Oponentský posudek na disertační práci

Discontinuous Galerkin method for convection-diffusion problems

doktoranda Mgr. Jiřího Hozmana

Předložená práce je věnována teoretické analýze a praktickým aplikacím *hp*-verze nespojité Galerkinovy metody konečných prvků. Nespojitá Galerkinova metoda představuje v poslední době velmi populární numerickou metodu řešení parciálních diferenciálních rovnic. Tím, že pracuje s po částech polynomiálními funkcemi, které však nemusejí být spojité na hranicích mezi jednotlivými elementy, dává často velmi dobré výsledky i v případech, kdy řešení daného problému je nespojité nebo má velké gradienty a kdy se v řešeních získaných klasickou metodou konečných prvků objevují nefyzikální oscilace a konvergence řešení získaných metodou konečných objemů je pomalá. Autorem uvažovaná *hp*-verze metody navíc umožňuje další zefektivnění výpočtů tím, že dovoluje pracovat na různých elementech s polynomy různých stupňů. Téma disertace proto považuji za velmi přínosné a aktuální.

Práce je rozdělena do tří částí a ty dále do celkem devíti kapitol. Úvodní část I obsahuje kapitoly 1 a 2, ve kterých autor seznamuje čtenáře se systémem Navier-Stokesových rovnic a se základními vlastnostmi nespojité Galerkinovy metody (DGM). Část II je věnována numerické analýze DGM pro modelovou skalární úlohu a je rozdělena do čtyř kapitol 3 až 6. Ve třetí a čtvrté kapitole je uvažována pouze prostorová diskretizace problému. Nejdříve je zavedena odpovídající semi-diskrétní formulace a pak je odvozen pro tento případ diskretizace odhad chyby metody. V další kapitole autor přidává diskretizaci v čase a studuje rychlost konvergence pro plně diskrétní problém. V šesté kapitole pak jsou získané teoretické výsledky porovnány s výsledky numerických experimentů. V závěrečné části III se autor zabývá použitím DGM při zkoumání vazkého stlačitelného proudění. V sedmé kapitole nejdříve formuluje semi-diskrétní problém, přičemž hlavní důraz klade na volbu vhodné diskretizace vazkých toků a vhodné stabilizece. Osmá kapitola je věnována formulaci plně diskrétního problému. V poslední kapitole autor popisuje celou řadu numerických experimentů.

Podobné problémy, jako ty, kterým je věnována předkládaná práce, byly řešeny již dříve pomocí standardní *h*-verze nespojité Galerkinovy metody. Hlavní autorův přínos vidím proto především v tom, že ukázal, jak přesné výsledky můžeme očekávat při použití obecnější *hp*-verze této metody.

Daná tematika je v práci zpracována velmi ze široka. Při odvozování autor jednotlivé kroky podrobně zdůvodňuje, takže jsou důkazy snadno čitelné. V úvodu každé části i každého odstavce je stručně uveden obsah následujícího textu. Pro lepší orientaci především v kapitolách věnovaným numerickým výpočtům autor zařadil na začátek práce seznam obrázků a tabulek.

Přes uvedené klady mám ovšem k posuzované práci i několik připomínek, z nichž bych zde chtěla zmínit následující:

- Autor psal disertaci v angličtině, což oceňuji, protože mu to jistě přidalo dost práce. Avšak, i když je jeho angličtina na poměrně dobré úrovni, ne všechny jeho formulace jsou zcela správné.
- V zavedení numerického toku v (3.26) je použito jiné značení stop než na ostatních místech.
- Vlastnosti numerického toku by měly být uvedeny dříve, než je zavedena v (3.29) difuzní forma, aby to odpovídalo způsobu, jakým byly zdůvodněny definice ostatních forem.
- Lemma 4.2.18 by mělo být jinak zformulováno. Téměř celé je totiž formulováno tak, jako by obě funkce u_h i v_h mohly být libovolné prvky z prostoru S_{hp}, v samém závěru znění lemmatu se však ukáže, že v_h musí být speciální funkce daná u_h a přesným řešením problému.
- V částech věnovaných numerickým experimentům autor uvádí vzorce pro počet stupňů volnosti, které nejsou v pořádku. Vztah mezi vzorci pro skalární a vektorový případ je správný, ovšem vzorce, ze kterých autor nejspíš vyšel, patří k případu skalárnímu a ne vektorovému.
- Když jsou v kapitole 3 uváděny vlastnosti, které mají mít triangulace oblasti Ω, píše autor, že elementy nemusí být konvexní. Všude jinde však uvažuje jen jednoduché konvexní mnohoúhelníky či mnohostěny. Není jasné, zda je to nezbytné pro odhad chyby metody. Všechny v práci uvedené numerické experimenty byly prováděny jen na sítích tvořených trojúhelníky. Autor nepíše, zda prováděl experimenty i s triangulacemi obsahujícími nekonvexní elementy. Prosím autora, aby se k otázce použitelnosti nekonvexních prvků vyjádřil u obhajoby.

Závěr: Předložená práce obsahuje řadu nových výsledků, které přispívají k rozšíření znalostí v oblasti studované problematiky. Domnívám se, že autor prokázal, že je schopen samostatné tvůrčí činnosti a doporučuji, aby předložená práce byla přijata k obhajobě. Dále doporučuji, aby na základě úspěšné obhajoby byl autorovi udělen titul Ph.D.

V Praze dne 29. 7. 2009