Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ján Labant

Laplaceova transformace a lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.
Studijní program: obecná matematika

2009

Na tomto mieste sa chcem poďakovať svojmu vedúcemu práce RNDr. Tomášovi Bártovi, Ph.D. za zapožičanie literatúry a za jeho vedenie, cenné rady, a pripomienky, ktoré mi veľmi pomohli pri vypracovaní bakalárskej práce.
Ďakujem aj svojej rodine, ktorá mi pri štúdiu poskytla toľko potrebné zázemie, ako aj priateľom a známym za prejavenú podporu.

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu napísal samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa 3. augusta 2009 Ján Labant

Obsah

Názov práce: Laplaceova transformácia a lineárne diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientami
Autor: Ján Labant
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedúci bakalárskej práce: RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.
e-mail vedúceho: barta@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V predloženej práci sa najskôr zoznámime s Laplaceovou transformáciou. Študujeme jej vlastnosti a s nadobudnutými vedomosťami hľadáme riešenia lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami. V práci tak odvodíme fundamentálny systém ako aj riešenie rovnice s pravou stranou.

Kľúčové slová: Laplaceova transformácia, lineárna diferenciálna rovnica, fundamentálny systém.

Title: The Laplace transform and linear differential equations with constant coefficients
Author: Ján Labant
Department: Department of Mathematical analysis
Supervisor: RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: barta@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study the Laplace transform. We study its properties and with this foundations we solve the linear differential equation with constant coefficients. In the present work we deduce the fundamental system and also a solution of the equation with right hand side.

Keywords: the Laplace transform, linear differential equation, the fundamental system.

Úvod

Nami skúmaná Laplaceova transformácia je príkladom integrálnej transformácie. Zároveň je silným a často používaným nástrojom na riešenie diferenciálnych rovníc. V práci preto budeme hľadať riešenia lineárnych diferenciálnych rovníc práve pomocou Laplaceovej tranformácie.
V kapitole 2 sa budeme zaoberať existenciou samotnej Laplaceovej transformácie. Namiesto priestoru exponenciálne ohraničených lokálne integrovateľných funkcií si vystačíme s exponenciálne ohraničenými spojitými funkciami. Pre naše využitie na diferenciálne rovnice nám tento priestor postačuje.
V kapitole 3 si predvedieme predovšetkým tie vlastnosti Laplaceovej transformácie, ktoré neskôr využijeme. Vlastnosti sú rozdelené do jednotlivých podkapitol. Vety a dôkazy v tejto kapitole sú z väčšej časti prevzaté z knihy [4].
Kapitola 4 je cieľom práce. Tu si predvedieme aplikáciu na lineárne diferenciálne rovnice s konštantými koeficientami, k čomu využijeme práve vlastnosti Laplaceovej transformácie z predošlej kapitoly. Vrcholom práce je potom Veta 4.6, kde pomocou Laplaceovej transformácie získame fundamentálny systém lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami. V poslednej podkapitole skúmame stabilitu riešenia týchto rovníc.
Pri práci boli ďalej využité poznámky z prednášok Matematickej analýzy doc. RNDr. Jiřího Veselého, CSc. a Komplexnej analýzy doc. RNDr. Ondřeja Kalendu, Ph.D. a text [3]. Vzhľadom k všeobecnej známosti väčšiny vzorcov nie sú zdroje v ďalšom texte nikde explicitne citované.
Pripomeňme ešte jeden historický fakt o Laplaceovej transformácii. Je totiž zaujímavé, že pôvod Laplaceovej transformácie siaha až do čias Napoleona. S týmto diktátorom spolupracoval aj samotný Pierre-Simon Laplace (23.marec 1749 – 5.marec 1827), známy francúzsky astronóm a matematik. Je preto obdivuhodné, aké nachádza Laplaceova transformácia využitie aj v dnešnej dobe.

Kapitola 1

Použité definície a značenia

V tejto kapitole uvedieme definície základných pojmov a značení, ktoré využijeme pri bližšom skúmaní Laplaceovej transformácie. Začnime definíciou nevlastného Riemannovho integrálu.

Definícia 1.1. *Nevlastný Riemannov integrál.*
Nech $a < b$ a pre každé $t \in (a, b)$ existuje Riemannov integrál $\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$. Ak existuje vlastná limita $\lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)\mathrm{d}x$, nazveme ju nevlastným Riemannovým integrálom funkcie $f(x)$ a tvrdíme, že tento integrál je konvergentný. V prípade, že je limita nevlastná, alebo neexistuje, tvrdíme, že integrál diverguje. Nevlastný Riemannov integrál funkcie $f(x)$ od a do b značíme $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Platí teda

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)\mathrm{d}x.$$

Predošlú definíciu potrebujeme na zadefinovanie Laplaceovej transformácie.

Definícia 1.2. *Laplaceova transformácia.*
Nech $f(t)$ je funkcia reálnej premennej $t \geq 0$. Laplaceovou transformáciou funkcie f rozumieme funkciu $F(s)$ komplexnej (reálnej) premennej s, definovanú vzťahom

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t,$$

kde nevlastný Riemannov integrál existuje a nadobúda konečnú hodnotu, teda

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau e^{-st} f(t)\mathrm{d}t.$$

Symbol $\mathcal{L}$ nazvime Laplaceov operátor.

Správne by sme mali písať $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$. Pre zjednodušenie zápisu budeme v ďalšom texte uvádzať $\mathcal{L}(f(t))$, resp. $\mathcal{L}(f)$.
Podmienkami existencie Laplaceovej transformácie sa budeme bližšie zaoberať v Kapitole 2, pričom sa v práci obmedzíme na spojité funkcie. Z toho dôvodu sme si v definícii vystačíli s nevlastným Riemannovým integrálom. Laplaceova transformácia ale existuje aj v prípadoch, kedy Riemannov integrál nemá zmysel uvažovať, napríklad pre niektoré prípady lokálne integrovateľných funkcií. Vtedy by sme v definícii uvažovali Lebesgueov integrál.
Ďašie definície budú potrebné predovšetkým pri skúmaní vlastností Laplaceovej transformácie v nasledujúcich kapitolách.

Definícia 1.3. *α-exponenciálne ohraničená funkcia.*
Hovoríme, že funkcia f je α-exponenciálne ohraničená, ak existujú kladné konštanty M a α tak, že pre každé $t \geq 0$ platí

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}.$$

Definícia 1.4. *Skoková funkcia.*
Skoková funkcia $u_a(t)$ je definovaná nasledovne

$$u_a(t) = 0, \quad t < a$$

$$u_a(t) = 1, \quad t \geq a.$$

Definícia 1.5. *Konvolúcia.*
Nech $f(t), g(t)$ sú spojité funkcie definované pre $t > 0$. Konvolúcia $(f * g)$ je definovaná vzťahom

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Poznámka 1.6. *Vlastnosti konvolúcie.*
(i) $(f * g)(t) = (g * f)(t)$
(ii) $c(f * g)(t) = (cf) * g = f * (cg)$, *kde c je konštanta*
(iii) $f * (g * h) = (f * g) * h$
(iv) $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

Dôkaz. Vlasnosti plynú z definície. □

Kapitola 2

Existencia Laplaceovej transformácie

Laplaceov operátor nemôžeme aplikovať na všetky funkcie a pre všetky hodnoty premennej s, podmienkou existencie Laplaceovej transformácie je konvergencia integrálu. Uveďme si preto vetu, ktorá zaručuje existenciu Laplaceovej transformácie a jej absolútnu konvergenciu.

Veta 2.1. *Nech funkcia f je spojitá na intervale $[0, \infty)$ a je α-exponenciálne ohraničená. Potom Laplaceova transformácia $\mathcal{L}(f)$ existuje (a konverguje absolútne) pre $Re(s) > \alpha$.*

Dôkaz. Vieme, že $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ pre všetky $t \geq 0$.
Pre $s = x + iy$ a $\tau > 0$ platí

$$\int_0^\tau |e^{-st} f(t)| \mathrm{d}t \leq M \int_0^\tau e^{-(x-\alpha)t} \mathrm{d}t = \frac{M}{x-\alpha} - \frac{Me^{-(x-\alpha)\tau}}{x-\alpha}.$$

Vieme, že $x = Re(s) > \alpha$. Prevedením limity pre $\tau \to \infty$ preto dostávame výsledok:

$$\int_0^\infty |e^{-st} f(t)| \mathrm{d}t \leq \frac{M}{x-\alpha}.$$

Teda $\mathcal{L}(f)$ konverguje absolútne. $\square$

Pre úplnosť uveďme príklad, kedy funkcia nespĺňa predpoklady predošlej vety, avšak Laplaceova transformácia existuje.

Príklad 2.2. *Nech* $f(t) = 2te^{t^2} \cos e^{t^2}$.
Funkcia f *je spojitá na* $[0, \infty)$, *ale nie je* α*-exponenciálne ohraničená, pretože rastie príliš rýchlo.*
Počítajme per partes

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} 2te^{t^2} \cos e^{t^2} \mathrm{d}t =$$

$$= [e^{-st} \sin e^{t^2}]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} \sin e^{t^2} \mathrm{d}t = -\sin 1 + s\mathcal{L}(\sin e^{t^2}).$$

Podľa predošlej vety $\mathcal{L}(\sin e^{t^2})$ *existuje.*

Kapitola 3

Vlastnosti Laplaceovej transformácie

V tejto kapitole sa budeme bližšie zaoberat' Laplaceovou transformáciou a z množstva jej vlastností sa zameriame na tie, ktoré využijeme v Kapitole 4 pri riešení lineárnych diferenciálnych rovníc.

3.1 Základné vlastnosti

Veta 3.1. *Linearita.*
Pre l'ubovol'né c_1, c_2 *a funkcie* f_1, f_2*, pre ktoré existuje* $\mathcal{L}(f_1)$ *(resp.* $\mathcal{L}(f_2)$*) pre* $Re(s) > \alpha$ *(resp.* $Re(s) > \beta$*), existuje* $\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2)$ *pre* s *také, že* $Re(s) > \max\{\alpha, \beta\}$ *a platí*

$$\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{L}(f_1) + c_2 \mathcal{L}(f_2).$$

Dôkaz.

$$\int_0^\infty e^{-st} \left(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right) \mathrm{d}t =$$

$$= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t) \mathrm{d}t + c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t) \mathrm{d}t$$

□

Z linearity vieme odvodit' nasledujúci vzt'ah pre polynómy.

Dôsledok 3.2. *Nech polynóm* $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots a_n t^n$*,* $n < \infty$*. Potom*

$$\mathcal{L}(f(t)) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathcal{L}(t^k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k k!}{s^{k+1}}.$$

Dôkaz. Matematickou indukciou ukážeme, že

$$\mathcal{L}(t^k) = \tfrac{k!}{s^{k+1}} \text{ pre } k = 0, 1, 2, 3, \dots.$$

Počítajme prvý krok indukcie

$$\int_0^\infty e^{-st} \mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty = \frac{1}{s}.$$

Nech teda vzťah platí pre k a počítajme pre $k+1$. Integrujme per partes

$$\mathcal{L}\left(t^{k+1}\right) = \int_0^\infty e^{-st} t^{k+1} \mathrm{d}t = \left[t^{k+1} \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty + \frac{k+1}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^k \mathrm{d}t = \frac{(k+1)!}{s^{k+2}}.$$

□

Predstavme si ďalej dôležité pravidlá posunutia. Využijeme pri nich skokovú funkciu u_a z Definície 1.4.

Veta 3.3. *Prvé pravidlo posunutia.*
Nech $F(s) = \mathcal{L}\left(f\left(t\right)\right)$ *pre* $Re(s) > 0$*, potom*

$$F(s-a) = \mathcal{L}\left(e^{at} f(t)\right) \textit{ pre } a \in \mathbb{R},\ Re(s) > a.$$

Dôkaz. Počítajme

$$F(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t) \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t) \mathrm{d}t = \mathcal{L}(e^{at} f(t))$$

□

Veta 3.4. *Druhé pravidlo posunutia.*
Nech $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ *pre* $Re(s) > 0$ *a* u_a *je skoková funkcia, potom*

$$\mathcal{L}\left(u_a\left(t\right) f\left(t-a\right)\right) = e^{-as} F(s) \textit{ pre } a \geq 0.$$

Dôkaz. Dosaď me priamo do definície Laplaceovej transformácie

$$\mathcal{L}\left(u_a\left(t\right)f\left(t-a\right)\right)=\int_0^\infty e^{-st}(u_a(t)f(t-a))\mathrm{d}t=\int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\mathrm{d}t=$$

$$=\int_0^\infty e^{-s(\tau+a)}f(\tau)\mathrm{d}\tau=e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)\mathrm{d}\tau=e^{-as}F(s).$$

□

Vlastnosť konvolúcie, kde Laplaceova transformácia prevádza konvolúciu na súčin, využijeme pri riešení lineárnej diferenciálnej rovnice s nenulovou pravou stranou, ako uvidíme v dôkaze Vety 4.13.

Veta 3.5. *Konvolúcia.*
Nech sú f, g α-exponenciálne ohraničené a spojité funkcie. Potom pre $Re(s)>\alpha$ platí

$$\mathcal{L}(f)\cdot\mathcal{L}(g)=\mathcal{L}\left(f*g\right).$$

Dôkaz. Pre Laplaceove transformácie funkcií f a g platí

$$\mathcal{L}(f)\cdot\mathcal{L}(g)=\left(\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\int_0^\infty e^{-su}g(u)\mathrm{d}u=$$

$$=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-s(\tau+u)}f(\tau)g(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}\tau.$$

Prevedieme substitúciu $t=\tau+u$. Potom

$$\mathcal{L}(f)\cdot\mathcal{L}(g)=\int_0^\infty\left(\int_\tau^\infty e^{-st}f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\tau.$$

Pre $t<0$ položme $g(t)=0$. Potom pre $\tau>t$

$$\mathcal{L}(f)\cdot\mathcal{L}(g)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-st}f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau.$$

Z Vety 2.1 vieme, že výraz na ľavej strane konverguje absolútne a teda aj

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\left|e^{-st}f(\tau)g(t-\tau)\right|\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau<\infty.$$

Vďaka tomu sú splnené podmienky pre zámenu integrálov a

$$\mathcal{L}(f)\cdot\mathcal{L}(g)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-st}f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t=$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t = \mathcal{L}\left(f * g\right).$$

□

Ďalej sa pozrieme na derivácie typu $\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right)$, ktoré zohrajú dôležitú úlohu vo štvrtej kapitole. Tieto vlastnosti využijeme pri riešení diferenciálnych rovníc, kedy s ich pomocou prevedieme diferenciálnu rovnicu na algebraickú.

Veta 3.6. *Nech je funkcia f α-exponenciálne ohraničená a spojitá na $(0,\infty)$ a f' je spojitá funkcia na $[0,\infty)$. Potom pre $Re(s) > \alpha$ platí*

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0+).$$

Dôkaz. Zapíšme si integrál s využitím limity a integrujme per partes

$$\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\mathrm{d}t = \lim_{\delta\to 0+,\ \tau\to\infty} \int_\delta^\tau e^{-st} f'(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{\delta\to 0+,\ \tau\to\infty} \left(\left[e^{-st}f(t)\right]_\delta^\tau + s\int_\delta^\tau e^{-st} f(t)\mathrm{d}t \right) =$$

$$= -f(0+) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t$$

lebo $|e^{-s\tau}f(\tau)| \leq e^{-x\tau}Me^{\alpha\tau}$ a to konverguje k 0 pre $\tau \to \infty$ a $Re(s) = x > \alpha$. Potom

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0+).$$

Ostáva overiť existencia $f(0+)$. Funkcia f' je spojitá na $[0,\infty)$, kde $\int_\delta^c f'(t)\mathrm{d}t$ existuje pre nejaké $c, \delta > 0$. Platí

$$\int_\delta^c f'(t)\mathrm{d}t = f(c) - f(\delta).$$

□

Vzorec vieme indukciou zovšeobecniť do nasledujúceho tvaru.

Veta 3.7. *Nech sú funkcie $f, f', \cdots f^{(n-1)}$ α-exponenciálne ohraničené a spojité na $(0,\infty)$ a $f^{(n)}$ je spojitá na $[0,\infty)$. Potom pre $Re(s) > \alpha$ platí*

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right) = s^n\mathcal{L}(f(t)) - s^{n-1}f(0+) - s^{n-2}f'(0+) - \cdots - f^{(n-1)}(0+).$$

Dôkaz. Prevedieme matematickú indukciu, prvý krok sme ukázali v predošlej vete. Nech teda $f^{(n)}$ je α-exponenciálne ohraničená a spojitá na $(0, \infty)$ a $f^{(n+1)}$ je spojitá na $[0, \infty)$. Potom

$$\mathcal{L}\left(f^{(n+1)}(t)\right) = \lim_{\delta\to 0+, \tau\to\infty} \int_\delta^\tau e^{-st} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{\delta\to 0+, \tau\to\infty} \left(\left[e^{-st} f^{(n)}(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f^{(n)}\mathrm{d}t \right) = -f^{(n)}(0+) + s\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) =$$

$$= s^n \mathcal{L}(f(t)) - s^n f(0+) - s^{n-1} f'(0+) - \cdots - f^{(n)}(0+).$$

□

3.2 Inverzná Laplaceova transformácia

Po aplikácii Laplaceovej transformácie a využití jej vlastností budeme potrebovať určiť jej inverziu, aby sme sa dopracovali k výsledku.
Začnime príkladom.

Príklad 3.8. *Nech sú dané funkcie $f(t) = \sin\omega t$ pre $t \geq 0$ a $g(t) = \sin\omega t$ pre $t > 0$ a $g(t) = 1$ pre $t = 0$. Potom*

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \mathcal{L}(g(t)),$$

a teda $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)$ nie je jednoznačné.

Laplaceova transformácia nie je prostá, avšak podmienkou existencie inverzie je jednoznačnosť. Práve o nej hovorí nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 3.9. *Lerchova veta.*
Ak sú f, g spojité funkcie na $[0, \infty)$ a $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$, potom $f = g$.

Dôkaz. K nájdeniu v knihe [6], kapitola 2.6, strana 61. □

Pri aplikáciách Laplaceovej transformácie v Kapitole 4 si vystačíme so spojitými funkciami, pre úplnosť ale uveďme nasledujúcu poznámku.

Poznámka 3.10. *Ak platí, že $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$, potom $f = g$ skoro všade. Hovoríme, že Laplaceova transformácia (ako typ integrálnej transformácie) je jednoznačná v Lerchovom zmysle.*

Uveď me teraz príklad, ktorý zohrá dôležitú úlohu po aplikovaní rozkladu na parciálne zlomky. Vzťah, ktorý v príklade získame, nám umožní určenie Laplaceovej transformácie pre akýkoľvek parciálny zlomok.

Príklad 3.11. *Uvažujme funkciu $f(t) = t$, kde $t \geq 0$. Z Dôsledku 3.2 vieme, že*

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}, \quad Re(s) > 0.$$

Z prvého pravidla posunutia (Veta 3.3) potom

$$\mathcal{L}(te^{at}) = \frac{1}{(s-a)^2}, \quad Re(s) > a.$$

Všeobecne

$$\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}_0,\ Re(s) > a.$$

Vzťah sme dokázali indukciou v Dôsledku 3.2 pre $a = 0$ a aplikovaním prvého pravidla posunutia 3.3 dostávame

$$\mathcal{L}\left(t^n\right) = \frac{n!}{s^{n+1}} \Rightarrow \mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

Získali sme tak dôležitý vzťah

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\right) = \frac{t^n e^{at}}{n!}.$$

Kapitola 4

Lineárne diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientami

V tejto kapitole sa budeme venovať predovšetkým aplikácii Laplaceovej transformácie na lineárne diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientami. Využijeme k tomu vlastnosti Laplaceovej transformácie z predošlých kapitol. Najdôležitejšou vetou kapitoly je Veta 4.6, ktorá je zároveň hlavným cieľom bakalárskej práce.

4.1 Definície

V prvej podkapitole sa najskôr oboznámime s potrebnými pojmami a ich definíciami.

Definícia 4.1. *Lineárna diferenciálna rovnica s konštantnými koeficientami.*
Rovnica

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) = f(t)$$

je lineárna diferenciálna rovnica s konštantnými koeficientami, kde a_i sú reálne konštanty a y je hľadaná a f je daná funkcia.
Homogénnou rovnicou nazveme lineárnu diferenciálnu rovnicu s konštantnými koeficientami a nulovou pravou stranou, teda rovnicu

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n)}(t) + \cdots + a_n y(t) = 0.$$

V ďalšom texte budeme o prvej rovnici z definície hovoriť ako o *rovnici* a pokiaľ existuje t, že $f(t) \neq 0$, budeme hovoriť o *rovnici s nenulovou pravou stranou*.

Definícia 4.2. *Charakteristický polynóm.*
Hovoríme, že polynóm

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

je charakteristický polynóm rovnice z predošlej definície.

Definícia 4.3. *Fundamentálny systém.*
Každú maximálnu množinu lineárne nezávislých riešení homogénnej rovnice nazveme fundamentálny systém.

4.2 Parciálne zlomky

Pri riešení rovníc sa často stretneme s polynómom v menovateli. Pre úpravu takýchto výrazov sa používa rozklad na parciálne zlomky. Uveď me si tento postup. Nasledujúca veta je prevzatá z knihy [2], kapitola 4, Veta 57, kde sa nachádza aj dôkaz.

Veta 4.4. *Rozklad na komplexné parciálne zlomky.*
Nech $Q(x)$ je polynóm, pre ktorý platí

$$Q(x) = a(x-\lambda_1)^{s_1}(x-\lambda_2)^{s_2}\cdots(x-\lambda_r)^{s_r},$$

kde $s_1, s_2, \ldots s_r$ sú celé kladné čísla, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ sú navzájom rôzne komplexné čísla a $a \neq 0$. Ďalej nech $P(x)$ je polynóm, ktorého stupeň je nižší ako stupeň $Q(x)$. Potom existujú čísla

$$A_{1,s_1}, A_{1,s_1-1}, \ldots A_{1,1}, A_{2,s_2}, \ldots A_{2,1}, \ldots A_{r,s_r}$$

tak, že pre všetky x, ktoré nie sú koreňom polynómu Q(x) platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{1,s_1}}{(x-\lambda_1)^{s_1}} + \frac{A_{1,s_1-1}}{(x-\lambda_1)^{s_1-1}} + \cdots + \frac{A_{1,1}}{x-\lambda_1} + \frac{A_{2,s_2}}{(x-\lambda_2)^{s_2}} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{A_{2,1}}{x-\lambda_2} + \cdots + \frac{A_{r,1}}{x-\lambda_r}.$$

Ak sú čísla $a, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ a polynóm $P(x)$ reálne, sú aj čísla $A_{i,j}$ reálne.

Vď aka príkladu 3.11 vieme spočítať inverznú Laplaceovu transformáciu každého parciálneho zlomku. Túto vlastnosť využijeme v ostatnej časti práce. Rozklad si znázornime na príklade.

Príklad 4.5. *Hľadajme*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2+1}{(s-2)^2 s}\right).$$

Rozložme výraz na parciálne zlomky

$$\frac{s^2+1}{(s-2)^2 s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2}.$$

Teda

$$s^2+1 = A(s-2)^2 + B(s-2)s + Cs,$$

odkiaľ vieme určiť hodnoty konštánt $A = \frac{1}{4},\ B = \frac{3}{4},\ C = \frac{5}{2}$. *Z linearity inverznej Laplaceovej transformácie potom platí*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2+1}{(s-2)^2 s}\right) = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) + \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2}\right).$$

Z príkladu 3.11 potom vieme, že výsledok je $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{2t} + \frac{5}{2}te^{2t}$.

4.3 Homogénne rovnice

Študujme najskôr rovnicu s nulovou pravou stranou. Množina jej lineárne nezávislých riešení tvorí fundamentálny systém, ktorý odvodíme v dôkaze nasledujúcej vety.

Veta 4.6. *Nech je* $P(\lambda)$ *charakteristický polynóm pre homogénnu rovnicu a nech má korene* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ *so zodpovedajúcimi násobnosťami* $s_1, s_2, \ldots, s_r$ *tak, že* $s_1 + s_2 + \cdots + s_r = n$. *Potom množina funkcií*

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{s_1-1}e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, t^{s_2-1}e^{\lambda_2 t}, \ldots, t^{s_r-1}e^{\lambda_r t}$$

tvorí komplexný fundamentálny systém riešení a ľubovoľné riešenie homogénnej rovnice môžme vyjadriť ako lineárnu kombináciu funkcií z fundamentálneho systému.

Dôkaz. Počítajme Laplaceovu transformáciu oboch strán homogénnej rovnice, pričom využijeme Vetu 3.7 o derivácii (úpravy prevedieme len formálne, zatiaľ ešte nevieme, či má výraz vôbec zmysel).

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{n-1}(t) + \cdots + a_n y(t) = 0$$

Z Vety 3.7 platí

$$\mathcal{L}\left(y^{(n)}(t)\right) = \lambda^n \mathcal{L}(y(t)) - \lambda^{n-1}y(0) - \lambda^{n-2}y'(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0).$$

Prevedením Laplaceovej transformácie dostaneme výraz

$$\mathcal{L}\left(y(t)\right)\left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n\right) - y(0)(\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) - \cdots$$

$$\cdots - y^{(n-2)}(0)(\lambda + a_1) - y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Teda

$$\mathcal{L}(y(t)) = \frac{\lambda^{n-1}y(0) + \lambda^{n-2}\left(a_1 y(0) + y'(0)\right) + \cdots + a_{n-1}y(0) + \cdots + y^{(n-1)}(0)}{P(\lambda)}$$

Ak označíme čitateľa ako $T(\lambda)$, potom rozklad na parciálne zlomky vyzerá nasledovne

$$\frac{T(\lambda)}{P(\lambda)} = \frac{A_{1,1}}{\lambda-\lambda_1} + \cdots + \frac{A_{1,s_1}}{(\lambda-\lambda_1)^{s_1}} + \frac{A_{2,1}}{\lambda-\lambda_2} + \cdots + \frac{A_{r,s_r}}{(\lambda-\lambda_r)^{s_r}},$$

kde $A_{1,1}, \ldots, A_{r,s_r}$ sú čísla z Vety 4.4. Inverznú transformáciu spočítame pomocou vzťahu z Príkladu 3.11

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A_{1,1}}{\lambda-\lambda_1}\right) + \cdots + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A_{1,s_1}}{(\lambda-\lambda_1)^{s_1}}\right) + \cdots + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A_{r,s_r}}{(\lambda-\lambda_r)^{s_r}}\right) =$$

$$= A_{1,1}e^{\lambda_1 t} + A_{1,2}te^{\lambda_1 t} + \cdots + \frac{A_{1,s_1}}{(s_1-1)!}t^{s_1-1}e^{\lambda_1 t} + A_{2,1}e^{\lambda_2 t} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{A_{2,s_2}}{(s_2-1)!}t^{s_2-1}e^{\lambda_2 t} + \cdots + \frac{A_{r,s_r}}{(s_r-1)!}t^{s_r-1}e^{\lambda_r t}.$$

Funkcie majú Laplaceovu transformáciu, postup bol preto korektný a Laplaceovu transformáciu sme mohli použiť. Hodnoty $A_{1,1}, \ldots, A_{r,s_r}$ sú závislé na čitatelovi zlomku

$$T(\lambda) = \lambda^{n-1}y(0) + \lambda^{n-2}\left(a_1 y(0) + y'(0)\right) + \cdots + \left(a_{n-1}y(0) + \cdots + y^{(n-1)}(0)\right),$$

a teda sú závislé na počiatočných podmienkach rovnice. Matica príslušná polynómu $T(\lambda)$ vyzerá nasledovne

$$\begin{array}{ccccc}
y(0) & a_1y(0) & a_2y(0) & \cdots & a_{n-1}y(0) \\
0 & y'(0) & a_1y'(0) & \cdots & a_{n-2}y'(0) \\
0 & 0 & y''(0) & \cdots & a_{n-3}y''(0) \\
\vdots & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & y^{(n-1)}(0)
\end{array}$$

Matica je trojuholníková, je teda zrejmé, že vhodnou voľbou počiatočných podmienok $y(0), \dots y^{(n-1)}(0)$ vieme získať jej hodnosť ľubovoľnú menšiu ako n. Teda voľbou týchto podmienok vieme získať ľubovoľný polynóm stupňa najviac $n-1$. Preto $A_{1,1}, \dots, A_{r,s_r}$ môže byť ľubovoľná n-tica čísel a teda ľubovoľná lineárna kombinácia funkcií zo znenia vety je riešením rovnice. Z jednoznačnosti riešenia (Veta 1, kapitola 16.1 v knihe [1]) plynie, že ďalšie riešenia neexistujú, keďže sme našli riešenia pre všetky počiatočné podmienky. Tento systém tak generuje priestor všetkých riešení. Lineárna nezávislosť je dokázaná v knihe [5], v kapitole 14.2. Systém preto môžme prehlásiť za komplexný fundamentálny systém. □

Dôsledok 4.7. *Fundamentálny systém má práve n prvkov, ktoré sú lineárne nezávislé a generujú priestor riešení homogénnej rovnice, ktorého dimenzia je práve n.*

Veta 4.8. *Ak je $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, k-násobný koreň charakteristického polynómu $P(\lambda)$, je aj $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ k-násobný koreň. Potom môžme vo fundamentálnom systéme každú dvojicu typu $t^j e^{\lambda t}, t^j e^{\bar{\lambda} t}$, kde j je nezáporné celé číslo také, že $0 \leq j < k$, zameniť dvojicou $t^j e^{\alpha t} \cos \beta t, t^j e^{\alpha t} \sin \beta t$. Získame tak reálny fundamentálny systém.*

Dôkaz. Platí

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)$$

$$e^{\bar{\lambda} t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \sin \beta t)$$

Ukážeme, že $e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t$ sú lineárnou kombináciou $e^{\lambda t}$ a $e^{\bar{\lambda} t}$.

$$e^{\alpha t} \cos \beta t = \frac{1}{2} e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) + \frac{1}{2} e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \sin \beta t)$$

$$e^{\alpha t} \sin \beta t = \frac{1}{2i} e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) - \frac{1}{2i} e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \sin \beta t)$$

Ostáva nám ukázať lineárnu nezávislosť. Nech teda existujú konštanty a, b tak, že aspoň jedna z nich je nenulová a platí

$$a e^{\alpha t} \cos \beta t + b e^{\alpha t} \sin \beta t = 0.$$

Zvol'me najskôr $t = 0$, potom nutne $a = 0$.
Zvol'me teraz $t = \frac{\Pi}{2\beta}$, potom nutne $b = 0$, a teda funkcie sú lineárne nezávislé.

$\square$

Príklad 4.9. *Majme homogénnu rovnicu*

$$y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' - 2y' + y = 0.$$

Jej charakteristický polynóm

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

má korene $i, -i, 1$*, pričom* 1 *je dvojnásobný koreň.*
Reálny fundamentálny systém tak tvoria funkcie $\cos x, \sin x, e^x, xe^x$.
Dopočítajme príklad s týmito počiatočnými podmienkami

$$y(0) = y'(0) = y''(0), \quad y'''(0) = 1.$$

Počítajme rovnicu pomocou Laplaceovej transformácie. Potom

$$\mathcal{L}(y(t)) = \frac{1}{P(\lambda)}.$$

Rozložme výraz na parciálne zlomky

$$\frac{1}{\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1} = \frac{A}{\lambda - 1} + \frac{B}{(\lambda - 1)^2} + \frac{C}{\lambda + i} + \frac{D}{\lambda - i}.$$

Zo sústavy spočítame, že $A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{4}, D = \frac{1}{4}$. *S využitím Príkladu 3.11 dostávame riešenie*

$$-\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{4}e^{-it} + \frac{1}{4}e^{it},$$

ktoré môžme reálne zapísat' ako

$$-\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{2}\cos t.$$

Tu si všimneme, že $\frac{0{,}25}{\lambda+i} + \frac{0{,}25}{\lambda-i} = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda^2+1}$ *a* $\frac{1}{2}\cos t$ *je príslušná inverzná Laplaceova transformácia. Pri rozklade na parciálne zlomky sme preto mohli použit' priamo vetu o rozklade na reálne parciálne zlomky z knihy [2], kapitola 4, Veta 59. Následným prevedením inverznej Laplaceovej transformácie by sme získali reálne riešenie.*

4.4 Rovnice s pravou stranou

Pozrime sa teraz na rovnicu s nenulovou pravou stranou. Jej riešenie úzko súvisí s riešením homogénnej rovnice, o čom hovorí nasledujúca veta.

Veta 4.10. *Každé riešenie rovnice s nenulovou pravou stranou sa dá obdržať ako súčet partikulárneho riešenia tejto rovnice a vhodne vybraného riešenia homogénnej rovnice.*

Dôkaz. Dôkaz je obsiahnutý v rozbore algoritmu 4.12 nižšie. □

Príklad 4.11. *Nech máme danú diferenciálnu rovnicu druhého stupňa s počiatočnými podmienkami*

$$y'' + 2y' + y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Preveďme Laplaceovu transformáciu

$$\mathcal{L}(y'') + 2s\mathcal{L}(y') + \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(1),$$

použime vzťah o derivácii z Vety 3.7

$$s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0) + 2\mathcal{L}(y) - 2y(0) + \mathcal{L}(y) = \frac{1}{s},$$

z čoho vyjadríme $\mathcal{L}(y)$ a upravíme na parciálne zlomky

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Pomocou Príkladu 3.11 určíme inverzné Laplaceove transformácie a dostaneme riešenie

$$y(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t}.$$

Poznámka 4.12. *Z príkladu vieme uhádnuť približný postup:*

(i) prevedieme Laplaceovu transformáciu oboch strán rovnice,
(ii) vyjadríme rovnicu $\mathcal{L}(y) = F(s)$,
(iii) aplikujeme inverznú Laplaceovu transformáciu $y = \mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right)$.

Rozbor algoritmu.
Riešme teraz všeobecne rovnicu z Definície 4.1 s počiatočnými podmienkami $y(0) = y_1, y'(0) = y_2, \ldots y^{(n-1)}(0) = y_n$.

Nech $\mathcal{L}(y(t)) = F(\lambda)$. Použitím Vety 3.7 o derivácii a nasledným dosadením do Definície 4.1 dostaneme výraz

$$(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n)F(\lambda) - T(\lambda) = \mathcal{L}(f(t)),$$

kde $T(\lambda)$ je polynóm stupňa najviac $(n-1)$. Dostávame teda riešenie tvaru

$$F(\lambda) = \frac{\mathcal{L}(f(t))}{\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n} + \frac{T(\lambda)}{\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Menovateľ je charakteristický polynóm $P(\lambda)$. Riešenie vieme vyjadriť v tvare

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathcal{L}(f(t))}{P(\lambda)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{T(\lambda)}{P(\lambda)}\right),$$

kde prvý člen je partikulárnym riešením rovnice s pravou stranou a druhý člen je riešením príslušnej homogénnej rovnice (ako v dôkaze Vety 4.6). Riešenie môžme vyjadriť aj v tvare

$$y(t) = f(t) * g(t) + h(t),$$

$$\text{kde } g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{1}{P(\lambda)}\right), \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{T(\lambda)}{P(\lambda)}\right).$$

Rozbor algoritmu nám poslúžil pre naznačenie postupu, akým sa dopracovať k riešeniu. Presnejšiu formuláciu nám poskytuje nasledujúca veta, v ktorej dôkaze využijeme algoritmus ako návod.

Veta 4.13. *Nech h je riešenie homogénnej rovnice s danými počiatočnými podmienkami. Potom riešenie rovnice s pravou stranou f, kde f je spojitá funkcia, je $y(t) = f(t) * g(t) + h(t)$, kde $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P(\lambda)}\right)$ a $P(\lambda)$ je charakteristický polynóm rovnice. Toto riešenie je určené jednoznačne počiatočnými podmienkami.*

Dôkaz. Dôkaz je obsiahnutý v predošlom rozbore algoritmu, ktorý nám preto poslúži ako návod. V dôkaze použijeme značenie ako v rozbore algoritmu. Aplikovanie Laplaceovej transformácie na rovnicu s pravou stranou získame rovnosť

$$\mathcal{L}\left(y^{(n)}(t)\right) + a_1\mathcal{L}\left(y^{(n-1)}(t)\right) + \cdots + a_n\mathcal{L}\left(y(t)\right) = \mathcal{L}\left(f(t)\right).$$

Aplikovaním Vety 3.7 a využitím dôkazu Vety 4.6 prevedieme rovnicu na výraz

$$P(\lambda)\mathcal{L}(y(t)) - T(\lambda) = \mathcal{L}\left(f(t)\right),$$

kde $T(\lambda)$ je polynóm ako v dôkaze Vety 4.6, teda

$$T(\lambda) = \lambda^{n-1} y_1 + \lambda^{n-2} (a_1 y_1 + y_2) + \cdots + (a_{n-1} y_1 + \cdots + y_n) .$$

V dôkaze Vety 4.6 sme ukázali, že vhodnou voľbou počiatočných podmienok vieme získať ľubovoľný polynóm stupňa najviac $n - 1$. Riešenie tak dostávame v tvare

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\mathcal{L}(f(t))}{P(\lambda)} \right) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{T(\lambda)}{P(\lambda)} \right).$$

Využime ďalej vzťah plynúci z Vety 3.5 o konvolúcii: Nech $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ a $G(s) = \mathcal{L}(g(t))$, potom $\mathcal{L}^{-1}(FG) = \mathcal{L}^{-1}(F) * \mathcal{L}^{-1}(G)$.
A teda

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\mathcal{L}(f(t)) \frac{1}{P(\lambda)} \right) + h(t)$$

$$y(t) = f(t) * \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{P(\lambda)} \right) + h(t).$$

Z jednoznačnosti riešenia (Veta 1, kapitola 16.1 v knihe [1]) plynie, že ďalšie riešenia neexistujú, keďže sme našli riešenia pre všetky počiatočné podmienky. Riešenie je tak jednoznačne určené počiatočnými podmienkami. □

Poznamenajme ešte, že z postupu vyplýva, že prvý člen riešenia je riešením rovnice za nulových počiatočných podmienok. Uveďme ďalej príklady.

Príklad 4.14. *Nech máme danú rovnicu*

$$y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' - 2y' + y = 1$$

s počiatočnými podmienkami

$$y(0) = y'(0) = y''(0), \quad y'''(0) = 1.$$

Z príkladu 4.9 vieme, že riešenie príslušnej homogénnej rovnice je

$$h(t) = -\frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} t e^t + \frac{1}{2} \cos t.$$

Z predošlej vety preto potrebujeme spočítať

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{P(\lambda)} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1} \right).$$

Z príkladu 4.9 vidíme, že v tomto prípade je

$$g(t) = -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{2}\cos t.$$

Riešenie je potom podľa Vety 4.13

$$y(t) = f(t) * g(t) + h(t) = \int_0^t g(t-\tau)\mathrm{d}\tau + h(t).$$

Počítajme

$$\int_0^t g(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \left(-e^{t-\tau} + (t-\tau)e^{t-\tau} + \cos(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{1}{2}(2 - 2e^t + te^t + \sin t).$$

Potom riešenie je

$$y(t) = 1 - \frac{3}{2}e^t + te^t + \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t.$$

Príklad 4.15. *Počítajme rovnicu s počiatočnými podmienkami*

$$y'' + y' = \sin t, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Použime vzťah z Vety 4.13, vďaka ktorému nemusíme určovať Laplaceovu transformáciu pravej strany. Charakteristický polynóm je

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda,$$

a teda z rozkladu na parciálne zlomky je

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda+1}\right) = 1 - e^{-t}.$$

Potom

$$y(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t (1 - e^{-(t-\tau)})\sin\tau\mathrm{d}\tau = \int_0^t \sin\tau\mathrm{d}\tau - \int_0^t \sin\tau e^{\tau-t}\mathrm{d}\tau =$$

$$= 1 - \frac{3}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}e^{-t},$$

kde druhý integrál sme počitali dvakrát per partes. Všimneme si, že riešenie homogénnej rovnice s nulovými počiatočnými podmienkami je nulové.

4.5 Asymptotické správanie sa riešenia

V tejto podkapitole sa pozrieme na vety, ktoré hovoria o stabilite riešenia. Teda budeme vyšetrovať, kedy riešenie konverguje k nule.

Veta 4.16. *Nech pre každý koreň λ charakteristického polynómu $P(\lambda)$ homogénnej rovnice platí $Re(\lambda) < 0$. Potom*

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

Dôkaz. Už vieme z Vety 4.6, že ľubovoľné riešenie $y(t)$ môžme zapísať ako lineárnu kombináciu funkcií

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{s_1-1}e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, t^{s_2-1}e^{\lambda_2 t}, \dots, t^{s_r-1}e^{\lambda_r t},$$

kde s_i sú príslušné násobnosti koreňov λ_i a $s_1 + \cdots + s_r = n$. Je teda hneď zrejmé, že ak $Re(\lambda_i) < 0\ \forall i$, potom bude $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$. □

Už vieme, že riešenie rovnice sa dá vyjadriť s využitím konvolúcie. Nasledujúcu vlastnosť, ktorá hovorí o podmienke, kedy konvolúcia konverguje k nule, využijeme pri ďalšom skúmaní stability riešenia.

Lema 4.17. *Ak je $h \in L^1[0,\infty)$ spojitá funkcia a $g \in C_0[0,\infty)$, potom konvolúcia $(h * g)(t)$ konverguje k nule pre $t \to \infty$.*

Dôkaz. Funkcia $g \in C_0$, teda $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$ a funkcia je spojitá na $[0,\infty)$, z čoho plynie, že je aj ohraničená na na tomto intervale. Pretože $h \in L^1[0,\infty)$, je aj $v(t) = h(t)g(t)$ z priestoru $L^1[0,\infty)$. Dodefinujme $g(t) = g(-t)$ pre $t < 0$ (aby mal integrál zmysel) a vyšetrujme

$$\lim_{\lim_{t\to\infty}} (h*g)(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t h(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau \le \lim_{t\to\infty} \int_0^\infty |h(\tau)g(t-\tau)|\,\mathrm{d}\tau =$$
$$= \int_0^\infty \lim_{t\to\infty} |h(\tau)g(t-\tau)|\,\mathrm{d}\tau = 0,$$

kde limitu a integrál môžme zameniť, lebo integrovateľná majoranta je napríklad $Mh(t)$, kde $M = \sup_{t\in[0,\infty)} \{|g(t)|\}$. □

Veta 4.18. *Nech pre každý koreň λ charakteristického polynómu $P(\lambda)$ platí, že $Re(\lambda) < 0$ a nech $f \in C_0[0,\infty)$ je pravá strana rovnice. Potom*

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

Dôkaz. Veta je priamym dôsledkom predošlej lemy, Vety 4.13 a Vety 4.16.
Potrebujeme ukázať, že $g \in L^1[0, \infty)$. Potom $y(t) = f(t) * g(t) + h(t)$, kde oba členy konvergujú k 0.
Vieme, že

$$g(t) = ce^{\lambda_1 t} + cte^{\lambda_1 t} + \ldots + ct^{s_1 - 1}e^{\lambda_1 t} + ce^{\lambda_2 t} + \ldots + ct^{s_2 - 1}e^{\lambda_2 t} + \ldots + ct^{s_r - 1}e^{\lambda_r t},$$

kde c značí vždy nejakú konštantu (môžu byť vždy rôzne). Stačí nám ukázať, že $t^k e^{\lambda t}$ je z $L^1[0, \infty)$ pre $Re(\lambda) < 0$. Odhadnime preto

$$\int_0^\infty \left| t^k e^{\lambda t} \right| \mathrm{d}t \leq \int_0^\infty \left| t^k e^{xt} \right| \mathrm{d}t < \infty,$$

kde $x = Re(\lambda) < 0$. A teda $g(t) \in L^1[0, \infty)$. $\square$

Literatúra

[1] Hájková, John, Kalenda, Zelený(2006): *Matematika.* Matfyzpress, Praha.

[2] Jarník V. (1963): *Integrální počet I.* Nakladatelství československé akademie věd.

[3] Nováková E., Hyánková M., Průcha L.: *Laplaceova transformace - studijní text pro cvičení v předmětu "Matematika - 2".* Rozvojový projekt MŠMT

[4] Schiff J. L. (1999): *The Laplace transform: Theory and Application.* Springer, New York.

[5] Veselý J. (1997): *Matematická analýza pro učitele.* Matfyzpress, Praha.

[6] Widder D. V. (1946): *The Laplace Transform.* Princeton University Press, Princeton, NJ.