Posudek oponenta k disertační práci *"Constructions of Commutative Semirings and Radical Rings"* Mgr. Miroslava Korbeláře

Předložená práce je tematicky rozdělená na dvě části. Ve druhé kapitole autor konstruuje radikálové okruhy předepsaných vlastností, třetí, čtvrtá a pátá kapitola pojednávají o podpolookruzích komplexních čísel. Tyto dvě části spolu nejsou logicky propojeny, proto je hodnotím zvlášť.

Okruh nazveme radikálový, pokud je roven svému Jacobsonovu radikálu, netriviální radikálové okruhy tedy neobsahují jednotku. Radikálové okruhy jsou klasickým tématem v komutativní i nekomutativní algebře, autor zde studuje subdirektně nerozložitelné komutativní radikálové okruhy, tedy radikálové okruhy obsahující nejmenší nenulový ideál. Sekce 2.2 a 2.3 volně navazují na článek [4]. V každém radikálovém okruhu R lze zavést další unární operaci, která k $r \in R$ přiřadí jeho kvaziinverzní prvek. Radikálové okruhy pak tvoří varietu, volné algebry této variety jsou popsány v [4, Lemma 11.1.1]. Tento výsledek je zobecněn v Proposition 2.2.3., kde se konstruuje reflexe kategorie komutativních okruhů do kategorie komutativních radikálových okruhů (tato reflexe musí být chápána v kategoriálním smyslu jako levá adjunkce, neboť varieta radikálových okruhu má o jednu unární operaci bohatší signaturu než varieta okruhů). Tato reflexe pak umožňuje místo hledání radikálových okruhu zadaných vlastností hledat okruhy semiradikálové. V sekci 2.3 je ukázáno, že radikálový okruh je konečný právě když je konečně generovaný jako radikálový okruh právě když je noetherovský.

Sekce 2.3 a 2.4 jsou věnovány konstrukcím komutativních subdirektně ireducibilních radikálových okruhu. Konstrukce se opírají o různé modifikace kontrahovaných pologrupových okruhů obecně studovaných již v sekci 2.2 (Proposition 2.2.13 a Proposition 2.2.14). Sestrojené příklady demonstrují nemožnost otočit některou z implikací R má nulové násobení $\Rightarrow$ R je nilpotentní$\Rightarrow$ R je nil pro subdirektně ireducibilní radikálové okruhy, dále nemožnost v této třídě otočit implikace R je okruh generovaný množinou $Y \Rightarrow R$ je radikálový okruh generovaný množinou $Y \Rightarrow R$ je ideál generovaný množinou Y. Dále je zkoumána vzájemná poloha $\mathcal{T}(S), \mathcal{D}(S), \mathcal{N}(S)$ (torzní, divisibilní a nil ideál) pro subdirektně nerozložitelný radikálový okruh S.

Sekce 2.4 je pak věnována faktorům subdirektně ireducibilních radikálových okruhů podle jejich monolitů. Podobné otázky byly nedávno řešeny pro jiné algebry např. v [5], [2]. Zejména je ukázáno, že existuje netriviální faktor s nulovým anihilátorem. Nakonec jsou klasifikované faktory s nulovým násobením.

Výsledky uvedené v této části práce mi přijdou zajímavé, nejsem si vědom (s vyjímkou Proposition 2.3.9), že by nebyly puvodní. Některé věci by se ještě daly upřesnit, případně vylepšit: Kromě několika překlepu, jde především o konstrukci 2.4.10. Abychom mohli (formálně) hovořit o direktní limitě, měla by být množina X usměrněná, rozhodně by mezi anihilátory S_i a S_j neměly vést morfismy v obou směrech pokud $i \neq j$. Dále v 2.2.9(iii) se hovoří o exaktnosti, asi by bylo dobré vysvětlit, v jaké kategorii uvažujeme exaktní posloupnosti, jak chápeme kojádra. Na straně 27 není definováno $\alpha_x(\lambda e_i)$ pro $i = (y, j), x \neq y$. Nakonec v 2.5.5 není třeba dokazovat, že S je radikálový, neboť je dokázáno $S^3 = 0$.

Z hlediska 'dalšího rozvoje vědního oboru', by mohla mít význam zejména poslední část druhé kapitoly. Struktura radikálových okruhu je prozatím neznámá, dokonce i pro nilpotentní případy. Popis faktorů podle monolitů a následně i příslušných rozšíření by mohla být správná cesta. V této práci je vyřešen případ pro faktory s nulovým násobením.

Druhá část práce je věnována podpolookruhum $\mathbb{C}$. Polookruh je množina se dvěma asociativními binárními operacemi $+, .$ splňujícími distributivní zákony $a.(b+c) = a.b + a.c$, $(b+c).a = b.a + c.a$. Kromě aritmetiky najdeme strukturu polookruhů například na množině ideálů nějakého okruhu nebo na množině reprezentantů spočetných $R-R$ bimodulů (s operacemi $\oplus, \otimes_R$). Komutativní kongruenčně jednoduché polookruhy byly studovány v [1]. Pokud rozumíme podpologrupám $\mathbb{R}(+)$ obsahujícím kladný i záporný prvek, pak zbývá klasifikovat kongruenčně jednoduché podpolookruhy $\mathbb{R}^+$.

Ve třetí kapitole je provedena klasifikace maximálních podpolookruhů $\mathbb{Q}^+$ (Theorem 3.4.12). Je představena docela zajímavá technika charakteristických posloupností v $\mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ indexovaných celými čísly, kde n-tý člen posloupnosti je dolní odhad pro prvky polookruhu s p-tou valuací nejvýše rovnou n, kde p je pevně zvolené prvočíslo. Každé prvočíslo a každá charakteristická posloupnost tvaru

$(a^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $a \in (0,1)$ určuje polookruh $\mathbb{W}(p,a) = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid a^{v_p(x)} \leq x\}$, který je maximální (vlastní) podpolookruh $\mathbb{Q}^+$. Spolu s dalšími 'očividnými' podpolookruhy $\mathbb{Q}^+$ tvoří $\mathbb{W}(p,a)$, $a \in (0,1), p \in \mathbb{P}$ klasifikaci maximálních podpolookruhů $\mathbb{Q}^+$.

Tato technika je použita i ve čtvrté kapitole. Nalezení nové třídy kongruenčně jednoduchých podpolookruhů $\mathbb{Q}^+$ znamená určitý pokrok v problému z [1]. Pro charakteristickou posloupnost nezáporných reálných čísel $\mathbf{r} = (r_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ konvergující k nule je $\mathbb{V}^0(p,\mathbf{r}) = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid r_{v_p(x)} < x\}$ podpolookruh $\mathbb{Q}^+$. Tyto polookruhy a jejich průniky jsou kongruenčně jednoduché (Proposition 4.2.4, Proposition 4.2.7). Dále jsou nalezeny maximální kongruenčně jednoduché podpolookruhy $\mathbb{Q}^+$ (Proposition 4.2.9), zůstává však otevřeno, zda už jsou tímto nalezeny všechny kongruenčně jednoduché podpolookruhy $\mathbb{Q}^+$.

Poslední kapitola je věnována otázce, kdy je podpolookruh $\mathbb{C}$ parapolotěleso, tedy pro které podpolookruhy $R \subseteq \mathbb{C}(+,.)$ je $R(.)$ grupa. Otázka je zodpovězena pro polookruhy tvaru $\mathbb{Q}^+[\alpha]$, kde α je algebraický prvek $\mathbb{C}$ stupně 2 (Corollary 5.2.10).

Kapitoly 3,4,5 jsou po formální stránce napsané velmi dobře, obsahují minimum překlepů. Výsledky z kapitoly 3 jsou publikovány v [3]. Použité metody jsou sice elementární, ale poměrně zajímavé. Pokud bych měl něco vytknout, pak asi nedostatečnou motivaci. Autor zmiňuje bohatou literaturu o polookruzích, ale neuvádí nejdůležitější výsledky případně hlavní směry současné teorie polookruhů. Netroufám si proto posoudit, jaký je přínos práce z hlediska teorie polookruhů. Rovněž mi není úplně jasné, proč byla zařazena i pátá kapitola, když s předchozím má minimální logickou souvislost. Doufám, že jedinou motivací této kapitoly nebylo přidělat oponentům práci. Konečně v celém textu je jen jedno dokazované tvrzení označeno jako Theorem, což znesnadňuje možnost získat rychlou představu o hlavních výsledcích.

Celkově si myslím, že jde o velmi zdařilou práci, v níž autor prokázal schopnost samostatné tvůrčí práce. Proto ji doporučuji k přijetí.

V Praze, 26. 10. 2009

Pavel Příhoda

References

[1] R. El Bashir, J. Hurt, A. Jančařík, T. Kepka, *Simple commutative semirings,* J. Algebra **236** (2001), 277 – 306.

[2] J. Ježek, T. Kepka, *The factor of a subdirectly irreducible algebra through its monolith,* Algebra Universalis **47** (2002), 319 – 327.

[3] V. Kala, T. Kepka, M. Korbelář, J. D. Phillips, *Various subsemirings of the field $\mathbb{Q}$ of rational numbers,* AUC **50(1)** (2009), 29 – 59.

[4] T. Kepka, P. Němec, *Commutative Radical Rings I,* AUC **22(1)** (1981), 25 – 28.

[5] D. Stanovský, *Homomorphic images of subdirectly irreducible grupoids,* CMUC **42(3)** (2001), 443 – 450.