Oponentský posudek na diplomovou práci

Garik Dohnal: Definovatelné třídy modulů a dekonstrukce kotorzních párů

Předložená práce se zabývá tzv. Σ-kotorzními moduly, což je relativně technické téma z teorie modulů, kde se setkávají homologické, modelově teoretické a množinově teoretické metody. Cílem práce bylo podat pokud možno elementární důkaz faktu, že to, jestli je nebo není daný modul M Σ-kotorzní, závisí pouze na primitivních pozitivních formulích platných v M. Existuje nepublikovaný důkaz používající pokročilou homologickou algebru, tzv. derivované kategorie, a cílem autora bylo se tomuto vyhnout pomocí hlubší analýzy s problémem související nekonečné kombinatoriky.

Výsledný text podává nový důkaz výše zmíněného výsledku pro okruhy, které mají všechny ideály nevýše $\aleph_n$-generované pro nějaké přirozené číslo n. Dále jsou v práci obsaženy částečné výsledky o prvním singulárním kroku transfinitní indukce v důkazu pro obecné okruhy.

Práce je celkově sepsána stručně a obsahuje autorovu vlastní analýzu nad rámec existující (i nepublikované) literatury. Vytknul bych hlavně to, že na více místech byly v argumentaci zamlčeny nebo „zamlženy“ podstatné detaily. Děje se tak i přes jinak velký důraz na formální přesnost ve značení i za cenu jeho složitosti. Uvádím konkrétní seznam míst, které mám na mysli:

1. Pozorování 1.1 je napsáno poněkud nepřehledně. Co přesně například v bodě (a) znamená, že $M = \bigcup_{j \in J} im(\tilde{m}_j)$? Přesnější by bylo říci, že máme nějaký kanonický homomorfismus $\tilde{M} \to M$ a ten je na.

2. Pozorování 1.2(b) takto nelze také brát doslova. Pointa je, že každá direktní limita lze vykonstruovat z limit dobře uspořádaných řetězců, což je záhodno říci nějak přesně. Tak, jak je část (b) napsaná, je triviální, neklade totiž na pseudofiltraci vůbec žádnou podmínku kromě indexové množiny.

3. Větu „Systém S se faktorizuje přes systém I jako usměrněný podsystém …“ pokládám za značně matoucí, měla by být formulována přesněji.

4. Limitní případ v důkazu lemmatu 2.4(b) na str. 14 je trochu odbytý. Abychom mohli použít univerzální zobrazovací vlastnost, potřebujeme kokužel. Ten ale netvoří zobrazení $(g_\alpha : \alpha \in \delta)$, nýbrž zobrazení $(g_\alpha - g_{\delta\alpha} : \alpha \in \delta)$.

5. Tvrzení „Aplikací lemmatu 2.9 můžeme stejně jako v regulárním kroku předpokládat, že existuje $S_\lambda \in \mathrm{Cub}_\subseteq I^{<\lambda}$ taková, že strukturní morfismy odvozeného systému modulů $(F_s)_{s \in S_\lambda}$ jsou prosté“ nahoře na

str. 19 by stálo zato přesně vysvětlit. Lemma 2.9 se totiž v regulárním kroku používá společně s lemmatem 2.5(b), které se nezdá být v singulárním kroku přímo aplikovatelné. Totéž se vztahuje na poslední větu na str. 19.

6. Diskuze ohledně role usměrněných množin v $\mathcal{W} = [I]^{<|I|}$ na str. 20 na začátku kap. 2.2 mi přijde dosti matoucí. V dalším totiž není moc jasné, kde se uvažují usměrněné podmnožiny z $\mathcal{W}$ a kde všechny. Když už se tvrdí, že bez újmy na obecnosti stačí usměrněné množiny, přišlo by mi přehlednější $\mathcal{W}$ definovat rovnou jako množinu všech usměrněných podmnožin I mohutnosti $< |I|$.

7. V důkazu lemmatu 2.14 na str. 21 je $\mathcal{F}$ syntakticky funktor, čili je otázka, co přesně znamená, že je $\mathcal{F}$ „prosté zobrazení“. Samozřejmě např. $\mathcal{F}$ může indukovat prosté zobrazení na objektech nebo dokonce na třídách isomorfismů objektů. Spíš se ale zdá, že v důkazu jsou pomíchány prvky uspořádané množiny $\mathcal{W}$ s hodnotami $\mathcal{F}$ na těchto prvcích.

8. Poslední odstavec důkazu lemmatu 2.15 na str. 22: P by mělo být kofinální v p, ne v λ^+ (i přesto, že $p \cong \lambda^+$, mi současná formulace přijde matoucí). Dále věta „Částečná sjednocení z nich udělají ...“ přesně naráží na to, že částečná sjednocení nejsou a priori usměrněná, čili je třeba je pro další argumentaci nejprve zvětšit na něco usměrněného (souvisí s bodem 6).

9. Jak přesně se v poslední větě důkazu lemmatu 2.16 přijde na to, že S je v M $\mathcal{C}$-čisté?

10. Věta „Předpoklad $\bar{\mathcal{A}} \cap [\varkappa]^{<\lambda} \notin \mathrm{Cub}_{\subseteq}[\varkappa]^{<\lambda}$ znamená, že množina $[\varkappa]^{<\lambda} \setminus \bar{\mathcal{A}} \in \mathrm{Stat}_{\subseteq}[\varkappa]^{<\lambda} \ldots$“ v důkazu pozorování 2.19(b) na str. 24 tvrdí, že doplněk ne-clubu je stacionární množina. To určitě obecně neplatí, bylo by proto dobré zdůvodnit, proč to přesně funguje tady.

Dále mám ještě několik menších věcných připomínek:

11. Str. 8, ř. 14—zdá se, že jde spíš o důkaz inkluze $\subseteq$.

12. Předposlední řádek na str. 10—proč „obrazy $\mathcal{C}$-obalů“ a ne prostě „$\mathcal{C}$-obaly“?

13. Zdá se, že značení $Coker[\mathcal{A}, \mathcal{M}, \mathcal{B}]$ použité v pozorování 2.3(a) nebylo nikde vysvětleno.

14. V důkazu lemmatu 2.5 chybí zmínka o úvodní redukci z důkazu [2, Proposition 5.2], která říká, že můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, není-li $m_{\beta\alpha}$ $\mathcal{C}$-čisté pro nějaké $\alpha < \beta$, že už není $m_{\alpha+1,\alpha}$ $\mathcal{C}$-čisté.

15. Úplně nahoře na str. 16 je dodatek „pro $\lambda > \kappa$“ za „$\mathcal{G}^{<\lambda} = \bigcup_{\kappa \in \lambda} \mathcal{G}^{\kappa}$“ spíše matoucí.

16. Značení Σ-$\mathcal{EC}$ na str. 16 úplně dole se nezdá být formálně nikde zavedeno.

A nakonec několik překlepů:

17. str. 8, ř. 15: „k důkazu opačn*é* inkluze“,

18. str. 11, ř. -5: „presentova*n*ý“,

19. str. 16 uprostřed: odkaz na pozorování 1.4(c) je chybný, bod (c) v dotčeném pozorování není,

20. str. 21, ř. 19: „Plochý *m*odul“,

21. str. 21, ř. 20: obrácený vykřičník,

Práci **doporučuji k obhajobě** a hodnocení přikládám zvlášť.

V Praze dne 31. 1. 2017 doc. RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D.