Oponentský posudek na doktorskou dizertační práci RNDr. **Petera Kukučky**

Asymptotic behaviors of solutions in problems of the mathematical theory of fluids

Doktorská dizertační práce Mgr. Petera Kukučky se skládá ze tří částí, obsahem každé z nich je samostatný původní vědecký článek, jehož je pan Kukučka jediným autorem. Jednotlivé části jsou buď publikovány (kapitola 2) či přijaty k publikaci (kapitola 3) nebo zaslány k publikaci (kapitola 4) v časopise vysoké mezinárodní úrovně (pravděpodobně všechny časopisy lze zařadit mezi nejlepších 15 mezinárodních časopisů v oblasti matematické teorie nelineárních parciálních diferenciálních rovnic). Práce je doplněna úvodem.

Práce má velmi vysokou úroveň. Kapitoly 2, 3 a 4 představují původní vědecké články zaměřené na *(i)* matematické vlastnosti řešení rozličných rovnic popisujících (či alespoň související s) časově zavislá proudění stlačitelných newtonských tekutin a především *(ii)* zkoumání limit mezi nimi.

V kapitole 2 je zavedena celá kaskáda systémů aproximujících původní stlačitelný Navier-Stokesův systém systém, z nichž ten matematicky nejjednodušší je analyzován pomocí konečně-dimensionálních aproximací a hlubokých výsledků pro lineární parciální diferenciální rovnice. Postupným a delikátním zkoumáním chování řešení systému, kdy koeficienty přidaných zhlazujících členů konveregující k nule, je dokázána existence slabých řešení (globální v čase pro velká data) pro širší třídu oblastí, tzv. oblastí s $W^{1,s}$-hranicí.

V třetí a čtvrté kapitole jsou pak vyšetřovány konvergence řešení úplného systému Navier-Stokes-Fourierových a Navier-Stokes-Fourier-Maxwellových rovnic pokud některá bezrozměrna čísla konvergují k nule. Přesněji, v kapitole 3 jsou Machovo a Alfvénovo číslo rovny ε, zatímco v kapitole 4 jsou Machovo a Froudeovo číslo řadu ε a Pécletovo číslo a konstanta C_{ref}^{1} jsou řádu ε^2; a pro ϵ jdoucí k nule je dokázána rigorózně konvergence řešení k limitnímu systému. Tyto výsledky potvrzují oprávněnost použití limitních zjednodušených (aproximujících) systémů v různých fyzikálních a inženýrských aplikacích (např. astrofyzice, meteorologii, geofyzice) a měly by být také důležitou oporou při analýze konvergence relevantních numerických schémat.

Autor bezpochyby prokázal, že je schopen zvládnout velké množství nového materiálu, porozumět základům obtížné (jak z pohledu nově vyvinutých metod a jejich kombinací, tak z pohledu komplexnosti) nové matematické teorie slabých řešení rovnic popisujících tepelně závislá proudění stlačitelných tekutin, a poté tyto metody rozšířit na komplikovanější situace. Přesněji, v kapitole 2 rozšířil platnost existenční teorii pro širší třídu tzv. $W^{1,s}$-oblastí, v kapitole 3 studoval chování řešení systému doplněného o magnetické pole a ukázal konvergenci těchto řešení k rovnicím tepelné magnetohydrodynamiky pro nestlačitelné tekutiny (Peter Kukučka na rozdíl od předchozích výsledků zahrnul do modelu procesy nejen mechanické a magnetické, ale i tepelné), výsledky v poslední části přináší nové výsledky o konvergenci slabých řešení úplného systému uvažovaného v neomezené oblasti (doplněk kompaktní množiny) k systému s proměnnou hustotou zobecňující nestlačitelné Navier-Stokesovy rovnice (tzv. anelastická limita).

Na práci je patrný obrovský vliv školitele, jeho výsledků a jejich prezentací (práce navazuje na několik zcela původních prací školitele a jeho spoluautorů, některé z nich autor využívá jako standardní reference, kde jsou mnohá tvrzení dokázána a na která se odkazuje). To samozřejmě nijak nesnižuje celkovou úroveň práce. Na druhou stranu jsem v práci nenašel (např. v úvodní kapitole či v úvodních sekcích dalších kapitol) autorův osobitý pohled na studované problémy.

Autor si osvojil mnoho nových metod a matematických nástrojů: vlastnosti renormalizovaných řešení pro transportní a disipativní rovnice, defektní míry, netriviálně získané stejnoměrné odhady pomocí Helmholtzovy funkce a jejích vlastností, kompatnost pomocí Div-Curl lemmatu, odvození akustické rovnice a vlastnosti řešení, Helmholtzův rozklad klasický a s vahou a mnoho dalších. Nejcennější původní metody se dle mého mínění týkají odhadů na hustotu pro rovnice v studované ve $W^{1,s}$-oblastech, viz kapitola 2.

Po formální stránce je práce srozumitelná, bez většího množství překlepů. Mezi významnější nedostatky bych uvedl: (i) zavedení symbolu q pro tepelný tok a počáteční podmínku pro hybnost; (ii) v kapitole 2 je Lemma 2 až po Lemmatu 5, a v textu kapitoly 2 se autor převážně odkazuje na Proposition X.Y a nikoliv na Lemma X.Y; (iii) vektorové testovací funkce nejsou značeny šipkou; (iv) některé symboly nejsou jasně definovány; (v) na konci kapitoly 3 je konvergence v kritickém konvektivním členu odbyta odvoláním na reference (viz druhá polovina str. 59), nicméně v kapitole 4 je stejné problematice věnováno více pozornosti, ačkoliv jsou jednotlivé kapitoly psány zcela odděleně, některé souvislosti mohly být uvedeny; (vi) v (2.50) je opačná nerovnost; (vii) důkaz Lemmatu 8 odkazuje na podobné výpočty z předchozího lemmatu, tam jsou však zcela vynechány). Také úvod mohl být podrobnější a přesnější (popis bilačních rovnic je zavádějící, viz např. tvrzení charakterizující bilanci hmoty "the rate at which mass enters a system is equal to the rate at which mass leaves the system"; pohled na rozdíl mezi slabými a klasickými řešeními je příliš zjednodušený).

Před záverečným hodnocením bych rád zformuloval několik dotazů.

Dotazy:

(i) Je pojem $W^{1,s}$-hranice zcela původní koncept zaveden ve Vaší práci? Nebo naopak byly či jsou systematicky zkoumány vlastnosti řešení na hladkosti $W^{1,s}$-hranice pro jisté třídy úloh popsanými např. eliptickými, parabolickými rovnicemi?

(ii) Mohl byste uvést příklady oblastí, které nejsou *Johnovy* a pro které existenční výsledek dokázaný v kapitole 2 platí? V práci chybí odkaz na práci Diening et al., kde je výrazně zjednodušen důkaz výsledku z citované práce Ascota et al. [3].

(iii) Je nutné předpokládat, že je objemová vazkost kladná, viz např. řádek po (3.7)?

(iv) Jsou články [39] resp. [35] zaměřeny na slabá či klasická řešení? (viz ne příliš jasná diskuse na str. 42)

(v) Můžete ozřejmit bod (iii) na str. 47 a rozklad (3.87) na str. 53?

Závěrem rád konstatuji, že předložená doktorská dizertační práce má vysokou úroveň přinejmeším z pohledu matematické analýzy systému nelineárních parciálních diferenciálních rovnic a přináší původní vědecké výsledky v obtížné a aktuální oblasti termodynamiky stlačitelných tekutin. Tyto výsledky jednoznačně prokazují, že RNDr. Peter Kukučka je schopen sa-mostatné tvořivé vědecké práce.

V Praze, 8. listopadu 2009

Josef Málek

Prof. RNDr. Josef Málek, DSc.
Matematický ústav
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8