

Posudek na disertační práci **Libora Běhounka**

## **Logical Foundations of Fuzzy Mathematics**

Předložená disertační práce shrnuje autorův výzkum v oblasti fuzzy matematiky v období posledních pěti let. Skládá se z úvodní studie a deseti článků (šesti z recenzovaných časopisů a čtyř z konferenčních sborníků) vyšlých v letech 2004 až 2008. Práce je napsaná v angličtině, formální úroveň i angličtina jsou velmi dobré.

Výzkumný program „logic-based fuzzy mathematics“ pokládám za důležitý a podnětný příspěvek ke studiu fuzzy matematiky. Řada předchozích přístupů trpěla značnou nahodilostí při definování fuzzy verzí pojmů (fuzzy topologie, fuzzy grupy, fuzzy uspořádání, atd.) dávno studovaných v klasické matematice. Tak vznikly často špatně motivované definice, které fuzzy matematice způsobily více škody než užitku. Jedním z problémů bylo nesprávné pochopení významu stupňů příslušnosti fuzzy množin, nebo smíchání nesourodých přístupů dohromady.

Přístup navržený a studovaný v předložené práci se snaží postulovat metodologii umožňující definovat a studovat pojmy fuzzy matematiky jednotným způsobem založeným na chápání stupňů příslušnosti jako stupňů pravdivosti (comparative truth). Toto chápání stupňů příslušnosti je charakteristické pro deduktivní fuzzy logiku, a proto můžeme mluvit o *logic-based fuzzy mathematics*. Samozřejmě i při tomto přístupu se často vyskytují pojmy, které jsou v klasické matematice ekvivalentní, ale ve fuzzy matematice je možné je definovat několika způsoby (např. pojem fuzzy rovnosti). To umožňuje ozřejmit některé aspekty těchto pojmů, které jsou v klasické matematice nerozlišitelné. Přestože se ukazuje, že tímto přístupem nebude možné obsáhnout celou fuzzy matematiku (záleží totiž na tom, aby stupně příslušnosti byly skutečně interpretovány jako stupně pravdivosti), jsou dosavadní výsledky autora a jeho spolupracovníků podle mého názoru velmi zajímavé, inspirativní a důležité.

Podstatnou výhodou této metodologie (a metodologií příbuzných, jako například *fuzzy type theory*) při budování fuzzy matematiky je také to, že pojmy zde definované jsou automaticky vícehodnotové, aniž by bylo třeba tuto vícehodnotovost do definic explicitně přidávat.

Za velmi důležitý pokládám článek zařazený jako první, „On the difference between traditional and deductive fuzzy logic“, ve kterém je na několika příkladech osvětlena role deduktivní fuzzy logiky ve fuzzy matematice. Dále jsou zařazeny články, které stály v počátcích tohoto výzkumného programu: „From fuzzy logic to fuzzy mathematics: A methodological manifesto“ a „Fuzzy class

theory“. V dalších článcích jsou studovány aplikace principů „logic-based fuzzy mathematics“ na různé oblasti fuzzy matematiky — zejména teorii fuzzy relací, fuzzy čísel a fuzzy intervalů, fuzzy topologii, atd. Zařazen je také článek „Fuzzification of Groenendijk-Stokhof propositional erotetic logic,“ ve kterém je popsána aplikace *logic-based fuzzy mathematics* jako sémantiky pro fuzzifikovanou neklasickou logiku. V aplikacích podobných této pro jiné neklasické logiky vidím další velký potenciál přístupu popisovaného v předložené práci.

### Otázky, komentáře a připomínky:

1. Přestože formální stránka práce je velmi dobrá, jednu výhradu bych k ní měl: domnívám se, že u práce složené z úvodní studie a několika publikovaných článků by byl velmi užitečný rejstřík. Ten by umožnil jednodušeji zjistit, jak pojmy zmíněné v úvodní studii prostupují jednotlivými články.
2. Mohl byste blíže vysvětlit, co je míněno tvrzením (s. 9), že fuzzy logiky obecně vykazují intuicionistické vlastnosti (zejména v chování kvantifikátorů a negace)?
3. Můžete rozvést, jakým směrem by se dala rozvíjet fuzzy matematika nad fuzzy doménami (s. 36)?
4. V článku „Towards a formal theory of fuzzy Dedekind reals“ píšete: „Although the usability of the present notion for applications cannot yet be predicted [...]“. Objevily se nějaké aplikace těchto pojmů v době od napsání tohoto článku?
5. Můžete stručně uvést podrobnosti o operátoru  $\varphi^\omega$  zmíněném na s. 14 a případně nějaké jeho aplikace?
6. Uveďte další možné neklasické logické systémy, pro které by bylo možné (či výhodné) použít jako sémantiku *logic-based fuzzy mathematics* (kromě těch zmíněných na s. 35).

Práci **doporučuji** k obhajobě.

V Ostravě 31. 5. 2009



Ing. Antonín Dvořák, Ph.D.