Matematický ústav AVČR, v.v.i.
Žitná 25, 115 67 Praha 1
Česká republika

Duben 29, 2009.

Oponentský posudek na PhD práci D. Pokorného

Pro PhD zkušební komisi:

Předložená práce sestává ze dvou článků. První vyšel v J. Math. Anal. Appl., druhý se spoluatorem Kurkou je přijat v Real Anal. Exchange. První práce řeší problém položený Ioffem v roce 1984, zdali je množina všech bodů na nichž aproximativní a Clarkův subdiferenciál lipschitzovské funkce splývají, vždy generická. Poznamenejme že Clarkův subdiferenciál je definován jako konvexní obal aproximativního subdiferenciálu, jde tedy o otázku kdy je aproximativní subdiferenciál konvexní. Problém tohoto typu je samozřejmě velmi důležitý pro teorii subdiferenciálu a její aplikace. V roce 1995 Katriel sestrojil příklad funkce z jednotkové koule v $\mathbb{R}^2$, pro kterou se tyto množiny liší až na množinu libovolně malé míry. Borwein et. al. zesílil příklad na množinu plné míry. Pokorný ve svém článku sestrojil příklad kde aproximativní subdiferenciál není konvexní v žádném bodě, což je pochopitelně podstatné zesílení předchozích výsledků. Základní myšlenka spočívá v použití speciálního bumpu, přesněji funkce jejíž graf je pravidelný trojboký jehlan. Taková funkce má ve svém vrcholu aproximativní subdiferenciál který sestává ze tří funkcionálů jejichž vektorový součet je roven nule. Proto ve vrcholu není apr. subdiferenciál konvexní. Vhodným geometrickým způsobem lze vytvořit "pohoří" jehož všechny vrcholy jsou husté v zadané množině a jejich subdiferenciál se chová podobně jako v prvním kroku.

Ve druhém článku je opět zkonstruován příklad funkce z $\mathbb{R}^2$. Tentokrát jde o lipschitzovskou funkci která má derivaci v každém bodě, její derivace v počátku je nula, a kromě přesně popsaných síťových bodů na povrchu krychlí, jež se smršťují k počátku, je její derivace uniformně odražená od nuly. Zde je samozřejmě třeba použít dvou dimenzí výchozího prostoru, které umožní kritické body v jednom směru kompenzovat růsty v komplementárním směru. Výslednou funkci lze dále tvarovat. Proto je důsledkem konstrukce implikace 2. $\Rightarrow$ 1. v následující větě (přímá implikace je výsledkem Holického, Weila a Zajíčka z r. 2007).

Theorem 0.1 *Nechť $B \subset \mathbb{R}^d$ je neprázdná množina bez izolovaných bodů, jejíž vnitřek je souvislý. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní.*

1. *$\mathbb{R}^d \setminus B$ je porézní v každém bodě $a \in B \cap \partial B$.*
2. *Graf $f'(B)$ je souvislý pro každou Frechetovsky diferencovatelnou funkci $f : B \to \mathbb{R}$.*

Pokorného výsledky jsou velmi elegantním příspěvkem k teorii reálných funkcí. Pokorný prokázal jednoznačnou schopnost orientovat se v technicky obtížných důkazech, a pracovat na na úrovni profesionálního matematika. Předloženou práci hodnotím jako plně dostačující k udělění doktorského titulu.

Dr. Petr Hájek, Director of Research
Mathematical Institute, Academy of Sciences of the Czech Republic
Žitná 25, 115 67 Praha 1, The Czech Republic
Email: hajek@math.cas.cz