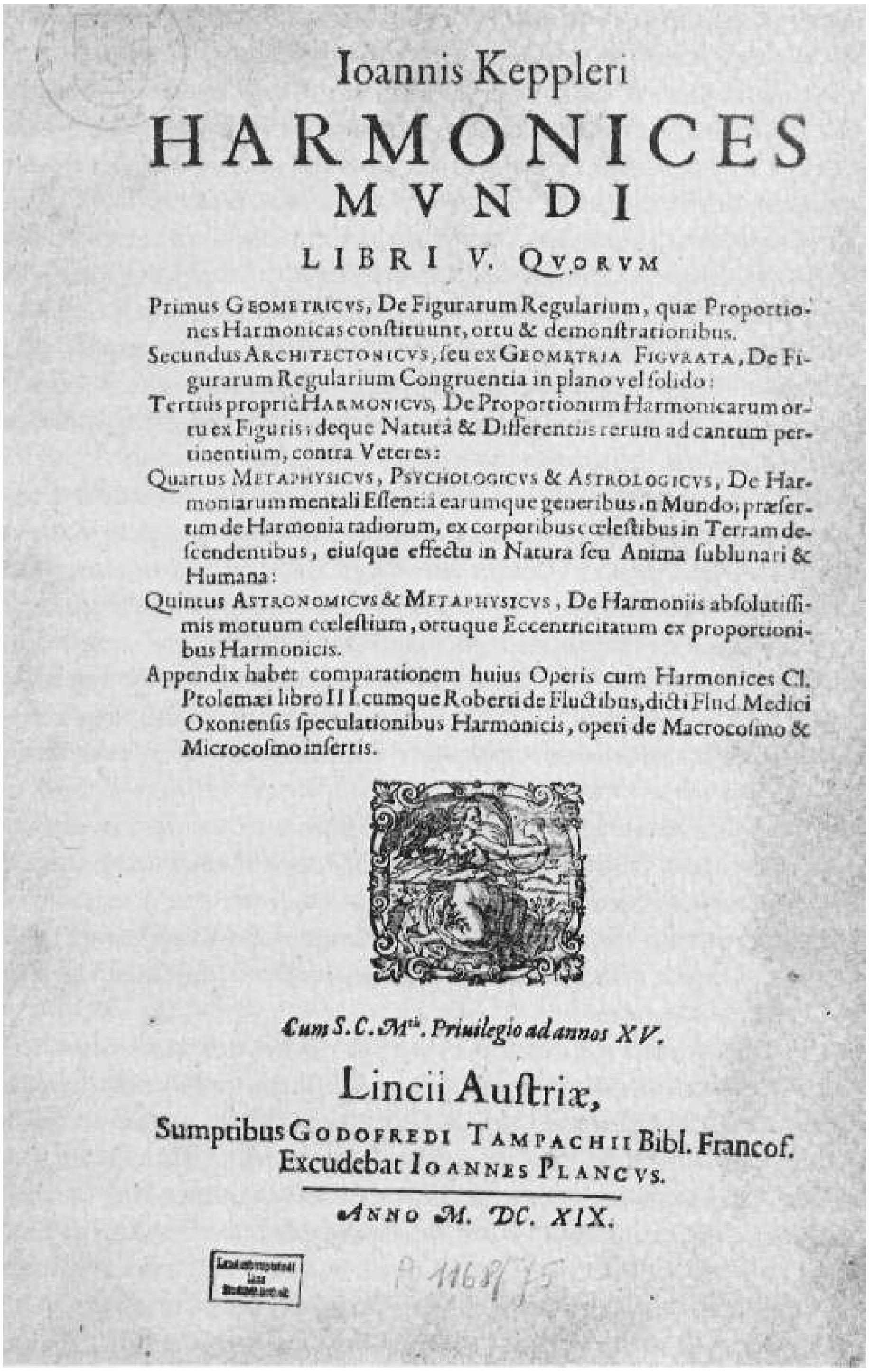
Prílohy

I. Salisburyho mapa Európy ako prvá skladačka (1766).
II. Pravidelné a polopravidelné rovinné teselácie.
III. Úvodná stránka knihy J. Keplera *Harmonices Mundi* (1619).
IV. Úvodná stránka dizertačnej práce K. A. Reinhardta *Über die Zerlegung der Ebene in Polygone* (1918).
V. Mapa centra Prahy s vybranými stanicami metra.
VI. – XII. Teselácie vytvorené žiakmi.

Príloha I Salisburyho mapa Európy ako prvá skladačka (1766).



Príloha II Rovinné teselácie vytvorené opakovaním jedného alebo kombinácie viacerých pravidelných mnohouholníkov s vrcholmi rovnakej valencie (tzv. pravidelné a polopravidelné rovinné teselácie; čísla pod obrázkami popisujú, aké mnohouholníky obklopujú každý vrchol teselácie a v akom poradí; teselácia 3.3.3.3.6 má dve formy – pravú a ľavú.).



Ioannis Keppleri

HARMONICES

MVNDI

LIBRI V. QVORVM

Primus GEOMETRICVS, De Figurarum Regularium, quæ Proportiones Harmonicas constituunt, ortu & demonstrationibus.

Secundus ARCHITECTONICVS, seu ex GEOMETRIA FIGVRATA, De Figurarum Regularium Congruentia in plano vel solido:

Tertius propriè HARMONICVS, De Proportionum Harmonicarum ortu ex Figuris; deque Naturâ & Differentiis rerum ad cantum pertinentium, contra Veteres:

Quartus METAPHYSICVS, PSYCHOLOGICVS & ASTROLOGICVS, De Harmoniarum mentali Essentiâ earumque generibus in Mundo; præsertim de Harmonia radiorum, ex corporibus cœlestibus in Terram descendentibus, eiusque effectu in Natura seu Anima sublunari & Humana:

Quintus ASTRONOMICVS & METAPHYSICVS, De Harmoniis absolutissimis motuum cœlestium, ortuque Eccentricitatum ex proportionibus Harmonicis.

Appendix habet comparationem huius Operis cum Harmonices Cl. Ptolemæi libro III. cumque Roberti de Fluctibus, dicti Flud. Medici Oxoniensis speculationibus Harmonicis, operi de Macrocosmo & Microcosmo insertis.

Cum S. C. M^tis. Priuilegio ad annos XV.

Lincii Austriæ,

Sumptibus GODOFREDI TAMPACHII Bibl. Francof.

Excudebat IOANNES PLANCVS.

ANNO M. DC. XIX.

Príloha III Úvodná stránka knihy J. Keplera *Harmonices Mundi* (1619).

Über die Zerlegung der Ebene in Polygone.

Inaugural-Dissertation

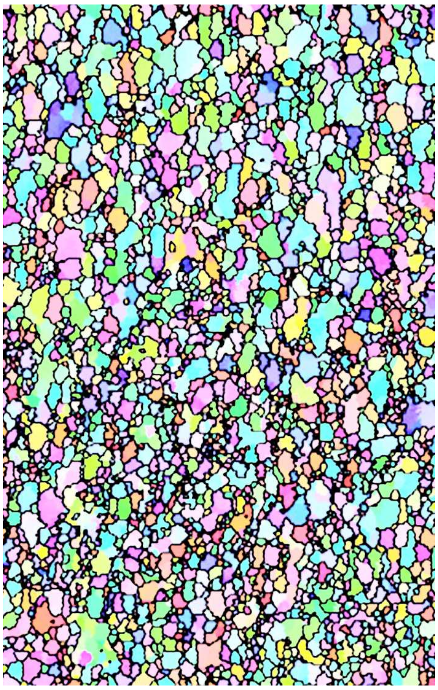
zur Erlangung der Doktorwürde
der Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Königlichen Universität zu Frankfurt a.M.

vorgelegt von

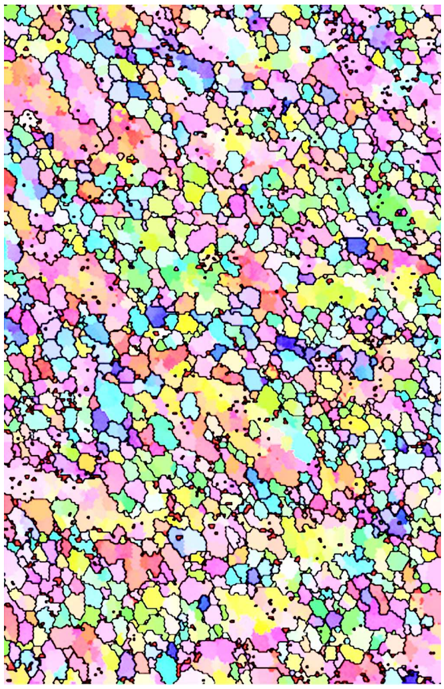
Karl Reinhardt
aus Frankfurt a. M.

Druck von Robert Noske, Borna-Leipzig
Großbetrieb für Dissertationsdruck
1918.

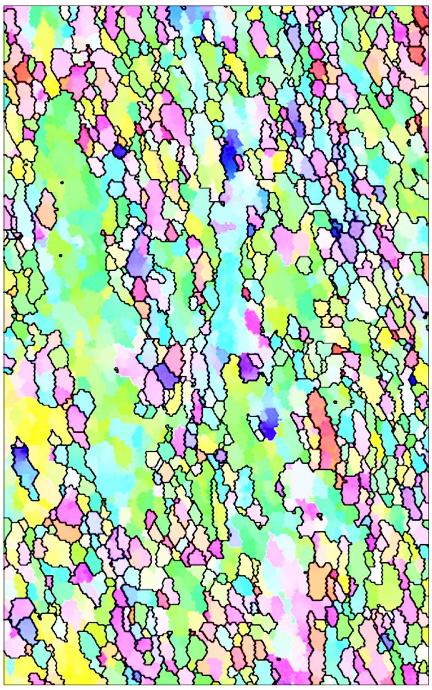
Príloha IV Úvodná stránka dizertačnej práce K. A. Reinhardta *Über die Zerlegung der Ebene in Polygone* (1918).



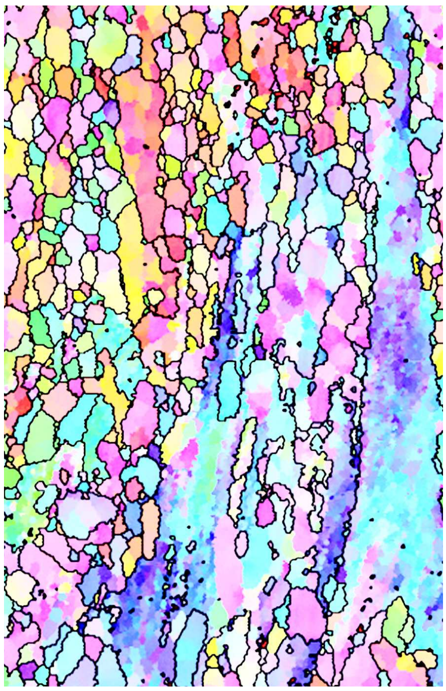
a) 23 hlasov



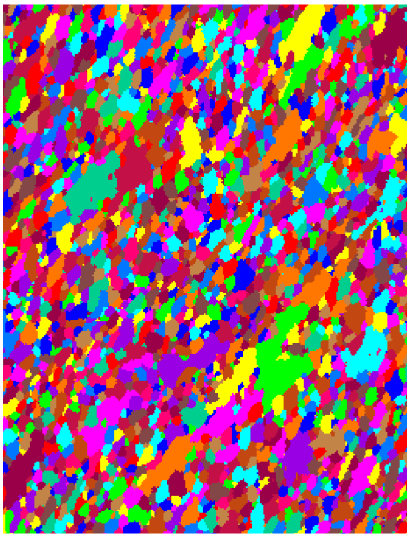
b) 21 hlasov



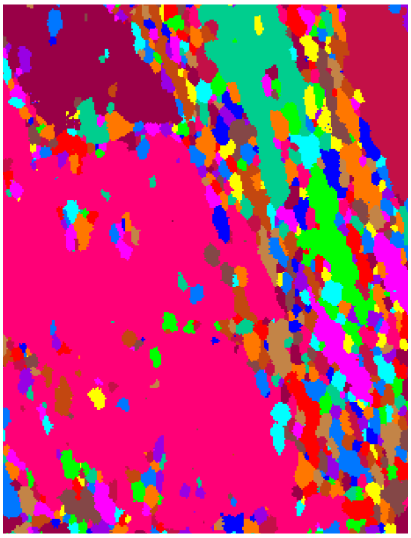
c) 17 hlasov



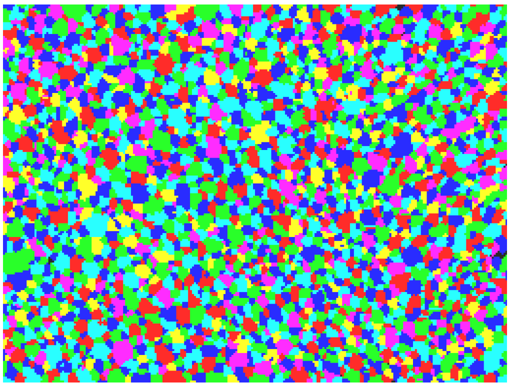
d) 14 hlasov



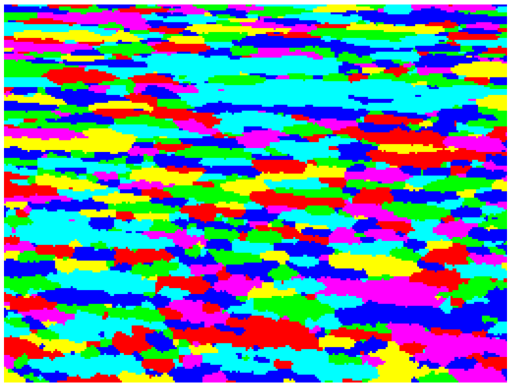
e) 28 hlasov



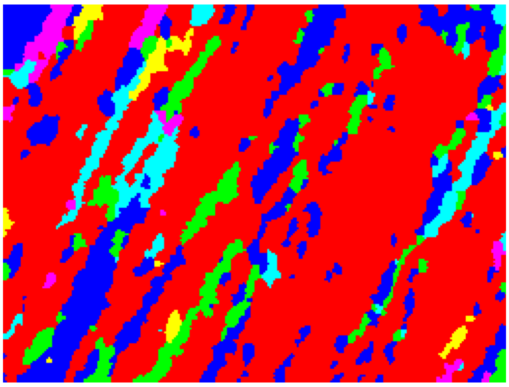
f) 10 hlasov



g) 18 hlasov



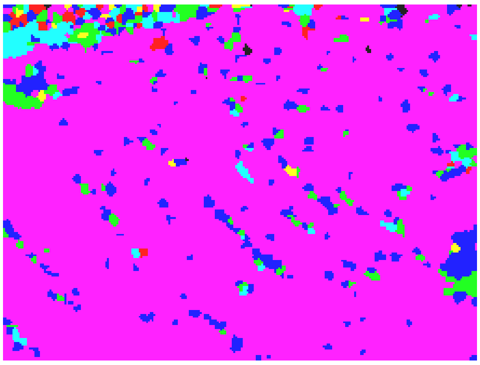
h) 11 hlasov

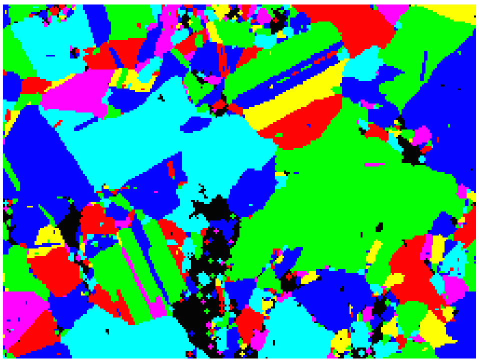


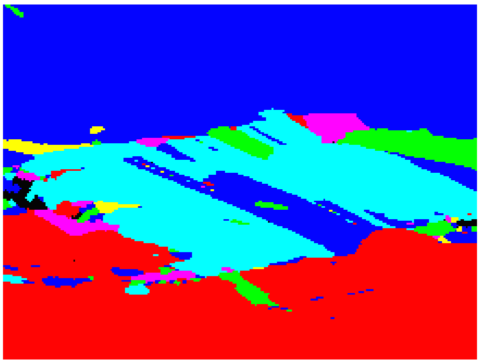
i) 10 hlasov

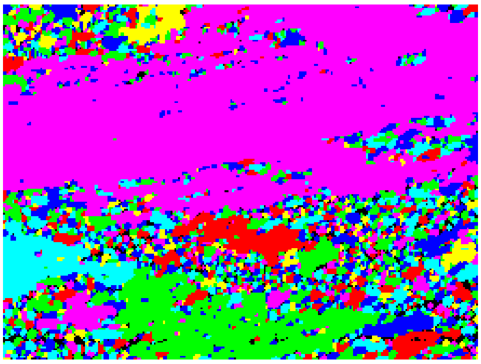
j) 10 hlasov

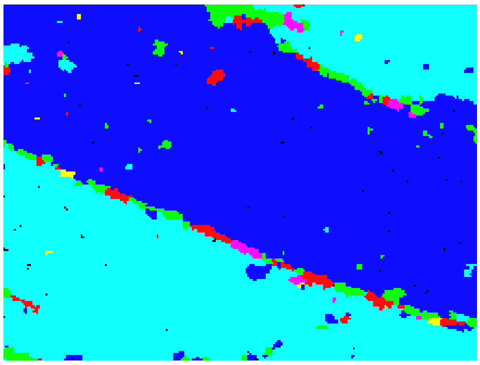
Príloha V Desať obrázkov (rezy polykryštalických látok – Cu, Al), ktoré respondenti vyhodnotili v ankete ako najvhodnejšie vzory na látku pre dievčenské/dámske oblečenie.


a) 16 hlasov

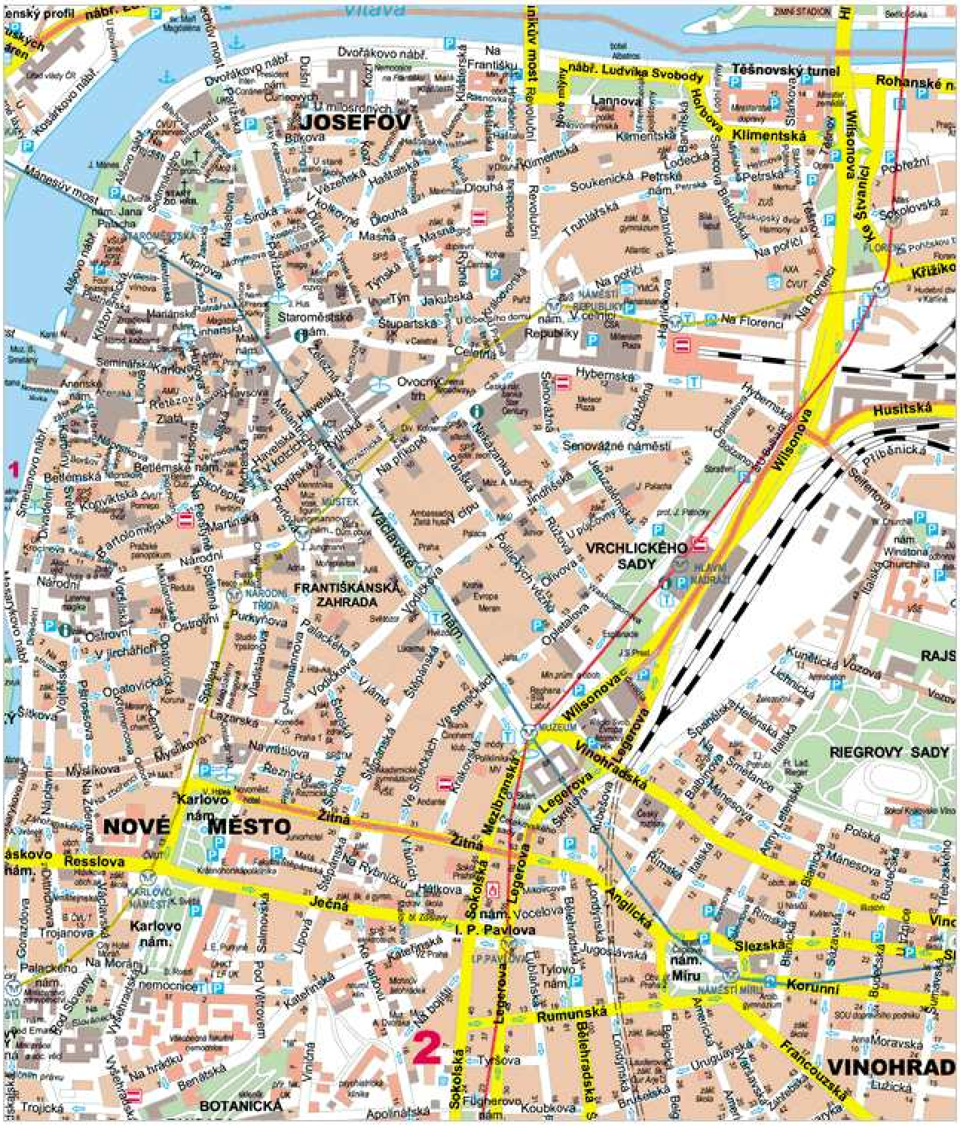

b) 15 hlasov


c) 14 hlasov

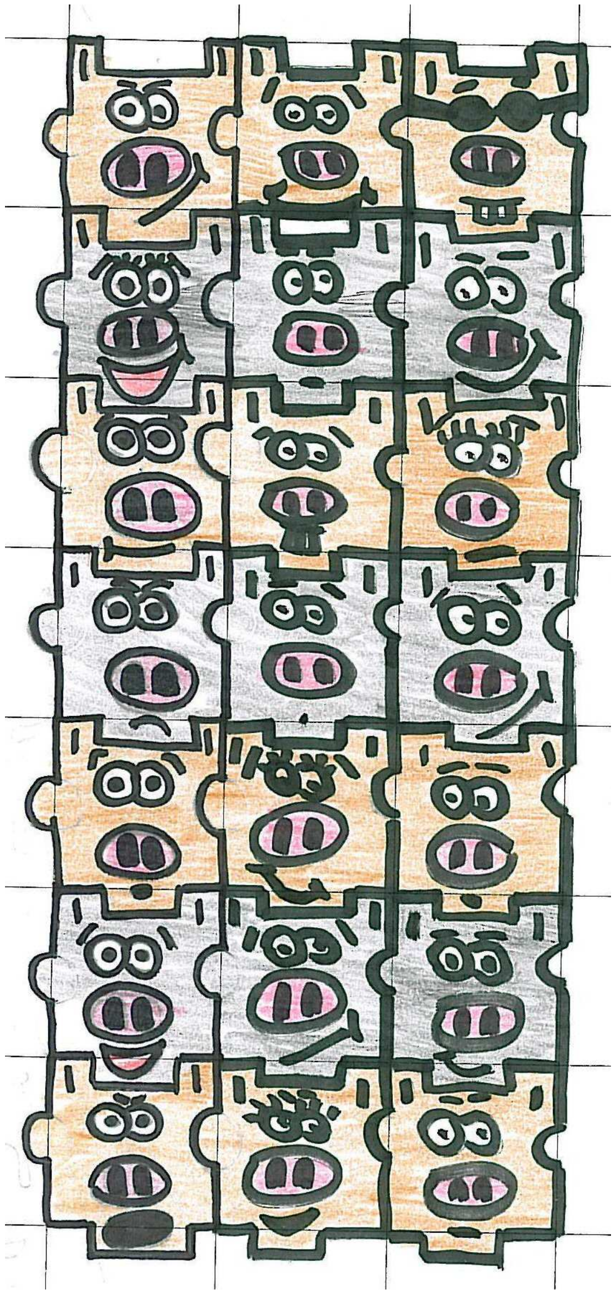

d) 11 hlasov


e) 10 hlasov

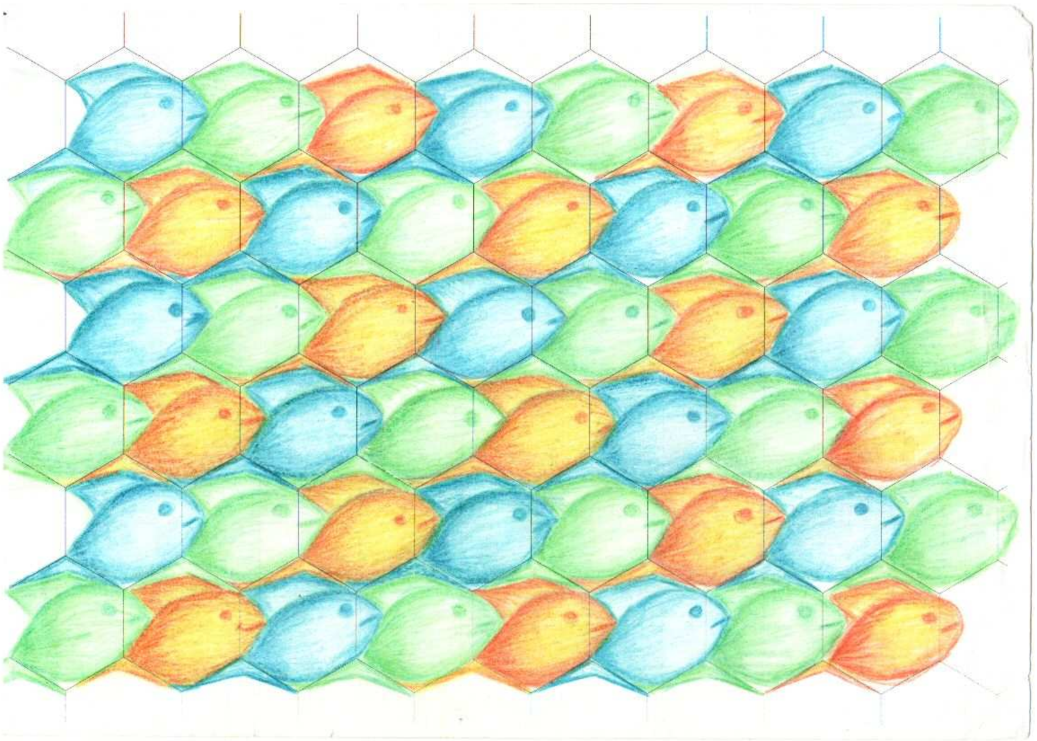
Príloha VI Päť obrázkov (rezy polykryštalických látok – Cu, AlSc), ktoré respondenti vyhodnotili v ankete ako najnevhodnejšie vzory na látku pre dievčenské/dámske oblečenie.



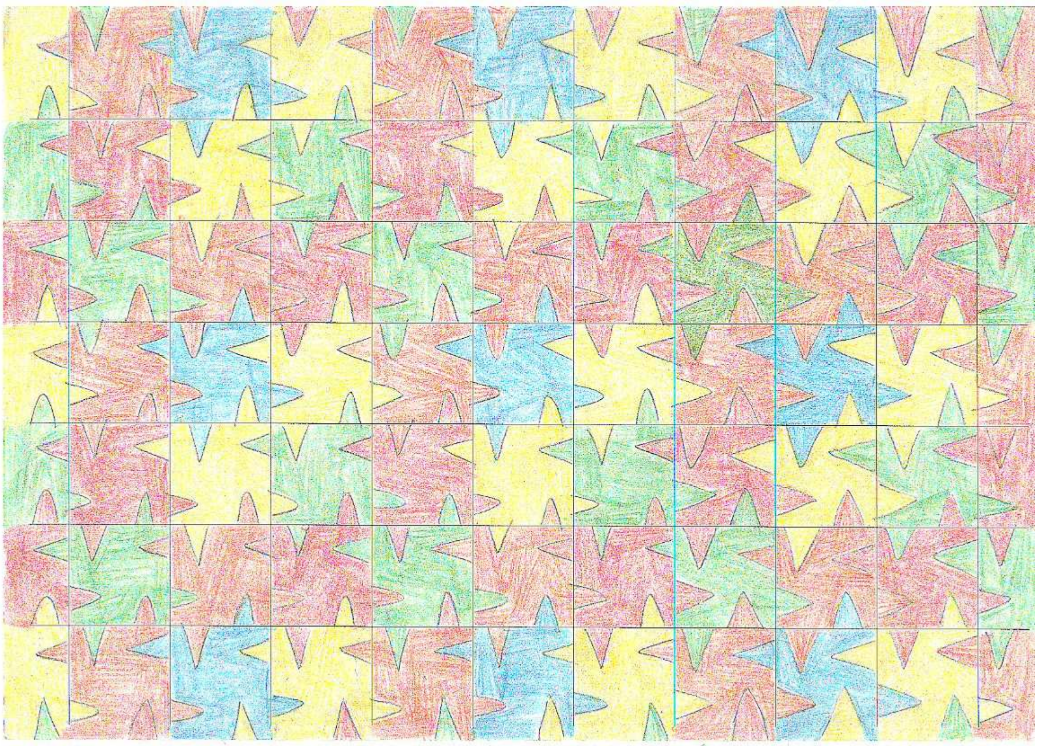
Príloha VII Mapa centra Prahy s vybranými stanicami metra.



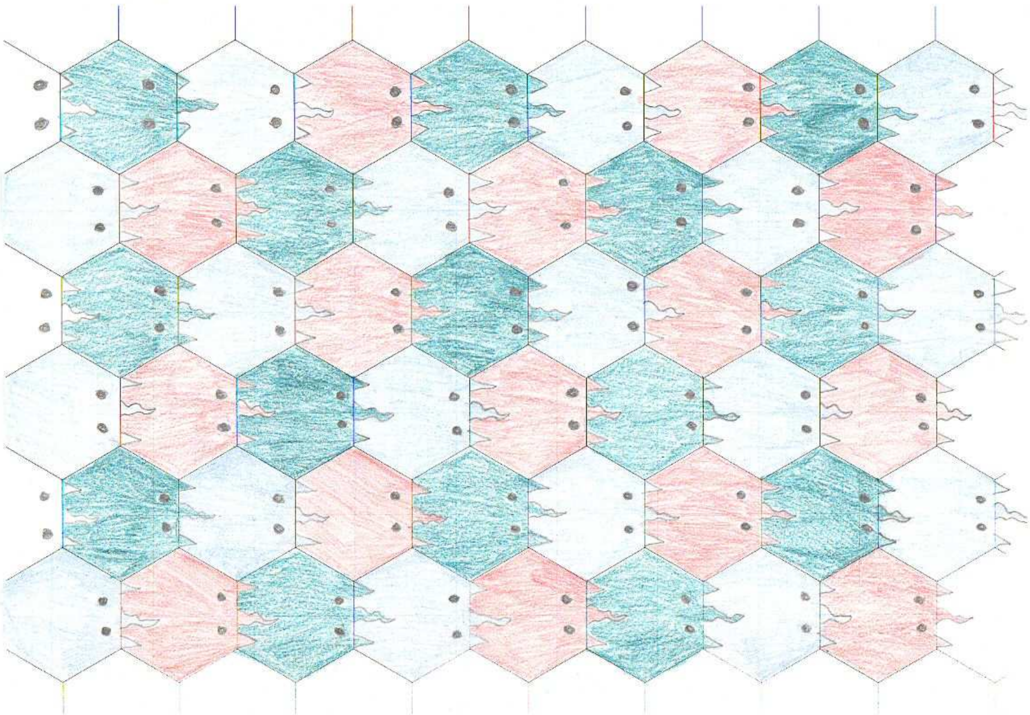
Príloha VIII Karolína: výsledný „poster“ s prasiatkovým motívom.



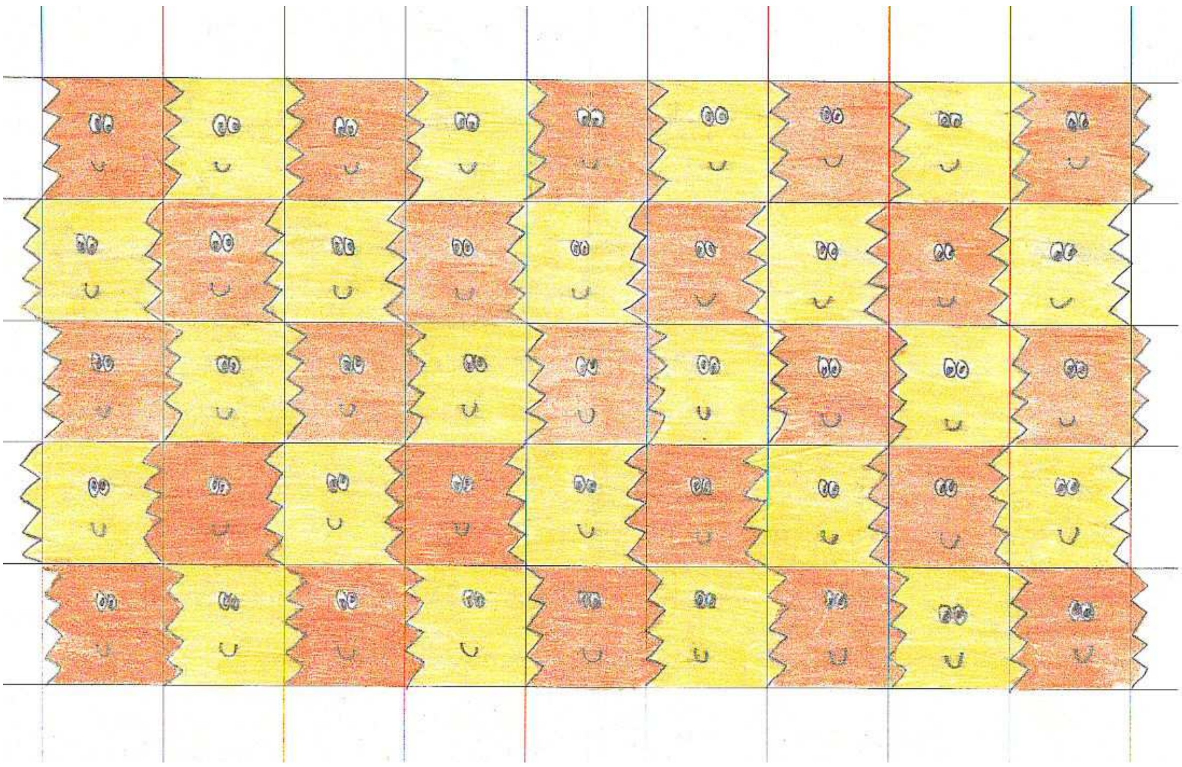
Príloha IX



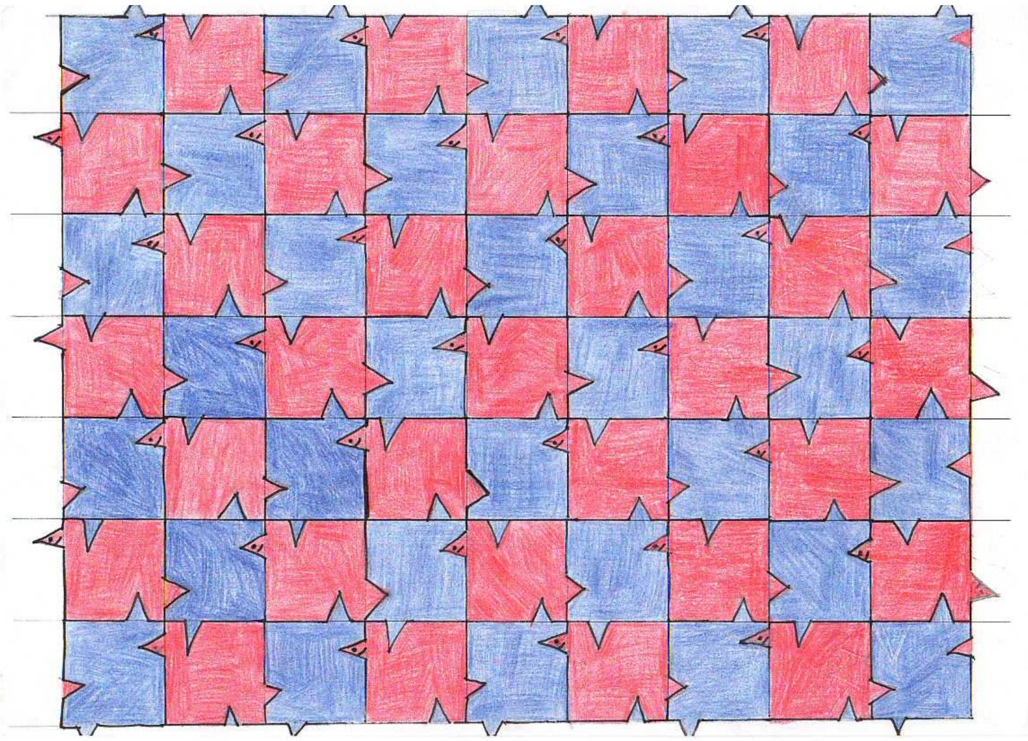
Príloha X



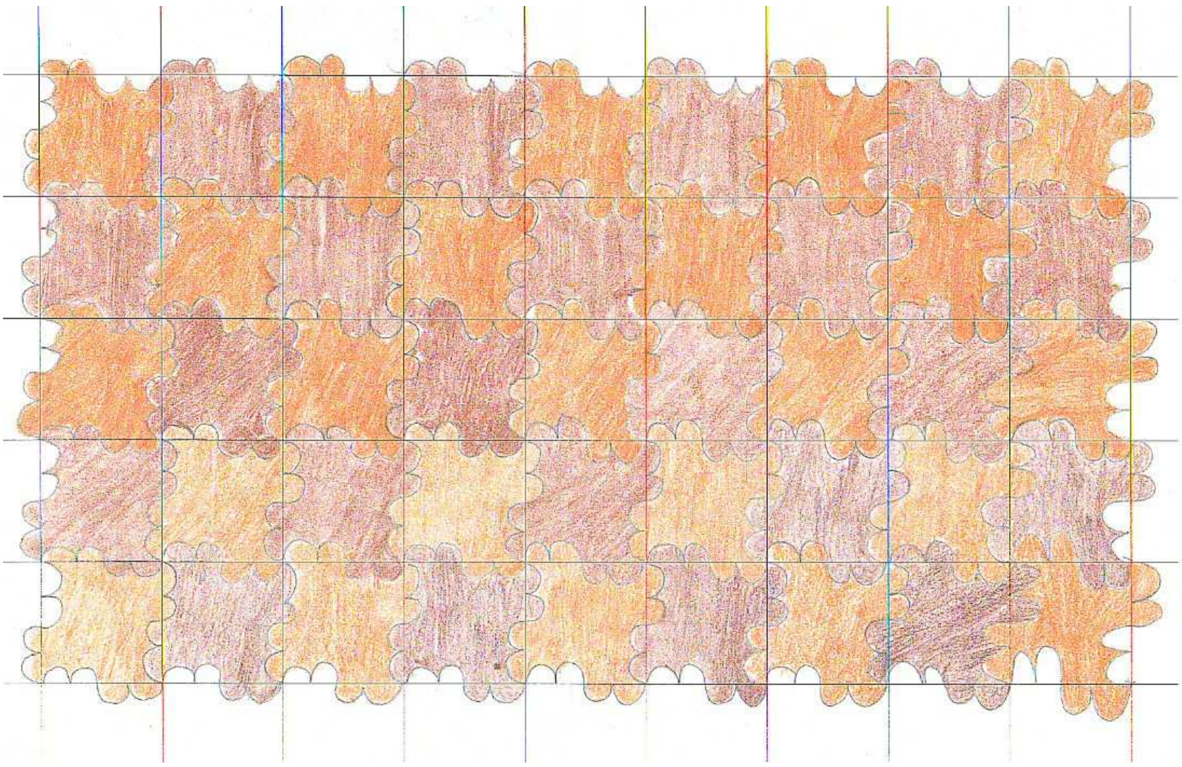
Príloha XI



Príloha XII



Príloha XIII



Príloha XIV