

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Výukové a diagnostické možnosti prostředí

Pavučiny u žáků ve věku 3. a 4. třídy ZŠ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Autor:** Hana Fialová

**Vedoucí diplomové práce:** prof. RNDr. Milan Hejný, CSc.

Praha 2009

Prohlášení o jistém vnutí práce ke studijním účelům.

### **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce prof. RNDr. Milanem Hejným, CSc.

V Praze dne 11. 3. 2009

Podpis:

A rectangular area where the signature has been redacted with a white box.

Souhlasím s poskytnutím práce ke studijním účelům.

Poděkování

Děkuji za poskytnutí této práce prof. RNDr. Milanu Hájekovi, CSc. za odborné vedení a vytvoření vhodných podmínek ke spolupráci během svého studia. Jsem vděčný za poskytnutí této práce ke studijním účelům.

Poděkování patří také prof. RNDr. Milanu Hájekovi, CSc. za spolupráci při vypracování této práce a za poskytnutí této práce ke studijním účelům.

V Praze dne 11. 3. 2009

Podpis:

A rectangular area where the signature has been redacted with a white box.





## Anotace

Práce představuje výsledky zkoumání matematického prostředí Pavučiny ve 3. a 4. ročníku ZŠ. První kapitola vymezuje prostředí pavučin z matematického hlediska, kapitola druhá se zabývá didaktickým využitím pavučin. Následující oddíl popisuje na základě fragmentů z experimentů zajímavé jevy, které se objevily při řešení pavučinových úloh žáky 3. a 4. ročníku ZŠ, a poukazuje na jejich možné příčiny. Jeho součástí je i shrnutí výsledků kvantitativního experimentu. Poslední kapitola práce líčí průběh pracovní dílny na konferenci Dva dny s didaktikou matematiky 2009 v Praze a popisuje vstupy a podněty posluchačů k tématu prostředí pavučinových úloh. Přílohy obsahují kompletní zpracování jednotlivých experimentů skládající se z protokolu, evidence, komentářů, kaskády řešených úloh a videozáznamu.

**Název práce:** Výukové a diagnostické možnosti prostředí Pavučiny u žáků ve věku 3. a 4. třídy ZŠ

**Katedra:** Matematiky a didaktiky matematiky

**Obor:** Učitelství pro 1. stupeň ZŠ, specializace anglický jazyk

**Vedoucí práce:** prof. RNDr. Milan Hejný, CSc.

**Počet stran:** 96

**Počet příloh:** 6 (80 stran + DVD)

**Rok obhajoby:** 2009

## Summary

The Diploma Thesis presents the outcomes of the research based on solving the tasks of a mathematical surroundings Cobwebs by the pupils of the 3<sup>rd</sup> and the 4<sup>th</sup> classes of elementary school. The first chapter defines the surroundings from the mathematical point of view, the chapter two deals with the didactic application of Cobwebs. Interesting pieces of phenomenon occurred in the experiments and its roots are described in the following chapter as well as the results of a quantitative experiment. The last part of the thesis shows a course of the workshop at the conference Dva dny s didaktikou matematiky 2009 in Prague and describes the participants' comments to the surroundings of Cobweb tasks. The supplements include an elaboration of the experiments containing the protocol, evidence, comments, the cascade of the tasks and the video recording.

**Name of the Diploma Thesis:** Educational and Diagnostic Potentials of the Surroundings  
Cobwebs in Classes of Pupils at the Age of 3<sup>rd</sup> and 4<sup>th</sup> Year of Elementary School

**Department:** Mathematics and Didactics of Mathematics

**Subject area:** Teaching for Primary Education, specialization in English

**Supervisor/Tutor:** prof. RNDr. Milan Hejný, CSc.

**Number of pages:** 96

**Number of attachments:** 6 (80 pages + DVD)

**Year of defence:** 2009

# Obsah

Úvod.....	9
<b>1 Vymezení matematického prostředí Pavučiny .....</b>	<b>10</b>
1.1. Základní principy v pavučinách.....	11
1.1.1 Konvergence šipek.....	11
1.1.2 Divergence šipek.....	13
1.1.3 Princip sčítání šipek .....	14
1.1.4 Hledání jednobarevné cesty .....	15
1.2 Tvorba pavučinových úloh .....	16
1.3 Pyramidové pavučiny .....	17
1.3.1 Charakteristika pyramidových pavučin o 4 číslech a 6 šípkách .....	17
1.3.2 Klasifikace pyramidových pavučin .....	18
1.3.2.1 Počet barev šipek .....	18
1.3.2.2 Vynechaný parametr .....	20
1.3.2.3 Náročnost úlohy .....	20
<b>2 Didaktické aplikace aneb v čem spočívá matematický přínos pavučin pro žáky ....</b>	<b>28</b>
2.1 Propojení pavučin na oblasti aritmetiky a algebry.....	29
2.1.1 Pavučiny a rovnice.....	29
2.1.2 Pavučiny a dělitelnost .....	30
2.1.3 Pavučiny a aritmetická posloupnost .....	31
2.1.4 Pavučiny a pravděpodobnost .....	32
2.1.5 Pavučiny a kombinatorika .....	33
2.2 Realizace .....	33
<b>3 Experimenty .....</b>	<b>36</b>
3.1 Přehled experimentů .....	36
3.2 Rozbor experimentů.....	37
3.2.1 Záměna šipek za čáry.....	37
3.2.2 Vzorová úloha aneb hledání základních principů v pavučině .....	45
3.2.3 Hledání výchozího bodu .....	52

3.2.4 Záměna řešitelské strategie.....	56
3.2.5 Hledání jednobarevné cesty.....	58
3.2.6 Princip sčítání šipek.....	60
3.2.7 Fixace na předchozí zkušenost.....	64
3.2.8 Přítomnost nuly.....	71
3.2.9 Fixace čísla.....	73
3.2.10 Práce s chybou v zadání úlohy.....	75
3.2.11 Klíma experimentů.....	78
3.3 Kvantitativní experiment.....	81
3.3.1 Vyhodnocení výsledků kvantitativního experimentu.....	82
<b>4 Účast na konferenci Dva dny s didaktikou matematiky.....</b>	<b>87</b>
Sebereflexe.....	91
Závěr.....	94
Použité prameny.....	95
Seznam příloh.....	96

## Úvod Úvod v matematickém prostředí Pavučiny

Pavučiny jsou dosud málo známé a neprozkoumané matematické prostředí. Setkat se s ním můžeme v nově koncipovaných učebnicích matematiky pro 1. stupeň ZŠ nakladatelství Fraus, jejichž autory jsou Hejný, Jirotková a Slezáková-Kratochvílová (2007, 2008). Pavučiny představují pro žáky nové, netradiční a poutavé matematické úlohy, jejichž řešení podporuje rozvoj matematického myšlení.

Východiskem práce bylo vlastní zkoumání prostředí pavučin a jeho možností, na které navazovala série devíti kvalitativních a dvou kvantitativních experimentů se žáky 1. stupně ZŠ. Tento výzkum se stal základem pro teoretické uchopení a vymezení prostředí pavučin po stránce matematické a pro nastínění možností jeho využití po stránce didaktické. Dále se výzkum soustředil na sledování myšlenkových procesů žáků při řešení pavučinových úloh, jehož výsledky shrnuje kapitola 3 popisem zajímavých jevů a částečným objasněním jejich příčin.

Výzkum zahrnoval žáky 1. až 4. tříd ZŠ a byl prováděn společně s Pavlínou Harcubovou (dále jen PH), jejíž diplomová práce se specializuje na žáky 1. a 2. tříd ZŠ, zatímco tato práce na žáky 3. a 4. tříd. Obě diplomové práce tak mají za cíl poskytnout ucelený pohled na výukové a diagnostické možnosti prostředí pavučin. Vzhledem k úplnosti a ucelenosti obou prací se mohou obsahově částečně překrývat.

Zkušenosti a poznatky založené na výzkumu jsme s PH měly možnost aplikovat formou prezentací na seminářích Didaktiky matematiky III a na konferenci Dva dny s didaktikou matematiky 2009 v Praze, jejíž průběh a zajímavé podněty ze strany posluchačů zaznamenává kapitola 4.

Závěrečná sebereflexe popisuje celý proces tvorby diplomové práce od konce letního semestru 2007 až po současnou dobu. Shrnuje průběh vlastního objevování zákonitostí pavučin, úskalí prvních experimentů, vypráví o společných diskusích s PH a konzultacích se školitelem, a stává se tak obrazem osobnostního i profesního růstu autorky.

Četné přílohy v závěru práce obsahují podrobné záznamy průběhu experimentů se žáky 3. a 4. tříd doplněné autorčinými komentáři. Videozáznam procesu řešení pavučinových úloh žáky 3. a 4. tříd je ke shlédnutí na přiloženém DVD.

## Úvod

Pavučiny jsou dosud málo známé a neprozkoumané matematické prostředí. Setkat se s ním můžeme v nově koncipovaných učebnicích matematiky pro 1. stupeň ZŠ nakladatelství Fraus, jejichž autory jsou Hejný, Jirotková a Slezáková-Kratochvílová (2007, 2008). Pavučiny představují pro žáky nové, netradiční a poutavé matematické úlohy, jejichž řešení podporuje rozvoj matematického myšlení.

Východiskem práce bylo vlastní zkoumání prostředí pavučin a jeho možností, na které navazovala série devíti kvalitativních a dvou kvantitativních experimentů se žáky 1. stupně ZŠ. Tento výzkum se stal základem pro teoretické uchopení a vymezení prostředí pavučin po stránce matematické a pro nastínění možností jeho využití po stránce didaktické. Dále se výzkum soustředil na sledování myšlenkových procesů žáků při řešení pavučinových úloh, jehož výsledky shrnuje kapitola 3 popisem zajímavých jevů a částečným objasněním jejich příčin.

Výzkum zahrnoval žáky 1. až 4. tříd ZŠ a byl prováděn společně s Pavlínou Harcubovou (dále jen PH), jejíž diplomová práce se specializuje na žáky 1. a 2. tříd ZŠ, zatímco tato práce na žáky 3. a 4. tříd. Obě diplomové práce tak mají za cíl poskytnout ucelený pohled na výukové a diagnostické možnosti prostředí pavučin. Vzhledem k úplnosti a ucelenosti obou prací se mohou obsahově částečně překrývat.

Zkušenosti a poznatky založené na výzkumu jsme s PH měly možnost aplikovat formou prezentací na seminářích Didaktiky matematiky III a na konferenci Dva dny s didaktikou matematiky 2009 v Praze, jejíž průběh a zajímavé podněty ze strany posluchačů zaznamenává kapitola 4.

Závěrečná sebereflexe popisuje celý proces tvorby diplomové práce od konce letního semestru 2007 až po současnou dobu. Shrnuje průběh vlastního objevování zákonitostí pavučin, úskalí prvních experimentů, vypráví o společných diskusích s PH a konzultacích se školitelem, a stává se tak obrazem osobnostního i profesního růstu autorky.

Četné přílohy v závěru práce obsahují podrobné záznamy průběhu experimentů se žáky 3. a 4. tříd doplněné autorčinými komentáři. Videozáznam procesu řešení pavučinových úloh žáky 3. a 4. tříd je ke shlédnutí na přiloženém DVD.

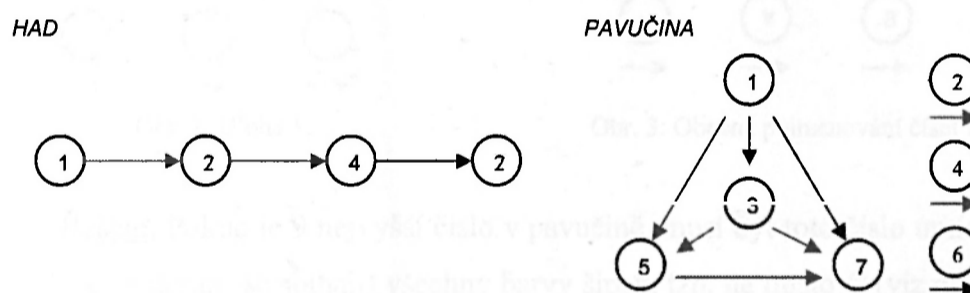


## 1 Vymezení matematického prostředí Pavučiny

Podstatou každého matematického prostředí je značná bohatost úloh. Prostředí Pavučiny je složitým komplexem fenoménů, jež využíváme pro tvorbu jednotlivých úloh. Základními fenomény jsou číslo, šipka a barva zastupující hodnotu šipky. Na tyto se váží vedlejší fenomény, jako jsou například orientace šipky, velikost a rozložení čísel v pavučině, směr šipek vzhledem k poloze papíru.

Z matematického hlediska jsou pavučiny orientované ohodnocené grafy; vrcholy pavučin jsou ohodnoceny čísly a jejich hrany představují šipky dané orientace a vyjadřují hodnotu, která je zastoupena barvou šipky. (Hejný, 2007)

Pavučina může mít libovolný tvar, podmínkou je však bohatší propojenost čísel, kterou se pavučiny odlišují od hadů (obr. 1 vlevo); v úloze typu hada je propojeno každé číslo pouze s jedním dalším číslem, zatímco v pavučinách (obr. 1. vpravo) je číslo propojeno s několika dalšími čísly.



Obr. 1: Rozdílná podoba úlohy typu hada oproti úloze pavučinové

Pavučinové úlohy se skládají ze dvou vzájemně propojených částí. Jedná se o část samotné pavučiny a o část legendy, která určuje hodnoty šipek. Pro úspěšné vyřešení většiny pavučin je nutné, aby žák dokázal tyto dvě části propojit, což vyžaduje schopnost kódování. Legendu lze chápat jako kód, bez kterého není možné vyřešit a doplnit pavučinu.

Pavučiny určené pro 1. stupeň ZŠ zpravidla obsahují přirozená či celá čísla. Nevylučuje se však ani využití oboru racionálních či reálných čísel.

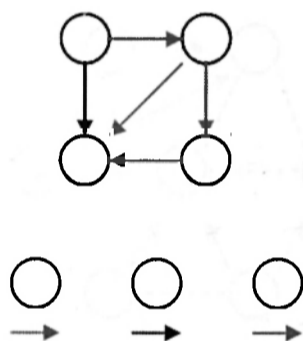
## 1.1. Základní principy v pavučinách

### 1.1.1 Konvergence šipek

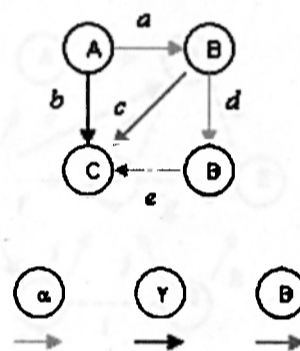
Konvergence znamená v překladu sbíhavost. U pavučin pojmem konvergence šipek značíme jev, kdy se dvě nebo více šipek sbíhá k jednomu číslu. Tento jev poukazuje na následující principy:

- o Pokud všechny šipky různé barvy směřují do 1 čísla, pak je toto číslo v pavučině nejvyšší.

Úloha 1: *Doplň čísla tak, aby nejvyšším číslem v pavučině bylo číslo 9.*



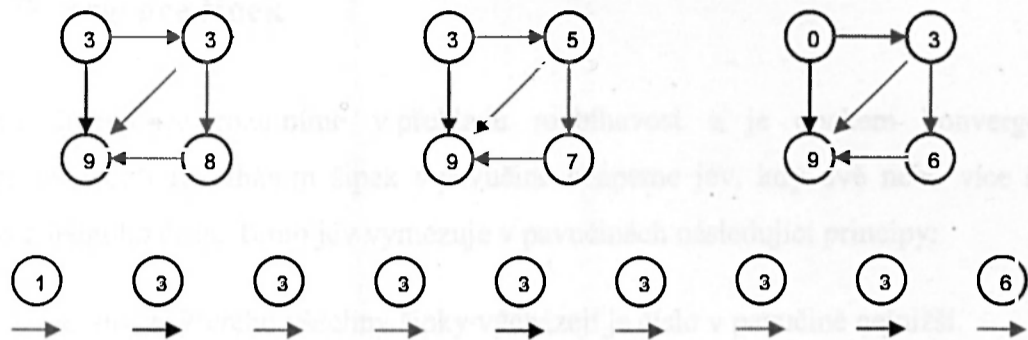
Obr. 2: Úloha 1



Obr. 3: Obecné pojmenování čísel v pavučině

Řešení: Pokud je 9 nejvyšší číslo v pavučině, musí být toto číslo umístěno tam, kam směřují (se sbíhají) všechny barvy šipek, tzn. na místo C (viz obr. 3). Dále víme, že 2 zelené šipky  $d, e$  mají stejnou hodnotu jako šipka červená  $c$  a šipka modrá  $b$  má hodnotu jako 3 zelené šipky  $a, d, e$ . Určím hodnotu zelené šipky, tak, aby platilo, že  $3z < 9$  ( $z$  značí zelenou šipku), pokud počítáme pouze v oboru přirozených čísel. Za hodnotu zelené šipky tedy mohu dosadit čísla 1, 2 nebo 3 (viz obr. 4).

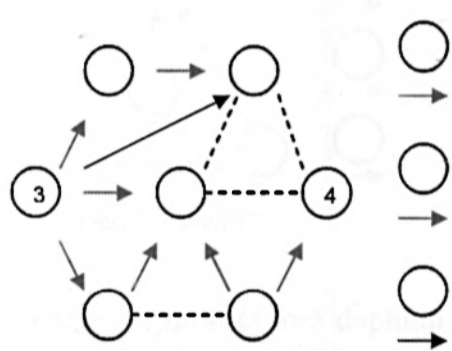




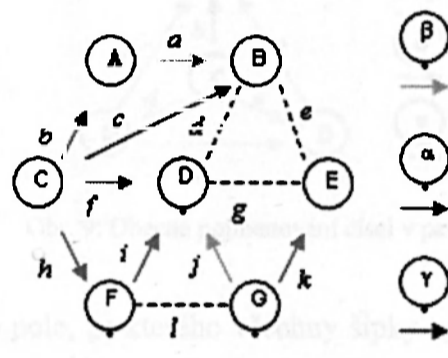
Obr. 4: Trojí možné řešení úlohy

- o Pokud do čísla směřují 2 stejné šípky, na jejich počátku jsou stejná čísla.

**Úloha 2: Vyřeš pavučinu.**

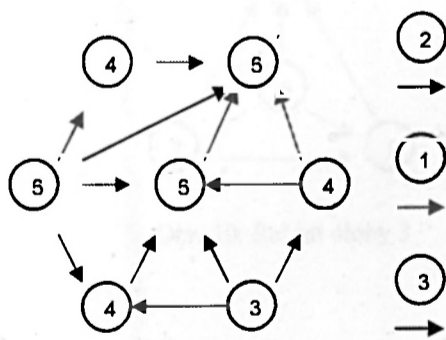


Obr. 5: Úloha 2



Obr. 6: Obecné pojmenování čísel v pavučině

**Řešení:** Do  $D$  směřují 2 zelené šípky  $f$  a  $j$  (viz obr.6). Na počátku šípky  $f$  je číslo 3, proto i na počátku šípky  $j$  bude číslo 3. Nyní mohu určit hodnotu červené šípky  $\alpha = 1$ , protože  $E - G = 4 - 3 = 1$ . Doplním čísla  $A, F, D$  podle hodnoty červené šípky, poté určím hodnotu zelené šípky  $\beta = 2$ . Doplním zbylé číslo  $B = 5$ , hodnotu modré šípky  $\gamma = 3$  a dokreslíme šípky  $d, e, g$  (viz obr. 7).



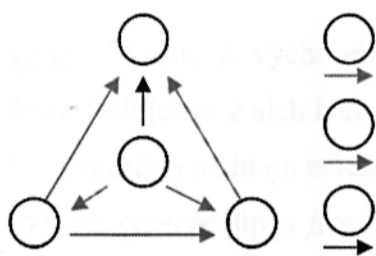
Obr. 7: Řešení úlohy 2

### 1.1.2 Divergence šipek

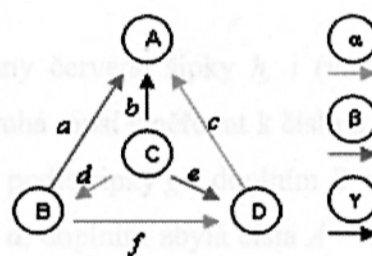
Pojmem divergence rozumíme v překladu rozbíhavost a je opakem konvergence. Divergencí neboli rozbíháním šipek v pavučině chápeme jev, kdy dvě nebo více šipek vychází z jednoho čísla. Tento jev vymezuje v pavučinách následující principy:

- Číslo, ze kterého všechny šipky vycházejí je číslo v pavučině nejnižší.

**Úloha 3:** Nejnižší číslo v pavučině je 5 a nejvyšší je 11. Dopln zbylá čísla a urči hodnoty šipek.

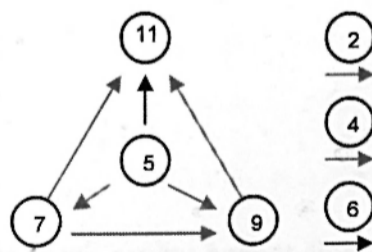


Obr. 8: Úloha 3



Obr. 9: Obecné pojmenování čísel v pavučině

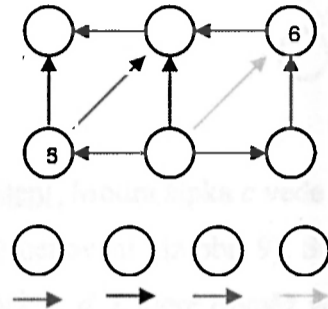
**Řešení:** Nejnižší číslo 5 doplním do pole, ze kterého všechny šipky vycházejí, tedy za C (viz obr. 9). Nejvyšší číslo bude v místě A, jelikož do něj všechny šipky různých barev směřují. Určím hodnotu modré šipky  $\gamma = 6$ . Z čísla 5 k číslu 11 se dostanu po 3 zelených šípkách  $d, f, c$ , hodnota zelené šipky je tedy  $\alpha = 2$ . Doplním čísla  $B = 7, D = 9$  a určím zbylou hodnotu červené šipky  $\beta = 4$  (viz obr. 10).



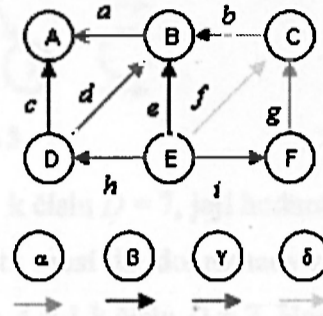
Obr. 10: Řešení úlohy 3

- o Pokud z čísla vycházejí 2 stejné šípky, směřují do stejných čísel.

**Úloha 4:**

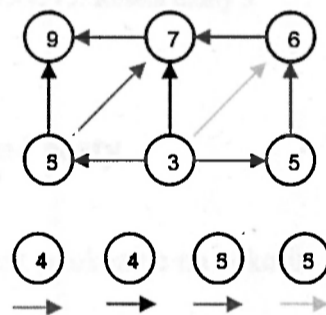


Obr. 11: Úloha 4



Obr. 12: Obecné pojmenování čísel v pavučině

**Řešení:** Z čísla  $E$  vycházejí na obě strany červené šípky  $h, i$  (viz obr. 12). Směřuje-li jedna z nich k číslu 5, pak i druhá musí směřovat k číslu 5, tedy  $F = 5$ . Nyní určím hodnotu zelené šípky  $\alpha = 1$  podle šípky  $g$  a doplním  $B = 7$ . Určím hodnotu červené šípky  $\beta = 2$  podle šípky  $d$ , doplním zbylá čísla  $A = 9, E = 3$  a určím hodnotu modré šípky  $\delta = 4$  podle šípky  $c$  a oranžové šípky  $\gamma = 3$  podle šípky  $f$  (viz obr. 13).

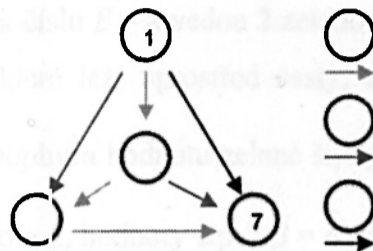


Obr. 13: Řešení úlohy 4

### 1.1.3 Princip sčítání šipek

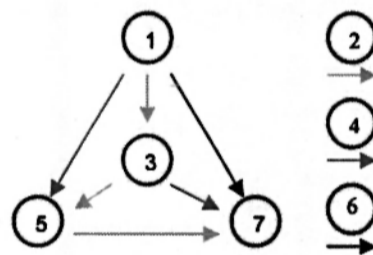
Vedou-li z čísla  $A$  do čísla  $B$  dvě různé cesty, součty hodnot šipek jednotlivých cest, které je určují, jsou shodné. Toto platí ve všech případech.

**Úloha 5:**



Obr. 14: Úloha 5

**Řešení:** Modrá šipka  $c$  vede z čísla  $A = 1$  k číslu  $D = 7$ , její hodnota je  $\gamma = 6$  (obecné pojmenování viz obr. 9). Stejnou hodnotu musí dát dohromady součet tří zelených šipek  $b, d, f$ , které rovněž vedou od čísla  $A = 1$  k číslu  $D = 7$ . Hodnota jedné zelené šipky je proto  $\alpha = \frac{6}{3} = 2$  (viz obr. 15).



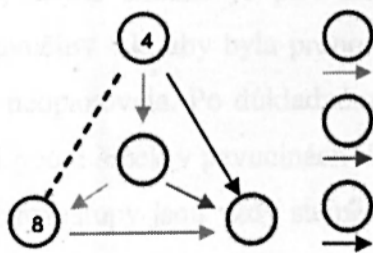
Obr. 15: Řešení úlohy 5

### 1.1.4 Hledání jednobarevné cesty

Cesta tvořená jednou barvou šipek poukazuje na několik důležitých pravidel:

- Pokud cesta vychází z čísla  $A$  a směřuje do  $C$ , platí, že  $A < C$ .
- Je-li určeno počáteční ( $A$ ) a koncové ( $B$ ) číslo cesty tvořené 2 šípkami stejné barvy ( $b, d$ ), pak je číslo  $C$ , ležící uprostřed cesty, vyjádřeno vztahem  $C = A + \frac{B - A}{2} = \frac{A + B}{2}$ . Tedy  $C$  je aritmetický průměr čísel  $A$  a  $B$ .

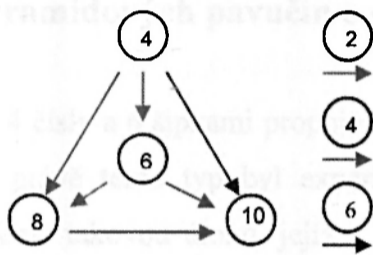
**Úloha 6:**



Obr. 16: Úloha 6

Řešení: Od čísla  $A = 4$  k číslu  $B = 8$  vedou 2 zelené šipky  $b, d$  (obecné pojmenování viz obr. 9). Číslo  $C$ , které leží uprostřed cesty, mezi  $A$  a  $B$ , má tedy hodnotu  $\frac{4+8}{2} = 6$ . Tj.  $C = 6$ . Doplním hodnotu zelené šipky  $a = 2$  podle  $b$ , zbylé číslo  $D = 10$  na základě  $f$  o hodnotě  $a$ , hodnoty šipek  $\beta = 4$  podle  $e$ ,  $\gamma = 6$  podle  $c$  a chybějící šipku  $a$  o hodnotě  $\beta = 2$  (viz obr. 17).

Využit lze také podobnosti situace zelených šipek v pavučině. Vzhledem k tomu, že od čísla  $C$  k číslu  $D$  se mohou dostat po dvou zelených šipkách ( $d, f$ ) či jedné červené ( $e$ ), musí šipka  $a$ , spojující čísla  $A$  a  $B$ , která jsou taktéž propojena dvěma zelenými šipkami ( $b, d$ ), být červená.



Obr. 17: Řešení úlohy 6

## 1.2 Tvorba pavučinových úloh

Tvorba pavučinových úloh je založena na záměrném ukrývání určitého počtu parametrů (číslo, šipka správné barvy a orientace, hodnota šipky). Nejsnáze řešitelné úlohy vznikají vynecháním jednoho druhu parametru, náročnější pak kombinováním vynechaných parametrů.

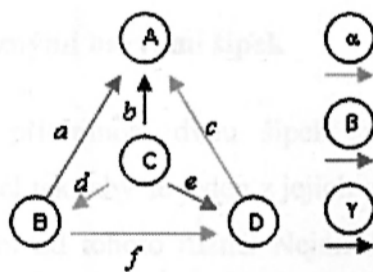
Při počátečním objevování prostředí a tvorbě úloh jsem zjistila, že úloha je náročnější tehdy, pokud obsahuje méně barev šipek. Je snadné vytvořit úlohu, ve které bude stejný počet čísel jako barev šipek, stejně snadné je pak takovou úlohu vyřešit. Mnohem náročnější je zvolit čísla do pavučiny tak, aby byla propojena pomocí minimálního počtu šipek a zároveň se čísla příliš neopakovala. Po důkladném zkoumání a tvoření úloh jsem došla k závěru, že nejmenšího počtu šipek v pavučinách dosáhnu, pokud zvolím čísla po sobě jdoucí nebo čísla, jejichž rozestupy jsou vždy stejné. Obecně jsou zmíněná čísla po sobě jdoucími členy aritmetické posloupnosti.

Takto tvořené úlohy mají komplexní charakter, který je dán propojeností všech čísel šípkami. Nespornou výhodou těchto úloh je pak jejich výukové využití pro žáky, kteří si musí více uvědomovat vztahy mezi čísly, šípkami a jejich hodnotami. Úlohy tak nemají pouze charakter doplňování čísel na základě početních operací sčítání a odčítání, ale skrývají v sobě náročnější matematické úkony, jakými jsou násobení, dělení, kombinatorika, pravděpodobnost, řešení Diofantovských rovnic a další.

### 1.3 Pyramidové pavučiny

#### 1.3.1 Charakteristika pyramidových pavučin o 4 číslech a 6 šípkách

Typ pavučin charakterizovaný 4 čísly a 6 šípkami propojujícími navzájem všechna čísla je základem této práce, jelikož právě tento typ byl experimentován se žáky 1. stupně. Pyramidovou pavučinou chápeme takovou úlohu, jejíž 4 čísla ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ) slouží jako vrcholy čtyřstěnu, přičemž jeho hrany jsou nahrazeny šípkami ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$ ) směřujícími od menšího k většímu číslu. Hodnoty šipek ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) jsou dány vztahy  $\alpha = A - D$ ;  $\alpha = B - C$ ;  $\alpha = D - B$ ;  $\beta = A - B$ ;  $\beta = D - C$ ;  $\gamma = A - C$  a zastoupeny barvami (viz obr.18). U všech typů pyramidových pavučin platí, že  $\alpha$  představuje vždy nejnížší hodnotu šípky, nejvyšší hodnotu šípky pak představují  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$ ,  $\zeta$ , podle toho, kolik šipek různých barev úloha obsahuje.



Obr. 18: Pyramidová pavučina

V pavučině platí, že každé číslo je propojeno s každým z ostatních čísel, z čehož vyplývá, že pokud úmyslně nezavedeme možnost šípky s nulovou hodnotou, musí být všechna čísla navzájem různá. Minimální počet barev šipek v pavučině je 3 (vyloučíme-li šípku s nulovou hodnotou), maximální počet je 6.

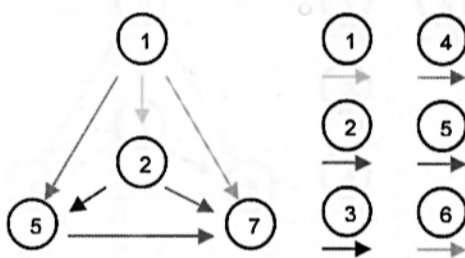
### 1.3.2 Klasifikace pyramidových pavučin

V rámci předchozího vymezení pavučin pyramidového typu lze úlohy dělit do skupin podle počtu barev šipek, vynechaného parametru a náročnosti.

#### 1.3.2.1 Počet barev šipek

- **Pavučina s právě 6 různými barvami šipek**

Každá šipka v pavučině má jinou barvu. Tvorba takových úloh má nekonečně mnoho možností, protože mohou zvolit jakákoliv 4 čísla, jejichž vzájemné rozestupy budou různé a rozstup nejnižšího a nejvyššího čísla bude větší nebo roven 6. Jako příklad uvedu čísla 1, 2, 5, 7: rozstup nejnižšího a nejvyššího čísla je 6, vzájemné rozestupy čísel jsou 1, 2, 3, 4, 5, 6. Velikosti rozstupů určují hodnoty šesti šipek pavučiny.

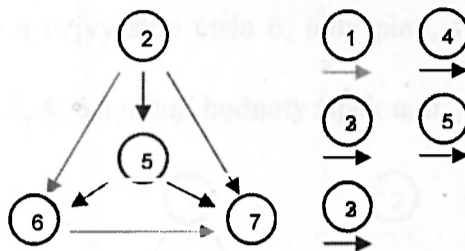


Obr. 19: Pyramidová pavučina se 6 barvami šipek

- **Pavučina s právě 5 různými barvami šipek**

Tyto úlohy vyžadují přítomnost dvou šipek stejné barvy. Jejich tvorba je podmíněna určením čísel tak, aby se jeden z jejich vzájemných rozstupů opakoval a ostatní byly navzájem od tohoto různé. Nejnižší možný rozstup mezi číslem nejnižším a nejvyšším je 5. Příkladem mohou být čísla 2, 5, 6, 7, která mezi sebou mají vzájemné rozestupy 1, 2, 3, 4, 5.

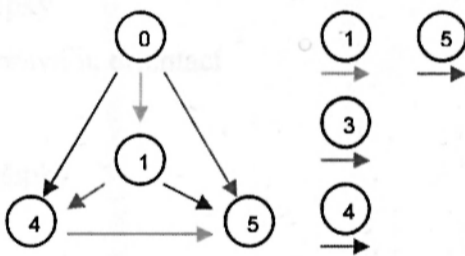




Obr. 20: Pyramidová pavučina s právě 5 různými barvami šipek

○ **Pavučina s právě 4 různými barvami šipek**

V těchto úlohách jsou dvě barvy zastoupeny každá dvěma šípkami. Tvorba úloh s právě 4 různými barvami šipek je založena na výběru takových 4 čísel, která budou vázána pouze 4 různými vzájemnými rozestupy, tzn. 2 vzájemné rozestupy musí být shodné, ostatní různé. I zde platí, že nejmenší možný rozestup čísla nejmenšího a nejvyššího je roven počtu barev šipek v pavučině, tedy 4. Tvrzení lze doložit na číslech 0, 1, 4, 5, které mají vzájemné rozestupy 1, 3, 4, 5.



Obr. 21: Pyramidová pavučina s právě 4 různými barvami šipek

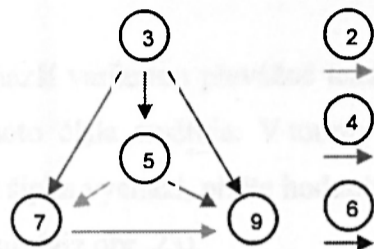
○ **Pavučina s právě 3 různými barvami šipek**

První barva je zastoupena třemi šípkami, druhá je zastoupena dvěma šípkami a třetí pouze jednou šípkou. Jedná se o nejnáročnější typ úloh pro žáky i pro učitele, kteří je tvoří. Jejich tvorba je omezena nároky na provázanost všech čtyř čísel navzájem. Musím volit taková čísla, která budou mít 3 různé vzájemné rozestupy. Znamená to tedy, že čísla musí být po sobě jdoucími členy aritmetické posloupnosti  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , pro které platí  $a_{n+1} = a_n + d$ , kde  $d$  je pevně dané číslo, které v případě našich úloh je číslo přirozené (větší než nula).

U tohoto typu je rozestup nejmenšího a nejvyššího čísla větší nebo roven 3, a navíc je omezen podmínkou dělitelnosti 3. Příkladem jsou čísla 3, 5, 7, 9, u nichž je



rozestup nejnižšího a nejvyššího čísla 6, tedy platí, že  $6 > 3$ ;  $\frac{6}{3} = 2$ . Vzájemné rozestupy čísel jsou 2, 4, 6 a určují hodnoty šipek  $\alpha, \beta, \gamma$ .



Obr. 22: Pyramidová pavučina s právě 3 různými barvami šipek

### 1.3.2.2 Vynechaný parametr

- chybějící číslo
- chybějící hodnota šipky
- chybějící šipka se správnou orientací
- kombinované
  - číslo + hodnota šipky
  - číslo + šipka
  - hodnota šipky + šipka
  - číslo + hodnota šipky + šipka

### 1.3.2.3 Náročnost úlohy

Toto dělení vyvstalo na základě zkušeností z experimentů se žáky 1. – 4. tříd. Úlohy jsou rozděleny do 4 kategorií:

#### KATEGORIE 1

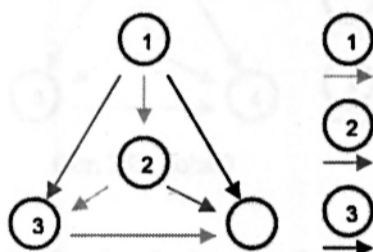
Jedná se o úlohy zaměřené na doplnění jednoho až tří chybějících čísel a úlohy vyžadující doplnění hodnot šipek. Od řešitele vyžadují schopnost využít kódu, který představuje legenda určující hodnoty šipek. Z hlediska matematických operací je k vyřešení úlohy

zapotřebí sčítání a odčítání. V rámci této kategorie lze rozlišit obtížnost doplnění čísla oproti doplnění hodnoty šipky.

○ **Doplnění čísla**

Doplnění čísla je nejsnazší variantou převážně tehdy, pokud existuje šipka známé hodnoty, která do tohoto čísla směřuje. V tomto případě žák postupuje tak, že k číslu, z něhož známá šipka vychází, přičte hodnotu šipky a dostane hledané číslo, do kterého šipka směřuje (viz obr. 23).

Úloha 7:

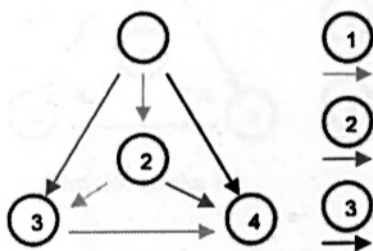


Obr. 23: Úloha 7

Řešení:  $D = A + \gamma$ , pak  $D = 1 + 3 = 4$ ;  $D = B + \alpha$ , pak  $D = 3 + 1 = 4$ ;  $D = C + \beta$ , pak  $D = 2 + 2 = 4$ .

Pokud však z neznámého čísla všechny šipky pouze vycházejí, stává se úloha pro žáka náročnější, musí odčítat. Hledané číslo vypočítá tak, že odečte hodnotu šipky od čísla, do kterého šipka směřuje. (viz obr. 24)

Úloha 8:



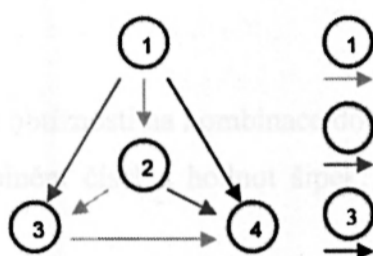
Obr. 24: Úloha 8

Řešení:  $A = D - \gamma$ , pak  $A = 4 - 3 = 1$ ;  $A = B - \beta$ , pak  $A = 3 - 2 = 1$ ;  $A = C - \alpha$ , pak  $A = 2 - 1 = 1$ .

### Doplnění hodnoty šipky

Doplnit hodnotu šipky znamená pro žáka odečíst čísla, mezi kterými se šipka nachází. Platí zde, že pokud  $A < B$ , pak odčítáme  $B - A$  (viz obr. 25), a naopak. Šipka zde odkrývá svou antisignální povahu, protože ač vždy přičítá, pro výpočet její hodnoty je nutné odčítat.

#### Úloha 9:



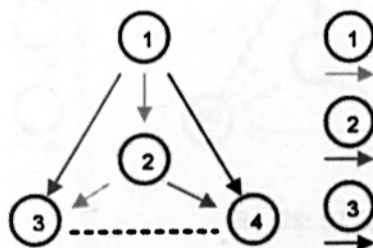
Obr. 25: Úloha 9

**Řešení:**  $\beta = B - A$ , pak  $\beta = 3 - 1 = 2$ ;  $\beta = D - C$ , pak  $\beta = 4 - 2 = 2$ .

### KATEGORIE 2

Tato kategorie obsahuje úlohy zaměřené na dokreslení šipek. Doplnění šipky se ukazuje být nejnáročnějším úkonem, jelikož šipka v sobě skrývá 2 fenomény – hodnotu vyjádřenou barvou a orientací. Orientace šipky je dána tak, že pokud  $A < B$ , pak šipka směřuje od  $A$  k  $B$ , a naopak.

#### Úloha 10:



Obr. 26: Úloha 10

**Řešení:**  $D - B = 4 - 3 = 1$ , hodnotu  $\alpha = 1$  má zelená šipka, na místo  $f$  tedy doplním zelenou šipku orientovanou k  $D$ .

### KATEGORIE 3

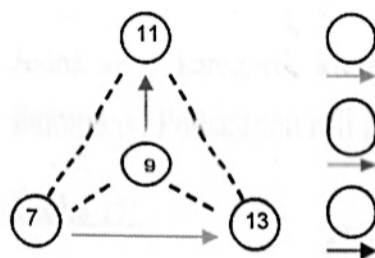
Tuto kategorii zastupují úlohy kombinující různé chybějící parametry. Vynecháním různých druhů parametrů zvyšujeme náročnost úlohy. Žák je nucen propojovat jednotlivé fenomény a hledat jejich vztahy. Tím dochází k lepšímu uvědomění si pavučiny jako celku, který má určitá pravidla. U těchto úloh se často setkáváme s řešitelskou strategií pokus-omyl, jejíž podstatou může být nedostatečný vhled do úlohy a vztahů jednotlivých parametrů.

Kategorii lze vnitřně členit dle obtížnosti na kombinace doplnění čísel a šipek nebo šipek a hodnot šipek; kombinace doplnění čísel a hodnot šipek; kombinace doplnění všech tří parametrů.

- **Kombinace doplnění čísel a šipek nebo šipek a hodnot šipek**

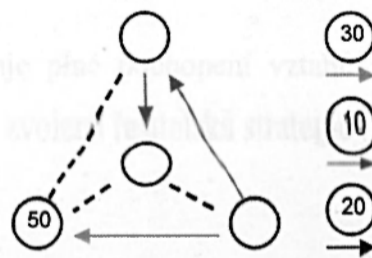
Tato kategorie zahrnuje nejsnazší typy úloh obsahujících kombinaci jevů. Vyřešení úlohy je otázkou vyhledání výchozího bodu, od kterého lze pak úlohu snadno dořešit pomocí sčítání a odčítání. Pro ilustraci slouží úlohy 11 a 12 (viz obr. 27, 28).

Úloha 11:



Obr. 27: Úloha 11

Úloha 12:

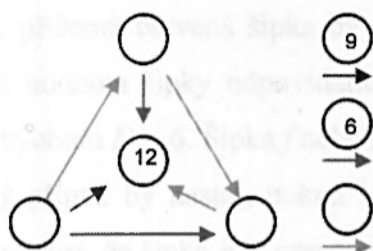


Obr. 28: Úloha 12

- **Kombinace doplnění čísel a hodnot šipek**

Řešení snazších úloh této kategorie (viz obr. 29) je založeno na vyhledání výchozího bodu, stejně jako úlohy kategorie předchozí.

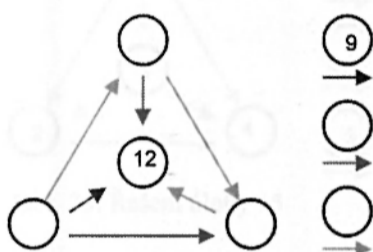
Úloha 13:



Obr. 29: Úloha 13

U obtížnějších úloh této kategorie (viz obr. 30) se poprvé objevuje princip sčítání šipek, který můžeme demonstrovat na úloze 14.

Úloha 14:



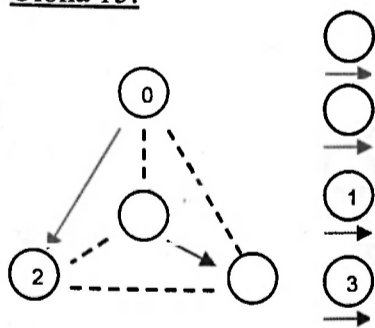
Obr. 30: Úloha 14

Řešení: Po doplnění čísla  $B = 3$  určí hodnotu oranžové šipky na základě principu sčítání šipek popsaného v kapitole 1.1.3.

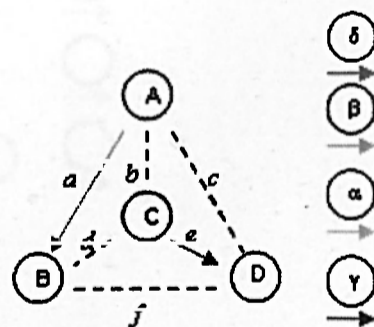
o **Kombinace doplnění všech tří parametrů (číslo, šipka, hodnota šipky)**

Jedná se o kategorii, která vyžaduje plné pochopení vztahů mezi jednotlivými fenomény. Podstatnou roli zde hraje zvolená řešitelská strategie (viz úloha 15).

Úloha 15:



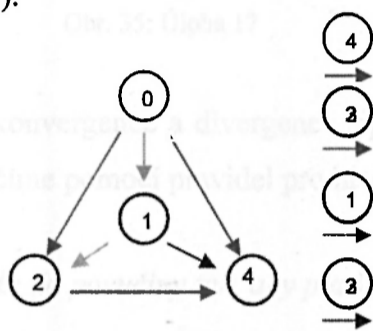
Obr. 31: Úloha 15



Obr. 32: Obecné pojmenování pavučiny

Řešení: Doplním hodnotu zelené šipky. Strategií pokus-omyl určíme barvu šipky  $b$  (viz obr. 32). Vyloučím přítomnost záporných čísel (pozn. s využitím záporných čísel má úloha více řešení). Šipka  $b$  nemůže být zelená, protože s orientací k  $C$

bychom dostali  $C = 2$ , přičemž červená šipka by musela mít hodnotu 0, pak by nebyla v legendě volná hodnota šipky odpovídající  $c = 2$ . Kdyby měla šipka  $b$  fialovou barvu, dostali bychom  $D = 6$ . Šipka  $f$  nebo  $c$  by potřebovala hodnotu, která není k dispozici. Stejný případ by nastal, pokud by šipka  $b$  byla červené barvy. Zbývá tak jen jediná možnost, že šipka  $b$  je oranžová. Nyní můžu doplnit čísla  $C = 1$ ,  $D = 4$ , šipky oranžové  $b$ ,  $d$ , zelenou  $f$ , červenou  $c$  i zbývající hodnotu červené šipky  $\delta = 4$  (viz obr. 33).



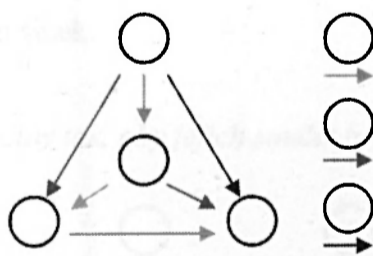
Obr. 33: Řešení úlohy 15

#### KATEGORIE 4

Tato kategorie představuje jiný model zadání úloh. Pavučina je zde doprovázena slovním zadáním, které udává např. součet všech čísel v pavučině, součet hodnot šipek, seznam čísel, která mají být doplněna, nejnižší a nejvyšší použité číslo apod.

Výhodou úloh se slovním zadáním je často nejednoznačnost jejich řešení.

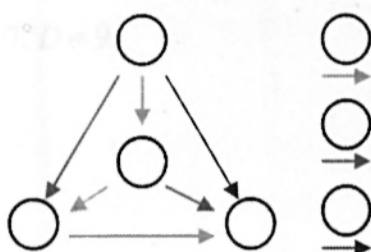
**Úloha 16:** *Doplň do pavučiny čísla 7, 12, 2, 17 a urči hodnoty šipek.*



Obr. 34: Úloha 16

**Řešení:** Čísla do pavučiny doplním podle pravidla hledání jednobarevné cesty; na počátku cesty oranžových šipek ( $A$ ) bude nejnižší číslo, na konci ( $D$ ) číslo nejvyšší. Dopočítám hodnoty šipek. Jinou možností je využití pravidla konvergence a divergence, které odkryjí polohu nejnižšího a nejvyššího čísla.

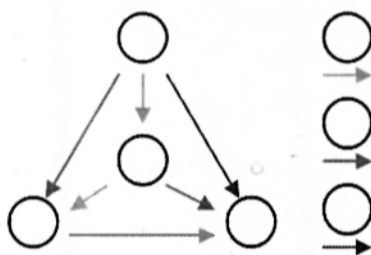
**Úloha 17:** *Doplň čísla do pavučiny tak, aby nejmenší číslo bylo 4 a největší 16.*



Obr. 35: Úloha 17

**Řešení:** Na základě principů konvergence a divergence šipek doplníme  $A = 4$  a  $D = 16$ . Zbylá čísla a hodnoty šipek určíme pomocí pravidel pro hledání jednobarevné cesty.

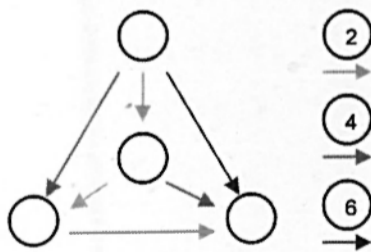
**Úloha 18:** *Doplň libovolná čísla do pavučiny tak, aby platilo, že součet hodnot šipek je 6.*



Obr. 36: Úloha 18

**Řešení:** V dané pavučině je pouze jedno možné řešení v oboru přirozených čísel. Hodnoty šipek musí být 1, 2, 3. Podle počtu a rozmístění šipek určím, že oranžová šipka má hodnotu  $\alpha = 1$ , zelená  $\beta = 2$  a fialová  $\gamma = 3$ . Čísla do pavučiny mohou zvolit libovolná, musí však odpovídat orientaci a hodnotám šipek.

**Úloha 19:** *Doplň čísla do pavučiny tak, aby jejich součet byl 24.*



Obr. 37: Úloha 19



**Řešení:** Musí platit rovnice  $A + B + C + D = 24$ , pomocí hodnot šipek mohou čísla  $B, C, D$  vyjádřit pomocí čísla  $A$ , potom má rovnice podobu  $A + (A + 2) + (A + 4) + (A + 6) = 24$ ;  $4A = 12$ ;  $A = 3$ ; pak  $B = 5, C = 7, D = 9$ .



## 2 Didaktické aplikace aneb v čem spočívá matematický přínos pavučin pro žáky

Z didaktického hlediska se budeme u pavučinových úloh zajímat o to, co a jakým způsobem u žáka rozvíjejí. Bohatost úloh různých typů, které lze v rámci prostředí pavučin vytvářet, poskytuje řadu příležitostí k seznámení se s určitými aritmetickými jevy, k jejich výuce a procvičení.

Pavučinové úlohy jsou zaměřeny na vztahy mezi čísly, které jsou předmětem zkoumání algebry. Můžeme proto říct, že pomocí pavučinových úloh se u žáků rodí algebraické myšlení. Na základě tohoto tvrzení lze pavučiny zařadit mezi protoalgebraické situace. Protoalgebraickou situací chápeme „strukturu, která obsahuje prvky a vztahy mezi nimi, a umožňuje tvorbu široké palety úloh, v nichž je potřebné k několika daným prvkům vstupu najít prvky neznámé.“ (Hejný, 2007)

V počáteční fázi se u pavučin pohybujeme v oblasti přirozených čísel, v pokročilejších fázích lze uvažovat i v rámci oboru čísel celých, racionálních a reálných. Převážné využití přirozených čísel v pavučinách má svůj smysl, jelikož nejlépe odkrývá vztahy mezi jednotlivými čísly žákům prvního stupně.

Nejjednodušší úlohy navádí žáka k porovnávání, sčítání a odčítání čísel. V náročnějších úlohách se objevuje princip sčítání šipek a hledání jednobarevné cesty. Takové úlohy v sobě již skrývají nutnost násobení a dělení, zároveň podněcují vnímavost vztahů mezi šípkami, které lze vyjádřit rovnicemi.

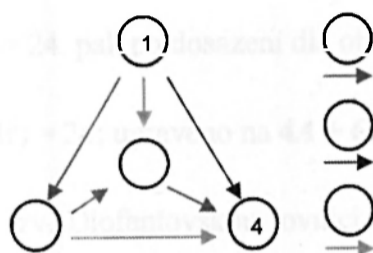
U úloh pyramidového typu s právě 3 různými barvami šipek lze poukázat na aritmetickou posloupnost čísel. Mezi nejnáročnější pavučinové úlohy se řadí úlohy se slovním zadáním. Ty vyžadují od žáka propojení všech principů, které se v pavučinách objevují. Žáci se řešením takových úloh seznamují se základy pravděpodobnosti a kombinatoriky.

## 2.1 Propojení pavučin na oblasti aritmetiky a algebry

### 2.1 Pavučiny a rovnice

Vztahy mezi šípkami v pavučině lze zapsat pomocí rovnic, které popisují princip sčítání šipek.

Úloha 20:



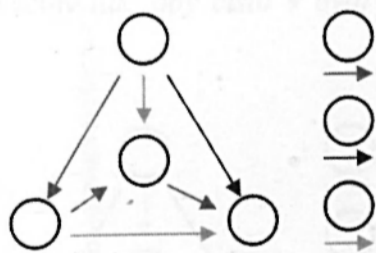
Obr. 38: Úloha 20

Obecně lze v pavučině na obr. 38 popsat následující 3 vztahy rovnosti:  $3z = 1f$ ;  $1o + 1z = 1f$ ;  $2z = 1o$ , kde  $z$  je zelená šipka,  $f$  je fialová šipka a  $o$  je oranžová šipka.

V řešení této pavučinové úlohy nám pak pomůže první rovnost:  $3z = 1f$ . Po dosazení  $f = 3$  dostáváme  $3z = 3$ , pak  $z = 1$ .

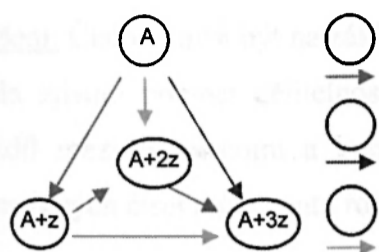
Zvláštní typ rovnic představují Diofantovské rovnice. Následující pavučina se slovním zadáním (viz obr. 39) nastíní jejich využití v oblasti řešení pavučinových úloh.

Úloha 21: *Doplňte čísla do pavučiny tak, aby jejich součet byl 24.*

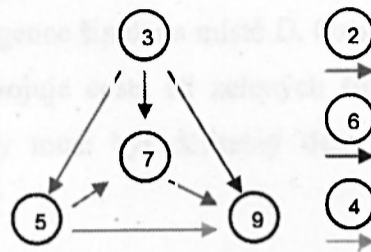


Obr. 39: Úloha 21

Řešení: Čísla v pavučině lze vyjádřit pomocí neznámých  $A$  (zastupující číslo  $A$ ) a  $z$  (zastupující hodnotu zelené šipky). Číslo  $B$  dostanu tak, že k  $A$  přičtu hodnotu zelené šipky. Platí, že  $B = A + z$ , pak  $C = A + 2z$ ;  $D = A + 3z$  (viz obr. 40).



Obr. 40: Obecné vyjádření čísel v pavučině pomocí  $A, z$



Obr. 41: Řešení úlohy 21

Jestliže součet  $A + B + C + D = 24$ , pak po dosazení dle obr. 39 dostanu:

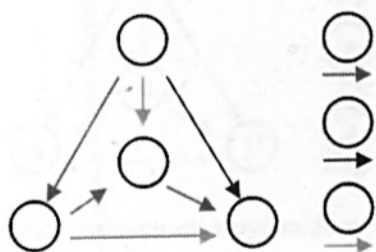
$$A + (A + z) + (A + 2z) + (A + 3z) = 24; \text{ upraveno na } 4A + 6z = 24.$$

Mám rovnici o 2 neznámých, tzv. Diofantovskou rovnici. Řešení takové rovnice spočívá v dosazování za neznámé a hledání takové kombinace čísel  $A$  a  $z$ , aby platila daná rovnost. Diofantovské rovnice mají zpravidla více řešení, jejich počet závisí na číselném oboru, ve kterém se pohybujeme. Tato úloha má v oboru přirozených čísel pouze jedno řešení (viz obr. 41).

## 2.2 Pavučiny a dělitelnost

Dělitelnost se v pavučinách uplatňuje u principu sčítání šipek a hledání jednobarevné cesty. Obecně v pavučinách jakéhokoli typu platí, že součet hodnot šipek vytvářejících jednobarevnou cestu musí být dělitelný číslem určujícím počet jednobarevných šipek. Toto pravidlo lze využít především u úloh se slovním zadáním (viz obr. 42).

**Úloha 22:** *Doplň čísla do pavučiny tak, aby číslo 9 bylo nejvyšší doplněné číslo. Najdi všechna řešení.*



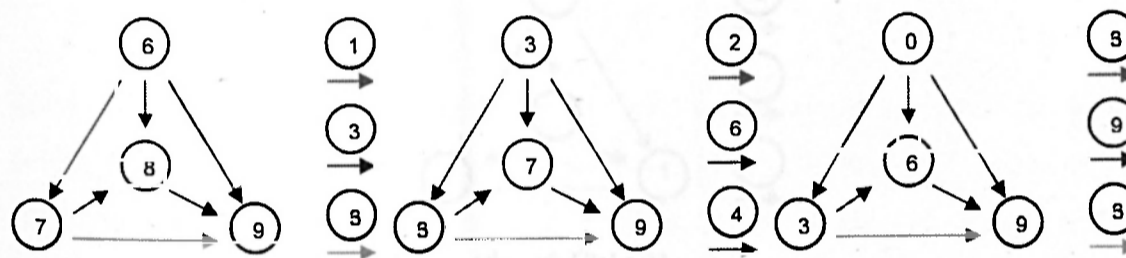
Obr. 42: Úloha 22

**Řešení:** Číslo 9 musí být na základě principu konvergence šipek na místě  $D$ . Ostatní možná čísla zjistím pomocí dělitelnosti. Všechna čísla spojuje cesta tří zelených šipek, proto rozdíl mezi počátečním a koncovým číslem cesty musí být dělitelný třemi. V oboru přirozených čísel může tento rozdíl být 3, 6 nebo 9.

Pokud bude rozdíl 3, pak je hodnota zelené šipky  $\alpha = \frac{3}{3} = 1$ . Pokud rozdíl bude 6, pak je

hodnota zelené šipky  $\alpha = \frac{6}{3} = 2$ . Pokud bude rozdíl 9, pak je hodnota zelené šipky

$\alpha = \frac{9}{3} = 3$ . (viz obr. 43)

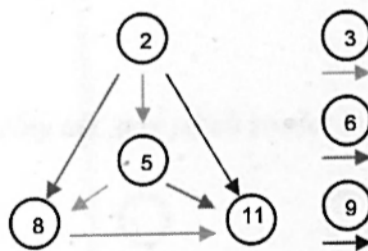


Obr. 43: Trojí řešení úlohy 22

### 2.3 Pavučiny a aritmetická posloupnost

U úloh pyramidového typu s právě 3 různými barvami šipek lze pracovat s aritmetickou posloupností čísel. Prvním členem této posloupnosti je číslo, ze kterého všechny šipky vycházejí. Diferenci pak určuje hodnota šipky, která je v pavučině zastoupena třikrát (viz obr. 44).

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 5 \\ a_3 &= 8 \\ a_4 &= 11 \\ d &= 3 \end{aligned}$$



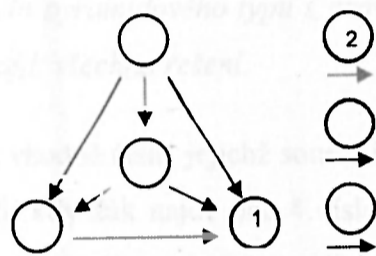
Obr. 44: Znázornění členů aritmetické posloupnosti v pyramidové pavučině s právě 3 barvami šipek

Obecně vyjádřeno  $a_{n+1} = a_n + d$ , pak např.:  $a_3 = a_2 + 3$ , dosazeno konkrétně  $8 = 5 + 3$ .

Vzorce pro součet členů aritmetické posloupnosti by se dalo využít u pavučin se slovním zadáním určujícím součet čísel v pavučině. Podmínkou by bylo zadání difference, tedy šipky nejvyšší hodnoty. Úlohu 23 uvádím jen pro zajímavost, pro účely prvního stupně součtový vzorec nezavádíme.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n[a_1 + a_1 + (n-1)d]}{2} = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d$$

**Úloha 23:** Součet čísel v pavučině je 16 a hodnota oranžové šipky je 2. Doplňte pavučinu.



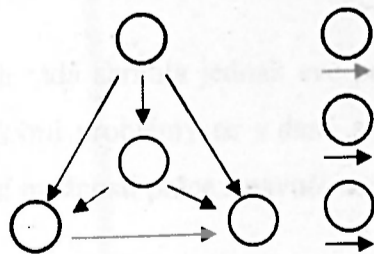
Obr. 45: Úloha 23

**Řešení:** Dosazeno do vzorce:  $16 = 4a_1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4-1) \cdot 2$ , pak  $a_1 = 1$ .

## 2.4 Pavučiny a pravděpodobnost

Pravděpodobnost vychází z poměru počtu všech jevů náhodného pokusu ku počtu jevů příznivých dané situaci. V souvislosti s pavučinami se žák nepřímo setkává se základy pravděpodobnosti například u pavučin se slovním zadáním určujícím součet čísel v pavučině.

**Úloha 24:** Doplň čísla do pavučiny tak, aby jejich součet byl 20.



Obr. 46: Úloha 24

**Řešení:** Žák může postupovat tak, že číslo 20 rozdělí na 4 sčítance a vypíše všechny možnosti sčítanců. Poté hledá, kolik a které z daných možností jsou příznivé, tedy vyhovují řešení pavučiny.

## 2.5 Pavučiny a kombinatorika

Se základy kombinatoriky se žák může seznámit také u pavučin se slovním zadáním, což lze ilustrovat na úloze 25.

**Úloha 25:** *Kolik existuje pavučin pyramidového typu s právě 3 různými barvami šipek se součtem čísel 24? Najdi všechna řešení.*

**Řešení:** Nejprve musí žák najít vhodná čísla, jejichž součet bude roven 24 a které je možné doplnit do pavučiny. Ve chvíli, kdy žák najde ona 4 čísla, hledá jejich umístění. Pokud musí najít všechna možná řešení, pravděpodobně začne čísla umisťovat různými způsoby a podle čísel doplňovat šipky. Získá tak seznam 24 pavučin. Bude-li řešit obdobné úlohy s jiným součtem, zjistí, že 4 čísla může do 4 políček umístit vždy právě 24 způsoby.

Tyto jeho izolované modely se pak stanou modelem generickým, který má obecnější povahu. (Hejný, Novotná a Stehlíková, 2004) Z hlediska kombinatoriky se jedná o permutaci, kdy platí  $P(n) = n!$ . Počet možností, jak umístit 4 čísla do pyramidové pavučiny odpovídá  $P(4) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ .

K úloze je nutno dodat, že všech 24 pavučin v daném seznamu je z hlediska prostorového vidění pavučiny jako čtyřstěnu stejných.

## 2.2 Realizace

V první části této kapitoly bych ráda shrnula jednak své poznatky o tom, jak je vhodné žákům předkládat úlohy a s jakými problémy se v dané situaci můžeme setkat, v druhé části zmíním některé alternativní možnosti práce s pavučinami.



Jak vhodně seznámit žáky s novým prostředím, aniž bych jim přímo vysvětlila pravidla, která zde platí? Touto otázkou jsem se zabývala při přípravě prvního experimentu. Nyní, po sérii experimentů, kdy jsem žáky seznamovala s pavučinami na základě vlastního zorientování se a hledání pravidel ve vzorové úloze, mohu tento způsob potvrdit jako vhodný. Vychází z konstruktivistického pojetí výuky, kdy učitel předkládá žákům problémové úlohy, které podněcují jejich zvědavost a motivují je k vlastnímu objevování světa matematiky. (Hejný a Michalcová, 2001) Žák sám ve vzorové úloze objevuje pravidla pavučiny, což jej samotného motivuje k další práci s pavučinami.

Úskalí takového seznámení s pavučinami však ukázaly experimenty se žáky nižších ročníků, konkrétně se žáky 1. tříd. Zde se tento způsob neosvědčil, jelikož pavučina je příliš složitý komplex jevů na to, aby se v ní žák 1. třídy zorientoval. Vystala zde tedy potřeba jiného způsobu seznámení žáka s pavučinami, který by nebyl pro začátek tak složitý.

Jednou možností je pavučinu zjednodušit, použít méně čísel a šipek. Efektivnějším způsobem je však postupovat se žáky na základě jejich zkušeností. Žáci prvního stupně mají bohaté zkušenosti s úlohami typu hada (postupně přičítáme a odčítáme čísla tak, jak jdou za sebou), kterých lze pro seznámení s pavučinami dobře využít. Hned zpočátku je nutné používat barevné šipky, které jsou zprvu doplněny jejich hodnotou (tzn. nad šipkou je např. +2). Nepracujeme zatím s legendou. Postupně popis u šipky vynecháváme a vedeme žáka k soustředění na barvu, která nese informaci o tom, kolik přičítáme. V této chvíli je vhodné postupně přecházet k práci s legendou, která určuje barvě šipky její hodnotu. Dále je třeba navést žáka na vnímání orientace šipky, použijeme tedy šipku, jejíž orientace je opačná. Vyvrcholením je pak vzájemné propojování čísel šipkami, které kreslí sám žák.

Předchází-li řešení úloh dobré seznámení se s prostředím a pochopení základních pravidel prostředí, je žák připraven pro řešení úloh gradující obtížnosti. Postupně tak poznává nové principy a možnosti pavučin, čímž rozvíjí své matematické myšlení. V této fázi by měl učitel / experimentátor být pouze tím, kdo předkládá z hlediska náročnosti vhodné úlohy, které žáka motivují k objevování dosud neznámých pravidel. Vhodnou volbou úloh lze předejít potřebě nápovědy ze strany žáka.

Pavučiny poskytují široký prostor pro využití tvořivých schopností učitelů. Mezi alternativní využití pavučin můžeme považovat pavučiny vyrobené z provázků, které žáci mohou upravovat dle potřeby. Podobně mohou být čísla a šipky vystříhány z barevných kartonů; žáci pak jejich přesouváním řeší úlohy, zároveň však rozvíjí své motorické schopnosti. Využit lze i počítačů s připravenými pavučinovými schématy. Náročnější na přípravu by byl jednoduchý počítačový program, který by kontroloval žákovo řešení.

Pavučiny nabízí i možnost dramatizace. Žáci představují čísla, pohybují se po pavučině a sledují, jak se číslo mění. Tento způsob práce s pavučinami lze dobře kombinovat s prostředím krokování, kdy šipky představují počet kroků, který musí žák udělat.

Číslo	Operace	Operátor	Operand	Operace	Operand	Operace	Operand
1	Kvadratura	Perla	HI	1	21. 11. 2007	Chlapova Praha F25	Kaskáda 1.1
2	Kvadratura	Perla	HI	2	21. 11. 2007	Chlapova Praha F25	Kaskáda 1.2
3	Kvadratura	Perla	HI	3	21. 11. 2007	Chlapova Praha F25	Kaskáda 1.3
4	Kvadratura	Perla	HI	4	21. 11. 2007	Chlapova Praha F25	Kaskáda 1.4
5	Kvadratura	Perla	HI	5	21. 11. 2007	Chlapova Praha F25	Kaskáda 1.5
6	Kvadratura	Perla	HI	6	21. 11. 2007	Chlapova Praha F25	Kaskáda 1.6
7	Kvadratura	Perla	HI	7	21. 11. 2007	Chlapova Praha F25	Kaskáda 1.7
8	Kvadratura	Perla	HI	8	21. 11. 2007	Chlapova Praha F25	Kaskáda 1.8
9	Kvadratura	Perla	HI	9	21. 11. 2007	Chlapova Praha F25	Kaskáda 1.9
10	Kvadratura	Perla	HI	10	21. 11. 2007	Chlapova Praha F25	Kaskáda 1.10
11	Kvadratura	Perla	HI	11	21. 11. 2007	Chlapova Praha F25	Kaskáda 1.11
12	Kvadratura	Perla	HI	12	21. 11. 2007	Chlapova Praha F25	Kaskáda 1.12



### 3 Experimenty

#### 3.1 Přehled experimentů

Tab. 1: Přehled provedených experimentů

Číslo exp.	Typ experimentu	Žák	Experimentátor	Třída	Datum	Místo	Řešené úlohy
1	Kvalitativní	Míša	HF <sup>1</sup>	4.	14. 11. 2007	FZŠ Chlupova, Praha	Kaskáda č. 1
2	Kvalitativní	Kristýnka	PH <sup>2</sup>	4.	14. 11. 2007	FZS Chlupova, Praha	Kaskáda č. 2
3	Kvalitativní	Pěťa	HF	1.	21. 11. 2007	FZS Chlupova, Praha	Kaskáda č. 3
4	Kvalitativní	Marek	PH	1.	21. 11. 2007	FZS Chlupova, Praha	Kaskáda č. 4
5	Kvalitativní	Terežka	PH	2.	28. 11. 2007	FZS Chlupova, Praha	Kaskáda č. 5
6	Kvalitativní	Tobiáš	PH	3.	12. 12. 2007	FZS Chlupova, Praha	Kaskáda č. 6
7	Kvalitativní	Štěpán	HF	3.	12. 12. 2007	FZS Chlupova, Praha	Kaskáda č. 7
8	Kvalitativní	Anička	PH	1.	22. 4. 2008	FZS Chlupova, Praha	Kaskáda č. 8
9	Kvalitativní	David	HF	3.	22. 4. 2008	FZS Chlupova, Praha	Kaskáda č. 9
10	Kvantitativní	celá třída (18 žáků)	HF	3.	6. 5. 2008	FZS Chlupova, Praha	Kaskáda č. 10
11	Kvantitativní	celá třída (20 žáků)	PH	1.	30. 5. 2008	FZS Slovenská, Praha	Kaskáda č. 11

<sup>1</sup> HF = Hana Fialová

<sup>2</sup> PH = Pavlína Harcubová

## 3.2 Rozbor experimentů

Tato kapitola obsahuje rozbor zajímavých jevů, které se objevily v experimentech. Všechny níže zmíněné jevy jsou popisovány na základě vybraných fragmentů z experimentů, které poukazují na daný jev a pomáhají objasnit jeho příčiny.

### 3.2.1 Záměna šipek za čáry

Záměna šipek za čáry se v experimentech objevila několikrát. V případě žáků Míši a Tobiáše, které dokládají fragmenty 1, 2, 3, lze hovořit pouze o nepřesném pojmenování grafického znaku, tedy šipky, nazývaného čárou. Proč někteří řešitelé nazývají šipky čárami? Slovo šipka i její grafická podoba jsou věci, které žáci dobře znají, proto lze zpochybnit, že se jedná o přehnutí. Fakt, že někteří šipku nazývají čárou může být způsoben tím, že v pavučině se zprvu více soustředí na hodnotu šipky reprezentovanou barvou než na její orientaci. Barva šipky je pro ně dominantnější znak. Směr šipky je fenomén, který, jak vyšlo najevo z experimentů, není pro žáky tak důležitý. Někteří jej automaticky vnímají a zakreslují správně, jiní jej nepovažují za důležitý a nahrazují proto šipku čárou.

Fragment 3 ukazuje, že žák zmínil čáru, ale správně zakreslil do pavučiny šipku. Experiment číslo 7, který je zastoupen fragmenty 4 – 10, ukazuje hlubší pohled na záměnu šipek za čáry. Žák zde zaměňuje šipky za čáry vědomě. Z fragmentů 4 a 5 může jeho jednání působit trochu jako provokace, je však dáno jeho temperamentem.

Ve fragmentu 7 žák vysvětluje, že šipka jej omezuje; šipka může totiž jen přičítat, zatímco čára může i odčítat. Žák tedy vidí vztah tří čísel (např.  $A$ ,  $a$ ,  $B$ ) v obou směrech, tedy jako  $A + a = B$ , ale i jako  $B - a = A$ ; neuvědomuje si však, že pokud nakreslí mezi 2 čísla čáru, může dostat také další dva vztahy, a to  $A - a = B$  a  $B + a = A$ . Šipka narozdíl od čáry přesně určuje vztahy tří čísel; ve smyslu sčítání  $A + a = B$  a ve smyslu odčítání  $B - a = A$ .

Žákovo nepochopení významu orientace šipek jej dovede i k úvahám o možnosti doplnění záporných čísel, jak ukazuje fragment 8. Úvaha o možnosti záporných čísel se pak pravděpodobně stává základem pro pochopení významu orientace šipek, které žák projevuje ve fragmentu 9. Správně zde říká, že podle směru šipky sčítáme či odčítáme.

Jednotlivé fragmenty ukazují vývoj žákova pochopení významu orientace šipek, ke kterému je však „dotlačen“ experimentátorem. Fragment 10 se pak stává zadostiučiněním experimentátora, jelikož žák poprvé sám dokresluje čáru na šipku.

#### **Fragment 1: Exp 0107**

##### **PROTOKOL**

0:06:04 Ex1 Tady ti dám k dispozici barevné fixy, co se tady bude doplňovat?

0:06:12 M1 Bude se doplňovat zelená čára...eh...zelená šipka.

##### **EVIDENCE**

0:06:12 M1 ukazuje na e.

##### **KOMENTÁŘ**

M1 Míša hned vidí, že chybí zelená šipka. Nejprve se přeřekl a mluvil o tom, že chybí čára, nicméně se hned opravil.

#### **Fragment 2: Exp 0601**

##### **PROTOKOL**

0:00:37 Ex2 Já se tě zeptám, tys říkal jedna, dva a tři jsou čtyři.

0:00:38 T2 Ne, jedna, dva jsou tři a tady jsou ty šipky, ta zelená a oranžová, to je ta zelená, oranžová a fialová k té čtyřce a to se taky rovná tři, čtyři...

0:00:49 Ex3 Co se rovná čtyři? Tady ti nerozumím teďko.

0:00:51 T3 No, že jedna, dva, tři se rovná čtyři, právě že tady je...tady je ta...od jedničky je ta fialová čárka ke čtyřce, ta zelená a ta oranžová.

##### **EVIDENCE**

0:00:37 Ex2 ukazuje na A, C, B, D.

0:00:39 T2 ukazuje na A, C, B; d, a, e, f; c; rukou mávne nad celou pavučinou.

0:00:51 T3 ukazuje na A, C, B, D; A, c; C, e; B, f.

##### **KOMENTÁŘ**

T3 Hovoří o čárce místo o šipce. Pravděpodobně se jedná jen o špatné pojmenování, protože v předchozím vstupu hovořil o šípkách.

### **Fragment 3: Exp0608**

#### **PROTOKOL**

- 0:07:19 Ex3 Proč jsi myslel, že nemůže?  
0:07:20 T4 No protože jsem si neuvědomil, že tu je fialová čára.  
0:07:23 Ex4 Dobře, takže je to v pořádku?  
0:07:25 T5 Mhm.

#### **EVIDENCE**

- 0:07:20 T4 ukazuje na *f*.

#### **KOMENTÁŘ**

T4 Šipku nazývá čárou. U Tobiáše je zjevné, že si uvědomuje úlohu šipek a jejich orientace, proto záměnu šipky za čáru považují spíše za přefeknutí či použití jiného slova.

### **Fragment 4: Exp 0701**

#### **PROTOKOL**

- 0:00:13 Ex1 Podívej se tady na tuto úlohu a zkus se zamyslet nad tím, jak to tam funguje. Tato úloha je vyřešená, tu nemusíš řešit, ale spíš se podívej, co vůbec v té úloze je. A můžeš mi k tomu povídat, co tě k tomu napadá. Jestě nám řekni jméno, jak se jmenuješ?  
0:00:41 Š1 Štěpán. Že to vždycky přičtu tohle číslo, třeba tady přičtu k 1 jedničku a rovná se to 2.  
0:00:48 Ex2 Hm, takže myslíš, že už bys...  
0:00:50 Š2 Jedna... přičtu modrou čárou 3, takže je to 4.  
0:00:55 Ex3 Tak fajn.

#### **EVIDENCE**

- 0:00:33 Š1 Prohlíží úlohu, pak začne popisovat. Ukazuje na hodnoty šipek a na šipky v pavučině.  
0:00:50 Š2 ukazuje na *A*, *c*, *D*.

#### **KOMENTÁŘ**

Š1 Hned na první pohled pochopil, jak to v pavučině funguje – chápe význam šipek i jejich hodnot. Šipku nazval čárou, možná je to jen výraz jeho chování, kterým dává najevo, že je nad věcí.

### **Fragment 5: Exp 0704**

#### **PROTOKOL**

- 0:02:49 Ex3 Tak, já ti jenom ještě vrátím tu úlohu, co jsi předtím vypočítal, a podívej se na to, jestli je tam nějaký rozdíl, v tom, co ty jsi tam...
- 0:03:07 Š4 Že tyhle čísla se úplně obrátila.
- 0:03:10 Ex4 To jsi si všiml správně, já jsem myslela, ještě se podívej tady takhle na tohleto, jak to tam vlastně je. Ty jsi tam totiž dokresloval těmi barvenými fixami něco a co je dokresleno tady?
- 0:03:29 Š5 No čáry!
- 0:03:30 Ex5 Čáry?
- 0:03:31 Š6 No.
- 0:03:32 Ex6 Jo?
- 0:03:34 Š7 A šipky.
- 0:03:36 Ex7 No a ty jsi dokreslil co, čáry nebo šipky?
- 0:03:39 Š8 Čáry.
- 0:03:40 Ex8 A jsou tam čáry nebo šipky?
- 0:03:43 Š9 Tady jsou čáry a tady jsou šipky.
- 0:03:45 Ex9 Já to pořád nechápu, proč tady jsou čáry a tady šipky.
- 0:03:49 Š10 Já jsem je tam nenakreslil.
- 0:03:52 Ex10 A je to důležité, jestli je tam šipka nebo čára?
- 0:03:54 Š11 Ne.
- 0:03:55 Ex11 Myslíš, že to není důležité?
- 0:03:58 Š12 Ne.

#### **EVIDENCE**

- 0:02:49 Ex3 předkládá předchozí úlohu.
- 0:03:07 Š4 ukazuje na hodnoty šipek  $\alpha$  a  $\gamma$ .
- 0:03:10 Ex4 ukazuje na pavučinu a dokreslené čáry.
- 0:03:43 Š9 ukazuje na předchozí úlohu a současnou úlohu.

#### **KOMENTÁŘ**

Š4 Nechápe mou otázku, ale odpovídá správně.

Ex8 Špatně položená otázka.

Š11 Nevidí zatím rozdíl mezi šipkou a čarou – nepřipisuje směru šipky důležitost. Může to vyplývat z nedostatečné zkušenosti s úlohami. Mou chybou mohlo být, že jsem mu na



začátku dala pavučinu vyřešenou, možná kdybych mu dala rovnou úlohu, musel by se více soustředit na šipky a jejich směr.

#### **Fragment 6: Exp 0705**

##### **PROTOKOL**

- 0:05:15 Ex2 Tak, já bych se tě na něco zeptala. Jak jsi přišel tady na tu 6? Tys ji tam tak rychle doplnil, jak jsi na ni přišel?
- 0:05:24 Š5 No 2 + 4.
- 0:05:26 Ex3 A proč tam tu 4 přičítáš?
- 0:05:28 Š6 No, že je to zelená čára.
- 0:05:31 E4 Hm a proč by to třeba nemohlo být... když si to vezmeme tady od té 8, tak proč je tam ta 6?
- 0:05:41 Š7 No protože přičítáme 2.
- 0:05:44 Ex5 A proč tam nemůže být 10? To by bylo 8+2.
- 0:05:47 Š8 To by neodpovídalo tady tomu.
- 0:05:52 Ex6 Aha, dobře.

##### **EVIDENCE**

- 0:05:15 Ex2 ukazuje na B.
- 0:05:24 Š5 ukazuje na C a β.
- 0:05:31 Ex4 ukazuje na D a B.
- 0:05:47 Š8 ukazuje na C.

##### **KOMENTÁŘ**

Ex3 Chci ho navést na směr šipek.

Š8 Správně argumentuje ve vztahu k jiným číslům, ale směr šipek ho stále nezajímá.

#### **Fragment 7: Exp 0706**

##### **PROTOKOL**

- 0:07:38 Ex2 Tak, ty jsi to teda doplnil tak rychle, že já pořád nechápu, proč někde je ta šipka a někde je jen ta čára. Zkus mi to vysvětlit, jak to chápeš ty, proč tady mám z 3 mám šipku a dostanu 6 a tady mám 3 a mám jenom čáru a dostanu 9?
- 0:07:59 Š5 No protože přičítám červenou 6.
- 0:08:03 Ex3 A tady nepřičítám?

- 0:08:07 Š6 Tady taky.
- 0:08:09 Ex4 Takže je to jedno, jestli čára nebo šipka?
- 0:08:10 Š7 No.
- 0:08:11 Ex5 Hm.
- 0:08:14 Š8 To by mohlo být i mínus, když je šipka, tak nemůže být mínus.
- 0:08:16 Ex6 Aha, no a jak tedy jsi přišel na to, že tady to budeš přičítat a nebudeš to odčítat?
- 0:08:22 Š9 No tady  $6 + 3$  je, že jo,  $9$  a  $9 - 6$  je  $3$  a  $3 + 6$  je  $9$ .
- 0:08:35 Ex7 Hm, no a co myslíš, že je správně, když bych nakreslila tohle a tohle, myslíš, že je to to samé?
- 0:08:48 Š10 Co je tohle za číslo?
- 0:08:50 Ex8 3, promiň, já píšu..
- 0:09:05 Š11 No, je to úplně stejný.
- 0:09:07 Ex9 A když bych tam určila, že ta šipka má být 3? Je to to samé?
- 0:09:19 Š12 Ehm.

#### EVIDENCE

- 0:07:47 Ex2 ukazuje na  $e$  a  $f$ , kde je místo šipky čára.
- 0:08:03 Ex3 ukazuje na  $f$ .
- 0:08:07 Ex5 bere papír a chce přejít k další úloze, Štěpán ještě vysvětluje.
- 0:08:16 Ex6 ukazuje na  $f$ .
- 0:08:22 Š9 ukazuje na  $C$ ,  $a$ ,  $B$ , pak na  $B$ ,  $f$ ,  $D$ .
- 0:08:41 Ex7 píše 3 a kreslí šipku směřující k číslu 6 a pod to případ opačný: 6 a šipka směřující k 3.
- 0:08:48 Š10 ukazuje na číslo 3, které experimentátor právě napsal.
- 0:09:11 Ex9 píše vedle hodnotu šipky.

#### KOMENTÁŘ

Ex2 Snaží se jej navést na smysl orientace šipek.

Š7 Štěpán stále tvrdí, že nezáleží na směru šipky.

Š8 Podává vysvětlení – chápe šipku jako něco, co pouze přičítá, ale on vidí u čísel i možnost odčítání, proto kreslí pouze čáru.

Š9 Své tvrzení dokládá na situaci dolních čísel, že  $9 - 3 = 6$  a  $6 + 3 = 9$ . Vnímá, že je to stejné.

Š10 Nevidí rozdíl mezi 3 šipka 6 a 6 šipka 3. Štěpán považuje čáru za univerzálnější nástroj, který v sobě skrývá sčítání i odčítání. Neuvědomuje si, že šipka v sobě také skrývá obojí a navíc vymezuje přesněji řešení. Experimentátor měl předložit úlohu, ve které by



orientace šipka hrála zásadnější roli. Takovou úlohu bychom dostali, pokud bychom vynechali více čísel v pavučině.

### **Fragment 8: Exp 0708**

#### **PROTOKOL**

- 0:10:56 Ex1 Já ti dám další.
- 0:11:18 Š1 Počítá se tady i do záporných čísel?
- 0:11:21 Ex2 No jak myslíš, co myslíš?
- 0:11:27 Ex3 Jak tě napadlo, že bys mohl počítat do záporných čísel?
- 0:11:31 Š2 No 4 – 8.
- 0:11:34 Ex4 Hm a co bys dostal?
- 0:11:35 Š3 Míinus 4.
- 0:11:36 Ex5 A myslíš, že by tam mohlo být mínus 4 nebo nemohlo? Proč jsi tam vlastně napsal tu 8 nakonec? Proč jsi tam nenapsal tu mínus 4?
- 0:11:45 Š4 Protože pak bych tady přičítal k zápornému číslu.
- 0:11:49 Ex6 A to se nedá?
- 0:11:50 Š5 Dá, já netvrdím, že nedá.
- 0:11:55 Ex7 No, jak myslíš...
- 0:11:57 Š6 Mlčí.
- 0:13:29 Š7 4...
- 0:13:45 Š8 Mlčí.
- 0:14:31 Š9 To znamená, že tady by byla 12.

#### **EVIDENCE**

- 0:10:58 Ex1 předkládá úlohu.
- 0:11:15 Š1 bere do ruky modrou fixu, píše  $C = 8$ .
- 0:11:29 Š4 ukazuje na  $A$  a  $\beta$ .
- 0:11:55 Š6 ukazuje na pavučinu, přemýšlí, dává si ruku na bradu.
- 0:12:34 Š6 škrte  $C = 8$  a přepisuje ho na  $C = 12$ , mlčí.
- 0:13:31 Š7 dopisuje  $\alpha = 4$  a  $D = 8$ .
- 0:13:49 Š8 ukazuje na  $B$ , pak na  $D$ , dlouho přemýšlí.
- 0:14:25 Š8 dopisuje  $B = 0$ .
- 0:14:34 Š9 dopisuje  $\gamma = 12$ .

## KOMENTÁŘ

Š1 Píše chybně  $C = 8$ . Jeho chyba je způsobena tím, že v době, kdy číslo píše již přemýšlí nad možností záporných čísel, proto napíše chybně číslo 8, které chtěl pouze přičíst. Jeho úvaha o záporných číslech je důsledkem toho, že Štěpán stále nevnímá funkci šipek, protože šipka tady v tom případě vylučuje záporná čísla.

Š4 Uvádí důvod, proč záporná čísla vyloučil. Jeho vysvětlení však nedává zcela smysl.

Š6 Po 1 minutě opravuje chybu, které se dopustil.

Š7 Toto byl klíčový moment, kdy nebylo evidentní, jak dál postupovat. Štěpán správně vypočítal hodnotu červené šipky, která ho posunula dál. Hodnotu červené šipky pravděpodobně spočítal tak, že si uvědomil, že od 4 ke 12 vedou 2 červené šipky, proto jedna má hodnotu 4. Myslím, že odhalil princip sčítání šipek.

Š8 Hodně dlouho přemýšlí nad číslem v levém dolním rohu, přestože je číslo evidentní na základě odhalené hodnoty šipky. Myslím, že si nulou jako číslem nebyl zcela jistý, protože s ní nemá příliš velké zkušenosti a málo se s ní počítá.

Tato úloha je první, která je pro něj úlohou implicitní, hledá řešení a nové možnosti v pavučině.

## Fragment 9: Exp 0710

### PROTOKOL

- 0:23:02 Ex6 A ještě se tě zeptám na druhou věc, ty jsi říkal, že tady máš  $6 - 3$ , jak jsi přišel na to, že tady bude mínus?
- 0:23:10 Š9 Tady přičítám, takže tady můžu i odčítat.
- 0:23:13 Ex7 A jak to poznám? Ty to říkáš správně, ale jak to já poznám?
- 0:23:19 Š10 Že když je šipka tak, tak přičítám a když je takhle, tak odčítám.
- 0:23:25 Ex8 Já se vrátím k té úloze, co jsi předtím počítal. Jak já tady poznám z těch čar, jestli budu odčítat nebo přičítat?
- 0:23:35 Š11 To si musíte vypočítat.
- 0:23:36 Ex9 No, to musím. A dalo by se to udělat nějak, abych já to poznala?
- 0:23:45 Š12 Ehm.
- 0:23:47 Ex10 Jak?
- 0:23:48 Š13 No šipkama.
- 0:23:50 Ex11 Hm, a myslíš, že tedy záleží na tom, jestli tam jsou šipky nebo čáry?
- 0:23:55 Š14 Já si myslím, že někdy jo a někdy ne.
- 0:23:57 Ex12 Aha, tak jo, děkuji.

## EVIDENCE

0:23:10 Š9 ukazuje na  $D$ ,  $e$ ,  $C$ , a obráceně na  $C$ ,  $e$ ,  $D$ .

0:23:19 Š10 ukazuje na směr šipky  $a$ .

0:23:25 Ex8 předkládá předchozí úlohu, ve které Štěpán doplňoval místo šipek čáry.

## KOMENTÁŘ

Š9 Ukazuje správný směr šipky pro sčítání a opačně to vnímá jako odčítání, což je správně. Zdá se, že začíná vnímat, že i šipka může znamenat odčítání, pokud jdeme proti jejímu směru.

Š13 Přiznává a uvědomuje si, že šipky mají svou funkci.

Š14 Je vidět, že Štěpán si už uvědomuje, že orientace šipky má svůj smysl, nicméně nedokáže ještě určit, zda je její orientace důležitá vždy. Štěpán si právě udělal izolovaný model, kdy orientace šipky hraje roli, nemá však ještě model generický.

## Fragment 10: Exp 0711

## PROTOKOL

0:25:38 Š7 A tady...

0:25:57 Ex3 Tak výborně, já ti moc děkuji.

## EVIDENCE

0:25:41 Š7 ukazuje na místo, kde má doplnit šipku, bere do ruky zelenou fixu a kreslí zelenou čáru na místo  $d$ , po chvíli ji dokresluje na šipku se správnou orientací.

## KOMENTÁŘ

Š7 Úloha je pro něj explicitní, je snazší než úloha předchozí. Štěpán zde poprvé sám kreslí šipku místo čáry. Pravděpodobně pochopil, že šipka a její orientace má svůj význam.

### 3.2.2 Vzorová úloha aneb hledání základních principů v pavučině

Vzorovou úlohou je myšlena situace představující pavučinu, ve které je vše doplněno a slouží k tomu, aby žák sám poznal, vydedukoval vztahy mezi čísly v pavučině a úlohu směru a barvy šipek.

Při přípravě na první experiment bylo zapotřebí určit, jakým způsobem představit žákům prostředí pavučin a typ úloh, které budou řešit. Ve snaze o konstruktivistické pojetí a

neovlivňování žáků jsem se rozhodla, že bude dobré začínat experimenty právě vzorovou úlohou.

Nyní lze diskutovat, zda tento postup byl vhodný či ne. Za nezpochybnitelnou výhodu můžeme považovat fakt, že žák je nucen přemýšlet nad vztahy mezi čísly a hledat pro ně pravidla. Tento přístup je pro žáky motivující, obzvláště ve chvíli, kdy skutečně ona pravidla objeví a principu úlohy porozumí. Fragmenty 11 a 12 ukazují pochopení základních principů v pavučině ze vzorové úlohy.

Úskalí vzorové úlohy dokládají fragmenty 13, 14, 15. Nejčastějším problémem vzorové úlohy byly metakognitivní jevy, kdy žáci zaměňovali různé struktury, které znali z jiných typů úloh. Hledali proto v pavučinách stejná pravidla jako například ve sčítacích trojúhelnících. Žáci ve fragmentech 13 a 14 zprvu čísla v kolečkách sčítali a šipky jim sloužily pouze jako ukazatele, co s čím mají sčítat. Žák ve fragmentu 13 dokonce hovoří o tom, že hodnoty šipek by mohly znamenat nějaké body. Můžeme soudit, že v základu jeho úvahy stojí předchozí zkušenost s jiným prostředím, které mu pavučiny mohou, ale také nemusí, připomínat. V obou zmíněných fragmentech je patrné, že žáci, dokud je experimentátor neupozorní, příliš nevnímají legendu, tedy hodnoty šipek.

Žák ve fragmentu 15 s legendou naopak pracuje od začátku, nicméně chybně. Vidí souvislost legendy a pavučiny v tom, že z čísla vychází šipka stejné hodnoty, jakou má číslo. Žák je fixován na fakt, že čísla v pavučině tvoří postupku. V tomto případě je postupka i graficky zvýrazněna, jelikož čísla v pavučině jdou postupně odshora dolů. Fixace na postupku čísel omezuje jeho pohled na pavučinu jako celek, nevidí vztahy mezi čísly, která nejdou po sobě (například vztah čísel 1 a 4).

Společným problémem fragmentů 13, 14 a 15 je skutečnost, že žáci mnohdy nevnímají plně všechny fenomény, které úloha obsahuje. Jejich předchozí zkušenosti významně ovlivňují jejich úvahy.

Nutno dodat, že všechny vzorové úlohy, vyjma úlohy z fragmentu 12, obsahovaly čísla v kolečkách 1, 2, 3, 4. Navádí tak žáka na vnímání postupky i na možnost sčítání čísel mezi sebou. Vzorová úloha fragmentu 12 obě tyto možnosti vylučuje, jelikož obsahuje čísla v kolečkách 1, 3, 5, 7.



### Fragment 11: Exp 0701

#### PROTOKOL

- 0:00:13 Ex1 Podívej se tady na tuto úlohu a zkus se zamyslet nad tím, jak to tam funguje. Tato úloha je vyřešená, tu nemusíš řešit, ale spíš se podívej, co vůbec v té úloze je. A můžeš mi k tomu povídat, co tě k tomu napadá. Ještě nám řekni jméno, jak se jmenuješ.
- 0:00:41 Š1 Štěpán. Že to vždycky přičtu tohle číslo, třeba tady přičtu k 1 jedničku a rovná se to 2.
- 0:00:48 Ex2 Hm, takže myslíš, že už bys...
- 0:00:50 Š2 1 přičtu modrou čarou 3 takže je to 4.
- 0:00:55 Ex3 Tak fajn.

#### EVIDENCE

- 0:00:33 Š1 prohlíží úlohu, pak začne popisovat. Ukazuje na hodnoty šipek a na šipky v pavučině.
- 0:00:50 Š2 ukazuje na *A*, *c*, *D*.

#### KOMENTÁŘ

Š1 Hned na první pohled pochopil, jak to v pavučině funguje – chápe význam šipek i jejich hodnot. Šipku nazval čarou, možná je to jen výraz jeho chování, kterým dává najevo, že je nad věcí.

### Fragment 12: Exp 0901

#### PROTOKOL

- 0:00:08 Ex1 Tak Davide, mám tady takové úlohy, jmenují se pavučiny, já ti dám tady vzorovou úlohu. Tato úloha je vyplněná, to vidíš. Tak a zkus zapřemýšlet, co se v té úloze děje. Viděl jsi někdy takovou úlohu?
- 0:00:24 D1 No, moc ne a než.... že tady bude 4 a že se to 4 zvětší o 4 a zelená o 2, pak dáme, fialová se zvětší o 6.
- 0:00:40 Ex2 Takže myslíš, že víš, jak to v úloze funguje.
- 0:00:42 D2 Ano.

#### EVIDENCE

- 0:00:24 D1 ukazuje perem na hodnotu oranžové šipky  $\beta$  a následně na šipku *c* v pavučině, poté ukazuje na hodnotu zelené šipky  $\alpha$  a šipky *a*, *b* v pavučině, to samé provádí s fialovou šipkou.

## KOMENTÁŘ

D1 David se v úloze velmi rychle a správně zorientoval.

### Fragment 13: Exp 0601

## PROTOKOL

- 0:00:05 Ex1 Tak, máme tady první úlohu. Zkus se na ni podívat, ta už je vyřešená, tam není potřeba vůbec nic, nic řešit. A zkus se podívat, jestli, jestli by si odhadl, jak to tam funguje, jaký tam je princip. Jsou tam nějaká čísla, nějaké šipky.
- 0:00:21 T1 No že třeba... no jenom trošku...jedna a dva, no že třeba jedna a dva jsou tři, je tady spojený, jedna, dva a tři jsou čtyři, akorát že jenom ta dvojka.
- 0:00:37 Ex2 Já se tě zeptám, tys říkal jedna, dva a tři jsou čtyři.
- 0:00:38 T2 Ne, jedna, dva jsou tři a tady jsou ty šipky, ta zelená a oranžová, to je ta zelená, oranžová a fialová k té čtyřce a to se taky rovná tři, čtyři...
- 0:00:49 Ex3 Co se rovná čtyři? Tady ti nerozumím teďko.
- 0:00:51 T3 No že jedna, dva, tři se rovná čtyři, právě že tady je...tady je ta...od jedničky je ta fialová čárka ke čtyřce, ta zelená a ta oranžová.
- 0:01:00 Ex4 Dobře, tady máme ještě nějaká čísla napsaná nad těmi šipkami. Tak ještě se zkus podívat, já myslím, že to s tím bude ještě nějak souviset.
- 0:01:08 T4 Náký... Náký body budu počítat, nebo...
- 0:01:23 Ex5 Tak zkus se podívat mezi jedničkou a čtyřkou máme fialovou šipku. A nad tou fialovou...
- 0:01:33 T5 No že jedna a tři se rovná čtyři.
- 0:01:35 Ex6 Výborně. A jak to bude třeba se zelenou šipkou?
- 0:01:38 T6 Že dva a dva se rovná čtyři a jedna a dva se rovná tři.
- 0:01:44 Ex7 Výborně, takže myslíš, že už víš? ... jak to tam funguje? Dobře.
- 0:01:46 T7 Mhm.

## EVIDENCE

- 0:00:05 Ex1 Zvědavě kouká střídavě na experimentátora, střídavě na úlohu, pozorně naslouchá.
- 0:00:21 T1 Tobiáš skáče experimentátorovi do řeči, ještě než dokončí větu. Ukazuje na A, C, B, pak na A, c, D; C, e, D; B, f, D.
- 0:00:37 Ex2 ukazuje na A, C, B, D.
- 0:00:39 T2 ukazuje na A, C, B; d, a, e, f, c; rukou mávne nad celou pavučinou.
- 0:00:51 T3 ukazuje na A, C, B, D; A, c; C, e; B, f.
- 0:01:00 Ex4 snaží se poukázat na „legendu“ k pavučině, tedy na hodnoty šipek v levé části papíru.

- 0:01:08 T4 očním kontaktem hledá pomoc/nápovědu/souhlas... experimentátora, pohrává si s tužkou.
- 0:01:23 Ex5 Experimentátor se snaží nastalou situaci řešit a pomáhá žákovi. Ukazuje na  $A$ ,  $D$ ,  $\gamma$ .
- 0:01:33 T5 ukazuje na  $A$ ,  $\gamma$ ,  $D$ . Z Tobiášova hlasu je zřetelná radost z poznání systému pavučin.
- 0:01:35 Ex6 chválí Tobiáše, má radost.
- 0:01:38 T6 ukazuje na  $B$ ,  $\beta$ ,  $D$ ;  $A$ ,  $B$ .

### KOMENTÁŘ

T1 Okamžitě se v situaci nějakým způsobem orientuje, avšak ne dle zákonitostí, které fungují ve všech pavučinách. Ne zcela správné pochopení situace bylo zapříčiněno neznalostí matematického prostředí, ale také především nepropojením všech prvků úlohy (pavučina a její legenda, neboli hodnoty šipek v levé části papíru). Tobiáš sám pociťuje, že jeho vysvětlení nebude zcela správné a univerzální. Tento problém šel možná odstranit poukázáním na funkční různobarevnost šipek. Správně si však všimá dvou možných cest z jedničky do trojky, taktéž, možná ne zcela vědomě, si všiml, že všechny šipky ústí do čísla čtyři.

T3 Hovoří o čarce místo šipky. Pravděpodobně se jedná jen o špatné pojmenování, protože v předchozím vstupu hovořil o šipkách.

Ex4 Snaha navést žáka k propojení hodnot šipek s pavučinou. Tomuto problému by šlo zřejmě předejít předložením ne zcela vyřešené úlohy, ale úlohy s chybějícím údajem, byť jen velmi snadno doplnitelným.

T4 Tobiáš si nedokáže informace z legendy propojit s ostatní částí úlohy. Pravděpodobně je ovlivněn jiným schématem, napadá ho, že čísla nad šipkami jsou body.

Ex5 Pomoc je možná až příliš návodná. Možná by bývalo stačilo na legendu poukázat.

T6 S malou pomocí se Tobiáš v situaci hravě zorientoval. Nyní je zřejmé, že pronikl k podstatě řešení pavučin, k základním zákonitostem.

### Fragment 14: Exp 0201

#### PROTOKOL

- 0:00:12 Ex1 Tak, Kristýnko, čekají nás tady pavučiny. Nejdřív se na to podívej.
- 0:00:16 K1 Já si to takhle otočím. A už mě hned napadá několik způsobů.
- 0:00:22 Ex2 Tak povídej, co tě k tomu všechno napadá...
- 0:00:26 K2 Tak zaprvé 1 a 2 jsou 3, takže ta šipka vede na 3, 1 a 3 jsou 4, takže ta 4 vede na... ta šipka vede na 4. Tady 1... no a už mě nic víc nenapadá.
- 0:00:48 Ex3 Tak teďka mi vysvětli, jak jsi to počítala. Tys to teďka nějak řekla, tak mi to zkus vysvětlit. Tys počítala 1 + 2 jsou 3... A co tamty šipky... Tady ještě koukej máš něco u těch šipek napsaný. Co s těma číslama, co to znamená?



- 0:01:02 **K3** Jo, tak tady, že to jedna a jedna jsou dva.
- 0:01:05 **Ex4** A co to je to jedna a jedna? Co to je to A JEDNA?
- 0:01:08 **K4** To je plus.
- 0:01:09 **Ex5** To je plus a to je... Co tím máš na mysli? Před tím jsi říkala, že to je  $1 + 2$  jsou 3. A teďka jsi řekla, že  $1 + 1$  jsou 2. Co to je to a 1? Co jsi přičítala k té jedničce?
- 0:01:19 **K5** Jedničku, protože...
- 0:01:21 **Ex6** A jakou jednič....
- 0:01:21 **K6** Protože tady...
- 0:01:23 **Ex7** Ták, takže tu šipku...
- 0:01:25 **K7** Potom tady mám jedn... dva + jedna jsou 3, takže jsem zase přičítala jedničku.
- 0:01:32 **Ex8** Výborně.

#### EVIDENCE

- 0:00:16 **K1** Kristýnka začala okamžitě vymýšlet řešení.
- 0:00:26 **K2** ukazuje na  $C, A, a, B; C, B, D$ ; pak ukazuje na  $C$ , ale už jí nic nenapadá.
- 0:00:48 **Ex3** ukazuje na  $C, A, B$ , pak poukazuje na hodnoty šipek vlevo, snaží se napovědět.
- 0:01:02 **K3** ukazuje na  $C, A$ . Je vidět, že zapojila i hodnotu šipky, nicméně to nedokáže vysvětlit.
- 0:01:09 **Ex5** ukazuje na  $C, A, B$ , chce slyšet přesně, co se kde musí sečíst.
- 0:01:21 **K6** ukazuje na hodnotu šipky  $a$ .
- 0:01:25 **K7** ukazuje na  $A$ , levou rukou ukazuje směrem k hodnotám šipek a pravou rukou pak na  $B$ .

#### KOMENTÁŘ

**Ex1** Nesmyslný úvod – vysvětlit, proč je to pavučina, nebo spíše se zeptat, co jí to připomíná, jestli se s tím již setkala a podobně.

**K1** Kristýnka i přes to, že nikdy pavučinu neviděla, pohotově reaguje.

**K2** Vysvětlila velmi dobře svou domněnku, za kterou jsem ji měla pochválit. Měla jsem ji jen upozornit na šipky vedle, aby si sama přišla na „správnější“ postup řešení, nebo ji hned předložit úlohu, kde by nešel uplatnit domnělý postup. Experimentátor předpokládal, že systém pavučin je ze vzorové pavučiny jasný, nenapadlo ho, že v něm lze vidět i jiné vazby, jak na ně poukázala Kristýnka.

**K3** Na základě upozornění experimentátora na hodnoty šipek Kristýnka správně uvádí příklad z pavučiny, za což by měla být pochválena, je však experimentátorem nucena vyjádřit se přesněji. Experimentátor chce slyšet přesně to, co má na mysli a navádí Kristýnku jen k této odpovědi. Experimentátor by se měl oprostít od přesné terminologie, důležité je, že žák pochopil princip.

**Ex6** Nechat více prostoru, nezasahovat tolik a okamžitě...

**Ex7** Experimentátor má tendenci mít vždy poslední slovo, upřesnit to.

### **Fragment 15: Exp 0101**

#### **PROTOKOL**

- 0:00:11 Ex1** Míšo, podívej se na tuhle úlohu a zkus se zorientovat, jestli v té úloze vidíš nějaký princip, jestli jsou tam jen tak ty čísla, šipky a zkus nám k tomu povídat, co tě napadá.
- 0:00:26 M1** Mě napadá to, že z 1 vede šipka zelená na 2, to je tady, a z 2 by měla vést červená šipka, to je tady, no a mělo by to vést asi na 3, jestli je to popořadě.
- 0:00:47 Ex2** No tak jak myslíš, je to popořadě, nebo je to napřeskáčku?
- 0:00:54 M2** Není to popořadě.
- 0:00:57 Ex3** No a ty jsi říkal, že tady zelená šipka vede z 1 na 2. Je tam ještě nějaká zelená šipka?
- 0:01:06 M3** Z 2 na 3.
- 0:01:09 Ex4** A ještě nějaká?
- 0:01:11 M4** Z 3 na 4.
- 0:01:12 Ex5** A vidíš nějaký systém, jak tam jsou ty zelené šipky?
- 0:01:18 M5** Ano, 1, 2, 3, 4.
- 0:01:21 Ex6** A co by teda mohla znamenat zelená šipka?
- 0:01:25 M6** No jakoby po 1.
- 0:01:29 Ex7** A co by mohla znamenat červená šipka?
- 0:01:32 M7** Červená šipka by mohla znamenat jakoby po dvou, 1, 3 a tady už nemáme pětku.
- 0:01:42 Ex8** A je tam ještě jiná červená šipka?
- 0:01:46 M8** Ano z 2 na 4, ta je taky po 2.
- 0:01:51 Ex9** A je tam ještě jiná šipka, třeba jiné barvy?
- 0:01:53 M9** Hm, modrá.
- 0:01:55 Ex10** A jak to vypadá s modrou?
- 0:01:57 M10** To je po 3, 1 a 3 jsou 4.
- 0:02:02 Ex11** Tak myslíš, že chápeš ten typ úlohy?

#### **EVIDENCE**

- 0:00:30 M1** ukazuje na  $A, b, a, C, \beta, C, e, D, B$ .
- 0:00:56 Ex3** ukazuje na  $A, b, C$ .

- 0:01:06 M3 ukazuje na  $C, d, B$ .  
0:01:12 M4 ukazuje na  $B, f, D$ .  
0:01:18 M5 ukazuje na  $A, C, B, D$ .  
0:01:26 M6 ukazuje na  $\alpha$ .  
0:01:32 M7 ukazuje na  $\beta, A, B$ .  
0:01:46 M8 ukazuje na  $e$ .  
0:01:57 M10 ukazuje na  $A, \gamma, A, c, D$ .

### KOMENTÁŘ

**M1** Míša v úloze hledal systém, viděl, že v úloze jsou čísla od 1 do 4, ve kterých vidí postupku, proto se soustředil na čísla tak, jak jdou za sebou. Jeho prvním nápadem bylo, že šipka s hodnotou 1 jde z čísla 1, šipka s hodnotou 2 jde z čísla 2 a zároveň směřuje do následujícího čísla. Tuto hypotézu si však následně vyvrátil.

**M6** Pochopil, že zelená šipka znamená 1, že jdu-li po zelených šipkách, jdu po jedné.

**M7** Na základě funkce zelené šipky vyvodil, co znamená červená a následně i modrá.

**Ex10** Přerušuje, skáče mu do řeči.

**M10** Míša plně pochopil, jak pavučina funguje.

### 3.2.3 Hledání výchozího bodu

Každé řešení úlohy vyžaduje určení výchozího bodu, od kterého řešitel začíná. Pavučina pyramidového typu, který byl experimentován, přímo vybízí k tomu, aby se výchozím bodem stalo číslo  $A$ , které je umístěno nahoře. Postup odshora dolů a zleva doprava máme všichni dobře zafixovaný díky čtení. Žáci jej proto mají tendenci uplatňovat i při řešení úloh, jak dokazuje především fragment 16.

Ve fragmentu 19 žák rovněž volí jako výchozí bod číslo  $A$ , které však musí určit, což je náročnější, než když je číslo  $A$  známo. Určení čísla  $A$  má v tomto případě i další výhody, které žák neuvádí, ale pravděpodobně s nimi počítal. Od čísla  $A$  vedou všechny barevné šipky, tudíž jeho určení je klíčovým momentem k vyřešení úlohy.

Se zajímavým určením výchozího bodu se setkáváme ve fragmentu 17, kdy žákyně začíná číslem  $D$ , od kterého určuje hodnotu šipky nejnižší hodnoty. Postup žákyně mohl být záměrný – určit hodnoty šipek od nejnižší po nejvyšší.

Fragment 18 je pouze ukázkou přeroknutí. Žákyně zaměnila slova výchozí a cílový.

### Fragment 16: Exp 0202

#### PROTOKOL

- 0:02:27 Ex1** Tak, tady ten vezmu. Tak, teďko tady máme doplněné všechny šipky, všechna čísla, ale nevíme, jaká šipka má jakou hodnotu. Tady si půjčíme tužku od Hanky.
- 0:02:37 K1** Takže, hmmm, nevím, od čeho mám začít. Takže tady začnu, tady mám vlastně já, tady si vezmu to číslo, od kterého to asi budu rozvíjet. 1 a kolik mi chybí do čtyř, takže to jsou 3 a hned tady mám zelenou šipku, která vede tady, takže tady to bude trojka.

#### EVIDENCE

- 0:02:27 Ex1** mluví příliš rychle.
- 0:02:35 K1** chvíli přemýšlí, odkud by začala, ukazuje na  $A$ , šipku  $a$ ,  $B$ ,  $\gamma$  a píše  $\gamma = 3$ .

#### KOMENTÁŘ

**K1** Dokáže pojmenovat místo, od kterého je třeba začít. Její vyjadřování („číslo, od kterého to asi budu rozvíjet“) značí pokročilé myšlení. Používá fráze „1 a kolik mi chybí do 4“ – tato fráze je často používána při matematice ve škole, obzvláště při výuce odčítání. Zde je vidět, že Kristýnka přesně vidí význam orientace šipek.

### Fragment 17: Exp 0204

#### PROTOKOL

- 0:05:31 Ex1** Tak, další příklad. Teďko nám chybí šipky, ale neznáme zároveň ani jejich hodnotu, takže tu nejdřív musíme spočítat. Takže začni, úplně jak chceš.
- 0:05:40 K1** Tak já začnu asi od trojky. Takže, tři a kolik mi chybí do čtyř? To je jedna, takže... a je to zelená šipka, takže tady napíšu jedničku. Tady je dva a kolik mi chybí do čtyř, to jsou dva. Takže mám tady oranžovou šipku, takže si ji napíšu nad oranžovou šipku. A ta fialová, to je jedna a kolik mi chybí do čtyř, to jsou tři a je tady fialová šipka, takže tu si tady napíšu trojku. Potom jedna a kolik mi chybí do dvou? To je jedna, takže tady mám jedničku na zelený šipce, takže si tam udělám zelenou šipku. Jedna a kolik mi chybí do tří, to je dva a tady mám dvojku na oranžový šipce, takže to bude oranžová. A tady je dva a kolik mi chybí do tří? To je jedna, takže tady mám jedničku na zelený šipce, takže tady bude zelená.

#### EVIDENCE

- 0:05:40 K1** ukazuje na  $D$ ,  $A$ ,  $c$  a píše  $\alpha = 1$ , poté ukazuje na  $B$ ,  $A$ ,  $a$  a píše  $\beta = 2$ , nakonec ukazuje  $C$ ,  $A$ ,  $b$  a píše  $\gamma = 3$ .
- 0:06:19 K1** Nyní přechází k dokreslení šipek. Ukazuje na  $C$ ,  $B$ ,  $a$  a kreslí zelenou šipku  $d$  orientovanou k  $B$ , dále ukazuje na  $C$ ,  $D$ ,  $\beta$  a kreslí oranžovou šipku  $e$

orientovanou k  $D$ , pak ukazuje na  $C$ ,  $D$ ,  $\alpha$  a kreslí zelenou šipku  $f$  orientovanou k  $D$ .

### KOMENTÁŘ

**K1** Začíná doplněním hodnoty zelené šipky, pokračuje hodnotou oranžové a nakonec určuje hodnotu fialové. Tento postup je poněkud zvláštní vzhledem k umístění šipek. Kristýnka začíná pravou částí pavučiny, pak přechází k levé a nakonec se dostává doprostřed. Je však možné, že tento postup zvolila zcela záměrně, jelikož hned viděla, že hodnoty šipek budou 1, 2, 3, a proto je doplňuje popořadě dle jejich hodnoty.

Kristýnka používá frázi „tady mám 1 na zelené šipce“. Použití předložky na může znamenat neztotožnění hodnoty se šipkou. Může to však být pouze verbální forma toho, co lze vidět v pavučině v místě hodnot šipek, tedy číslo, které leží na šipce.

Úloha byla opět příliš snadná, nevyžadující hlubší přemýšlení.

### Fragment 18: Exp 0208

### PROTOKOL

**0:12:06 Ex1** Ták, další. Tady budeš zase doplňovat čísla a hodnoty šipek, ale tady jsi znala aspoň jednu, tady neznáš žádnou. No tak schválně, jestli si s tím poradíš.

**0:12:14 K1** (současně): A šipky.

**0:12:19 K2** Takže já začnu zase od toho cílového bodu, od kterého to budu rozvíjet. Takže jedna a kolik mi chybí do čtyř? To jsou tři, takže fialová šipka budou tři. Potom... Jedna... Tady už je to trochu těžší. Těch možností může bejt víc. Tady můžou bejt dva, ale zároveň i... Tady asi udělám dvojku, protože trojka by tam nešla, protože trojka už musí mít fialovou šipku. Vlastně už jiný číslo by tam nešlo, protože od pětky tady bych musela odčítat. Takže tohle bude dvojka.

### EVIDENCE

**0:12:20 K2** ukazuje na  $A$ ,  $D$ ,  $c$ ,  $\gamma$ , píše  $\gamma = 3$ .

**0:12:39 K2** přemýšlí, jak dál. Chvilí ukazuje na  $B$ . Hraje si s tužkou, která jí občas upadne na zem. Prostředí je vyrušováno vcházením učitelů do kabinetu.

**0:13:35 K2** ukazuje na  $B$ , chce tam doplnit 2, ukazuje na  $\gamma$ .

**0:13:55 K2** píše  $B = 2$ .

**0:14:08 K2** povídá a zároveň píše chybně hodnotu zelené šipky  $\alpha = 2$ .

### KOMENTÁŘ

**K1** Opět hned volí místo, od kterého začne řešit. Místo však, pravděpodobně omylem, nazývá cílovým bodem.

Tato úloha pro ni je konečně obtížnější. Je zde jednoduchá strategie (dráha šipek), kterou však neodhaluje. Zkouší alternativy, požívá při úvahách kondicionál.



Správně říká, že v dolním rohu nemůže být 5. Zkouší na toto místo zapsat dvojku. Mylně říká, že trojka tam být nemůže, protože trojku už má fialová hodnota - to je však míchání čísel a hodnot šipek dohromady.

**K2** Správně říká, že  $B$  může být číslo 2.

### **Fragment 19: Exp 0113**

#### **PROTOKOL**

- 0:14:56 Ex8** A proč jsi začal s tímto číslem? Tady jsi mohl začít vlastně úplně čímkoliv, tak proč jsi začal právě s tímto číslem?
- 0:15:08 M10** Protože já jsem si musel najít startovní bod, od kterého se to bude nejlíp počítat.
- 0:15:18 Ex9** Takže tohle je pro tebe startovní bod?
- 0:15:21 M11** Ano.
- 0:15:22 Ex10** A kdybych ti dala třeba takovouhle úlohu, kde by byl pro tebe startovní bod? Zatím ji ještě nepočítej, za chvíli se k ní dostaneme.
- 0:15:32 M12** Tady bych začal asi, tady nevím zatím...
- 0:15:37 Ex11** Nevíš zatím, tak se k ní za chvíli dostaneme.
- 0:15:42 Ex12** Myslíš si, že je to úplně nejlepší startovní bod nebo by byl některý ještě jednodušší?
- 0:15:47 M13** Podle mě je tohle nejlepší.
- 0:15:48 Ex13** Dobře.

#### **EVIDENCE**

- 0:14:56 Ex8** ukazuje na  $A, \beta, \gamma, D$ .
- 0:15:08 M10** ukazuje na  $A$ .
- 0:15:22 Ex10** předkládá úlohu č. 14.

#### **KOMENTÁŘ**

**M10** Úloha s možným startovním bodem nahoře je pro Míšu snazší, jasnější než úloha, ve které by musel začínat odjinud – byla by náročnější na zorientování.

**Ex10** Uvědomila jsem si, že Míša nemůže jen tak bez počítání vymyslet, odkud by bylo nejlepší začít. Měla jsem ho nechat úlohu vypočítat rovnou nebo se ho na startovní bod zeptat až při počítání této úlohy.

**M13** Výchozí bod umístěný nahoře přímo vybízí k tomu, aby jeho číslo bylo co nejrychleji odhaleno.

### 3.2.4 Záměna řešitelské strategie

K záměně řešitelských strategií dochází ve chvíli, kdy žák neví, jak dále postupovat a přemýšlí o různých způsobech, jak se dobrat řešení. V tuto chvíli do jeho mysli přicházejí dobře známé strategie, které používá při řešení jiných typů úloh. Tyto strategie často vytěsňují již poznaná pravidla nové úlohy a způsobují další problémy při řešení. Velkou roli zde hraje i doba, po kterou žákovo váhání a přemýšlení trvá.

Oba následující fragmenty dokládají chybné použití řešitelské strategie, kterou žáci znají pravděpodobně z řešení sčítacích trojúhelníků. Sčítají tak jednotlivá čísla v pavučině.

#### Fragment 20: Exp 0614

##### PROTOKOL

- 0:28:22 Ex9 Je to tam všechno dobře?  
0:28:30 T16 Hm.... Ta dvojka!  
0:28:33 Ex10 No, copak tam je s ní? Copak tam nevychází?  
0:28:37 T17 Nula a dva... tady sem. Jedna a jedna není dva.  
0:28:48 Ex11 Ještě jednou mi to řekni, teď ti nerozumím.  
0:28:49 T18 Že jedna a dva není dva. Tady by musela bejt oranžová čára.  
0:28:58 Ex12 A proč by tam musela být? Tady mám nulu, zelenou šipku, která je dva a vychází nám dva. To není dobře?  
0:29:05 T19 No, ale tady mám ještě oranžovou čáru, a to... Jo, takže je to správně! Je to správně.

##### EVIDENCE

- 0:28:30 T16 Tobiáš pochybuje o  $B = 2$ , která je však dána a zde problém není.  
0:28:41 T17 ukazuje na  $A, B, A, C, B$ .  
0:28:47 T18 ukazuje na  $A, C, B, a$ .  
0:28:58 Ex12 ukazuje na  $A, a, \beta, B$ .  
0:29:05 T19 ukazuje na  $C, d$ . Radostně prohlašuje, že to má správně.

##### KOMENTÁŘ

T16 Experimentátorovo váhání a nabádání ke kontrole Tobiáše znejistí tak, že zapochybuje i o čísle, které bylo na začátku dáno. Přibližně 2 minuty Tobiáš hledá, kde se dopustil chyby, kterou sám nevidí, ale na niž ho experimentátor navádí.

T17 Tobiáš sčítá čísla v kolečkách, došlo k záměně řešitelského postupu.



### Fragment 21: Exp 0905

#### PROTOKOL

- 0:09:17 Ex3 Tak já se tě zeptám, proč jsi tam doplnil 30? Jak jsi ji vypočítal?
- 0:09:22 D3 No že  $20 + 30$  je 50.
- 0:09:33 Ex4 Aha, a když ti dám teď tu předchozí úlohu, tam ti to taky takto funguje, že  $4+6$  je 8?
- 0:09:52 D4 Ne,  $2 + 2$  je 6.
- 0:09:57 D5  $20 + 30$  je...
- 0:12:50 D6 A můžu tam dávat i mínus?
- 0:12:52 Ex5 No, myslíš, že by tam mínus sedělo, že by tam mínus mohlo být?

#### EVIDENCE

- 0:09:18 Ex3 ukazuje na *D*.
- 0:09:25 D3 ukazuje na *C* a *D*, pak na *B*.
- 0:09:33 Ex4 předkládá předchozí úlohu a ukazuje na *C*, *D*, *B*.
- 0:09:35 D4 přemýšlí.
- 0:09:52 D4 ukazuje na *C* a přechází zrakem zpět k původní úloze.
- 0:11:09 D5 bere do ruky zmizík a maže číslo *C*.
- 0:11:30 D5 ukazuje zmizíkem do spodní části pavučiny.
- 0:12:50 D6 po dlouhé době promluvil.

#### KOMENTÁŘ

**D3** Na základě otázky experimentátora vysvětluje svůj postup – sčítá čísla v kolečkách. U Davida v hlavě jsou přítomny různé myšlenkové operace opírající se o různé řešitelské strategie. Jedna z nich může pocházet z řešení sčítacích trojúhelníků, ve kterých se čísla vzájemně sčítají. Pravděpodobně došlo k vytěsnění jedné strategie druhou, a to na základě lepší znalosti sčítacích trojúhelníků na úkor nového typu úloh, pavučin.

**D4** David argumentuje špatně vypočítaným příkladem. V nahrávce není zcela jasné rozumět, zda David skutečně říká, že  $2 + 2$  je 6 nebo  $2 + 2$  je 4. V prvním případě by se mohlo jednat o přeřeknutí, kdy chtěl říct  $2 + 4 = 6$ , což by jej ovšem utvrzovalo v jeho strategii sčítání čísel. Ve druhém případě by se jednalo o jeho znovuuvědomění si role hodnot šipek. Experimentátor zjevně rozuměl  $2 + 2 = 4$ , a proto nechal Davida tak dlouho bez přerušení.

**D5** Davidův výrok „ $20 + 30$  je...“ potvrzuje, že David skutečně stále zůstává u špatně zvolené strategie, tedy sčítání čísel.

**D5** Po dobu 3 minut se nic neděje. David si nevšímá hodnoty oranžové šipky, kterou zná; vnímá jen pavučinu. V hlavě se mu míchají různé postupy. Je zjevné, že výchozí bod pro vyřešení pavučiny nepřitahuje jeho pozornost. Pavučina nebyla vhodně zvolena, protože se v ní objevují 2 nové parametry – vynechané šipky a dvoumístná čísla.

### 3.2.5 Hledání jednobarevné cesty

Hledání jednobarevné cesty je jednou z možných výchozích řešitelských strategií. V pavučinových úlohách pyramidového typu, které byly experimentovány, lze hovořit pouze o hledání jednobarevné cesty tří šipek, kterou obsahují všechny pyramidové pavučiny o 4 různých číslech a právě 3 různých barvách šipek.

Žáci, kteří si již od začátku všimli, že čísla v pavučinách jdou za sebou, se automaticky začali fixovat na hledání jednobarevné cesty, a to konkrétně cesty šipek o hodnotě 1.

Fragmenty 22 a 23 spolu souvisí. Ve fragmentu 22 je žákyně experimentátorem naváděna, aby si všímala jednobarevné cesty šipek, což se jí, jak lze soudit podle fragmentu 23, vyplatilo. Na základě znalosti pravidla, že pavučina tohoto typu obsahuje vždy jednobarevnou cestu tří šipek, zde určila číslo  $A$ .

Hledání jednobarevné cesty se však nejčastěji uplatňuje ve chvíli, kdy známe počáteční a koncové číslo cesty a je třeba zjistit některé číslo uprostřed této cesty a hodnoty propojujících šipek. Toho bylo využito žáky ve fragmentech 24 a 25.

#### Fragment 22: Exp 0211

##### PROTOKOL

- 0:31:28 Ex3 Dobře, takže zkusíme nějakou těžší. Ještě se tě zeptám k téhle úloze, před tím byla dráha těch zelených šipek, tady jsme měly ty fialové šipky, je to tady taky nějak podobně, že jdu zase od čísla až do čísla podle stejných šipek? Tady jsme šly po té fialové, tady před tím to bylo po té zelené. Je to tady taky po nějaké barvě stejně?
- 0:31:51 K3 Jo, je. Protože je dva a kolik mi chybí do čtyř, jsou dva, čtyři a kolik mi chybí do šesti, jsou dva a šest a kolik mi chybí do osmi jsou taky.
- 0:32:01 Ex4 Výborně, takže tady jsi šla po těch oranžových. Supr.

##### EVIDENCE

- 0:31:36 Ex3 ukazuje na dráhy šipek v předchozích úlohách.
- 0:31:54 K3 ukazuje dráhu oranžových šipek přesně tak, jak to chtěl experimentátor slyšet.

## KOMENTÁŘ

Ex3 Experimentátor se opět snaží upozornit Kristýnku na dráhu jednobarevných šipek.

### Fragment 23: Exp 0212

## PROTOKOL

0:32:03 Ex1 Tak. Třetí příklad od konce.

0:32:09 K1 Mhm. Takže, jedna a kolik mi chybí do tří jsou dva. Takže to už mám tady. Tři a ko... plus dva, protože to je pět, dopíšu pětku. Jedna a kolik mi chybí do pěti jsou čtyři, takže tady mám fialovou, takže sem dám šipku. Ted'ka. Tady to zapeklitý číslo. Jo, už asi vím. Tady bude... Tady trojka nemůže bejt, takže... čtyřka... Tady jde, tady jsem přišla na jeden způsob. Tady by mohla bejt sedmička, protože pět a kolik mi chybí do sedmi, to je dva, to je tady a že by to šlo zase po zelenejch šipkách.

0:33:56 Ex2 Mhm, výborně.

## EVIDENCE

0:32:26 K1 ukazuje na  $C$ ,  $B$  a píše  $B = 5$ , poté hned kreslí fialovou šipku  $f$  orientovanou k  $B$ .

0:32:53 K1 ukazuje na  $A$ .

0:33:45 K1 po dlouhém přemýšlení vysvětluje a ukazuje na  $A$ ,  $B$ ,  $A$ ,  $a$  a na cestu zelených šipek.

## KOMENTÁŘ

K1 V této úloze Kristýnka použila jednobarevnou dráhu šipek, na kterou se ji experimentátor několikrát snažil navést v předchozích úlohách.

### Fragment 24: Exp 0614

## PROTOKOL

0:30:42 T26 No a já jsem si hlavně uvědomil, že když je tady nula a dva, tak tady musí bejt nějaké číslo mezi nima..., aby se to taky rovnalo.

## EVIDENCE

0:30:42 T26 ukazuje na  $A, B$ ;  $A, B, C$ .

## KOMENTÁŘ

T26 Tobiáš vysvětluje princip sčítání šipek a hledání jednobarevné cesty, nicméně si neuvědomuje, že šipky zde doplnil on, tudíž tím zcela jasně nevysvětluje, jak přišel na způsob doplnění šipek.

### Fragment 25: Exp 0904

## PROTOKOL

0:04:12 D1 Ajaj...

## EVIDENCE

0:04:24 D1 po krátkém zorientování vpisuje hodnotu zelené šipky  $\beta = 4$ .

0:04:44 D1 vpisuje hodnotu oranžové šipky  $\alpha = 2$ .

0:04:46 D1 vzápětí píše  $C = 4$ .

## KOMENTÁŘ

D1 David povzdechem vyjadřuje, že s úlohou bude mít problém, že je pro něj náročná. Můžeme v něm však také vidět odhodlání úlohu vyřešit.

D1 Začíná zcela logicky od nejjasnějšího místa.

D1 Stačí mu pouze 20 vteřin, aby odhalil hodnotu oranžové šipky, tedy aby si uvědomil princip jednobarevné cesty a dělení společné hodnoty šipek.

### 3.2.6 Princip sčítání šipek

Odhalení principu sčítání šipek stojí v základu úspěšného řešení většiny náročnějších pavučinových úloh. Kaskády úloh, které byly experimentovány, mnoho takových úloh neobsahovaly. Některé takové úlohy a jejich řešení však můžeme demonstrovat na následujících fragmentech.

Pouze u jednoho žáka došlo k pochopení principu sčítání šipek (viz fragmenty 26 a 28). Fragment 27, přestože se jedná o stejného žáka, však pochopení principu sčítání šipek vylučuje. Příčinou je úloha, která u fragmentu 27 byla náročnější; vyžadovala sčítání 3

šipek, u nichž zároveň hrálo roli jejich hůře viditelné umístění. Fragmenty 26 a 28 jsou založeny na úlohách, kde je třeba sčítat pouze 2 šipky.

Fragment 29 demonstruje neodhalení principu sčítání šipek. K vyřešení úlohy bylo použito strategie pokus-omyl, která může snadno tento princip zastupovat. Strategie pokus-omyl je zpravidla první řešitelskou strategií, kterou žák volí, neví-li si s řešením úlohy rady. Často však tato strategie může sloužit jako východisko k lepším strategiím. (Hejný a Michalcová, 2001) Opět je zde nutno dodat, že úloha je náročnější; jedná se o sčítání dvou různých šipek.

#### **Fragment 26: Exp 0708**

##### **PROTOKOL**

- 0:11:57 Š6 Mlčí.  
0:13:29 Š7 4.  
0:13:45 Š8 Mlčí.  
0:14:31 Š9 To znamená, že tady by byla 12.

##### **EVIDENCE**

- 0:12:34 Š6 ukazuje na pavučinu, přemýšlí, dává si ruku na bradu.  
0:13:31 Š6 škrtá  $C = 8$  a přepisuje ho na  $C = 12$ , mlčí.  
0:13:49 Š7 dopisuje  $\alpha = 4$  a  $D = 8$ .  
0:14:25 Š8 ukazuje na  $B$ , pak na  $D$ , dlouho přemýšlí.  
0:14:34 Š8 dopisuje  $B = 0$ .  
0:12:34 Š9 dopisuje  $\gamma = 12$ .

##### **KOMENTÁŘ**

Š6 Po 1 minutě opravuje chybu, které se dopustil.

Š7 Toto byl klíčový moment, kdy nebylo evidentní, jak dál postupovat. Štěpán správně vypočítal hodnotu červené šipky, která ho posunula dál. Hodnotu červené šipky pravděpodobně spočítal tak, že si uvědomil, že od 4 ke 12 vedou 2 červené šipky, proto jedna má hodnotu 4. Myslím, že odhalil princip sčítání šipek.

Š8 Hodně dlouho přemýšlí nad číslem  $B$ , přestože je číslo evidentní na základě odhalené hodnoty šipky. Myslím, že si nulou jako číslem nebyl zcela jistý, protože s ní nemá příliš velké zkušenosti a málo se s ní počítá.



Tato úloha je první, která je pro něj úlohou implicitní, hledá řešení a nové možnosti v pavučině.

#### **Fragment 27: Exp 0710**

##### **PROTOKOL**

0:19:15 Š1 4 + ...

0:21:48 Š2 Mlčí.

0:21:55 Š3 6.

##### **EVIDENCE**

0:19:07 Š1 Povzdychne si.

0:19:17 Š1 ukazuje na  $D$ , pak na  $C$ , přemýšlí, žmoulá roh papíru, mlčí, ukazuje na  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $C$ , kouká se střídavě na papír, na kameru.

0:21:49 Š2 dopisuje  $\alpha = 1$  a  $D = 5$ .

0:21:59 Š3 dopisuje  $C = 6$  a  $\beta = 2$ , nakonec  $B = 3$ . Odkládá fixy a podívá se na experimentátora.

##### **KOMENTÁŘ**

Š1 Neví, odkud by začal, chvíli vypadá nervózně, unaveně, pak je zase vidět, že přemýšlí nad konkrétními čísly.

Š2 Po 3 minutách zjistil hodnotu zelené šipky, což byl klíčový moment k vyřešení úlohy. Záměrem úlohy bylo odhalit princip sčítání šipek, tedy že pokud modrá šipka je rovna 3, pak zelená musí být rovna 1. Štěpán však podle svých slov hodnotu zelené šipky odhadl.

Š3 Během 1 minuty úlohu kompletně vyřešil.

#### **Fragment 28: Exp 0711**

##### **PROTOKOL**

0:24:07 Š2 3 a 4 je 7.

0:24:25 Š3 Takže to bude 2.

0:24:31 Š4 5 a 2 je 7.

0:24:37 Š5 Červená...

0:25:28 Š6 9, takže červená bude šestka.

0:25:38 Š7 A tady..

## EVIDENCE

- 0:24:11 Š2 doplňuje  $D = 7$ .
- 0:24:29 Š3 doplňuje  $\alpha = 2$ .
- 0:24:33 Š4 doplňuje  $C = 5$ .
- 0:24:37 Š5 přemýšlí nad hodnotou červené šipky, ukazuje na  $B$ , které nezná a přemýšlí.
- 0:25:26 Š6 doplňuje  $B = 9$  a  $\gamma = 6$ .
- 0:25:41 Š7 ukazuje na místo, kde má doplnit šipku, bere do ruky zelenou fixu a kreslí zelenou čáru na místo  $d$ , po chvíli ji dokresluje na šipku se správnou orientací.

## KOMENTÁŘ

Š7 Úloha je pro něj explicitní, je snazší než úloha předchozí, i přesto, že se zde opět objevuje princip sčítání šipek. Štěpán zde poprvé sám kreslí šipku místo čáry. Pravděpodobně pochopil, že šipka a její orientace má svůj význam.

## Fragment 29: Exp 0613

## PROTOKOL

- 0:15:13 Ex1 Tak, chýlíme se pomalu ke konci.
- 0:15:15 T1 Mlčí.
- 0:17:34 T2 To nedává smysl. Protože tady to musím... musí to bejt někde do čtyřky?... Když sem dam dvojku, tak potom sem... Jednička, tam to jednička... Dva...
- 0:18:28 T3 Jo, chápu. Oranžová dvojka. Trojka, jednička bude zelená. Jedna... plus jedna je tři... Jo, takže. Mhm?

## EVIDENCE

- 0:15:19 T1 Tobiáš začíná s kreslením fialové šipky  $c$  orientované k  $D$ . Následné hloubavé přemýšlení během řešení celé úlohy je doprovázeno povzdechy, podpíráním hlavy, mumláním si pro sebe, ukazováním po papíře, tčkáním očima po všech částech úlohy, občasným pohledem do kamery či na experimentátora. Několikrát se Tobiáš chystá zapsat nějaký údaj, vždy si to však rozmyslí.
- 0:17:34 T2 ukazuje na  $C$ ,  $D$ ;  $C$ ,  $B$ . Podívá se na experimentátora, na kameru, je zjevné, že si neví rady a žádá o nápovědu, té se mu však nedostává.
- 0:18:25 T2 Tobiáš si zkouší psaním ve vzduchu nad papírem dosadit čísla dvě a tři za  $C$ .
- 0:18:28 T3 dochází k pochopení. Dopisuje hodnotu oranžové šipky  $\beta = 2$ . Ukazuje na  $C$ ,  $B$ , dopisuje hodnotu zelené šipky  $\alpha = 1$  a nakonec  $B = 2$  a  $C = 3$ . Na Tobiášovi je vidět radost z nalezení řešení úlohy.



## KOMENTÁŘ

**T2** Tobiáš se polohlasem dělí o své úvahy. Když však nevidí žádnou pomoc ze strany experimentátora, opět pokračuje potichu. Experimentátor záměrně nedával Tobiášovi nápovědu, byl rád, že je úloha pro Tobiáše náročná, přestože on sám ji jako příliš náročnou nevidí. Očekával radost z objevení problému a vyřešení úlohy tak, jak to již u několika předchozích úloh proběhlo.

Úloha je zaměřena na odhalení principu sčítání šipek. Tobiášova „obtíž“ je v tom, že chtěl na řešení přijít logicky, nikoli zkoušením. Je však vidět, že nakonec přece zkouší dosadit čísla 2 a 3 za C, což ho posune k vyřešení úlohy. Myslím, že se zde nakonec jednalo skutečně o strategii pokus-omyl, nikoliv o odhalení principu sčítání šipek.

### 3.2.7 Fixace na předchozí zkušenost

Předchozí zkušenosti žáků hrají velkou roli v jejich učení, jednání, řešení úloh a podobně. Často se však fixace na předchozí zkušenosti stala problémem při řešení úloh žáky.

Ve fragmentech 30, 31 a 32 se odehrály situace, kdy žáci automaticky přemýšleli pouze nad čísly, která se objevila v předchozích úlohách. Ve fragmentu 30 žákyně hledá chybu v zadání úlohy, protože má v hlavě pouze čísla menší než 5, která však nevyhovují řešení úlohy.

Ve fragmentu 31 se objevuje přímé zdůvodnění žákova doplnění čísla 4 slovy: „protože tu není“<sup>3</sup>. Tentýž žák je pak v další úloze překvapen přítomností čísla 5, které dosud v pavučinách nebylo (viz fragment 32).

Fragment 33 ukazuje, jak těžké je oprostít se od předchozí zkušenosti. Žákyně zde hned na začátku správně určila číslo  $B = 2$ . Experimentátor ji následně zkouší a ptá se, zda číslo doplnila správně. Žákyně znejistí, v její hlavě se ukládá zkušenost, že  $B \neq 2$ , jinak by se jí experimentátor neptal. Od této chvíle o  $B = 2$  neuvažuje, proto se nemůže dobrat řešení.

Ve fragmentu 34 lze vidět, jak je žák fixován na směr šipek odshora dolů. V tomto případě však nelze jednoznačně říct, zda se jedná o fixaci na základě předchozí zkušenosti či o tendenci postupovat odshora dolů.

---

<sup>3</sup> V předchozí úloze byla čísla 1, 2, 3, 4, v této úloze jsou čísla 1, 2, 3 a jedno číslo neznámé.

### Fragment 30: Exp 0209

#### PROTOKOL

- 0:22:58 K3** Tak, už mám v jednom jasno. Tři a kolik mi chybí do pěti, to jsou dva, takže fialová šipka budou dva. Tady ... Tady je to zase špatně. Protože ta šipka by musela být... vést asi sem.
- 0:23:24 Ex4** Jak to?
- 0:23:25 K4** Protože to by muselo být na odčítání. Kdyby ta šipka vedla...
- 0:23:32 Ex5** Teď ti nerozumím. Zkus to ještě jednou vysvětlit, nebo nějak jinak.
- 0:23:37 K5** No protože, kdyby tady bylo nějaký číslo, tak vlastně ono by ta šipka narážela pořád do něj, protože ona by neměla místo, aby to šlo k té pětce. Takže ta šipka by musela bejt na druhou stranu.
- 0:23:49 Ex6** A ono to nemůže jít od pětky sem?
- 0:23:52 K6** To by muselo bejt na odčítání.
- 0:23:54 Ex7** Jak to, k pětce můžu přičíst nějaké číslo, nebo ne?
- 0:23:58 K7** Možná jo. Tady možná bude jednička, protože jedna a dva, to je fialová šipka, jsou tři. Jedna a kolik mi chybí do pěti? To jsou čtyři, takže to je oranžová šipka. Tady, tady tři a čtyři je sedm, protože tady to je čtyřka. Pět a dva je sedm, protože tady to je dvojka. A ta zelená ta musí bejt – jedna a kolik mi chybí do sedmi, to je šest.

#### EVIDENCE

- 0:23:02 K3** ukazuje na  $C$ ,  $e$ ,  $D$  a píše hodnotu fialové šipky  $\alpha = 2$ .
- 0:23:16 K3** ukazuje na  $D$  a zaráží se, zpochybňuje své řešení.
- 0:23:37 K5** ukazuje na  $B$ ,  $D$ .
- 0:24:04 K7** ukazuje na  $A$ ,  $b$ ,  $C$  a píše  $A = 1$ , dále ukazuje na  $A$ ,  $D$  a píše  $\beta = 4$ .
- 0:24:32 K7** po chvíli přemýšlení se vrací k číslu  $B$  a ukazuje na  $C$ ,  $d$ ,  $B$  a píše  $B = 7$ .
- 0:24:39 K7** ověřuje si zapsané  $B = 7$  na situaci  $D$ ,  $f$ ,  $B$ .
- 0:24:44 K7** píše hodnotu zelené šipky  $\gamma = 6$ .

#### KOMENTÁŘ

**K3** Kristýnka začíná jediným jasně daným momentem, tedy doplněním hodnoty fialové šipky. Na základě tohoto zjištění by bylo snadné doplnit celou úlohu.

**K3** U této úlohy kupodivu Kristýnku překvapila vyšší čísla. Nejprve se dokonce domnívala, že je v úloze opět chyba a všemožně odůvodňovala své pochybnosti. V její hlavě byla zkušenost s pavučinami, ve kterých se dosud neobjevila vyšší čísla než 5.

**K4** Uvažuje o šipce, která by odčítala – pak by tam mohla doplnit číslo menší než 5, jak by chtěla.

**K7** Strategicky přešla k jiné části úlohy.

### Fragment 31: Exp 0102

#### PROTOKOL

- 0:02:08 Ex1** Tahle byla vzorová a já ti teď dám úlohu, kde už musíš něco doplňovat. Podívej se na tu úlohu. Co myslíš že budeš doplňovat a kam?
- 0:02:25 M1** 4 sem do kolečka.
- 0:02:28 Ex2** A proč 4?
- 0:02:30 M2** Protože tady nikde 4 není. A navíc  $1 + 3$  jsou 4; 1, 2, 3 a tady mi chybí 4 a pak tady máme  $1 + 2$  jsou 3 a  $2 + 2$  jsou 4.

#### EVIDENCE

- 0:02:25 M1** ukazuje na  $B$ .
- 0:02:30 M2** ukazuje na pavučinu, potom konkrétně na  $A$ ,  $\gamma$ ,  $B$ , následně na cestu zelených šipek  $A$ ,  $D$ ,  $C$ ,  $B$ , nakonec na cesty  $A$ ,  $b$ ,  $C$ ;  $D$ ,  $f$ ,  $B$ .

#### KOMENTÁŘ

**M1** Hned ví, ani chvíli nepřemýšlí, úloha je pro něj zcela explicitní.

**M2** Míša nejprve řekl číslo 4 proto, že v úloze toto číslo chybělo a on z předchozí úlohy věděl, že by tam mohlo být. Poté však ve vysvětlení uvádí i racionální důvod, tedy jak na číslo 4 lze přijít, jak ho vypočítat.

### Fragment 32: Exp 0111

#### PROTOKOL

- 0:11:03 Ex1** Tak, podívej se ještě na tento.
- 0:11:08 M1** Tady chybí 1.
- 0:11:13 Ex2** Proč 1?
- 0:11:16 M2** Protože tady máme  $2 + \dots$  co?
- 0:11:23 M3** Ne pětka, protože tady začínáme od dvojky, tady není nikde jednička a dva plus jedna jsou tři a tři plus jedna jsou 4 a čtyři plus jedna jsou pět.

#### EVIDENCE

- 0:11:08 M1** ukazuje na  $B$ .
- 0:11:16 M2** ukazuje na  $A$ ,  $D$ , pak se zarazí.
- 0:11:23 M3** opravuje své tvrzení, ukazuje na  $B$ , pak na  $A$ ,  $c$ ,  $D$ ;  $D$ ,  $e$ ,  $C$ ;  $C$ ,  $d$ ,  $B$ .

## KOMENTÁŘ

**M3** Míša si osvojil fakt, že šipky o hodnotě 1 tvoří se svými čísly postupku. Toto si několikrát ověřil, proto si tím je jistý a vyhledává to v úloze, je-li nejistý v řešení. Tato úloha pro Míšu představuje první překvapení, objevuje se zde jiné číslo, 5.

### Fragment 33: Exp 0208

## PROTOKOL

- 0:12:06 Ex1** Ták, další. Tady budeš zase doplňovat čísla a hodnoty šipek, ale tady jsi znala aspoň jednu, tady neznáš žádnou. No tak schválně, jestli si s tím poradíš.
- 0:12:14 K1** (současně): A šipky.
- 0:12:19 K2** Takže já začnu zase od toho cílového bodu, od kterého to budu rozvíjet. Takže jedna a kolik mi chybí do čtyř? To jsou tři, takže fialová šipka budou tři. Potom... Jedna... Tady už je to trochu těžší. Těch možností může být víc. Tady můžou být dva, ale zároveň i... Tady asi udělám dvojku, protože trojka by tam nešla, protože trojka už musí mít fialovou šipku. Vlastně už jiný číslo by tam nešlo, protože od pětky tady bych musela odčítat. Takže tohle bude dvojka.
- 0:13:57 Ex2** A ještě se tě zeptám, mohla by tady být trojka?... Tys říkala, že tady nemůže být pětka.
- 0:14:04 K3** No nemůže, protože zelená už... protože trojka už má vlastně šipku fialovou.
- 0:14:14 Ex3** Trojka má hodnotu. Trojka má hodnotu kolik?
- 0:14:19 K4** Tři.
- 0:14:20 Ex4** Fialová šipka má hodnotu tři, výborně. A teďko si napsala, že zelená šipka má hodnotu dva. Odpovídá to?
- 0:14:27 K5** Vlastně...
- 0:14:28 Ex5** Klidně to škrtni nebo vygumuj, jestli to půjde, tak to klidně škrtni.
- 0:14:35 K6** Aby to nebylo ošklivé.
- 0:14:44 Ex6** Tak co s tím?
- 0:15:02 K7** Ta oranžová šipka tady.
- 0:15:05 Ex7** Tak tys řekla dobře, že tady nemůže být jaké číslo?
- 0:15:07 K8** Trojka.
- 0:15:08 Ex8** Trojka tam nemůže být?
- 0:15:09 K9** Ne, protože tady nemám fialovou šipku. I když může.... Může tam být, protože...
- 0:15:23 Ex9** Tak mi řekni, které číslo by tu nemohlo být, třeba?
- 0:15:26 K10** Čtyřka určitě.
- 0:15:28 Ex10** Mhm. Dobře, nebo – jaké by tu ještě nemohlo být?
- 0:15:29 K11** Pětka... Od pětky až nahoru.

- 0:15:35 Ex11 Takže jaká čísla by tam mohla být?
- 0:15:37 K12 Jednička by tam mohla bejt.
- 0:15:40 Ex12 Mohla?
- 0:15:40 K13 Ne, nemohla, nemohla, protože tady bychom měli tři a tady.... Takže tady bude asi ta trojka. Takže tady bude dvojka. Jsem to udělala dobře. Teďka... Tři a kolik je... Jo, takže tady bude pětka, protože tři a dva jsou pět. Jenže to by mi zase nevyšlo, takže... Pět a dva by bylo sedm, takže...
- 0:16:38 Ex13 Co s tím?
- 0:16:41 K14 Tak musí bejt ta dvojka. Jenže to taky nemusí bejt dvojka ta zelená šipka, takže...
- 0:17:12 K15 Leda že by ta šipka byla obráceně.
- 0:17:14 Ex14 Ale tady je to dobře, tady jsem to teďka zkontrolovala všechno a chybu tam nemám.

#### EVIDENCE

- 0:12:20 K2 ukazuje na  $A$ ,  $D$ ,  $c$ ,  $\gamma$ , píše  $\gamma = 3$ .
- 0:12:39 K2 přemýšlí, jak dál. Chvíli ukazuje na  $B$ . Hraje si s tužkou, která jí občas upadne na zem. Prostředí je vyrušováno vcházením učitelů do kabinetu.
- 0:13:35 K2 ukazuje na  $B$ , chce tam doplnit 2, ukazuje na  $\gamma$ .
- 0:13:55 K2 píše  $B = 2$ .
- 0:14:08 K2 povídá a zároveň píše chybně hodnotu zelené šipky  $\alpha = 2$ .
- 0:14:11 Ex3,4 ukazuje na fialovou šipku  $c$ .
- 0:14:22 Ex4 ukazuje na zelenou šipku  $a$ .
- 0:14:28 K5 gumuje napsané číslo  $B = 2$ .
- 0:14:55 K6 gumuje i hodnotu zelené šipky  $\alpha = 2$ , která byla chybná.
- 0:15:00 K7 ukazuje na šipku  $f$ .
- 0:15:06 Ex7 ukazuje na  $B$ .
- 0:15:48 K13 píše chybně  $B = 3$ .
- 0:15:57 K13 píše chybně  $\alpha = 2$ .
- 0:16:19 K13 ukazuje na  $C$ , kam chce doplnit číslo 5, zarazí se však, protože zjišťuje, že by jí to nesedělo.
- 0:16:46 K14 Dlouhé přemýšlení, spekulování.
- 0:17:11 K15 ukazuje na šipku  $d$ .

#### KOMENTÁŘ

K1 Opět hned volí místo, od kterého začne řešit. Místo však, pravděpodobně omylem, nazývá cílovým bodem.



Tato úloha pro ni je konečně obtížnější. Je zde jednoduchá strategie (dráha šipek), kterou však neodhaluje. Zkouší alternativy, požívá při úvahách kondicionál.

Správně říká, že v dolním rohu nemůže být 5. Zkouší na toto místo zapsat dvojku. Mylně říká, že trojka tam být nemůže, protože trojku už má fialová hodnota - to je však míchání čísel a hodnot šipek dohromady.

**K2** Správně říká, že B může být číslo 2.

**Ex2** Experimentátor svým dotazováním dívku spíše spletl. Vstoupil do jejích myšlenkových pochodů, a proto Kristýnka dělá chybu (k zelené šipce zapsala hodnotu 2), se kterou se i nadále veze.

**K4** Kristýnka pod nátlakem gumuje číslo B, které měla správně napsané. Jedná příliš zbrkle, nechá se snadno zmást.

**K9** Nyní si uvědomuje chybnou domněnku s trojkou v dolním rohu a hodnotou 3 fialové šipky.

**K11** Kristýnka uvažuje velmi logicky, je schopna říct, která čísla nemohou být doplněna za B a zdůvodnit proč.

**K13** Přestože Kristýnka správně vytipovala čísla, která by mohla a nemohla být doplněna za B, neověřuje si svou volbu a chybně doplňuje  $B = 3$ , což způsobí další problémy v řešení.

Experimentátor ji neopravuje. Nechává ji, ať si sama na chybu přijde.

**K14** Správně usuzuje, že jestliže jí nevychází  $B = 3$ , pak musí být  $B = 2$ , nicméně je už tak zmatená, že i o  $B = 2$  pochybuje, aniž by si to vyzkoušela. Její pochyby jsou způsobeny tím, že již udělala zkušenost s doplněním  $B = 2$  a tato zkušenost skončila tím, že číslo 2 vygumovala. Má proto zafixováno, že  $B = 2$  být nemůže. Tuto její zkušenost bude těžké odbourat.

Na základě chyb, které se v předchozích úlohách objevily vinou experimentátora, uvažuje nad tím, že chyba může být opět v úloze.

### **Fragment 34: Exp 0610**

#### **PROTOKOL**

**0:09:13 T1** Tady dvojka.

**0:10:12 T2** Tady je někde chyba.

**0:10:14 Ex1** A proč myslíš, že je tam chyba?

**0:10:18 T3** Hm... Myslím že... musím dát nějaké číslo... a to aby se rovnalo dva, to by musela bejt jednička, ale ta jednička je ze čtyřky ale...

**0:11:02 T4** Mínius tam nemůžu dát?

**0:11:04 Ex2** To je dobrá otázka. Tak zkus jak myslíš, že by to mohlo bejt. Zkus to vyřešit úplně jak chceš. Klidně zkus i záporná čísla, mínius, jak myslíš.

**0:11:18 T5** Kdyby tady bylo něco, z toho jednička, tak plus jedna, tři plus jedna, čtyři.

**0:11:25 Ex3** Mhm...



(znovu si kreslím zadání úlohy, abych si sama vyzkoušela řešení...)

- 0:11:43 T6** Já sem blbej, že jsem... Tady musí bejt šestka. Já...(??)...Chápu to!
- 0:12:12 Ex4** Můžu se tě ještě zeptat, jak jsi nakonec přišel na tu šestku? Ta ti dělala trošku problém.
- 0:12:16 T7** Osm mínus dva je šest a tady je ta oranžová šipka.
- 0:12:19 Ex5** Mhm, mhm. A proč jsi na to do té doby nepřišel? Co, co ti tam dělalo problém?
- 0:12:24 T8** No protože já jsem si do té doby neuvědomil, že to, já jsem si myslel, že jenom odsud sem můžu a ne...
- 0:12:30 Ex6** Jasně, takže ty sis neuvědomil, že může jít ta šipka jakoby i opačně. No výborně, ale přišels na to.

#### EVIDENCE

- 0:09:10 T1** po krátkém zorientování v úloze bere do ruky oranžovou fixu a píše  $a = 2$ .
- 0:09:20 T1** dopisuje  $B = 8$ , dokresluje zelenou šipku  $a$  s orientací k  $B$ .
- 0:09:37 T1** Je zřetelné mírná frustrace, když neví, jak pokračovat. Podpírá si hlavu, kouká do kamery. Je však vidět hluboká soustředěnost a přemýšlení.
- 0:10:12 T2** ukazuje někam směrem k  $C$ .
- 0:10:18 T3** ukazuje na  $A, b; A, C, D$ . Tobiáš mluví velmi potichu, polohlasně, přerývaně, poměrně nejistě. Je zřejmé, že současně při vysvětlování přemýšlí nad způsobem řešení. Dále přemýšlí, prsty si ukazuje po papíře, šeptem si povídá sám pro sebe.
- 0:11:02 T4** Otázku o mínus pronáší s pohledem na experimentátora a s lehkým úsměvem.
- 0:11:04 Ex2** Experimentátor je otázkou zaskočen; především proto, že úloha není vůbec těžká. Správně však nápad ocení a pochválí.
- 0:11:18 T5** Ukazuje na hodnoty šipek,  $A, C, D$ . Tobiáš vysvětluje, kde si myslí, že je v zadání úlohy chyba - potřeboval by mít u některé šipky hodnotu jedna.
- 0:11:25 Ex3** ze strany experimentátora se Tobiášovi nedostává pomoci. Čeká, jak si Tobiáš se situací poradí.
- 0:11:43 T6** píše  $C = 6$ . Tobiáš chvíli přemýšlí, pak vítězoslavně prohlásí „chápu to“ a kreslí šipku  $e$  s orientací k  $C$ , poté šipku  $b$  s orientací k  $C$ .
- 0:12:16 T7** Zde Tobiáš vysvětluje výpočet, kterého si tak dlouho nevšiml. Ukazuje na  $B, a, C$ .
- 0:12:24 T8** Ukazuje na směr šipky  $e$ , u které si myslel, že může vést pouze k  $D$ , nikoliv naopak.

#### KOMENTÁŘ

**Ex2** Zde si experimentátor vzpomněl, že dotazy a nápady dětí musí být oceněny. Myslím, že zde byla situace docela vhodně zahrána „do autu“, zodpovědnost přenesena pouze na žáka, v jehož silách rozhodně je úlohu dořešit.

Přibližně uprostřed experimentu této úlohy jsem si znovu nakreslila zadání úlohy, abych si sama vyzkoušela řešení a přišla na obtíž, se kterou se potýká Tobiáš. Na žádný problém jsem však nenarazila.

**T5** Tobiášův omyl v sobě skrývá určitou hloubku myšlení. V situaci, kdy vidí číslo  $A = 2$  a od něj dvě možné cesty k číslu  $D = 4$ , cítí, že pokud přímá cesta je zastoupena  $c = 2$ , pak cesta přes dvě šipky, které nezná, by logicky mohla znamenat přes dvě šipky stejné barvy a hodnoty 1. Potom by číslo  $C$ , které je uprostřed oné druhé cesty, muselo být 3. Tobiáš zde vnímá princip sčítání šipek i vlastnost hledání jednobarevné cesty. Opomíjí zde však zbylou část pavučiny, která tuto jeho hypotézu vyvrací.

**T6** Tobiáš našel klíčový bod v pavučině, a to, že číslo  $C$  je zcela jasně určeno pomocí  $B$  a šipky  $d$ . Nyní je také schopen vidět, že lze dokreslit šipku  $e$  i směrem opačným, než jak o ní uvažoval.

**Ex5** Toto byla experimentátorova otázka, kterou může dítě dosti těžko zodpovědět. S ohledem na vysokou inteligenci žáka jsem však vyzkoušela, zda příčinu svého zavání dokáže Tobiáš vysvětlit. Mé očekávání se potvrdilo.

### 3.2.8 Přítomnost nuly

Nula je číslo, které je často ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ opomíjeno. Pro některé žáky tak může být překvapením, když se s nulou setkají při řešení úlohy (viz fragment 35), pro jiné je nula číslo jako každé jiné a její použití je nijak zvlášť nepřekvapí (viz fragment 36).

Fragment 37 je ukázkou záměny nuly s částí pavučiny – prázdným kolečkem pro dopsání hodnoty šipky. Nejprve žák tedy počítá s nulovou hodnotou šipky, pak však přichází alert (zvýšená ostražitost), na základě kterého se raději ptá, zda se jedná skutečně o nulu.

#### Fragment 35:Exp 0214

##### PROTOKOL

**0:43:15 Ex1** Dobře, tak úplně poslední příklad. Máme tady... Tady máme dokonce dvanáctku.

**0:43:23 K1** Jéé! Tak, tady už, tady už bude muset být... nula.

**0:43:36 Ex2** Jakto že nula?

**0:43:38 K2** Protože tady kdybysme to dali, tak nula, tady by třeba... tady musím přičíst čtyři. Tady je třeba jedna a přičtu čtyři, to by bylo pět. Dva a čtyři to by bylo šest. Tři a čtyři sedm, takže tady pasuje jediná nula, ke který když přičtu čtyři, tak by vzniklo čtyři. Zkusím napsat. Světle... Takže ta oranžová šipka by mohla být dvanáct. Tady ta zelená by byla... by mohla být osmička. Tady by byla

osmička. A čtyři a ... mi chybí... Fialová... No vychází mi to tak. Tady vlastně nula a kolik mi chybí do čtyř, to jsou čtyři. Nula a kolik mi chybí do dvanácti, to byla ta oranžová šipka. Tady to obtáhnu. No a do osmi mi chybí osm, takže tady by byla osm. Čtyři a kolik mi chybí do osmi, to by bylo čtyři, takže fialová šipka. A osm, kolik mi chybí do dvanácti, tak by byly zase čtyři, takže taky oranž... teda žl... fialová šipka.

#### EVIDENCE

- 0:43:21 K1 reaguje udiveně na číslo 12.  
0:43:38 K2 ukazuje na  $B$ ,  $\alpha$ .  
0:44:01 K2 píše  $B = 0$ ,  $\gamma = 12$ ,  $\beta = 8$ ,  $A = 8$ .  
0:44:36 K2 obtahuje dosud napsaná čísla a znovu zdůvodňuje.  
0:45:08 K2 ukazuje na  $C$ ,  $A$  a kreslí fialovou šipku  $b$  orientovanou k  $A$  a fialovou šipku  $c$  orientovanou k  $D$ .

#### KOMENTÁŘ

K1 Přišla na přítomnost nuly. Z toho měla nejspíš radost, proto zaujatě vysvětluje, proč tam ta nula musí být.

Úloha opět nebyla příliš složitá.

#### Fragment 36: Exp0612

#### PROTOKOL

- 0:13:49 Ex1 Tak zkusíme tady...  
0:13:51 T1 Mlčí.  
0:14:56 Ex2 Tak, jak přišel na to, že tam bude ta osmička?  
0:15:01 T2 Čtyři... Čty... Čtyři, aby to šlo na dvanáctku... čtyři do dvanácti je osm.  
0:15:09 Ex3 Výborně, takže sis zjistil zelenou šipku.

#### EVIDENCE

- 0:13:54 T1 píše  $B = 0$ , hned poté dopisuje hodnotu oranžové šipky  $\gamma = 12$ .  
0:14:31 T1 po několikavteřinovém přemýšlení dopisuje hodnoty  $\beta = 8$ ,  $A = 8$ , kreslí fialovou šipku  $c$  s orientací k  $D$  a fialovou šipku  $b$  s orientací k  $A$ .  
0:15:01 T2 ukazuje na  $C$ ,  $e$ ,  $D$ .

## KOMENTÁŘ

**T1** Tobiáše nezaskočí ani přítomnost čísla nula, ani čísla přesahující číslo 10. Úloha byla pro Tobiáše snadná, ač experimentátor předpokládal zaváhání nad doplněním málo používaného čísla – nuly.

### Fragment 37: Exp 0903

## PROTOKOL

**0:01:28 D1** Ehm, tady je 3. Tohle je nula?

**0:01:50 Ex1** Tam máš něco doplnit, to je prázdné kolečko, to nevíš, kolik to je.

## EVIDENCE

**0:01:28 D1** otevírá pero a vepisuje  $B = 3$ .

**0:01:42 D1** vepisuje  $A = 3$ .

**0:01:50 Ex1** objasňuje, že se nejedná o nulu, ale o prázdné kolečko.

## KOMENTÁŘ

**D1** Píše chybně číslo  $A = 3$ . Proč udělal tuto chybu se objasní po jeho otázce, zda hodnota oranžové šipky je nula. David si to zprvu myslel, až po tom, co mu pavučina nesedí, ptá se, zda je to opravdu nula.

### 3.2.9 Fixace čísla

Fixace čísla se projevuje ve chvíli, kdy je pro žáka nějaké číslo dominantní; převažuje tak v jeho krátkodobé paměti, což se promítne i do žákova slovního či písemného vyjádření. Zpravidla to bývá číslo, které právě vypočítal.

Ve fragmentu 39 žák po delší době zjistil hodnotu oranžové šipky, proto po jejím dopsání zapsal stejné číslo i za  $A$ .

Ve chvíli, kdy žák zapisuje číslo, je v jeho hlavě plně přítomné pouze toto číslo. Fragment 38 ukazuje, že není vhodné pokládat žákovi otázky ve chvíli, kdy se soustředí na něco jiného. Žákyně se zde soustředí na číslo  $A = 4$ , čímž je ovlivněna její odpověď.

### Fragment 38: Exp 0207

#### PROTOKOL

0:11:31 K4 Jo, čtyřka to bude, protože dva a kolik mně chybí do toho daného čísla, to jsou, je tady fialová šipka, takže dva a to budou čtyři.

0:11:43 Ex5 Takže ta zelená šipka má hodnotu jedna nebo čtyři?

0:11:46 K5 Čtyři. Ne. Jedna. No, jedna.

#### EVIDENCE

0:11:31 K4 ukazuje na  $C$ ,  $b$ ,  $A$ ,  $\beta$  a píše  $A = 4$ .

0:11:52 K5 píše  $\alpha = 1$ .

#### KOMENTÁŘ

K5 K jejímu omylu (prvně řekla 4) došlo nejspíš proto, že nyní do prázdného okna psala číslo 4, které se jí zafixovalo.

### Fragment 39: Exp 0903

#### PROTOKOL

0:02:39 D2 Tady musí být...jo... tady už...ted' už myslím.

#### EVIDENCE

0:02:09 D2 dopisuje  $\alpha = 6$ .

0:02:13 D2 píše  $A = 9$  a maže vepsanou 3.

0:02:25 D2 ukazuje perem na šipku  $f$ .

0:02:36 D2 vepisuje  $D = 9$ .

0:03:02 D2 maže hodnotu oranžové šipky  $\alpha$  a přepisuje ji na 3.

0:03:03 D2 maže  $A = 9$  a píše tam 3.

#### KOMENTÁŘ

D2 David nevnímá hodnotu šipky, má selektivní myšlení. Nevidí, že by měl 2 stejné hodnoty šipek a že pouze na základě zelené šipky může určit hodnotu oranžové. Nevím, proč napsal hodnotu oranžové 6, možná protože doplnil  $C = 3$  a  $3 + 6 = 9$ , což je hodnota fialové šipky.

D2 Chybné číslo vepisuje na základě chybného předchozího doplnění hodnoty šipky.

D2 Nyní se orientuje na hodnotu zelené šipky, podle ní doplňuje D. Chvíli váhá, protože si uvědomuje, že mu nebude sedět horní číslo, nicméně po kontrole rázně vepisuje  $D = 9$ .



**D2** Kontroluje a v duchu přepočítává pavučinu, ví, že udělal někde chybu.

**D2** Spočítal, že chybu udělal v hodnotě oranžové šipky, na což přišel na základě šipky zelené a čísla A. Přepisuje nejprve hodnotu oranžové šipky, což způsobí, že v jeho hlavě je nyní číslo 3, které také chybně doplní za A.

### 3.2.10 Práce s chybou v zadání úlohy

Chyba v zadání úlohy může být použita záměrně jako diagnostický prostředek zjišťující hloubku myšlení žáka. Během experimentů došlo k nezáměrným chybám v zadání několika úloh, na kterých je však možné sledovat jednání žáků.

Fragmenty 40 a 41 jsou pochází ze stejného experimentu. Zatímco v prvním fragmentu žákyně chybu pravděpodobně vidí, neodvažuje se ji chybou nazvat. Ve druhém případě již po zkušenosti s chybou v zadání předchozí úlohy konstatuje, že i v této úloze je chyba.

Fragment 42 ukazuje dobrý vhled žáka do úlohy; zjistil, že úloha má dvě možná řešení. Zde se chyba v zadání úlohy proměnila v dobrý diagnostický prostředek.

#### Fragment 40: Exp 0201

##### PROTOKOL

**0:01:34 K8** Tady 3 a 1 jsou 4, takže jsem zase přičetla jedničku. Tady jedna, protože je to oranžová šipka, tak přičtu 3, tak to je 4. A 4, tady přičtu 2, takže to je... Počkat, tady je trošku zrada, protože tady... Takže to z té dvojky je 2 + 2 jde na čtyři.

**0:02:02 Ex9** Jo, ale ta šipka je obráceně...

**0:02:04 K9** Nó, jo. Tak ještě 1 a 2 jsou 3.

**0:02:11 Ex10** Tak já ti to tady prozradím, tady jsem udělala já chybu. Tady má být šipka na druhou stranu, protože jinak bychom to musely nějak odčítat, že jo.

**0:02:18 K10** No právě...

**0:02:19 Ex11** Tady jsem udělala chybu, omlouvám se. Takže už je to jasný, teď? Můžeme na další?

**0:02:26 K11** Mhmm.



## EVIDENCE

**0:01:34 K8** ukazuje na  $B, D; C, \gamma, D; D, \beta$ , najednou se zaráží, nevychází to. Ukazuje na šipku  $c$  směřující k  $A$ , pak ukáže na  $A, D$ .

**0:02:04 K9** ukazuje na  $C, A, B$ .

**0:02:11 Ex10** experimentátor přepisuje směr šipky  $c$  tak, aby směřovala k  $D$ .

## KOMENTÁŘ

**K8** Podrobně vysvětluje co a jak, protože experimentátor to tak chce slyšet. Kristýnka odhalila chybu, ale pravděpodobně si nebyla jistá, zda je chyba v úloze nebo v jejím řešení. Na základě nedostatku zkušeností s experimentátorem a úlohou se neodvažuje nahlas říct, že v úloze je chyba.

**K9** Experimentátor zde Kristýnku zmátl, což zapříčinilo, že se opět vrátila k původnímu postupu – dvě sousední čísla, jejichž součet dá číslo třetí.

**Ex10** Experimentátor měl Kristýnku pochválit, že odhalila chybu.

**Ex11** Zde by bylo možné situaci zahrát do autu a předstírat záměrnou chybu. V tomto případě, kdy se jedná o první setkání žáka a experimentátora a navíc o první setkání s úlohou je vhodné, že experimentátor vzal chybu na sebe.

## Fragment 41: Exp 0203

## PROTOKOL

**0:03:54 K1** Jo, tady se doplňují i šipky. Jo, takže... Takže tady mám tři a kolik mi chybí do 4, to je jedna, takže jedničku mám tady, takže tady asi bude fialová šipka.

**0:04:29 K2** A tady mám jedna a kolik mi chybí do čtyř, to jsou 3, takže trojku mám tady oranžovou, takže udělám oranžovou šipku. Protože vlastně ji.... Ale tady je možnááá taky chyba. Protože jedna a kolik mi chybí do tří? To jsou 2 a tady je dvojka zelená.

**0:04:58 Ex2** Mhmm. Tak to se mi tam vloudil nějaký šotek... Takže jak by to tady muselo být správně?

**0:05:04 K3** Tady by to muselo být, že jedna a kolik mi chybí do tří, to by nebyla oranžová šipka ale zelená...

## EVIDENCE

**0:04:01 K1** ukazuje na  $A, D, a$  a kreslí fialovou šipku  $c$  orientovanou k  $D$ .

**0:04:29 K2** ukazuje na  $B, D, \gamma$  a chystá se nakreslit oranžovou šipku  $f$ , nicméně se zarazí a odhaluje chybu v pavučině (šipka  $a$  má mít barvu zelenou). Zdůvodňuje ukazováním  $n B, A, \beta, \gamma$ . Poté kreslí šipku  $f$  oranžovou orientovanou k  $D$ .

**0:05:03 K3** ukazuje na  $B, A, \gamma, \beta$ . Kreslí zelenou šipku  $a$  vedle chybné oranžové.

## KOMENTÁŘ

**K1** Šipku kreslí velmi pozorně a pečlivě propojuje jednotlivé tečky, což vypovídá o jejích vlastnostech.

**K2** Kristýnka je pozorná a všimla si nesrovnalosti, nyní už nahlas hovoří o tom, že je v úloze chyba. Kristýnka si nejprve ověřuje své tvrzení na jiné situaci, to svědčí o globálnosti jejího myšlení.

**Ex2** Experimentátor přiznává svou chybu a správně Kristýnku nabádá k tomu, aby ji opravila.

## Fragment 42: Exp 0607

### PROTOKOL

0:04:58 Ex1 Další.

0:04:59 T1 Mlčí.

0:05:29 T2 Tady už je víc možností jakoby.

0:05:31 Ex2 Mhm, jak to?

0:05:33 T3 Protože můžu dát jedničku zelenou i... ne nemůžu. Můžu?!

0:05:44 Ex3 Tak můžeš nebo nemůžeš?

0:05:45 T4 Můžu!

0:05:46 Ex4 Můžeš, výborně. Tak parádní postřeh. Tak tady ti řeknu, že si můžeš vybrat.

### EVIDENCE

0:05:09 T1 píše  $D = 4$ .

0:05:29 T2 Tázavě se podívá na experimentátora.

0:05:33 T3 ukazuje na  $A$ ,  $a$ ,  $\gamma$ . Znejistil nad svou úvahou.

0:05:46 Ex4 Za tento postřeh se dostalo Tobiášovi ze strany experimentátora patřičné pochvaly.

## KOMENTÁŘ

**T2** Po krátkém přemýšlení si Tobiáš všiml toho, čeho experimentátor ne, že úloha nemá jediné řešení, je zadána nejednoznačně! K hodnotám šipek  $a$  a  $\gamma$  je možné přiřadit hodnoty 1 a 3 libovolně, stejně jako dokreslení šipek  $b$ ,  $c$ ,  $d$  (zelené/fialové);  $f$  (zelená/fialová).

Nejednoznačné řešení může být voleno záměrně (ke zjištění žákovi pozornosti, všímavosti, hloubky myšlení), v každém případě by měl experimentátor o nejednoznačnosti dopředu vědět!

Tobiášovo odhalení více možností řešení poukazuje na jeho vhled do problematiky i hloubku jeho myšlení.

### 3.2.11 Klima experimentů

Klima je důležitým faktorem, který ovlivňuje úspěšnost řešení. Jako experimentátor jsem se během experimentů domnívala, že žáci se cítí při experimentu dobře, nicméně důkladný rozbor videonahrávek ukázal často něco jiného.

Nejčastějším narušením pozitivního klimatu byl experimentátorův nátlak na žáka, který se projevoval přesným opakováním frází, které experimentátor nepřímo vyžadoval. Fragменты 45 a 47 ukazují, že žáci se stále cítili povinni do detailu vysvětlovat a obhajovat svá řešení.

Jiné experimenty ukázaly, že negativně na žáka může působit i dlouhá doba mlčení. To způsobuje konflikt, kdy experimentátor je rád, že úloha konečně vyžaduje žákovu přemýšlení, ale zároveň žák se může cítit nepohodlně, že neví, jak úlohu vyřešit. Ukázalo se, že žáci si o pomoc neumí říci přímo, i přesto, že jim mnohdy byla možnost pomoci nabídnuta. Žák většinou volá o pomoc nepřímo, a to různými gesty, očním kontaktem, ale i nepřímo slovně. Jeden ze způsobů žádání o nápovědu lze doložit na fragmentu 49.

Experiment číslo 2, zastoupený fragmenty 43 – 46, nese několik znaků neuvolněné atmosféry. Ve 43. fragmentu je žákyně experimentátorem přesně dirigována, co má udělat, což mohlo mít za následek její obavu z toho, aby neudělala něco špatně (viz fragment 44). Ve fragmentu 46 žákyně může vnímat nabídnutou pomoc experimentátora jako vnucenou.

Klima experimentů může být narušeno také experimentátorovým jednáním se žákem, které je nepřiměřené věku a intelektu žáka. Ukázkou je fragment 48, ve kterém experimentátor ve snaze žáka povzbudit říká nepravdu, na kterou žák velmi trefně reaguje.

Jedním z faktorů ovlivňujících klima experimentů bylo také natáčení na kameru, které každý žák vnímal trochu jinak.

#### Fragment 43: Exp 0203

##### PROTOKOL

0:05:11 Ex3 Výborně, tak ji tam oprav. Supr, a tamtu ještě škrtni, protože ta je špatně. Tak tu oranžovou klidně tou zelenou můžeš škrtnout. Táák, paráda. Ty už i opravuješ chyby takhle, vidíš to.

## KOMENTÁŘ

Ex3 Experimentátor by neměl tak direktivně nařizovat, jak má Kristýnka chybu opravit.

### Fragment 44: Exp 0206

## PROTOKOL

0:08:58 Ex1 Tak, další příklad. Teďko zas bude trošku jinej, protože teďko nám chybí už i čísla.

0:09:02 K1 Čísla. Ty mám doplňovat tužkou?

0:09:06 Ex2 Tužkou můžeš, mhm.

## KOMENTÁŘ

Ex1 Experimentátor stále zaměňuje pojmy příklad a úloha.

K1 Dotaz Kristýnky může svědčit o ne naprosté uvolněnosti.

### Fragment 45: Exp 0207

## PROTOKOL

0:10:40 K2 A tady si to ještě můžu zkontrolovat, že tři, vlastně to už přijdu k dalšímu číslu, protože tři a kolik mi chybí do pěti a fialová šipka je tady ještě nevyplněná, takže to bude dva. A čtyři, tady bude čtyřka, protože čtyři a kolik mi chybí do pěti je jedna. A tady nemáme ještě jedničku, takže jednička bude zelená šipka.

## EVIDENCE

0:10:44 K2 ukazuje na  $C$ ,  $D$ ,  $\beta$  a píše  $\beta = 2$ .

0:11:02 K2 ukazuje na  $A$ ;  $A$ ,  $D$ ,  $\alpha$ .

## KOMENTÁŘ

K2 Intuitivně doplňuje hodnotu šipky 1, která chybí. Správně přišla na to, že tam musí být 1, nicméně to nijak nezdůvodňuje, proto chce experimentátor poukázat na to, že hodnotu zelené šipky  $\alpha$  zatím neznáme, Kristýnku tím však v první chvíli mate.

### Fragment 46: Exp 0208

## PROTOKOL

0:18:26 Ex16 Chceš malinko napovědět, nebo ne?

0:18:28 K18 Jo, tak radši jo, protože...

### KOMENTÁŘ

Ex16 Pomoc je spíše vnucena než nabídnuta, o čemž svědčí Kristýnčina váhavá reakce.

### Fragment 47: Exp 0113

#### PROTOKOL

0:14:12 M6 A tady mám 2 plus 2 jsou 4, to jsem si řekl, protože 2 a kolik mi chybí do 4.

#### EVIDENCE

0:14:12 M6 hledá místo, odkud by určil hodnotu zelené šipky  $\beta$ , ukazuje na C, d, B.

### KOMENTÁŘ

M6 Klima experimentu není zcela uvolněné, Míša se cítí povinen stále něco vysvětlovat, dokud nedostane potvrzení od experimentátora, že řeší správně.

### Fragment 48: Exp 0710

#### PROTOKOL

0:22:20 Ex2 Tak, ty jsi to zase doplnil tak rychle, můžeš mi jenom říct, jak jsi na to tak rychle přišel?

0:22:28 Š4 No rychle ne!

### KOMENTÁŘ

Ex2 Nepřiměřená otázka, Štěpán úlohu nevyřešil rychle, což sám komentuje.

### Fragment 49: Exp 0613

#### PROTOKOL

0:17:34 T2 To nedává smysl. Protože tady to musím... musí to bejt někde do čtyřky?... Když sem dam dvojku, tak potom sem... Jednička, tam to jednička... Dva...

#### EVIDENCE

0:17:34 T2 ukazuje na C, D; C, B. Podívá se na experimentátora, na kameru, je zjevné, že si neví rady a žádá o nápovědu, té se mu však nedostává.

### KOMENTÁŘ

T2 Tobiáš se polohlasem dělí o své úvahy. Když však nevidí žádnou pomoc ze strany experimentátora, opět pokračuje potichu. Experimentátor záměrně nedával Tobiášovi



nápovědu, byl rád, že je úloha pro Tobiáše náročná, přestože on sám ji jako příliš náročnou nevidí. Očekával radost z objevení problému a vyřešení úlohy tak, jak to již u několika předchozích úloh proběhlo.

### 3.3 Kvantitativní experiment

Po sérii experimentů kvalitativních, prováděných s jednotlivci, mne napadlo, že by mohlo být zajímavé a pro výzkum přínosné udělat i experiment kvantitativní, tedy s celou třídou žáků.

Toto rozhodnutí vneslo mnoho nejasností ohledně organizace experimentu. Bylo třeba sestavit promyšlenou postupně gradující kaskádu úloh, která by odrážela řešitelskou úspěšnost. Zásadní však bylo seznámení žáků s pavučinami. Nabízely se dvě možnosti: předložit žákům kaskádu s první úlohou vzorovou, na základě které by poté řešili ostatní úlohy; nebo seznámit žáky s pavučinami frontální formou, kdy by pod mým dohledem společně odhalovali principy v pavučině. Druhá z alternativ se jevila jako vhodnější z hlediska výsledku experimentu, minimalizuje totiž možnost nepochopení základních principů v pavučině.

Měla jsem k dispozici jednu vyučovací hodinu a 18 žáků 3. třídy ZŠ. Po krátkém seznámení s pavučinami dostal každý žák list papíru s kaskádou 14 úloh a vzorovou úlohou na začátku. Ve snaze předejít případnému opisování žáků byla kaskáda úloh dvojího typu. Lišila se pouze barvami šipek, kdy zelená a fialová šipka byly vzájemně prohozeny. Žáci však tuto nepatrnou odlišnost brzy odhalili.

Kaskáda začínala třemi úlohami na doplnění čísel, ve kterých si měli žáci ověřit základní pravidla pavučin. Poté následovaly tři úlohy kombinující doplnění různých parametrů seřazené dle jejich náročnosti. Sedmá úloha byla myšlena jako příprava na odhalení principu sčítání šipek potřebného pro vyřešení úlohy osmé. Čísla zde byla nahrazena znaky, které měly odvést žákovi pozornost od čísel a přivést žáka k lepšímu pochopení vztahů mezi šipkami. Osmá úloha obsahovala snazší typ principu sčítání šipek. Následující úloha využívala rovněž znaky, žáci však nyní měli možnost místo znaků doplnit i libovolná čísla. Úlohy 10, 11 a 12 byly třemi různými typy úloh vyžadujících řešení na základě principu sčítání šipek. Poslední dvě úlohy měly slovní zadání a zjišťovaly vzhled žáků do prostředí pavučinových úloh na základě vyřešení předchozí části kaskády.



### 3.3.1 Vyhodnocení výsledků kvantitativního experimentu

Z tabulek 2 a 3, které popisují úspěšnost žáků v řešení úloh, lze vyčíst několik skutečností. Celkově žáci vyřešili úspěšně 122 úloh. Neúplně vyřešených či nedodělaných úloh bylo 22 a pochybených či zcela chybných 54.

Mezi nejúspěšněji řešené úlohy patří úlohy 1, 2, 3, 4 a 8. Vysoká úspěšnost řešení osmé úlohy je překvapivá, je z ní patrné, že žáci pochopili základní podstatu principu sčítání šipek. Ostatní úlohy na tento princip zaměřené však ukazují, že žáci zmiňovaný princip nedokáží uplatnit ve složitějších úlohách.

Průměrně úspěšnými se staly úlohy 5, 6, 7 a 10 a nejméně úspěšné bylo řešení úloh 9 a 11. Úlohy 12 a 14 byly řešeny pouze několika žáky, přičemž úloha 12 byla řešena převážně úspěšně, zatímco úloha 14 spíše neúspěšně. V úloze 13 se objevila nezáměrná chyba v zadání, proto ji nebudu hodnotit.

Výsledky experimentu nejsou příliš překvapivé. Problémy, které se při řešení vyskytly, úzce souvisí se zjištěními z kvalitativních experimentů a potvrzují je. Jmenujme alespoň některé:

1. Umístění čísel v pavučině ovlivňuje náročnost jejího řešení; důkazem je převážně úspěšně řešená úloha 8, oproti úloze 11.
2. Orientace šipky je často špatně zakreslena díky své antisignální povaze; špatná orientace šipky se vyskytla u 5 žáků.
3. Směr šipky není pro některé žáky podstatný, kreslí pouze čáry; jev je patrný u dvou žáků.

Považuji za překvapivé, že hodnota šipky se ukázala stejně problematickým jevem jako dokreslení šipky, míněno se správnou barvou a orientací. Zatímco problémy s doplněním čísla se vyskytly ve 24 úlohách, s určením hodnoty šipky ve 47 úlohách a problémy s dokreslením šipky ve 46 úlohách (viz tab. 4).

Kaskáda úloh směřovala k pochopení principu sčítání šipek. Jak úspěšní byli žáci z tohoto hlediska? Pevně úspěšné řešení osmé úlohy ukazuje na prvotní pochopení tohoto principu. Jeho aplikace ve složitějších úlohách (úlohy 9, 10, 11, 12) však dělala většině

žáků problémy. Úloha 10 byla správně vyřešena osmi žáky, přičemž o její řešení se pokusili všichni. Úlohy 9 a 11 byly několika žáky vynechány a úlohu 12 řešilo pouze 5 žáků, z toho však 3 zcela úspěšně.

Pavučiny se symboly místo čísel se příliš neosvědčily. Žáci se pravděpodobně v jiném typu pavučiny nebyli schopni orientovat; jsou stále příliš fixováni na konkrétní čísla a nedokáží vnímat pouze vztahy mezi nimi. Potvrzuje to fakt, že mnoho žáků tyto úlohy vynechalo. Úspěšnost těch, kteří se je pokusili řešit byla mírně nadprůměrná.

Úlohu 14, odlišující se od ostatních svým slovním zadáním, většina žáků neřešila, částečně z časových důvodů. Mezi řešeními této úlohy se neobjevilo žádné zcela správné.

Ve třídě byli přítomni i tři žáci, kteří se již s pavučinami setkali. Byli to žáci David, Štěpán a Tobiáš, kteří se zúčastnili kvalitativních experimentů. Tobiáš svou předchozí zkušenost uplatnil a všechny úlohy vyřešil správně, pouze u 14. úlohy mu neseděl součet čísel dle slovního zadání. David byl také úspěšný, dopustil se pouze drobné početní chyby a vynechání jednoho údaje. Štěpán se zcela vyhnul řešení úloh 7 a 9. U ostatních úloh byl převážně úspěšný, s výjimkou úloh, ve kterých bylo třeba použít princip sčítání šipek, ten zjevně Štěpán uplatnit neumí. Ocenila jsem, že zde narozdíl od kvalitativního experimentu kreslil šipky, ne čáry. U orientace jedné šipky se dopustil chyby, z čehož však nelze vyvozovat žádný závěr.

Tab. 2: Tabulka úspěšnosti řešení jednotlivých úloh

	Žák	Úlohy													
		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
1	Adéla	a	a	a	b	a	a	-	a	-	a	b'	-	x	-
2	Adéla B.	a	a	a	a	a	c	d	a	e	d	b'	-	-	-
3	Ad'a	a	a	a	a	a	a	c	a	b'	d	a	a	-	e
4	Alice	a	a	a	b	e	c	-	c	-	c	d	-	x	e
5	Anička	a	a	a	a	a	a	-	b'	-	e	-	-	-	-
6	Barbora	a	a	a	a	c	c	a	a	e	a	a	a	-	c
7	David	a	a	a	a	a	a	a	a	b	a	a	c	x	-
8	Ema	a	a	a	a	a	c	b	a	-	a	b'	-	-	-
9	Julie	a	a	a	e	b'	c	d	d	b'	e	-	-	-	-
10	Magdalena	a	a	a	a	a	c	a	a	-	a	-	-	-	-
11	Majča	a	a	a	a	a	a	a	a	e	a	b'	-	-	-
12	Mariana	a	a	a	a	a	a	a	a	b'	e	-	-	-	-
13	Martina	a	a	a	a	c	c	a	a	b	a	e	-	-	-
14	Matěj	a	a	a	a	c	d	b'	d	-	b	b'	-	-	-
15	Monika	a	c	a	a	b	a	d	a	e	e	e	-	x	e
16	Stěpán	a	a	a	a	c	a	-	a	-	d	c	c	x	d
17	Tabík	a	a	a	b	b	a	-	a	-	d	-	-	x	-
18	Tobiáš	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	x	c

Vysvětlivky:

- a zcela správné
- b správné, ale neúplné (žák neumí chybějící údaj doplnit)
- b' správné, ale nedodělané
- c úplné, ne zcela správné
- d úplné, ale chybné
- e nedodělané, chybné
- neřešené
- x v úloze se vyskytla chyba v zadání, není proto hodnoceno řešení žáků

Tab. 3: Součty řešených úloh dle úspěšnosti

Hodnocení	Počet v jednotlivých úlohách														Celkem
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	
-	0	0	0	0	0	0	5	0	8	0	5	13	x	12	33
A	18	17	18	14	10	10	7	14	1	8	4	3	x	0	122
B	0	0	0	3	2	0	1	0	2	1	0	0	x	0	11
B'	0	0	0	0	1	0	1	1	3	0	6	0	x	0	12
C	0	1	0	0	4	7	1	1	0	1	1	2	x	2	20
D	0	0	0	0	0	1	3	2	0	4	1	0	x	1	12
E	0	0	0	1	1	0	0	0	4	4	1	0	x	3	14

Tab. 4: Počty jednotlivých problematických jevů

Hodn.	Jev	Počet výskytu v jednotlivých úlohách														Celkem
		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	
B <sup>4</sup>	číslo	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	-	0
	hodnota	-	-	2	3	1	-	1	-	2	1	-	-	x	-	10
	barva	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	x	-	1
	orientace	-	-	-	-	1	-	-	-	1	-	-	-	x	-	2
B'	číslo	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	5	-	x	-	6
	hodnota	-	-	-	-	1	-	1	1	3	-	5	-	x	-	11
	barva	-	-	-	-	1	-	-	-	3	-	5	-	x	-	9
	orientace	-	-	-	-	1	-	-	-	3	-	5	-	x	-	9
C	číslo	-	1	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	x	-	2
	hodnota	-	-	-	-	-	-	1	1	-	1	-	-	x	-	3
	barva	-	-	-	-	-	4	-	-	-	-	1	x	-	5	
	orientace	-	-	-	-	4	3	-	-	-	-	1	1	x	-	9
	součet	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	2	2
D	číslo	-	-	-	-	-	-	-	2	-	4	1	-	x	1	8
	hodnota	-	-	-	-	-	1	3	2	-	4	1	-	x	1	12
	barva	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	1	-	x	-	2
	orientace	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	x	-	1
	součet	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	1	1

<sup>4</sup> počty udávají, u kolika jedinců se problém vyskytl

E	není číslo	-	-	-	1	-	-	-	-	-	1	1	-	x	1	4
	chybné číslo	-	-	-	1	-	-	-	-	-	1	1	-	x	1	4
	není hodnota	-	-	-	1	1	-	-	-	3	1	1	-	x	1	8
	chybná hodnota	-	-	-	-	-	-	-	-	2	-	-	-	x	-	2
	není barva	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	x	-	1
	chybná barva	-	-	-	-	-	-	-	-	3	-	1	-	x	-	4
	není orientace	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	x	-	1
	chybná orientace	-	-	-	-	1	-	-	-	3	-	1	-	x	-	5

Výsledkům kvantitativního experimentu nelze přisuzovat plnou výpovědní hodnotu. Vzorek žáků nebyl dostatečně velký, nicméně výsledky lze porovnávat s kvalitativními experimenty, čímž se jejich výpovědní hodnota zvyšuje. Negativním vlivem bylo také občasné opisování a potřeba nápovědy u některých žáků, na kterou měli nárok. Výsledky experimentu považuji za smysluplné doplnění a potvrzení poznatků získaných z experimentů kvalitativních.



## 4 Účast na konferenci Dva dny s didaktikou matematiky

Na základě výzvy školitele jsem společně s PH v letním semestru roku 2008 prezentovala interaktivní formou úryvek jednoho z experimentů ve čtyřech paralelních seminářích Didaktiky matematiky III. Na naše vystoupení v seminářích navázalo společné vedení hodinové pracovní dílny na konferenci Dva dny s didaktikou matematiky 2009 v Praze pod názvem Videozáznam procesu řešení úloh „z Pavučin“.

Zatímco cílem prezentace v seminářích bylo seznámit posluchače s pavučinovými úlohami, s prováděním experimentů, ale především s analýzou experimentů; cílem konference bylo mimo jiné představit výsledky našeho výzkumu v oblasti řešení pavučinových úloh žáky prvního stupně základní školy.

Scénář pracovní dílny se odvíjel od přibližně 15 minutového úryvku videozáznamu řešení pavučinových úloh žákyní 4. třídy. Po úvodním představení matematického prostředí Pavučiny a seznámení posluchačů s pavučinovými úlohami jsme společně analyzovali videozáznam (diskutovali o klimatu experimentu, řešených úlohách, řešitelských strategiích žákyně, způsobu a hloubce jejího myšlení, o práci s chybou a podobně). Scénář obsahující naše komentáře a odpovědi posluchačů popisuje tabulka 5.

Přestože se dílny zúčastnili pouze 4 posluchači, z nichž jen jedna byla učitelkou prvního stupně základní školy, získaly jsme zajímavé podněty. Zcela originální byl popis pravidel uvnitř vzorové úlohy, kdy posluchačka uvedla, že pavučina vypadá jako stříh sukně, kde šipky různých barev naznačují délky švů a zipů.

Posluchače jsme, stejně jako při prezentaci v seminářích, nechaly pomocí ukázek pavučinových úloh vyhodnotit, který z parametrů je nejsnazší doplnit: číslo, hodnotu šipky nebo šipku. Posluchači se shodli na tom, že nejnáročnější je doplnění šipky; žák si musí uvědomit její hodnotu, podle které určí barvu, a její orientaci.

Na základě tvrzení posluchačů o náročnosti doplnění šipky jsme uvedly, že žáci často kreslí šipku se špatnou orientací nebo kreslí pouze čáru. Nad otázkou příčin tohoto jevu jsme společně diskutovali a shodli se na tom, že zakreslení šipky se správnou orientací je problematické vzhledem k antisignální povaze šipky.



Zajímavé pro mne osobně bylo jedno ze zdůvodnění, proč žáci kreslí čáry místo šipek. Žáci mohou i čarou vyjádřit orientaci, a to směrem, odkud kam čáru kreslí. Nevidí proto nutnost vyjadřovat orientaci šipkou.

Posluchači dále určili, že nejsnazší je doplnění hodnoty šipky, čímž se jejich tvrzení odlišovalo od našeho, ve kterém pokládáme za nejsnazší doplnění čísla. Důvodem je opět antisignální povaha šipky.

V závěru pracovní dílny, poté, co se posluchači s prostředím pavučinových úloh lépe seznámili, jsme po nich žádaly návrhy na využití pavučin v matematice. Konkrétně, se kterými oblastmi aritmetiky se žáci díky pavučinám mohou seznamovat. V uvedených odpovědích se objevilo násobení a dělení, nicméně v podobě šipek, které by byly činiteli či děliteli. Dalšími návrhy byly doplnění čísel racionálních, desetinných, odmocnin, ale také návrh na doplnění písmen místo čísel pro lepší vnímání vztahů v pavučině. Jeden z posluchačů viděl možnost využití pavučin v chemii.

Na závěr vyvstala otázka, jak pracovat s pavučinami, které jsou úzce závislé na barvu, pokud máme ve třídě barvosleпého žáka. Společnou odpovědí byla možnost různých tvarů šipek, buď jako šipky jednoduché, zdvojené či ztrojené, nebo jako šipky normální, vlnkovité, přerušované a další.

Účast na konferenci a vedení samostatné dílny pro nás bylo přínosnou zkušeností nejen z hlediska získání nových podnětů ze strany posluchačů, ale také z hlediska vlastního osobnostního rozvoje.

Tab. 5: Scénář prezentace videozáznamu procesu řešení úloh z pavučin<sup>5</sup>

Čas	Otázky	Komentáře, analýzy	Odpovědi posluchačů
0:00:12 – 0:02:24	<ul style="list-style-type: none"> <li>Jak hodnotíte klima?</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Klima experimentu není zcela uvolněné, tázání experimentátora je příliš rychlé, naléhavé.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>pozitivní, naléhavé</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Považujete zvolený postup (začít se vzorovou vyplněnou úlohou) pro začátek experimentu za vhodný?</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Pro žáka 4. třídy tento postup může být vhodný, problémem by mohl být u žáka nižšího ročníku.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>je to motivační, žák si na to musí přijít sám, odpovídá to konstruktivistickému pojetí výuky</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Co si myslíte o práci s chybou experimentátora?</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Přiznání chyby učitelem je dobré, je však možno s chybou záměrně pracovat a nechat žáka samotného objevit a opravit chybu.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>na Kristýnce je vidět váhání, chybu možná objevila / experimentátor mohl nechat Kristýnku na chybu přijít, ale mohlo by ji to zmást / chybou experimentátor upozornil na důležitost směru šipky</li> </ul>
0:02:24 – 0:03:17	<ul style="list-style-type: none"> <li>Co tady nebylo v pořádku z hlediska experimentátora?</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Experimentátor vstoupil do řeči Kristýnce.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>přerušení</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Co by to mohlo způsobit?</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Skok do řeči může způsobit přerušení myšlenkových procesů žáka.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ztrátu myšlenky</li> </ul>
0:03:17 – 0:03:41	<ul style="list-style-type: none"> <li>Jak hodnotíte verbální vyjadřování Kristýnky?</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Odpovídá tak, jak chce experimentátor slyšet.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>běžné, dle zkušeností učitelky prvního stupně se žáci vyjadřují při hodinách stejným způsobem</li> </ul>
0:04:27 – 0:05:23	<ul style="list-style-type: none"> <li>Co zde nebylo v pořádku?</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Oprava šipky je zde provedena direktivně.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-</li> </ul>
0:05:23 – 0:05:50	<ul style="list-style-type: none"> <li>Co udělá Kristýnka teď?</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Doplní hodnotu oranžové šipky.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>doplní hodnotu fialové šipky</li> </ul>
0:05:50 – 0:06:28	<ul style="list-style-type: none"> <li>O čem může svědčit Kristýnčino vyjádření: „Tady mám 1 na zelené šipce“?</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Neztotožnění hodnoty šipky s šipkou nebo je to jen otázka jazyka.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>předložka „na“ odpovídá grafické podobě, číslo opravdu „leží na šipce“</li> </ul>

<sup>5</sup> Videozáznam se vztahuje k experimentu 2; protokol experimentu je k nahlédnutí v příloze 2.

0:06:28 – 0:07:44	• Ovlivnil hluk soustředění Kristýnky?	• Neovlivnil, je hluboce soustředěna na svou práci.	• neovlivnil, soustředí se pouze na řešení úlohy
0:07:44 – 0:08:00	• O čem svědčí její postup s určením hodnoty fialové šipky?	• O koncepčnosti jejího myšlení nabyté z předchozích zkušeností.	• na základě zkušenosti z předchozích úloh, kdy hodnoty šipek byly vždy 1, 2, 3 není pro Kristýnku problém uhodnout, jaká bude hodnota fialové šipky
0:10:36 – 0:10:47	• upozornění	• Používá slova experimentátora: „Tady si to můžu zkontrolovat.“	• -
0:10:47 – 0:11:10	• Proč experimentátor skočil Kristýnce do řeči?	• Protože chtěl Kristýnku, které to výborně šlo, trochu zmást.	• chtěl žákyni zmást, vyzkoušet, jak nad úlohou přemýšlí
0:13:24 – 0:13:58	• Byl vstup experimentátora vhodný?	• Experimentátor Kristýnku naprosto zmátl a odvedl od řešení, které by bylo správné.	• učitelé často zkouší žáky zmást, nedomýšlí však následky

## Sebereflexe

Před dvěma lety, na konci letního semestru 2007, jsme byly společně s PH osloveny školitelem, zda neuvažujeme o psaní diplomové práce z didaktiky matematiky. V té době pro mne bylo psaní diplomové práce vzdáleným bodem, který se týká závěru studia, nicméně na základě této výzvy jsem začala o oboru a tématu diplomové práce přemýšlet.

Váhala jsem, zda mám psát diplomovou práci z matematiky, kterou jsem sice vždy měla ráda, ale která je náročná. Neuměla jsem si představit, jakým způsobem by mohla práce z matematiky od absolventa oboru Učitelství pro 1. stupeň ZŠ vypadat. Své obavy jsme diskutovaly s PH a společně došly k závěru, že je to jedinečná výzva, kterou je třeba přijmout. Veliký osobní přínos jsem spatřovala v možnosti spolupracovat se školitelem, jehož konstruktivistický přístup k výuce matematiky na 1. stupni ZŠ mne nadchl.

Školitelem nám bylo nabídnuto téma prostředí pavučinových úloh a možnost společně se podílet na výzkumu, přičemž výsledné diplomové práce se budou lišit ročníky prvního stupně ZŠ. Uvítaly jsme možnost spolupráce, která, jak se později ukázalo, byla plodná.

Počátkem diplomové práce bylo seznamování se s prostředím pavučin, jeho možnostmi a tvorbou úloh. Na radu školitele jsem si zapisovala všechny své objevy, poznámky, pocity, dojmy, otázky, které se vynořovaly, a postupně jsem si utvářela komplexní pohled na pavučiny, jak jsem se tehdy domnívala. Až první experimenty ukázaly, že jsem se s prostředím v té době pouze seznámila, nicméně o vzhledu do problematiky prostředí pavučin se hovořit nedalo.

Prvnímu experimentu předcházela podrobná příprava a tvorba kaskády úloh. Při předchozím zkoumání prostředí jsem se zabývala matematickým hlediskem, nyní bylo třeba vzít v úvahu žáka, který bude kaskádu úloh řešit. Vynořilo se tak mnoho dalších otázek a nejasností, které měly povahu nikoliv matematickou, ale didaktickou. Nejasnosti se týkaly délky kaskády, trvání experimentu, způsobu seznámení žáka s pavučinami, gradace kaskády úloh, ve které jsem začala vnímat i nepatrné rozdíly v náročnosti úloh, jako je například rozmístění čísel v pavučině. Očekávala jsem, že první experiment odhalí odpovědi alespoň na některé z těchto otázek, což se částečně potvrdilo.

Čím více experimentů bylo provedeno, tím více jsem se cítila znalá a sebevědomá v přípravě i vedení experimentů. Zatímco kaskády úloh pro první experimenty byly velmi nedokonalé a obsahovaly mnoho úloh pro žáky snadných, poslední experimenty ukázaly, že jsem se z předchozích poučila; kaskády úloh nyní byly postupně gradující s ohledem na věk a intelekt žáka, navíc jsem se naučila flexibilně v zadávání úloh - mít připraveno více úloh a vybírat ty, které jsou v dané chvíli vhodné či v případě nutnosti vhodnou úlohu v dané situaci nakreslit .

Vzájemnou spolupráci se žáky jsem v době provádění experimentů vnímala jako zcela bezproblémovou a byla jsem přesvědčena o tom, že i oni se při experimentech cítí dobře. Videozáznamy však ukázaly, že v průběhu experimentu jsem vůbec nevnímala klima, které často nebylo tak výborné, jak jsem si myslela. Bylo pro mne těžké znovu a znovu se koukat na své jednání se žáky, ke kterému jsem zaujala kritický postoj. Z hlediska profesního růstu je mi však tato zkušenost cenným přínosem.

Provedení experimentu se ukázalo být pouze vrcholem ledovce, jehož skrytou větší část představovalo psaní protokolů, evidencí a komentářů. Zpočátku jsem neměla ponětí, jak se provádí analýza experimentu, čeho všeho si lze v záznamu experimentu všimnout a jak se dají jevy a příčiny vysvětlovat. Formou konzultací se školitelem jsme byly s takovou prací seznámeny. Společně jsme hledali zajímavé momenty záznamu experimentu a diskutovali příčiny jevů. Školitel mi tak postupně otevíral oči k vidění jevů, které nejsou explicitně vyjádřeny.

Tyto naše společné pracovní chvíle považuji za největší přínos pro mou budoucí učitelskou praxi. Naučila jsem se vnímat nejen správnost žákova řešení, ale také klima, příčiny žákova jednání, jeho možné myšlenkové procesy a strategie řešení a další. Teoretické poznatky týkající se didaktiky matematiky, konstruktivistického pojetí výuky, řešitelských strategií atd. jsem čerpala z uvedené odborné literatury.

Společná práce s PH mne také velmi obohatila. Všechny experimenty jsme prováděly společně, přičemž jedna byla vždy vedoucím experimentu, druhá jeho kameramanem. Společná účast na experimentech byla základem pro naše diskuse ohledně problémů, které se při experimentech objevily. Často se stalo, že kameraman si všiml věcí, které vedoucí experimentu nezaznamenal. Společná práce pro mne byla nejen výhodou z hlediska



výzkumu a jeho technického zabezpečení, byla také psychickou podporou a motivací pro další práci.

Před začátkem psaní teoretické části diplomové práce před námi stál problém, jak pojmut kapitoly, které by obsahově měly korespondovat, nicméně z hlediska originality diplomové práce by každá měla být jiná. Týkalo se to především kapitoly o matematice, tedy kapitoly shrnující naše zkoumání pavučin po matematické stránce. Zcela přirozeně však vyvstalo řešení, které nám oběma vyhovovalo, totiž že PH pojme psaní této kapitoly subjektivně, bude popisovat, jak postupně objevovala zákonitosti prostředí, zatímco já budu psát objektivně, na základě poznatků, které jsem nabyla.

Kapitola zabývající se didaktikou se liší především věkem žáků, ke kterému se diplomová práce vztahuje. Zatímco PH popisuje vliv na první pohled nepatrných rozdílů úloh na řešení žáka, jako jsou například poloha skrytého čísla či otočení pavučiny o  $180^\circ$ , já popisuji propojení pavučinových úloh na jednotlivé oblasti matematiky. Následná kapitola o experimentech se liší několika jevy, které byly přítomny pouze u žáků některé z věkových kategorií, ale také jednotlivými fragmenty, které odrážejí rozdíly v myšlení žáků v různých věkových kategoriích.

Po celou dobu psaní diplomových prací jsme byly s PH v kontaktu, nicméně obsah jednotlivých kapitol jsme si vzájemně četly až po napsání v té době pro nás finální verze dané kapitoly. Bylo tak překvapením číst, co a jak napsala každá z nás, zároveň jsme se přesvědčily o tom, že ač píšeme práci na stejné téma, způsob, jakým píšeme, je dost odlišný.

Pohled na obě napsané práce zachycující náš téměř dva roky trvající výzkum prostředí pavučinových úloh mne těší a ujišťuje o významu naší práce.



## Závěr

Diplomová práce shrnuje výsledky bezmála dvouletého výzkumu výukových a diagnostických možností dosud málo známého matematického prostředí Pavučiny. Vymezuje prostředí z hlediska matematiky, popisuje jeho význam pro rozvoj matematického myšlení žáků 3. a 4. ročníků a nechává nahlédnout do myšlenkových procesů, řešitelských strategií a problémů vzorku žáků dané věkové kategorie. Obecný cíl práce, jehož přínos můžeme uplatnit ve výuce matematiky pro 1. stupeň ZŠ, je naplněn.

Práce však naplnila i cíl osobní, který jsem si stanovila a jehož naplnění očekávala; nabyla jsem mnoha zkušeností s prací se žáky v oboru matematiky, které však uplatním i v jiných předmětech; dále s prováděním experimentů, se zpracováváním získaných dat, s psaním rozsáhlého odborného textu založeného na vlastním objevování a zkoumání tématu a další. Možnost prezentovat výsledky výzkumu na seminářích Didaktiky matematiky III. a konferenci Dva dny s didaktikou matematiky 2009 v Praze rozšířila význam celé práce o nový soubor zkušeností a poznatků.

Osobním přínosem je pohled na sebe samu v roli experimentátora, který se prolíná s rolí učitele. Vidím u sebe posun od experimentátora, který se soustředil především na výkon žáka, tedy na zdárné vyřešení dané kaskády úloh, k takovému, který více než samotný výkon zkoumá myšlenkové postupy žáka a hledá příčiny chybných řešitelských postupů a strategií, na základě kterých může být nápomocen v žákově rozvoji. Pevně věřím, že tyto zkušenosti mi pomohou v budoucí praxi k větší vnímavosti k individuálním potřebám žáků a jejich rozvoji, a to nejen v matematice.

Přestože diplomová práce je závěrečným výstupem mého studia, považuji ji za počátek svých výzkumných aktivit nejen v oblasti matematiky. Věřím, že v budoucí učitelské praxi uplatním nabyté zkušenosti s výzkumem, na základě kterých budu moci rozvíjet své poznatky v oblasti didaktiky primárního vzdělávání.

## Použité prameny

- HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ D. a SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika I/1. díl : Pracovní učebnice pro 1. ročník základní školy*. Plzeň : Fraus, 2007. ISBN 978-80-7238-626-0.
- HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D. a SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika I/2. díl : Pracovní učebnice pro 1. ročník základní školy*. Plzeň : Fraus, 2007. ISBN 978-80-7238-627-7.
- HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D. a SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika : příručka učitele pro 1. ročník základní školy*. Plzeň : Fraus, 2007. ISBN 978-80-7238-628-4.
- HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D. a SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika II/1. díl: Pracovní učebnice pro 1. ročník základní školy*. Plzeň : Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-768-7.
- HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D. a SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika II/2. díl : Pracovní učebnice pro 1. ročník základní školy..* Plzeň : Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-769-4.
- HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D. a SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika II/3. díl : Pracovní učebnice pro 1. ročník základní školy*. Plzeň : Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-770-0.
- HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D. a SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika : příručka učitele pro 2. ročník základní školy*. Plzeň : Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-771-7.
- HEJNÝ, M. a KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika : konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha : Portál, 2001. ISBN 80-7178-581-4.
- HEJNÝ, M. a MICHALCOVÁ, A. *Skúmanie matematického riešiteľského postupu*. Bratislava : Metodické centrum, 2001. ISBN 80-8052-085-2.
- HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J. a STEHLÍKOVÁ, N. (Eds.) *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky : 1. díl*. Praha : PedF UK, 2004. ISBN 80-7290-189-3.
- HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J. a STEHLÍKOVÁ, N. (Eds.) *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky : 2. díl*. Praha : PedF UK, 2004. ISBN 80-7290-189-3.
- HEJNÝ, M. a STEHLÍKOVÁ, N. *Číselné představy dětí*. Praha : PedF UK, 1999. ISBN 80-86039-98-6.
- HEJNÝ, M. *Prostředí v nichž je barva dominantní parametr*. [cit. 2007-12-18]. Dostupné na Internetu: <[www.dokumenty.webzdarma.cz](http://www.dokumenty.webzdarma.cz)>.
- HEJNÝ, M. *Protoalgebra*. [cit. 2007-12-18]. Dostupné na Internetu: <[www.dokumenty.webzdarma.cz](http://www.dokumenty.webzdarma.cz)>.

## Seznam příloh

1. Experiment 1.....	1
Kaskáda 1 - Míša.....	16
2. Experiment 2.....	17
Kaskáda 2 - Kristýnka.....	38
3. Experiment 6.....	39
Kaskáda 6 - Tobiáš.....	55
4. Experiment 7.....	56
Kaskáda 7 - Štěpán.....	68
5. Experiment 9.....	69
Kaskáda 9 – David.....	76
6. Kvantitativní experiment.....	77
Kaskáda 10 – Kvantitativní experiment.....	77
Ukázka řešení - Štěpán.....	78
Ukázka řešení - Tobiáš.....	79
Ukázka řešení - David.....	80

## Experiment 1

### Míša – 4. třída

#### Exp 0101

#### PROTOKOL

- 0:00:11 Ex1** Míšo, podívej se na tuhle úlohu a zkus se zorientovat, jestli v té úloze vidíš nějaký princip, jestli jsou tam jen tak ty čísla, šipky a zkus nám k tomu povídat, co tě napadá.
- 0:00:26 M1** Mě napadá to, že z 1 vede šipka zelená na 2, to je tady, a z 2 by měla vést červená šipka, to je tady, no a mělo by to vést asi na 3, jestli je to popořadě.
- 0:00:47 Ex2** No tak jak myslíš, je to popořadě, nebo je to napřeskáčku?
- 0:00:54 M2** Není to popořadě.
- 0:00:57 Ex3** No a ty jsi říkal, že tady zelená šipka vede z 1 na 2. Je tam ještě nějaká zelená šipka?
- 0:01:06 M3** Z 2 na 3.
- 0:01:09 Ex4** A ještě nějaká?
- 0:01:11 M4** Z 3 na 4.
- 0:01:12 Ex5** A vidíš nějaký systém, jak tam jsou ty zelené šipky?
- 0:01:18 M5** Ano, 1, 2, 3, 4.
- 0:01:21 Ex6** A co by teda mohla znamenat zelená šipka?
- 0:01:25 M6** No jakoby po 1.
- 0:01:29 Ex7** A co by mohla znamenat červená šipka?
- 0:01:32 M7** Červená šipka by mohla znamenat jakoby po dvou, 1, 3 a tady už nemáme pětku.
- 0:01:42 Ex8** A je tam ještě jiná červená šipka?
- 0:01:46 M8** Ano z 2 na 4, ta je taky po 2.
- 0:01:51 Ex9** A je tam ještě jiná šipka, třeba jiné barvy?
- 0:01:53 M9** Hm, modrá.
- 0:01:55 Ex10** A jak to vypadá s modrou?
- 0:01:57 M10** To je po 3, 1 a 3 jsou 4.
- 0:02:02 Ex11** Tak myslíš, že chápeš ten typ úlohy?

#### EVIDENCE

- 0:00:30 M1** ukazuje na  $A, b, a, C, \beta, C, e, D, B$ .

## Příloha 1

- 0:00:56** Ex3 ukazuje na  $A, b, C$ .  
**0:01:06** M3 ukazuje na  $C, d, B$ .  
**0:01:12** M4 ukazuje na  $B, f, D$ .  
**0:01:18** M5 ukazuje na  $A, C, B, D$ .  
**0:01:26** M6 ukazuje na  $a$ .  
**0:01:32** M7 ukazuje na  $\beta, A, B$ .  
**0:01:46** M8 ukazuje na  $e$ .  
**0:01:57** M10 ukazuje na  $A, \gamma, A, c, D$ .

## KOMENTÁŘ

**M1** Míša v úloze hledal systém, viděl, že v úloze jsou čísla od 1 do 4, ve kterých vidí postupku, proto se soustředil na čísla tak, jak jdou za sebou. Jeho prvním nápadem bylo, že šipka s hodnotou 1 jde z čísla 1, šipka s hodnotou 2 jde z čísla 2 a zároveň směřuje do následujícího čísla. Tuto hypotézu si však následně vyvrátil.

**M6** pochopil, že zelená šipka znamená 1, že jdu-li po zelených šipkách, jdu po jedné.

**M7** Na základě funkce zelené šipky vyvodil, co znamená červená a následně i modrá.

**Ex10** Přerušuje, skáče Míšovi do řeči.

**M10** Míša plně pochopil, jak pavučina funguje.

## Exp 0102

## PROTOKOL

- 0:02:08** Ex1 Tahle byla vzorová a já ti teď dám úlohu, kde už musíš něco doplňovat. Podívej se na tu úlohu. Co myslíš že budeš doplňovat a kam?
- 0:02:25** M1 4 sem do kolečka.
- 0:02:28** Ex2 A proč 4?
- 0:02:30** M2 Protože tady nikde 4 není. A navíc  $1 + 3$  jsou 4; 1, 2, 3 a tady mi chybí 4 a pak tady máme  $1 + 2$  jsou 3 a  $2 + 2$  jsou 4.
- 0:02:50** Ex3 A vysvětlíš mi, proč tady vlastně říkáš  $1 + 2$  jsou 3, kde já zjistím, kolik mám přičítat?
- 0:02:55** M3 Tady jsou  $+ 1, + 2, + 3$ .
- 0:02:59** Ex4 Takže myslíš, že tam bude 4.
- 0:02:59** M4 Ano.
- 0:03:00** Ex5 A všude ti to sedí.
- 0:03:00** M5 Ano.
- 0:03:01** Ex6 Tak ji tam můžeš dopsat.



## Příloha 1

### EVIDENCE

- 0:02:25 M1 ukazuje na  $B$ .
- 0:02:30 M2 ukazuje na pavučinu, potom konkrétně na  $A$ ,  $\gamma$ ,  $B$ , následně na cestu zelených šipek  $A$ ,  $D$ ,  $C$ ,  $B$ , nakonec na cesty  $A$ ,  $b$ ,  $C$ ;  $D$ ,  $f$ ,  $B$ .
- 0:02:55 M3 ukazuje na  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .
- 0:03:02 M5 píše  $B = 4$ .

### KOMENTÁŘ

M1 Hned ví, ani chvíli nepřemýšlí, úloha je pro něj zcela explicitní.

M2 Míša nejprve řekl číslo 4 proto, že v úloze toto číslo chybělo a on z předchozí úlohy věděl, že by tam mohlo být. Poté však ve vysvětlení uvádí i racionální důvod, tedy jak na číslo 4 lze přijít, jak ho vypočítat.

M3 Míša přímo používá matematický výraz „plus“ – je mu jasné, že šipky přičítají, pravděpodobně je mu jasná již teď i orientace šipek.

### Exp 0103

### PROTOKOL

- 0:03:09 Ex1 Já ti dam tady další...
- 0:03:11 M1 A tady bude 3.
- 0:03:13 Ex2 Proč trojka?
- 0:03:14 M2 Protože tady jedna, dva a tady mi chybí 3, pak 4.
- 0:03:18 Ex3 Jak jsi na tu 3 přišel?
- 0:03:21 M3 Protože  $1 + 2$  jsou 3,  $2 + 1$  jsou 3 a aaa to je asi všechno.
- 0:03:36 Ex4 Co tady ta šipka, co vede od toho kolečka prázdného.
- 0:03:42 M4 Jo....ehm...něco plus 1 je 4, takže 3.
- 0:03:50 Ex5 Správně, tak to tam dopiš.

### EVIDENCE

- 0:03:11 M1 nenechá experimentátora ani domluvit, hned odpovídá.
- 0:03:14 M2 ukazuje na  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $C$ .
- 0:03:21 M3 ukazuje na  $A$ ,  $c$ ,  $D$ ;  $B$ ,  $f$ ,  $D$ .
- 0:03:43 M4 ukazuje na  $D$ ,  $e$ ,  $C$ .
- 0:03:49 M4 píše  $D = 3$ .

### KOMENTÁŘ

**M2** jde rovnou po zelených šípkách, začíná své objasnění čísly tak, jak jdou za sebou, nicméně je schopen doložit své tvrzení i jinými důkazy, použít hodnoty šipek.

**M3** Soustředí se pouze na šípky, které vedou k číslu, šípky, která vede z neznámého čísla si nevšímá.

**M4** Po návodné otázce je schopen vysvětlit, co znamená šípka vedoucí od hledaného čísla. Vyjadřuje se „něco + 1 jsou 4“ – nenapadne ho složitější operace a to odčítání, protože zatím jeho zkušenost s šípkami byla pouze se sčítáním.

### Exp 0104

#### PROTOKOL

- 0:03:57 Ex1 Jiný typ úlohy.  
0:04:00 M1 Takže, eh...to bude 3.  
0:04:05 Ex2 Proč trojka?  
0:04:06 M2 Protože 1 + něco jsou 4.  
0:04:11 Ex3 Správně.  
0:04:12 M3 1 + 3 jsou 4.  
0:04:13 Ex4 Tak ji tam dopiš.

#### EVIDENCE

- 0:04:00 M1 ukazuje na  $a$  a  $\gamma$  a hned odpovídá.  
0:04:06 M2 ukazuje na  $A$ ,  $a$ ,  $B$ .  
0:04:14 M2 píše  $\gamma = 3$ .

### KOMENTÁŘ

**M1** Vzhledem k tomu, že Míša už má s úlohou dostatečné zkušenosti, tato úloha, kde má doplnit pouze hodnotu šípky, je pro něj zcela explicitní. Experimentátor měl předložit náročnější úlohu.

### Exp 0105

#### PROTOKOL

- 0:04:29 Ex1 Podívej se na tento...pardon, ten je stejný, ten se mi tam zatoulal, tak...podívej se na tuto, ta je o něco těžší.  
0:04:32 M1 1, tak tady bude 3 v červeném.  
0:04:35 Ex2 Proč?

## Příloha 1

- 0:04:36 M2 Protože  $1 + 3$  jsou 4.  
0:04:40 Ex3 Tak ji tam dopiš.  
0:04:43 M3 A 1 plus něco je 3, tak to bude 2.  
0:04:49 Ex4 Opravdu?  
0:04:49 M4 Ano.  
0:04:50 Ex5 A můžeš se přesvědčit ještě na jiné ukázce?  
0:04:53 M5 Ano můžu,  $2 + 2$  jsou 4.  
0:04:57 Ex6 Takže to bude opravdu 2?  
0:04:59 M6 Ano.

## EVIDENCE

- 0:04:32 M1 ukazuje na  $C, D, \gamma$ .  
0:04:34 M2 ukazuje na  $C, e, D$ .  
0:04:36 M2 píše  $\gamma = 3$ .  
0:04:38 M3 ukazuje na  $C, b, A$ .  
0:04:52 M5 ukazuje na  $B, f, D$ .  
0:04:56 M6 píše  $\beta = 2$ .

## KOMENTÁŘ

Úloha je pro Míšu opět příliš snadná, jen zde musel doplnit více údajů.

## Exp 0106

## PROTOKOL

- 0:05:05 Ex1 Ještě o něco těžší, doplňujeme 3 hodnoty šipek.  
0:05:07 M1 Tady bude 2, protože  $2 + 2$  jsou 4 a  $1 + 2$  jsou 3.  
0:05:16 Ex2 Mohlo by tam být jiné číslo?  
0:05:18 M2 Nemohlo.  
0:05:24 M3 Modrá to bude 1.  
0:05:28 Ex3 Proč?  
0:05:29 M4 Protože tady mám 1, 2, 3, 4, to je vždycky o 1.  
0:05:35 Ex4 Takže by nemohlo být nic jiného.  
0:05:36 M5 Ne nemohlo.  
0:05:41 M6 A v červeném to je  $1 + 3$  jsou 4, takže by tam byla 3.  
0:05:49 Ex5 Děkuji.

## Příloha 1

### EVIDENCE

0:05:07 M1 ukazuje  $\beta$ , zdůvodňuje cestou  $C, b, A; B, f, D$ .

0:05:17 M1 píše  $\beta = 2$ .

0:05:29 M4 ukazuje na  $B, C, D, A$ .

0:05:36 M5 píše  $\alpha = 1$ .

0:05:41 M6 ukazuje na  $\gamma$ , pak cestu  $B, a, A$ , píše  $\gamma = 3$ .

### KOMENTÁŘ

M4 Pro Míšu jsou čísla spojená šipkami o hodnotě 1 automaticky postupkou, neříká tady že  $1 + 1$  jsou 2, ale rovnou počítá jako 1, 2, 3, 4.

Vyřešit úlohu mu trvalo pouhých 45 sekund.

### Exp 0107

### PROTOKOL

0:06:04 Ex1 Tady ti dám k dispozici barevné fixy, co se tady bude doplňovat?

0:06:12 M1 Bude se doplňovat zelená čára...eh...zelená šipka.

0:06:17 Ex2 A proč zelená?

0:06:18 M2 Protože  $2 + 1; 1 + 1$  jsou 2;  $2 + 1$  jsou 3;  $3 + 1$  jsou 4 a tady máme 1 a 3.

0:06:33 Ex3 Tak tam tu šipku nakresli.

0:06:40 Ex4 A Míšo, proč jsi tu šipku nakreslil takhle, proč jsi ji nenakreslil opačně?

0:06:45 M3 Protože to je jakoby, eh, to je jakoby že, eh...že od 3 to vede k 4.

0:06:59 Ex5 A kdyby byla naopak ta šipka?

0:07:03 M4 Tak by to znamenalo o 1 míň.

0:07:06 Ex6 A seděla by tam ta šipka, kdyby to bylo naopak?

0:07:08 M5 Neseděla.

### EVIDENCE

0:06:12 M1 ukazuje na  $e$ .

0:06:18 M2 ukazuje na  $B; A, a, B; B, f, D; D, e, C; a$ .

0:06:32 M2 kreslí  $e$  správným směrem.

0:06:37 Ex4 ukazuje na směr šipky  $e$ .

0:06:45 M3 ukazuje na  $D, e, C$ .

0:06:59 Ex5 ukazuje na šipku  $e$ .

### KOMENTÁŘ

**M1** Míša hned vidí, že chybí zelená šipka. Nejprve se přeřekl a mluvil o tom, že chybí čára, nicméně se hned opravil.

**M2** Neuvádí důvod ten, že když jdu z 3 na 4 je to o 1 a hodnotu šipky 1 má zelená šipka, ale ukazuje cestu zelené šipky od 1 do 4, tedy onu cestu zelených šipek, které jsou symbolem postupky.

**M3** Nevyjadřuje směr šipky pomocí sčítání, přestože již v předchozích úlohách se v této souvislosti o sčítání hovořilo.

**M4** Míša řekl, že kdyby šipka byla opačným směrem, znamenalo by to o 1 míň – ano, v tomto případě, kdy jsou doplněna čísla, by měl Míša pravdu. Své tvrzení však vyvrací později, aniž by si to uvědomoval.

**M5** Míša správně říká, že šipka by tam neseseděla, kdyby byla naopak, nicméně pokud by, jak předtím řekl, to znamenalo odčítání, pak by tam šipka seděla. Míša si až v tuto chvíli uvědomil, že šipka opačným směrem tam být nemůže, jelikož zastupuje kladné číslo, tedy přičítá.

**Ex6** Bývalo by bylo vhodné tuto situaci ještě objasnit – Míša si protiřečí, ani o tom možná neví.

### Exp 0108

#### PROTOKOL

- 0:07:14** Ex1 Tak, budeme doplňovat dvě šipky.
- 0:07:18** M1 Tak tady asi, tady ta bude modrá, a tady ta bude zelená.
- 0:07:28** Ex2 A proč?
- 0:07:29** M2 Protože  $1 + 1$  jsou 2;  $2 + 1$  jsou 3 a jedničku tady máme modrou.
- 0:07:40** Ex3 Tak ji tam nakresli.
- 0:07:51** Ex4 A ta druhá šipka?
- 0:07:53** M3 Ta druhá šipka bude směřovat k 3, protože jinak by to nešlo.
- 0:08:00** Ex5 A jakou bude mít barvu?
- 0:08:02** M4 Bude mít zelenou.
- 0:08:06** Ex6 Tak ji tam můžeš nakreslit.

#### EVIDENCE

- 0:07:18** M1 ukazuje na  $d$ , pak na  $b$ .
- 0:07:29** M2 ukazuje na  $A$ ,  $a$ ,  $B$ ;  $B$ ,  $d$ ,  $C$ ,  $a$ .
- 0:07:42** M2 kreslí modrou šipku  $d$ .
- 0:07:51** M3 ukazuje na  $b$  a naznačuje správný směr šipky, kterou dokreslí.
- 0:08:04** M4 kreslí zelenou šipku  $b$ .



### KOMENTÁŘ

**M1** Nejprve si hodnotu šipek zjišťuje z pavučiny, až teprve potom se dívá, jestli ji nemá uvedenu nad šipkou v legendě.

**M2** Používá výpočet, je si vědom, že jde o sčítání.

**M3** Je schopen správně určit směr šipky, úloha je pro žáka stále zcela jasná, explicitní.

### Exp 0109

#### PROTOKOL

- 0:08:16 Ex1** Ještě jeden se šipkami.
- 0:08:22 M1** Tak tady bude 1, tady bude červená šipka.
- 0:08:29 Ex2** Můžeš ji tam rovnou dokreslit.
- 0:08:33 Ex3** Proč červenou?
- 0:08:37 M2** Protože ta je o 1 a protože 1 + 1 jsou 2 a pak tady máme tohleto, tohle bude modrá a tahle zelená.
- 0:08:53 Ex4** Podle čeho jsi to poznal?
- 0:08:57 M3** Protože 1 + 3 jsou 4, takže tady bude modrá.
- 0:09:10 M4** A tady bude zelená, protože 1 + 2 jsou 3.
- 0:09:24 Ex5** Hm, podle čeho jsi poznal, že tam bude zelená.
- 0:09:28 M5** Protože tady máme, že zelená je plus 2.
- 0:09:35 Ex6** A ještě podle něčeho si to můžeš ověřit?
- 0:09:37 M6** Ano, protože 2 + 2 jsou 4.
- 0:09:39 Ex7** Ano, děkuji.

#### EVIDENCE

- 0:08:23 M1** ukazuje na  $C, e$ .
- 0:08:30 M1** kreslí červenou šipku  $e$  správným směrem.
- 0:08:40 M2** ukazuje na  $C, e, D; C, d, B; b$ .
- 0:08:54 M3** ukazuje na  $d, B$ .
- 0:09:00 M3** kreslí modrou šipku  $d$  správným směrem.
- 0:09:07 M4** ukazuje na  $b$ , zdůvodňuje na  $C, b, A$ .
- 0:09:26 M5** ukazuje na hodnoty šipek  $\alpha, \beta, \gamma$ .
- 0:09:32 M6** ukazuje na  $D, f, B$ .

### KOMENTÁŘ

**M2** Nejprve stručně udává důvod, proč dokreslil červenou šipku, po krátké odmlce se však rozpovídal, vysvětluje celou situaci do detailu. Jeho zkušenost s experimentátorem a jeho neustálým žádáním o vysvětlení jeho postupů ho nutí vysvětlit situaci podrobně.

**M2** Míša už si zvykl na to, že je snazší se nejdříve podívat na hodnoty šipek, které jsou dány a podle toho doplňovat šipky.

**Ex** Ptá se zbytečně na stále stejná zdůvodnění, přestože je zjevné, že úloha je pro Míšu snadná.

### Exp 0110

#### PROTOKOL

- 0:09:43 **Ex1** Tak tento by měl být ještě těžší, tak se na něj podívej.
- 0:09:49 **M1** Tady bude 4.
- 0:09:51 **Ex2** Jak jsi na to přišel tak rychle?
- 0:09:54 **M2** Protože tady máme zelenou trojku, teda modrou trojku a  $1 + 3$  jsou 4.
- 0:10:01 **Ex3** A opravdu to tak sedí? I když si vezmeš ty šipky od jiných čísel, opravdu tam bude 4, nemůže tam být nic jiného?
- 0:10:10 **M3** Ne.
- 0:10:11 **Ex4** A proč? Tak ji tam napiš, můžeš si ji tam napsat a řekni mi proč.
- 0:10:17 **M4** Protože tady máme  $2 + 2$  jsou 4 a  $3 + 1$  jsou 4.
- 0:10:27 **Ex5** A jak jsi přišel na to, že zelená šipka je 1, když ji tady nemáme napovězenou?
- 0:10:31 **M5** Protože já jsem si řekl, že 1 a kolik, eh, plus něco rovná se 2, to budou asi, to bude asi 1.
- 0:10:42 **Ex6** A mohl sis to někde ověřit?
- 0:10:44 **M6** Ano, že 2 a 1 jsou 3 a 3 a 1 jsou 4.
- 0:10:50 **Ex7** Takže jsi přišel na to, že zelená šipka bude...
- 0:10:53 **M7** 1.
- 0:10:54 **Ex8** Tak ji tam dopiš.

#### EVIDENCE

- 0:09:49 **M1** ukazuje na  $B$ .
- 0:09:54 **M2** ukazuje na  $\gamma$ ;  $A$ ,  $a$ ,  $B$ .
- 0:10:00 **Ex3** ukazuje na  $d, f$ .
- 0:10:01 **M2** nenechá experimentátora domluvit, bere do ruky tužku a chce doplnit číslo  $D$ .

## Příloha 1

- 0:10:11 M3 píše  $D = 4$ .  
0:10:17 M4 ukazuje na  $D, f, B; C, d, B$ .  
0:10:27 Ex5 ukazuje na  $d, \alpha$ .  
0:10:29 M5 ukazuje na situaci  $A, c, D$ .  
0:10:40 M6 ukazuje na  $D, e, C; C, d, B$ .  
0:10:54 M7 píše  $\alpha = 1$ .

## KOMENTÁŘ

**M2** Úloha je stále pro žáka explicitní, nenabízí nic nového, nad čím by musel déle přemýšlet.

**Ex3** Míša skáče experimentátorovi do řeči, je už netrpělivý, je na něm vidět, že si je jistý svým řešením a nebaví ho neustále jej zdůvodňovat.

**Ex** Experimentátor se neustále zbytečně ptá na vysvětlení.

## Exp 0111

### PROTOKOL

- 0:11:03 Ex1 Tak, podívej se ještě na tento.  
0:11:08 M1 Tady chybí 1.  
0:11:13 Ex2 Proč 1?  
0:11:16 M2 Protože tady máme  $2 + \dots$  co?  
0:11:23 M3 Ne pětka, protože tady začínáme od dvojky, tady není nikde jednička a dva plus jedna jsou tři a tři plus jedna jsou 4 a čtyři plus jedna jsou pět.  
0:11:40 Ex3 Ty jsi zase začal od té zelené šipky, ale zelenou šipku neznáme.  
0:11:44 Ex4 Tak jak jsi na ní přišel?  
0:11:46 M4 Protože tady máme dva a kolik mi chybí do 3, jedna.  
0:11:52 Ex5 Takže jsi si jistý, že zelená šipka je 1. Tak si ji tam dopiš.  
0:11:59 Ex6 Můžeš si ještě jinak ověřit, že tam bude opravdu 5?  
0:12:01 M5 Ano, protože  $3 + 2$  je 5.  
0:12:05 Ex7 A ještě jinak?  
0:12:07 M6  $2 + 3$  je 5.  
0:12:09 Ex8 Takže ta 5 tam opravdu bude, dobře.

### EVIDENCE

- 0:11:08 M1 ukazuje na  $B$ .  
0:11:16 M2 ukazuje na  $A, D$ , pak se zarazí.

## Příloha 1

- 0:11:23 M3 opravuje své tvrzení, ukazuje na  $B$ , pak na  $A, c, D; D, e, C; C, d, B$ .  
0:11:40 Ex3 ukazuje na  $c, a$ .  
0:11:46 M4 ukazuje na  $A, c, D$ .  
0:11:54 M4 píše  $\alpha = 1$ .  
0:12:01 M5 ukazuje na  $D, f, B$ .  
0:12:07 M6 ukazuje na  $A, a, B$ .  
0:12:09 M6 píše  $D = 5$ .

## KOMENTÁŘ

**M3** Míša si osvojil fakt, že šipky o hodnotě 1 tvoří se svými čísly postupku. Toto si několikrát ověřil, proto si tím je jistý a vyhledává to v úloze, je-li nejistý v řešení. Tato úloha pro Míšu představuje první překvapení, objevuje se zde jiné číslo, 5.

**M4** Míša automaticky počítá s hodnotou zelené šipky, aniž by ji předem zjišťoval či si ji zapsal – hodnota zelené šipky je pro něj explicitně vyjádřena uvnitř pavučiny. Zároveň zde může hrát roli fakt, že zelená šipka v kaskádě úloh, kterou počítá, vždy znamená 1.

## Exp 0112

## PROTOKOL

- 0:12:17 Ex1 Tady budeme doplňovat číslo a šipku.  
0:12:24 M1 Tady máme  $1 + 3$  jsou 4, takže tady bude 4.  
0:12:30 Ex2 Můžeš si to ještě nějak ověřit, než to tam napíšeš?  
0:12:33 M2 Můžu, protože  $1 + 1$  jsou 2 a  $2 + 1$  jsou 3 a  $3 + 1$  jsou 4.  
0:12:42 Ex3 Takže jsi si jistý, že tam bude 4?  
0:12:44 M3 Ano.  
0:12:48 M4 A tady to bude červená šipka, protože je plus 2 a  $2 + 2$  jsou 4.  
0:12:57 Ex4 Tak ji tam nakresli.

## EVIDENCE

- 0:12:16 Ex1 ukazuje na  $D, f$ .  
0:12:24 M1 ukazuje na  $A, c, D$ , chystá se zapsat číslo  $D = 4$ , je však přerušen otázkou experimentátora.  
0:12:33 M2 ukazuje na cestu zelených šipek  $A, a, B; B, d, C; C, e, D$ .  
0:12:42 M2 píše  $D = 4$ .  
0:12:46 M3 ukazuje na  $f$  a  $\beta$ , zdůvodňuje cestou  $B, f, D$ .  
0:12:58 M3 kreslí správným směrem červenou šipku  $f$ .

## Příloha 1

### KOMENTÁŘ

**Ex1** Je zbytečné v tuto chvíli ukazovat, co se bude v pavučině doplňovat.

**M1** Úloha je pro žáka stále explicitní.

**M2** Míša opět jako důkaz svého tvrzení využívá cestu zelených šipek o hodnotě 1 („postupkových šipek“).

### Exp 0113

#### PROTOKOL

**0:13:13 Ex1** Tak a protože už ti to jde moc dobře, tak ti dám takovýto, chybí tam 4 čísla.

**0:13:30 M1** Tady to bude..., tady to bude něco plus 1 jsou 2 a to něco bude asi 1.

**0:13:41 Ex2** A budeš si to moc nějak ověřit?

**0:13:44 M2** Ano budu, protože tady to jedna... ne nemůžu v podstatě...

**0:13:48 Ex3** Ale myslíš si, že tam ta jednička bude, takže by sis ji tam napsal?

**0:13:49 M3** Jo.

**0:13:53 M4** A 1, teda  $1 + \dots$  tady bude 3, tady, rovná se to 4;  $1 + 3$  jsou 4.

**0:14:02 Ex4** Takže si myslíš, že modrá šipka bude kolik?

**0:14:07 M5** 3.

**0:14:09 Ex5** Tak si to napiš.

**0:14:12 M6** A tady mám  $2 + 2$  jsou 4, to jsem si řekl, protože 2 a kolik mi chybí do 4.

**0:14:28 M7** Takže tady bude 2 u zelené a  $1 + 2$  jsou 3, jo.

**0:14:44 Ex6** Opravdu tam ta 3 je?

**0:14:45 M8** Ano.

**0:14:47 Ex7** Ještě nějaké šipky ti to dokazují?

**0:14:49 M9** Ano,  $1 + 1$  jsou 2;  $2 + 1$  jsou 3;  $3 + 1$  jsou 4.

**0:14:56 Ex8** A proč jsi začal s tímto číslem? Tady jsi mohl začít vlastně úplně čímkoliv, tak proč jsi začal právě s tímto číslem?

**0:15:08 M10** Protože já jsem si musel najít startovní bod, od kterého se to bude nejlíp počítat.

**0:15:18 Ex9** Takže tohle je pro tebe startovní bod?

**0:15:21 M11** Ano.

**0:15:22 Ex10** A kdybych ti dala třeba takovouhle úlohu, kde by byl pro tebe startovní bod? Zatím ji ještě nepočítej, za chvíli se k ní dostaneme.

**0:15:32 M12** Tady bych začal asi, tady nevím zatím...

**0:15:37 Ex11** Nevíš zatím, tak se k ní za chvíli dostaneme.

**0:15:42 Ex12** Myslíš si, že je to úplně nejlepší startovní bod nebo by byl některý ještě



## Příloha 1

jednodušší?

**0:15:47 M13** Podle mě je tohle nejlepší.

**0:15:48 Ex13** Dobře.

### EVIDENCE

**0:13:22 M1** přemýšlí, hledá, odkud by začal.

**0:13:29 M1** ukazuje na  $B$ , pak na  $C$ ,  $b$ ,  $A$ .

**0:13:44 M2** ukazuje na  $A$ .

**0:13:56 M3** píše  $A = 1$ .

**0:13:53 M4** ukazuje na  $A$ ,  $a$ ,  $B$ , obrací se na experimentátora a čeká na souhlas.

**0:14:16 M5** píše  $\gamma = 3$ .

**0:14:12 M6** hledá místo, odkud by určil hodnotu zelené šipky  $\beta$ , ukazuje na  $C$ ,  $d$ ,  $B$ .

**0:14:38 M7** píše  $\beta = 2$ .

**0:14:28 M7** ukazuje na  $A$ ,  $c$ ,  $D$ .

**0:14:45 M7** píše  $D = 3$ .

**0:14:49 M9** ukazuje na cestu červených šipek  $A$ ,  $b$ ,  $C$ ,  $e$ ,  $D$ ,  $f$ ,  $B$ .

**0:14:56 Ex8** ukazuje na  $A$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $D$ .

**0:15:08 M10** ukazuje na  $A$ .

**0:15:22 Ex10** předkládá úlohu č. 14.

### KOMENTÁŘ

**M1** Chce začít od čísla  $D$ , ale pak vidí, že k  $D$  směřuje modrá šipka, jejíž hodnotu nezná, proto začíná od  $C$ . Je logické, že chce úlohu začít řešit odshora.

**M2** Uvědomuje si, že zatím nezná ostatní šipky, proto si nemůže své řešení ověřit, nicméně si jím je jistý.

**Ex2** Zbytečná otázka, je zcela jasné, že tam číslo 1 bude.

**M6** Klíma experimentu není zcela uvolněné, Míša se cítí povinen stále něco vysvětlovat, dokud nedostane potvrzení od experimentátora, že řeší správně.

**M9** Jako důkaz uvádí opět cestu červených šipek, tedy šipek o hodnotě 1.

**M10** Úloha s možným startovním bodem nahoře je pro Míšu snazší, jasnější než úloha, ve které by musel začínat odjinud – byla by náročnější na zorientování.

**Ex10** Uvědomila jsem si, že Míša nemůže jen tak bez počítání vymyslet, odkud by bylo nejlepší začít. Měla jsem ho nechat úlohu vypočítat rovnou nebo se ho na startovní bod zeptat až při počítání této úlohy.

**M13** Výchozí bod umístěný nahoře přímo vybízí k tomu, aby jeho číslo bylo co nejrychleji odhaleno.

**Exp 0114**

**PROTOKOL**

- 0:15:53 Ex1 Dám ti další úlohu a povídej, jak přemýšlíš.
- 0:16:00 M1 Já přemýšlím takto, když tady mám 3 a tady mám 3 + 3 je 6, tak tady to bude zelená.
- 0:16:22 M2 A pak tady už mám 3, tady bude (šeptá si: 3, 4, 5, 6), takže tady bude plus 1, protože 3 + 1 jsou 4, plus 1 je 5, plus 1 je 6.
- 0:16:43 M3 Já jsem si to vlastně spočítal že 3 a 2, ne 3 a 3 je 6.
- 0:16:52 Ex2 A ty jsi to řekl správně, že 3 a 3 je 6, a kde jsi vzal tu druhou trojku, tady mám jednu trojku a kde jsi vzal tu druhou?
- 0:16:57 M4 No tady jsem vzal 1, 2, 3.
- 0:17:00 Ex3 Takže jsi sečetl ty šipky?
- 0:17:02 M5 Ano.
- 0:17:04 Ex4 Tak tam můžeš doplnit ta čísla, na která jsi přišel.
- 0:17:12 M6 A tady bude jednička, protože 3 a 1 jsou 4.
- 0:17:21 Ex5 A co modrá šipka?
- 0:17:23 M7 Modrá šipka to bude asi 2, protože 3 + 2 je 5 a 4 + 2 je 6.
- 0:17:31 Ex6 Takže sedí ti celá pavučina?
- 0:17:33 M8 Ano.
- 0:17:35 Ex7 Já ti Míšo moc děkuji, to byla poslední úloha.

**EVIDENCE**

- 0:16:00 M1 začíná hned povídat, ukazuje na  $\gamma$  a situaci v pavučině, kde  $\gamma$  uplatní, tedy  $A, a, B$ .
- 0:16:20 M1 kreslí správným směrem zelenou šipku  $a$ .
- 0:16:22 M2 ukazuje na  $A$ , pak se zarazí, potichu si prochází cestu  $A, D, C, B$ , pak znovu ukazuje na  $A, c, D; D, e, C; C, d, B$ .
- 0:16:43 M3 ukazuje na  $A$ , které zná, pak na 2 červené šipky ( $c, e$ ), nakonec na 3 červené šipky ( $c, e, d$ ).
- 0:16:57 M4 znovu ukazuje na červené šipky  $c, e, d$ .
- 0:17:14 M5 píše  $D = 4, C = 5$ .
- 0:17:12 M6 ukazuje na  $a$ .
- 0:17:27 M6 píše  $\alpha = 4$ .
- 0:17:32 M7 ukazuje na  $D, f, B$ , pak na  $A, a, B$  a znovu na  $D, f, B$ .
- 0:17:38 M7 píše  $\beta = 2$ .

### KOMENTÁŘ

**M1** Logický výchozí bod – začíná tím, co zcela bezpečně může doplnit.

**M2** Míša, aniž by si to uvědomoval, už ví, že ty šipky, jichž je nejvíce, ukazují cestu po sobě jdoucích čísel. Vzhledem k tomu, že v kaskádě se neobjevila úloha, kde by čísla nešla po sobě, jeho úvaha je správná. Dokazuje to i fakt, že hodnota červené šipky (postupkové šipky) není dosud známá.

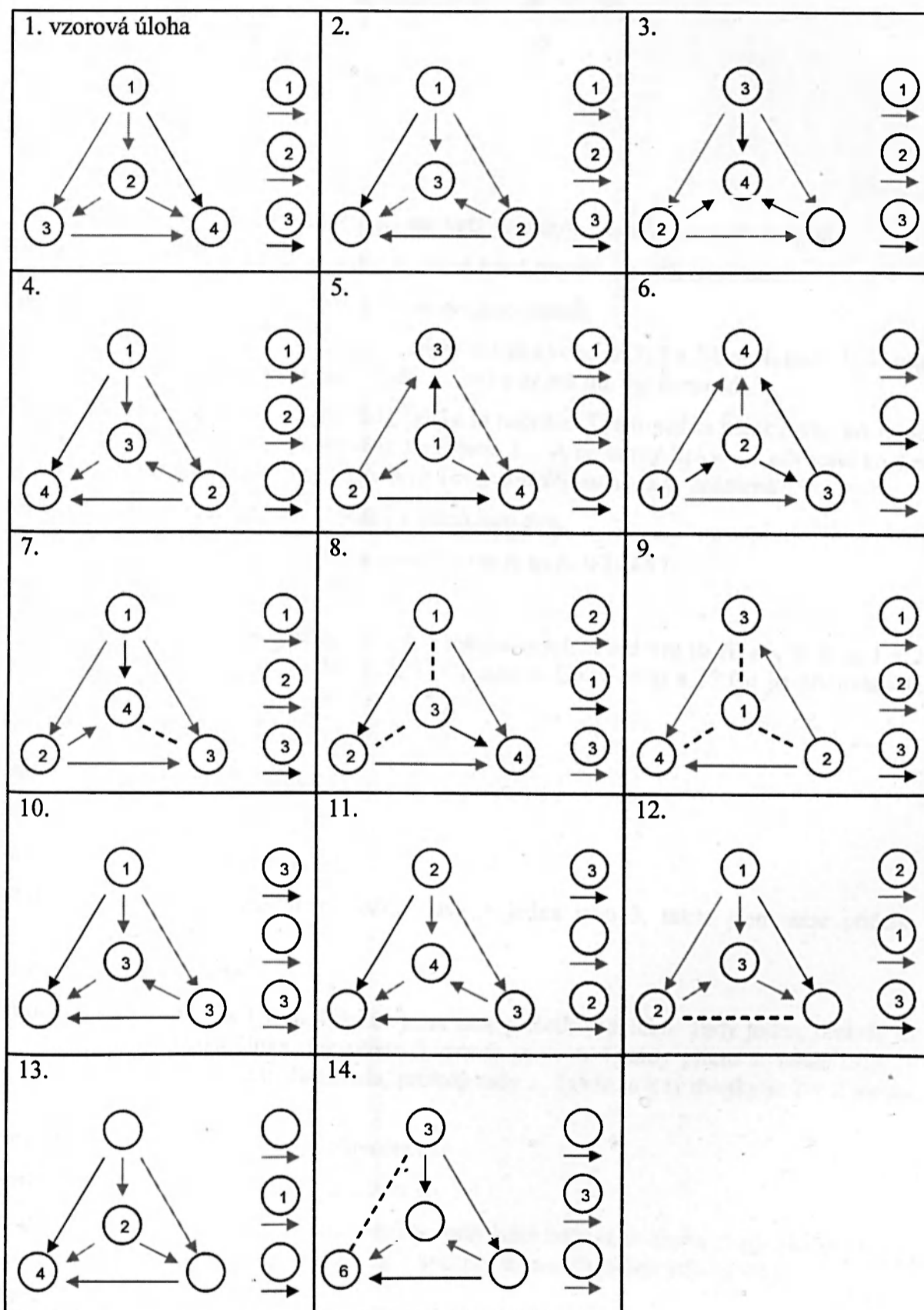
**M3** Zdá se, že Míša pochopil a použil princip sčítání šipek. Dokáže ho i početně vyjádřit jako  $A = 3(\text{číslo, které zná}) + 3$  (počet šipek o hodnotě 1) = 6.

**M6** Přestože správně určil hodnotu červené šipky  $\alpha = 1$ , píše  $\alpha = 4$ . Důvodem je číslo  $D = 4$ , o kterém chvíli před tím mluvil a které zůstalo v jeho hlavě.

**M8** Aniž by pavučinu zkontroloval odpovídá, že mu celá sedí, chyby se nevšiml. Pravděpodobně je již unaven věčným vysvětlováním.

Příloha 1

Kaskáda 1 - Míša



## Experiment 2

### Kristýnka – 4. třída

#### Exp 0201

#### PROTOKOL

- 0:00:12 Ex1** Tak, Kristýnko, čekají nás tady pavučiny. Nejdřív se na to podívej
- 0:00:16 K1** Já si to takhle otočím. A už mě hned napadá několik způsobů.
- 0:00:22 Ex2** Tak povídej, co tě k tomu všechno napadá...
- 0:00:26 K2** Tak zaprvé 1 a 2 jsou 3, takže ta šipka vede na 3; 1 a 3 jsou 4, takže ta 4 vede na... ta šipka vede na 4. Tady 1... no a už mě nic víc nenapadá.
- 0:00:48 Ex3** Tak teďka mi vysvětli, jak jsi to počítala. Tys to teďka nějak řekla, tak mi to zkus vysvětlit. Tys počítala 1 + 2 jsou 3... A co tamty šipky... Tady ještě koukej máš něco u těch šipek napsaný. Co s těma číslama, co to znamená?
- 0:01:02 K3** Jo, tak tady, že to jedna a jedna jsou dva.
- 0:01:05 Ex4** A co to je to jedna a jedna? Co to je to A JEDNA?
- 0:01:08 K4** To je plus.
- 0:01:09 Ex5** To je plus a to je... co tím máš na mysli? Před tím jsi říkala, že to je 1 + 2 jsou 3. A teďka jsi řekla, že 1 + 1 jsou 2. Co to je to a 1? Co jsi přičítala k té jedničce?
- 0:01:19 K5** Jedničku, protože...
- 0:01:21 Ex6** A jakou jednič....
- 0:01:21 K6** Protože tady...
- 0:01:23 Ex7** Ták, takže tu šipku...
- 0:01:25 K7** Potom tady mám jedn... dva + jedna jsou 3, takže jsem zase přičetla jedničku.
- 0:01:32 Ex8** Výborně.
- 0:01:34 K8** Tady 3 a 1 jsou 4, takže jsem zase přičetla jedničku. Tady jedna, protože je to oranžová šipka, tak přičtu 3, tak to je 4. A 4, tady přičtu 2, takže to je... Počkat, tady je trošku zrada, protože tady... Takže to z té dvojky je 2 + 2 jde na čtyři...
- 0:02:02 Ex9** Jo, ale ta šipka je obráceně...
- 0:02:04 K9** Nó, jo. Tak ještě 1 a 2 jsou 3.
- 0:02:11 Ex10** Tak já ti to tady prozradím, tady jsem udělala já chybu. Tady má být šipka na druhou stranu, protože jinak bychom to musely nějak odčítat, že jo.
- 0:02:18 K10** No právě...
- 0:02:19 Ex11** Tady jsem udělala chybu, omlouvám se. Takže už je to jasný, teď?



Můžeme na další?

0:02:26 K11 Mhmm.

### EVIDENCE

0:00:16 K1 Kristýnka začala okamžitě vymýšlet řešení.

0:00:26 K2 ukazuje na  $C$ ,  $A$ ,  $a$ ,  $B$ ;  $C$ ,  $B$ ,  $D$ ; pak ukazuje na  $C$ , ale už ji nic nenapadá.

0:00:48 Ex3 ukazuje na  $C$ ,  $A$ ,  $B$ , pak poukazuje na hodnoty šipek vlevo, snaží se napovědět.

0:01:02 K3 ukazuje na  $C$ ,  $A$ . Je vidět, že zapojila i hodnotu šipky, nicméně to nedokáže vysvětlit.

0:01:09 Ex5 ukazuje na  $C$ ,  $A$ ,  $B$ , chce slyšet přesně, co se kde musí sečíst.

0:01:21 K6 ukazuje na hodnotu šipky  $a$ .

0:01:25 K7 ukazuje na  $A$ , levou rukou ukazuje směrem k hodnotám šipek a pravou rukou pak na  $B$ .

0:01:34 K8 ukazuje na  $B$ ,  $D$ ;  $C$ ,  $\gamma$ ,  $D$ ;  $D$ ,  $\beta$ , najednou se zaráží, nevychází to. Ukazuje na šipku  $c$  směřující k  $A$ , pak ukáže na  $A$ ,  $D$ .

0:02:04 K9 ukazuje na  $C$ ,  $A$ ,  $B$ .

0:02:11 Ex10 experimentátor přepisuje směr šipky  $c$  tak, aby směřovala k  $D$ .

### KOMENTÁŘ

Ex1 Nesmyslný úvod – vysvětlit, proč je to pavučina, nebo spíše se zeptat, co jí to připomíná, jestli se s tím již setkala a podobně.

K1 Kristýnka i přes to, že nikdy pavučinu neviděla, pohotově reaguje.

K2 Vysvětlila velmi dobře svou domněnku, za kterou jsem ji měla pochválit. Měla jsem ji jen upozornit na šipky vedle, aby si sama přišla na „správnější“ postup řešení, nebo ji hned předložit úlohu, kde by nešel uplatnit domnělý postup. Experimentátor předpokládal, že systém pavučin je ze vzorové pavučiny jasný, nenapadlo ho, že v něm lze vidět i jiné vazby, jak na ně poukázala Kristýnka.

K3 Na základě upozornění experimentátora na hodnoty šipek Kristýnka správně uvádí příklad z pavučiny, za což by měla být pochválena, je však experimentátorem nucena vyjádřit se přesněji. Experimentátor chce slyšet přesně to, co má na mysli a navádí Kristýnku jen k této odpovědi. Experimentátor by se měl oprostít od přesné terminologie, důležité je, že žák pochopil princip.

Ex6 Nechat více prostoru, nezasahovat tolik a okamžitě...

Ex7 Experimentátor má tendenci mít vždy poslední slovo, upřesnit to.

K8 Podrobně vysvětluje co a jak, protože experimentátor to tak chce slyšet. Kristýnka odhalila chybu, ale pravděpodobně si nebyla jistá, zda je chyba v úloze nebo v jejím řešení. Na základě nedostatku zkušeností s experimentátorem a úlohou se neodvažuje nahlas říct, že v úloze je chyba.

## Příloha 2

**K9** Experimentátor zde Kristýnku zmátl, což zapříčinilo, že se opět vrátila k původnímu postupu – dvě sousední čísla, jejichž součet dá číslo třetí.

**Ex10** Experimentátor měl Kristýnku pochválit, že odhalila chybu.

**Ex11** Zde by bylo možné situaci zahrát do autu a předstírat záměrnou chybu. V tomto případě, kdy se jedná o první setkání žáka a experimentátora a navíc o první setkání s úlohou je vhodné, že experimentátor vzal chybu na sebe.

## Exp 0202

### PROTOKOL

- 0:02:27 Ex1** Tak, tady ten vezmu. Tak, teďko tady máme doplněné všechny šipky, všechna čísla, ale nevíme, jaká šipka má jakou hodnotu. Tady si půjčíme tužku od Hanky.
- 0:02:37 K1** Takže, hmmm, nevím, od čeho mám začít. Takže tady začnu, tady mám vlastně já, tady si vezmu to číslo, od kterého to asi budu rozvíjet. 1 a kolik mi chybí do čtyř, takže to jsou 3 a hned tady mám zelenou šipku, která vede tady, takže tady to bude trojka.
- 0:03:00 Ex2** Dobře...
- 0:03:03 K2** Tady 1 a kolik mi chybí do tří, to jsou dvě a mám tady fialovou šipku, která je tady, takže tam si napíšu dvojku.
- 0:03:16 Ex3** A tady máme ještě jednu fialovou šipku, myslíš, že to tam bude sedět taky?
- 0:03:18 K3** Mhmm. Tady 4 a kolik..., teda 2 a kolik mi chybí do 4, to jsou taky 2, tak tady už mám tu dvojku...
- 0:03:26 Ex4** Jasně.
- 0:03:28 K4** A ještě oranžová – tady je 1 a kolik mi chybí do dvou? To je jedna, takže tu jedničku si napíšu tady. A tady zase 2 a kolik mi chybí do tří? To je taky jedna, takže to už mám tady. A tři a kolik mi chybí do čtyř, to je taky jedna, takže to už mám taky.
- 0:03:47 Ex5** Super, takže tady jsem já chybu neudělala, tady to vyšlo.

### EVIDENCE

- 0:02:27 Ex1** mluví příliš rychle.
- 0:02:35 K1** chvíli přemýšlí, odkud by začala, ukazuje na  $A$ , šipku  $a$ ,  $B$ ,  $\gamma$  a píše  $\gamma = 3$ .
- 0:03:03 K2** ukazuje na  $A$ ,  $b$ ,  $C$ ,  $\beta$  a píše  $\beta = 2$ .
- 0:03:16 Ex3** ukazuje na šipku  $f$ .
- 0:03:21 K3** ukazuje na  $D$ ,  $f$ ,  $B$ ,  $\beta$ .
- 0:03:30 K4** ukazuje na  $A$ ,  $c$ ,  $D$ ,  $\alpha$ , píše  $\alpha = 1$ , pak svůj výpočet dokládá na jiných situacích – ukazuje na  $A$ ,  $e$ ,  $C$ ,  $\alpha$ ;  $C$ ,  $d$ ,  $B$ ,  $\alpha$ .

### KOMENTÁŘ

**K1** Dokáže pojmenovat místo, od kterého je třeba začít. Její vyjadřování („číslo, od kterého to asi budu rozvíjet“) značí pokročilé myšlení. Používá fráze „1 a kolik mi chybí do 4“ – tato fráze je často používána při matematice ve škole, obzvláště při výuce odčítání. Zde je vidět, že Kristýnka přesně vidí význam orientace šipek.

**Ex3** Experimentátor skočil Kristýnce do řeči. V tomto případě se nic nestalo, u jiného žáka by však takový zásah do myšlení mohl způsobit ztrátu myšlenky, znepokojení a jiné.

**K4** Ví, že experimentátor chce slyšet důkaz, proto uvádí všechna místa, kde si může ověřit, že hodnota oranžové šipky je 1.

Tato úloha byla příliš snadná – bylo by potřeba přejít na úlohy obtížnějšího typu.

### Exp 0203

### PROTOKOL

- 0:03:47 Ex1** Tak, podíváme se na další hnedka. Tak, zkus tenhle. Tady už nám chybí šipky, takže ti dám i fixy.
- 0:03:54 K1** Jo, tady se doplňují i šipky. Jo, takže... Takže tady mám tři a kolik mi chybí do 4, to je jedna, takže jedničku mám tady, takže tady asi bude fialová šipka.
- 0:04:29 K2** A tady mám jedna a kolik mi chybí do čtyř, to jsou 3, takže trojku mám tady oranžovou, takže udělám oranžovou šipku. Protože vlastně ji.... Ale tady je možnááá taky chyba. Protože jedna a kolik mi chybí do tří? To jsou 2 a tady je dvojka zelená.
- 0:04:58 Ex2** Mhmm. Tak to se mi tam vloudil nějaký šotek... Takže jak by to tady muselo být správně?
- 0:05:04 K3** Tady by to muselo bejt, že jedna a kolik mi chybí do tří, to by nebyla oranžová šipka ale zelená...
- 0:05:11 Ex3** Výborně, tak ji tam oprav. Supr, a tamtu ještě škrtni, protože ta je špatně. Tak tu oranžovou klidně tou zelenou můžeš škrtnout. Táák, paráda. Ty už i opravuješ chyby takhle, vidíš to.

### EVIDENCE

- 0:04:01 K1** ukazuje na  $A$ ,  $D$ ,  $\alpha$  a kreslí fialovou šipku  $c$  orientovanou k  $D$ .
- 0:04:29 K2** ukazuje na  $B$ ,  $D$ ,  $\gamma$  a chystá se nakreslit oranžovou šipku  $f$ , nicméně se zarazí a odhaluje chybu v pavučině (šipka  $a$  má mít barvu zelenou). Zdůvodňuje ukazováním na  $B$ ,  $A$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Poté kreslí šipku  $f$  oranžovou orientovanou k  $D$ .
- 0:05:03 K3** ukazuje na  $B$ ,  $A$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$ . Kreslí zelenou šipku  $a$  vedle chybné oranžové.

### KOMENTÁŘ

**K1** Šipku kreslí velmi pozorně a pečlivě propojuje jednotlivé tečky, což vypovídá o jejich vlastnostech.

**K2** Kristýnka je pozorná a všimla si nesrovnalosti, nyní už nahlas hovoří o tom, že je v úloze chyba. Kristýnka si nejprve ověřuje své tvrzení na jiné situaci, to svědčí o globálnosti jejího myšlení.

**Ex2** Experimentátor přiznává svou chybu a správně Kristýnku nabádá k tomu, aby ji opravila.

**Ex3** Experimentátor by neměl tak direktivně nařizovat, jak má Kristýnka chybu opravit.

### Exp 0204

#### PROTOKOL

**0:05:31 Ex1** Tak, další příklad. Teďko nám chybí šipky, ale neznáme zároveň ani jejich hodnotu, takže tu nejdřív musíme spočítat. Takže začni, úplně jak chceš.

**0:05:40 K1** Tak já začnu asi od trojky. Takže, tři a kolik mi chybí do čtyř? To je jedna, takže... a je to zelená šipka, takže tady napíšu jedničku. Tady je dva a kolik mi chybí do čtyř, to jsou dva. Takže mám tady oranžovou šipku, takže si ji napíšu nad oranžovou šipku. A ta fialová, to je jedna a kolik mi chybí do čtyř, to jsou tři a je tady fialová šipka, takže tu si tady napíšu trojku. Potom jedna a kolik mi chybí do dvou? To je jedna, takže tady mám jedničku na zelený šipce, takže si tam udělám zelenou šipku. Jedna a kolik mi chybí do tří, to je dva a tady mám dvojku na oranžový šipce, takže to bude oranžová. A tady je dva a kolik mi chybí do tří? To je jedna, takže tady mám jedničku na zelený šipce, takže tady bude zelená.

**0:07:04 Ex2** Supr. Vychází všechno tak, jak má vycházet?

**0:07:05 K2** Jo.

**0:07:06 Ex3** Jo? Tady nemám chybu?

**0:07:07 K3** Ne.

**0:07:08 Ex4** Dobře.

#### EVIDENCE

**0:05:40 K1** ukazuje na  $D, A, c$  a píše  $\alpha = 1$ , poté ukazuje na  $B, A, a$  a píše  $\beta = 2$ , nakonec ukazuje  $C, A, b$  a píše  $\gamma = 3$ .

**0:06:19 K1** Nyní přechází k dokreslení šipek. Ukazuje na  $C, B, \alpha$  a kreslí zelenou šipku  $d$  orientovanou k  $B$ , dále ukazuje na  $C, D, \beta$  a kreslí oranžovou šipku  $e$  orientovanou k  $D$ , pak ukazuje na  $C, D, \alpha$  a kreslí zelenou šipku  $f$  orientovanou k  $D$ .

### KOMENTÁŘ

**K1** Začíná doplněním hodnoty zelené šipky, pokračuje hodnotou oranžové a nakonec určuje hodnotu fialové. Tento postup je poněkud zvláštní vzhledem k umístění šipek. Kristýnka začíná pravou částí pavučiny, pak přechází k levé a nakonec se dostává doprostřed. Je však možné, že tento postup zvolila zcela záměrně, jelikož hned viděla, že hodnoty šipek budou 1, 2, 3, a proto je doplňuje popořadě dle jejich hodnoty.

Kristýnka používá frázi „tady mám 1 na zelené šipce“. Použití předložky na může znamenat neztotožnění hodnoty se šipkou. Může to však být pouze verbální forma toho, co lze vidět v pavučině v místě hodnot šipek, tedy číslo, které leží na šipce.

Úloha byla opět příliš snadná, nevyžadující hlubší přemýšlení.

### Exp 0205

#### PROTOKOL

**0:07:08 Ex1** Tak, vezmeme hnedka další. Tady nám chybí těch šipek ještě víc.

**0:07:14 K1** Jééééé! Takže, tady jedna a kolik mi chybí do čtyř? To jsou tři a je tady oranžová šipka, takže nad tu oranžovou šipku si napíšu trojku. Jedna, a kolik mi chybí do dvou? To je jedna. Mám tady zelenou šipku. Takže si tam napíšu, nad zelenou šipku, jedničku. A tady jedna a kolik mi chybí do tří. To jsou dva, ale tady ještě, tady nemám... mmmm... udělanou šipku. A to bude fialová, protože tady ještě nemám dvojku. Takže tam udělám fialovou šipku. A nad tu fialovou si dopíšu dvojku. Dva a kolik mi chybí do čtyř? To jsou dva, takže tady mám oranžovou šipku, takže si... Teda fialovou. A napíšu si tam šipku. Dva a kolik mi chybí do tří? To je jedna, takže tady musím udělat zelenou šipku. A tři a kolik mi chybí do čtyř? To je jedna, takže si taky musím udělat zelenou šipku.

**0:08:56 Ex2** Takže hotovo?

**0:08:57 K2** No. Snad jo.

#### EVIDENCE

**0:07:13 K1** vyjadřuje překvapení z toho, že jsou vyznačené jen dvě šipky. Ukazuje na  $B$ ,  $A$ ,  $a$  a píše  $\gamma = 3$ . Dále ukazuje na  $B$ ,  $C$ ,  $d$  a píše  $\alpha = 1$ .

**0:07:42** Hluk vzniklý otevřením dveří na chodbu Kristýnku vůbec nevyrušil z jejího přemýšlení.

**0:07:45 K1** ukazuje na  $B$  a místo pro šipku  $f$ , usuzuje, že hodnota  $\beta = 2$ , kreslí fialovou šipku  $f$  orientovanou k  $D$ , píše  $\beta = 2$ .

**0:08:16 K1** ukazuje na  $C$ ,  $\beta$  a kreslí fialovou šipku  $b$  orientovanou k  $A$ , pak ukazuje na  $C$ ,  $D$ ,  $\alpha$  a kreslí zelenou šipku  $e$  orientovanou k  $D$ . Poslední část pouze slovně popisuje a kreslí zelenou šipku  $c$  orientovanou k  $A$ .



### KOMENTÁŘ

**K1** Kristýnka se zřejmě domnívala, že úloha bude těžší, zajímavější.

Určuje hodnotu fialové šipky na základě toho, že potřebuje doplnit šipku, jejíž hodnotu zná, ale nemá zatím v nabídce. Tento její postup svědčí o koncepčnosti jejího myšlení, které je dáno předchozími zkušenostmi.

Úloha byla opět příliš snadná!

### Exp 0206

#### PROTOKOL

**0:08:58 Ex1** Tak, další příklad. Teďko zas bude trochu jinej, protože teďko nám chybí už i čísla.

**0:09:02 K1** Čísla. Ty mám doplňovat tužkou?

**0:09:06 Ex2** Tužkou můžeš, mhm.

**0:09:10 K2** Takže tady je vlastně... jedna a kolik mi chybí do tří? To jsou dva, takže oranžová šipka to je dvojka. Tady je mmmm... Počkat, tady je dvojka, protože tady mám oranžovou šipku a dva a kolik mi chybí do tří? To je jedna, takže tady dva plus jedna jsou tři. Dva a něco, co mi má vzniknout. Takže oranžová šipka to je dvojka. Takže to bude čtyři.

**0:09:55 Ex3** Můžeš si to ještě nějak zkontrolovat, jestli ta čtyřka je správně?

**0:09:58 K3** Mhm, protože trojka a kolik mi chybí do čtyř, to je jednička, fialová a nebo jedna a zelená šipka, to je trojka, takže kolik mi chybí do čtyř, to je tři.

**0:10:10 Ex4** Takže to vyšlo? Dobře.

#### EVIDENCE

**0:09:16 K2** ukazuje na  $D, A, \beta$ .

**0:09:24 K2** ukazuje na  $C$  a hodnotu fialové šipky (pozn. přeřekla se, omylem říká oranžová), píše  $C = 2$ .

**0:09:40 K2** ukazuje na  $C, \beta, B$  a píše  $B = 4$ .

**0:09:58 K3** ukazuje na  $A, B, \gamma; D, f, B$ .

### KOMENTÁŘ

**Ex1** Experimentátor stále zaměňuje pojmy příklad a úloha.

**K1** Dotaz Kristýnky může svědčit o ne naprosté uvolněnosti.

**K2** Zajímavé je, že Kristýnka stále počítá způsobem „2 a kolik je 4“ i přesto, že zná všechny hodnoty šipek, tedy že může rovnou hodnotu přičítat.

Úloha je opět snadná, vyžaduje pouze doplnění čísel na základě hodnot šipek.

**Exp 0207**

**PROTOKOL**

- 0:10:11 Ex1 Uděláme hnedka další. Tak, tady kromě čísel musíš doplnit ještě hodnoty zase šipek.
- 0:10:19 K1 Jo, takže, já začnu asi od té oranžový, týhleť dvojky, protože je jako jediná vyznačená. Takže dva a ko... plus tři pro... a něco co mi má tady vyjít, takže tam přičtu trojku a to je pět.
- 0:10:38 Ex2 Výborně.
- 0:10:40 K2 A tady si to ještě můžu zkontrolovat, že tři, vlastně to už přijdu k dalšímu číslu, protože tři a kolik mi chybí do pěti a fialová šipka je tady ještě nevyplněná, takže to bude dva. A čtyři, tady bude čtyřka, protože čtyři a kolik mi chybí do pěti je jedna. A tady nemáme ještě jedničku, takže jednička bude zelená šipka.
- 0:11:10 Ex3 A nemůže být zelená šipka třeba tři? Že by to bylo dva, tři, čtyři?
- 0:11:15 K3 Taky by to šlo, ale... Asi jo, no.
- 0:11:26 Ex4 Asi nebo určitě? Jak to zjistím, jestli to bude jednička nebo čtyřka?
- 0:11:31 K4 Jo, čtyřka to bude, protože dva a kolik mně chybí do toho danýho čísla, to jsou... je tady fialová šipka, takže dva a to budou čtyři.
- 0:11:43 Ex5 Takže ta zelená šipka má hodnotu jedna nebo čtyři?
- 0:11:46 K5 Čtyři. Ne. Jedna. No, jedna.
- 0:11:52 Ex6 A jak to, že teda jedna, jak to, že ses rozhodla pro jedničku?
- 0:11:55 K6 Protože tady je třeba dva a kolik mi chybí do tří? To je jedna. Tři a kolik mi chybí do čtyř? To je taky jedna. Čtyři a kolik mi chybí do pěti? To je jedna.
- 0:12:05 Ex7 Paráda, nenechala ses zmást.

**EVIDENCE**

- 0:10:21 K1 ukazuje na  $\gamma$ ,  $C$ ,  $e$ ;  $D$ ,  $\gamma$ , píše  $D = 5$ .
- 0:10:44 K2 ukazuje na  $C$ ,  $D$ ,  $\beta$  a píše  $\beta = 2$ .
- 0:11:02 K2 ukazuje na  $A$ ;  $A$ ,  $D$ ,  $\alpha$ .
- 0:11:31 K4 ukazuje na  $C$ ,  $b$ ,  $A$ ,  $\beta$  a píše  $A = 4$ .
- 0:11:52 K5 píše  $\alpha = 1$ .
- 0:11:55 K6 ukazuje na cestu zelených šipek  $C$ ,  $d$ ,  $B$ ,  $a$ ,  $A$ ,  $c$ ,  $D$ .

**KOMENTÁŘ**

K1 Chce říct, jak si to může zkontrolovat, protože to experimentátor chce slyšet. Vzápětí si však uvědomuje, že to není kontrola, ale zjistí tím hodnotu další šipky.

## Příloha 2

**K2** Intuitivně doplňuje hodnotu šipky 1, která chybí. Správně přišla na to, že tam musí být 1, nicméně to nijak nezdůvodňuje, proto chce experimentátor poukázat na to, že hodnotu zelené šipky  $\alpha$  zatím neznáme, Kristýnku tím však v první chvíli mate.

**Ex3** Experimentátor se chybně dotazuje – má na mysli 4, ale říká 3.

**K5** K jejímu omylu (prvně řekla 4) došlo nejspíš proto, že nyní do prázdného okna psala číslo 4, které se jí zafixovalo.

### Exp 0208

#### PROTOKOL

**0:12:06 Ex1** Ták, další. Tady budeš zase doplňovat čísla a hodnoty šipek, ale tady jsi znala aspoň jednu, tady neznáš žádnou. No tak schválně, jestli si s tím poradíš.

**0:12:14 K1** (současně): A šipky.

**0:12:19 K2** Takže já začnu zase od toho cílového bodu, od kterého to budu rozvíjet. Takže jedna a kolik mi chybí do čtyř? To jsou tři, takže fialová šipka budou tři. Potom... Jedna... Tady už je to trošku těžší. Těch možností může být víc. Tady můžou být dva, ale zároveň i... Tady asi udělám dvojku, protože trojka by tam nešla, protože trojka už musí mít fialovou šipku. Vlastně už jiný číslo by tam nešlo, protože od pětky tady bych musela odčítat. Takže tohle bude dvojka.

**0:13:57 Ex2** A ještě se tě zeptám, mohla by tady být trojka?... Tys řekla, že tady nemůže být pětka.

**0:14:04 K3** No nemůže, protože zelená už... protože trojka už má vlastně šipku fialovou.

**0:14:14 Ex3** Trojka má hodnotu. Trojka má hodnotu kolik?

**0:14:19 K4** Tři.

**0:14:20 Ex4** Fialová šipka má hodnotu tři, výborně. A teďko jsi napsala, že zelená šipka má hodnotu dva. Odpovídá to?

**0:14:27 K5** Vlastně...

**0:14:28 Ex5** Klidně to škrtni nebo vygumuj, jestli to půjde, tak to klidně škrtni.

**0:14:35 K6** Aby to nebylo ošklivé.

**0:14:44 Ex6** Tak co s tím?

**0:15:02 K7** Ta oranžová šipka tady.

**0:15:05 Ex7** Tak tys řekla dobře, že tady nemůže být jaké číslo?

**0:15:07 K8** Trojka.

**0:15:08 Ex8** Trojka tam nemůže být?

**0:15:09 K9** Ne, protože tady nemám fialovou šipku. I když může.... Může tam být, protože...

**0:15:23 Ex9** Tak mi řekni, které číslo by tu nemohlo být, třeba?

**0:15:26 K10** Čtyřka určitě.

Příloha 2

- 0:15:28 Ex10 Mhm. Dobře, nebo – jaké by tu ještě nemohlo být?
- 0:15:29 K11 Pětka... Od pětky až nahoru.
- 0:15:35 Ex11 Takže jaká čísla by tam mohla být?
- 0:15:37 K12 Jednička by tam mohla bejt.
- 0:15:40 Ex12 Mohla?
- 0:15:40 K13 Ne, nemohla, nemohla, protože tady bychom měli tři a tady.... Takže tady bude asi ta trojka. Takže tady bude dvojka. Jsem to udělala dobře. Ted'ka... Tři a kolik je... Jo, takže tady bude pětka, protože tři a dva jsou pět. Jenže to by mi zase nevyšlo, takže...Pět a dva by bylo sedm, takže...
- 0:16:38 Ex13 Co s tím?
- 0:16:41 K14 Tak musí bejt ta dvojka. Jenže to taky nemusí bejt dvojka ta zelená šipka, takže...
- 0:17:12 K15 Leda že by ta šipka byla obráceně.
- 0:17:14 Ex14 Ale tady je to dobře, tady jsem to ted'ka zkontrolovala všechno a chybu tam nemám.
- 0:17:19 K16 Tak jedna, ta oranžová šipka...
- 0:17:26 Ex15 Tak, zkus přemyslet, a kdyby sis opravdu nevěděla rady, tak řekni a já ti napovím. Zkus ale nejdřív ještě sama, jo? Když tak si klidně řekni a já ti řeknu, poradím nějak.
- 0:17:44 K17 No, zase na odčítání, no...Jo, i když to by zase nešlo, takže... Jo, takže tady bude asi dvojka, protože dva a kolik mně chybí do čtyř, to jsou tady zase ta zelená šipka – dvojka. Tady, tady... I když to by zase nešlo. Takže...
- 0:18:26 Ex16 Chceš malinko napovědět, nebo ne?
- 0:18:28 K18 Jo, tak radši jo, protože...
- 0:18:29 Ex17 Tak podívej se takhle tady na ty zelené šipky. Tady všude mám zelenou šipku. A jde postupně až do čtyřky.
- 0:18:40 K19 Počkat... Nenapovídej! Tady by jinak musela bejt dvojka, protože tady by nic jiného. Jo. Už vím, protože tři a čtyři, kolik mi chybí do čtyř, to je jedna, takže ta oranžová šipka by mohla bejt jednička.
- 0:19:32 Ex18 A víme určitě, že tady je trojka? Nebo by tam mohlo být i něco jiného? Říkala jsi, že tam nemůže být čtyřka, nemůže tam být pětka a vyšší čísla. Ale mohlo by tam být něco jiného než trojka ještě?
- 0:19:44 K20 Dvojka by tam mohla být.
- 0:19:46 Ex19 Mohla by tam být jednička?
- 0:19:48 K21 Ne.
- 0:19:49 Ex20 Proč ne?
- 0:19:50 K22 Protože tady už jednička je a tady by tím pádem musela být... nula.
- 0:19:58 Ex21 Dobře. Tak zkus ted'ko přemyslet nad tím, cos řekla. A zkus pokračovat.
- 0:20:07 K23 No... To já nevím teda.

## Příloha 2

- 0:20:24 Ex22** Takže určitě víme, že jedna a kolik nám chybí do čtyř je...
- 0:20:27 K24** Tři.
- 0:20:28 Ex23** Takže určitě víme, že fialová šipka bude tři, že jo. Pak jsi tady napsala, že zelená šipka bude dva, ale to my vlastně ještě nevíme, že jo. To mi nevíme určitě, protože nám to tady nějak nevycházelo. Tak ji zkus zatím zase smazat, ať nás tam, ať nás tam nemate. Třeba ona tam bude, uvidíme, to se pak ujistíme. A tady jsme říkaly, že tady nemůže být - jaké číslo?
- 0:20:49 K25** Pětka a vejš.
- 0:20:50 Ex24** Pětka a vejš a eště? Může tam být čtyřka?
- 0:20:53 K26** Ne.
- 0:20:54 Ex25** Ne, takže tam může být ja... jaké čísla by tam mohla být?
- 0:20:57 K27** Dvojka a trojka.
- 0:20:59 Ex26** Dvojka nebo trojka. Jak to teďka zjistím, jestli tam bude dvojka nebo trojka. Ještě jednou ti řeknu, podívej se ještě jednou, jak to jde z dvojky do čtyřky.
- 0:21:26 K28** Možná, že by tahle zelená šipka mohla bejt jednička, protože... Kdybych tady napsala dvojku, tak jedna a kolik mi chybí do dvou, to je jedna. Takže dva a kolik mi chybí do toho daného čísla. Kdyby to byla jednička, tak to by byla trojka a tři a kolik mi chybí do čtyř, to je taky jedna.
- 0:21:52 Ex27** Mhm, no takže co s tím uděláme?
- 0:21:54 K29** Ta trojka tady nebude. To určitě. Uáá.
- 0:22:04 Ex28** Nevadí, já to seberu.
- 0:22:06 K30** Můžu tady zkusit napsat tu dvojku.
- 0:22:08 Ex29** Zkus napsat dvojku.
- 0:22:16 K31** Tady jestli by šla trojka... A tady tím pádem ta oranžová by musela bejt dvojka. Tady by byla jednička, tady by byla dvojka, jenže...
- 0:22:28 Ex30** Takže teď to všude vychází? Ještě tady máme jednu oranžovou šipku.
- 0:22:32 K32** No právě. Jedna a dva jsou tři.
- 0:22:35 Ex31** Takže to je dobře?
- 0:22:37 K33** No snad jo.
- 0:22:38 Ex32** Supr, tak. Já si... Sice to malinko trvalo, ale přišlas na to.
- 0:22:39 K34** Tady to bylo úplně nejtěžší.

## EVIDENCE

- 0:12:20 K2** ukazuje na  $A$ ,  $D$ ,  $c$ ,  $\gamma$ , píše  $\gamma = 3$ .
- 0:12:39 K2** přemýšlí, jak dál. Chvilí ukazuje na  $B$ . Hraje si s tužkou, která jí občas upadne na zem. Prostředí je vyrušováno vcházením učitelů do kabinetu.
- 0:13:35 K2** ukazuje na  $B$ , chce tam doplnit 2, ukazuje na  $\gamma$ .



Příloha 2

- 0:13:55 K2 píše  $B = 2$ .
- 0:14:08 K2 povídá a zároveň píše chybně hodnotu zelené šipky  $\alpha = 2$ .
- 0:14:11 Ex3,4 ukazuje na fialovou šipku  $c$ .
- 0:14:22 Ex4 ukazuje na zelenou šipku  $a$ .
- 0:14:28 K5 gumuje napsané číslo  $B = 2$ .
- 0:14:55 K6 gumuje i hodnotu zelené šipky  $\alpha = 2$ , která byla chybná.
- 0:15:00 K7 ukazuje na šipku  $f$ .
- 0:15:06 Ex7 ukazuje na  $B$ .
- 0:15:48 K13 píše chybně  $B = 3$ .
- 0:15:57 K13 píše chybně  $\alpha = 2$ .
- 0:16:19 K13 ukazuje na  $C$ , kam chce doplnit číslo 5, zarazí se však, protože zjišťuje, že by jí to nesedělo.
- 0:16:46 K14 Dlouhé přemýšlení, spekulování.
- 0:17:11 K15 ukazuje na šipku  $d$ .
- 0:17:42 K16 krouží tužkou nad pavučinou.
- 0:18:05 K17 občas se zaraduje, že na to přišla, po chvíli si však uvědomí, že by jí to nevyšlo.
- 0:18:10 K17 chce doplnit  $C = 2$ , po ověření si to však rozmyslí.
- 0:18:29 Ex17 ukazuje na cestu zelených šipek ( $a, d, e$ ).
- 0:18:40 K19 okřikuje spolužáka, který jí chce napovědět. Dlouho přemýšlí, na chodbě je slyšet hluk, to jí však neruší.
- 0:19:13 K19 ukazuje na  $C$ , chce tam opět doplnit 2, pak se zaraduje a ukazuje na  $B, f, D$ .
- 0:19:34 Ex18 upozorňuje Kristýnku, aby neudělala zas další chybu.
- 0:19:50 K22 ukazuje na  $A = 1$  a šipku  $a$ .
- 0:20:28 Ex23 rekapituluje, co je v úloze jasné. Ukazuje na  $A, D, \gamma$ .
- 0:20:40 Ex23 Kristýnka gumuje hodnotu zelené šipky  $\alpha = 2$ .
- 0:20:47 Ex23 ukazuje na  $B$ .
- 0:20:59 Ex26 ukazuje na dráhu zelených šipek ( $a, d, e$ ).
- 0:21:28 K28 ukazuje na zelenou šipku  $a, A, B, C, D$ .
- 0:21:53 K29 gumuje  $B = 3$ . Spadne jí tužka, experimentátor ji zvedá.
- 0:22:06 K30 píše  $B = 2$ .
- 0:22:18 K31 píše  $C = 3$ , ukazuje na oranžovou šipku  $f$ , doplňuje hodnotu zelené  $\alpha = 1$  a hodnotu oranžové  $\beta = 2$ .
- 0:22:30 Ex30 ukazuje na šipku  $b$ .
- 0:22:40 K34 dává najevo radost z vyřešení této úlohy.

### KOMENTÁŘ

**K1** Opět hned volí místo, od kterého začne řešit. Místo však, pravděpodobně omylem, nazývá cílovým bodem.

Tato úloha pro ni je konečně obtížnější. Je zde jednoduchá strategie (dráha šipek), kterou však neodhaluje. Zkouší alternativy, požívá při úvahách kondicionál.

Správně říká, že v dolním rohu nemůže být 5. Zkouší na toto místo zapsat dvojku. Mylně říká, že trojka tam být nemůže, protože trojku už má fialová hodnota - to je však míchání čísel a hodnot šipek dohromady.

**K2** Správně říká, že B může být číslo 2.

**Ex2** Experimentátor svým dotazováním dívku spíše spletl. Vstoupil do jejích myšlenkových pochodů, a proto Kristýnka dělá chybu (k zelené šipce zapsala hodnotu 2), se kterou se i nadále veze.

**K4** Kristýnka pod nátlakem gumuje číslo B, které měla správně napsané. Jedná příliš zbrkle, nechá se snadno zmást.

**K9** Nyní si uvědomuje chybnou domněnku s trojkou v dolním rohu a hodnotou 3 fialové šipky.

**K11** Kristýnka uvažuje velmi logicky, je schopna říct, která čísla nemohou být doplněna za B a zdůvodnit proč.

**K13** Přestože Kristýnka správně vytipovala čísla, která by mohla a nemohla být doplněna za B, neověřuje si svou volbu a chybně doplňuje  $B = 3$ , což způsobí další problémy v řešení.

Experimentátor ji neopravuje. Nechává ji, ať si sama na chybu přijde.

**K14** Správně usuzuje, že jestliže jí nevychází  $B = 3$ , pak musí být  $B = 2$ , nicméně je už tak zmatená, že i o  $B = 2$  pochybuje, aniž by si to vyzkoušela. Její pochyby jsou způsobeny tím, že již udělala zkušenost s doplněním  $B = 2$  a tato zkušenost skončila tím, že číslo 2 vygumovala. Má proto zafixováno, že  $B = 2$  být nemůže. Tuto její zkušenost bude těžké odbourat.

Na základě chyb, které se v předchozích úlohách objevily vinou experimentátora, uvažuje nad tím, že chyba může být opět v úloze.

**Ex16** Pomoc je spíše vnucena než nabídnuta, o čemž svědčí Kristýnčina váhavá reakce.

**Ex17** Experimentátor se neustále snaží navést žáka na cestu zelených šipek, chce, aby pochopil princip jejich sčítání. Bývalo by možná pomohlo zvolit úlohu, kde by se sčítaly pouze 2 šipky.

**K19** Při svých řešeních nyní bere v úvahu vždy jen kousek pavučiny, ne celek (doprostřed dává dvojku – nebere v úvahu dva kroky od jedničky do středu právě k této dvojce). Kristýnka, když neví, tak nepíše – nepoužívá strategii pokus-omyl.

**K22** Výborná úvaha ze strany dívky – dokáže přemýšlet i o nulové šipce.

**K28** Zde uvažuje abstraktně – zkouší číslo a dopočítává (bez zapisování) zbytek hodnot.

**Exp 0209**

**PROTOKOL**

- 0:22:42 **Ex1** Tak, teďko, tady to je obdobná úloha, tak zkus, jestli už teďko si s tím poradíš úplně snadno.
- 0:22:49 **K1** Já si radši vezmu předlohu.
- 0:22:51 **Ex2** Ne, zkus to bez toho.
- 0:22:52 **K2** Tak jo.
- 0:22:53 **Ex3** Co? Pak když tak, kdybys nevěděla, tak já ti to tady nechám a můžeš si to vzít, jo?
- 0:22:58 **K3** Tak, už mám v jednom jasno. Tři a kolik mi chybí do pěti, to jsou dva, takže fialová šipka budou dva. Tady ... Tady je to zase špatně. Protože ta šipka by musela být vést asi sem.
- 0:23:24 **Ex4** Jak to?
- 0:23:25 **K4** Protože to by muselo být na odčítání. Kdyby ta šipka vedla...
- 0:23:32 **Ex5** Teď ti nerozumím. Zkus to ještě jednou vysvětlit, nebo nějak jinak.
- 0:23:37 **K5** No protože, kdyby tady bylo nějaký číslo, tak vlastně ono by ta šipka narážela pořád do něj, protože ona by neměla místo, aby to šlo k tý pětce. Takže ta šipka by musela bejt na druhou stranu.
- 0:23:49 **Ex6** A ono to nemůže jít od pětky sem?
- 0:23:52 **K6** To by muselo bejt na odčítání.
- 0:23:54 **Ex7** Jak to, k pětce můžu přičíst nějaké číslo, nebo ne?
- 0:23:58 **K7** Možná jo. Tady možná bude jednička, protože jedna a dva, to je fialová šipka, jsou tři. Jedna a kolik mi chybí do pěti? To jsou čtyři, takže to je oranžová šipka. Tady, tady tři a čtyři je sedm, protože tady to je čtyřka. Pět a dva je sedm, protože tady to je dvojka. A ta zelená ta musí bejt – jedna a kolik mi chybí do sedmi, to je šest.
- 0:24:51 **Ex8** Supr. Tak, teď se tě zeptám, tady jsme měly tuhleto úlohu a tady jsme šly od jedničky po stejných šipkách až ke čtyřce. Je tady něco podobného? Že jdeme po stejných šipkách? Od nějakého čísla až, až zase úplně přes celou tu pavučinku do jiného čísla?
- 0:25:11 **K8** No, něco jo, ale tady je to trošku jinak udělaný. Správně se jde takhle, ale ta šipka u tý trojky vede takhle a ne takhle. Tady ta šipka je otočená.
- 0:25:25 **Ex9** Dobře, já se tě ještě... Říkáš to správně, to máš úplně... správně říkáš ty rozdíl a já teďko mám na mysli tohleto – že tady jdu od jedničky, pořád po zelené, po zelené, po zelené až do koncového čísla. Mám to tady tak, že jdu pořád po stejných šipkách?
- 0:25:38 **K9** Ne. No protože tady to, tady jedu po zelený, po oranžový a po fialový, takže to je po všech barvách.
- 0:25:47 **Ex10** Po všech barvách. A tady, když se podíváš, tak ona je trošku jiná, že jo? Tady je třeba fialová šipka, tady je oranžová šipka. Tak nehledej úplně tu stejnou

## Příloha 2

cestu, ale zkus podívat, jestli není nějaká stejná cesta, která by vedla po těch, po těch stejných šípkách. Nemusí to být přesně cesta odsud sem, sem, sem. Ale může to být třeba odsud někam jinam.

- 0:26:06 K10** A musí být stejný barvy?
- 0:26:08 Ex11** Mhm. Tak jako to bylo tady, že jsem přičítala pořád jedničku. Tak jestli tady to není náhodou stejně. Že přičítám pořád stejné číslo. U nějaké té cesty...
- 0:26:18 K11** Tady je akorát stejný, že tady je zelená a tady je zelená.
- 0:26:24 Ex12** Tak já ti teďko napovím, podívej se na fialovou šipku, když vycházím odsud.
- 0:26:34 K12** Jo, protože tady je i trojka. Stejná.
- 0:26:38 Ex13** Trojka tam je stejná a kam pak to vede z trojky, kam vede fialová šipka?
- 0:26:41 K13** Na pětku.
- 0:26:43 E14** Mhm. A potom z pětky?
- 0:26:44 K14** Na sedmičku.
- 0:26:46 Ex15** Mhm. A zase, kolik teda pořád přičítám u téhle cesty?
- 0:26:49 K15** Dva.
- 0:26:50 Ex16** Pořád dvojku, takže tím jsem myslela, že to je stejné. Tady pořád přičítám jedničku a tady pořád přičítám dvojku.
- 0:26:54 K16** Jo a tady dvojku.
- 0:26:55 Ex17** Jasně. Tak dobrý, můžem další příklad? Ještě můžeš?
- 0:26:58 K17** Jo, jo.

## EVIDENCE

- 0:22:52 K1** natahuje se pro předchozí úlohu.
- 0:23:02 K3** ukazuje na  $C$ ,  $e$ ,  $D$  a píše hodnotu fialové šipky  $\alpha = 2$ .
- 0:23:16 K3** ukazuje na  $D$  a zaráží se, zpochybňuje své řešení.
- 0:23:37 K5** ukazuje na  $B$ ,  $D$ .
- 0:24:04 K7** ukazuje na  $A$ ,  $b$ ,  $C$  a píše  $A = 1$ , dále ukazuje na  $A$ ,  $D$  a píše  $\beta = 4$ .
- 0:24:32 K7** po chvílce přemýšlení se vrací k číslu  $B$  a ukazuje na  $C$ ,  $d$ ,  $B$  a píše  $B = 7$ .
- 0:24:39 K7** ověřuje si zapsané  $B = 7$  na situaci  $D$ ,  $f$ ,  $B$ .
- 0:24:44 K7** píše hodnotu zelené šipky  $\gamma = 6$ .
- 0:24:55 Ex8** předkládá předchozí úlohu a ukazuje na cestu zelených šipek.
- 0:25:16 K8** ukazuje na šipku  $d$  a porovnává její směr v obou úlohách, zjevně přesně nepochopila, na co se experimentátor ptá. Ukazuje na šipku  $f$ .
- 0:25:31 Ex9** znovu ukazuje na cestu zelených šipek z předchozí úlohy.
- 0:25:50 Ex10** ukazuje na rozdíly šipek v úlohách.
- 0:26:39 K12** ukazuje na  $C$ , které je shodné v obou úlohách.



## Příloha 2

**0:26:40 Ex13** ukazuje na šipku  $e$ .

**0:26:50 Ex16** ukazuje na jednobarevné cesty šipek.

### KOMENTÁŘ

**K1** Kristýnka je zjevně trochu rozladěná, cítí se nejistě po předchozím zdlouhavém řešení úlohy, proto chce jako oporu předchozí úlohu.

**Ex1** Experimentátor si myslel, že další úloha je obdobná. Dráha šipek zde nebyla zdaleka tak podstatným jevem, jako v předchozí úloze.

**Ex2** Kristýnce experimentátor zakázal předlohu. Měl ji naopak pochválit, že jestli to dokáže použít, jediné dobře.

**K3** Kristýnka začíná jediným jasně daným momentem, tedy doplněním hodnoty fialové šipky. Na základě tohoto zjištění by bylo snadné doplnit celou úlohu.

**K3** U této úlohy kupodivu Kristýnku překvapila vyšší čísla. Nejprve se dokonce domnívala, že je v úloze opět chyba a všemožně odůvodňovala své pochybnosti. V její hlavě byla zkušenost s pavučinami, ve kterých se dosud neobjevila vyšší čísla než 5.

**K4** Uvažuje o šipce, která by odčítala – pak by tam mohla doplnit číslo menší než 5, jak by chtěla.

**K7** Strategicky přešla k jiné části úlohy.

**K8** Správně uvádí shody a rozdíly, dráhu šipek ale nevidí.

**K9** Kristýnka hledá cestu stejných šipek na stejném místě, jako byly v předchozí úloze.

**Ex17** I přes to, že to dívka neřekla, musela již být unavená. V této chvíli trvá experiment již okolo půl hodiny!

### Exp 0210

#### PROTOKOL

**0:27:01 Ex1** Tak, mrkni na to. Tady doplňujeme všechno. Jak hodnoty šipek, tak šipky, tak čísla.

**0:27:07 K1** Takže. Jo, takže. Hned tady mám trošku jasno, protože jedna a oranžová šipka už mám napsáno, že je jedna, takže jedna plus jedna jsou dva. Dva a jedna to jsou tři. Jedna a kolik mi chybí do tří, to jsou ... dva, takže ta zelená šipka bude dvojka. Tady mám dva a kolik mi chybí do čtyř, to jsou dva, takže už tady vím, že to je zelená šipka. Jedna a kolik mi chybí do čtyř, to jsou tři, takže trojka bude fialová, protože ji tu ještě nemám. Jo, jo fixou.

**0:28:28 Ex2** To můžeš klidně fixou, to je jedno.

**0:28:39 K2** A tři a kolik mi chybí do čtyř to je jedna, takže to bude oranžová.

#### EVIDENCE

**0:27:18 K1** ukazuje na  $B$ ,  $\alpha$  a píše  $D = 2$ , poté přechází k  $A$  a píše  $A = 3$ .



## Příloha 2

- 0:27:54** K1 píše hodnotu zelené šipky  $\beta = 2$ .  
**0:28:10** K1 kreslí zelenou šipku  $e$  orientovanou k  $C$ .  
**0:28:26** K1 kreslí fialovou šipku  $d$  orientovanou k  $C$  a píše  $\gamma = 3$ .  
**0:28:39** K2 ukazuje na  $A$ ,  $C$  a kreslí oranžovou šipku  $b$  orientovanou k  $C$ .

## KOMENTÁŘ

**Ex1** Úloha nebyla na místě – zcela bez problémová, jednodušší než předchozí.

## Exp 0211

## PROTOKOL

- 0:28:47** Ex1 Výborně. Tak, můžem další? Tak, tady je to zase podobný. Zase znám jen některé hodnoty, některá čísla, některé šipky.
- 0:29:00** K1 Takže dva a kolik mi chybí do čtyř to jsou dva, takže ta oranžová šipka bude dvojka. Čtyři plus šest je deset, takže tady bude desítka. Jenže to nevychází. Tady bude osmička. Protože osm plus dva je deset. Jo, zkusím napsat, co mi z toho vyjde. Dva a kolik mi chybí do osmi to je šest...
- 0:30:02** Ex2 Tak, já tě zastavím, protože tam mám zase chybu. Já tam mám zas chybu. Tak a já to zkusím opravit, jo? Abysme to dopočítaly. Já jsem tady totiž spletla hodnotu té šipky.
- 0:30:17** K2 Takže čtyři a tady je plus čtyři, je osm, takže si tady napíšu osmičku. Dva a kolik mi chybí do čtyř to jsou dva, takže tady si napíšu dvojku. Tady něco plus dva má dát osm a to bude šest, protože šest plus dva je osm. Tady dva a kolik mi chybí do šesti, to budou čtyři, a čtyřku mám tady fialovou. Udělám šipku. Čtyři a kolik mi chybí do šesti, to jsou dva, takže dvojku mám oranžovou. A dva a kolik mi chybí do šesti, teda do osmi, je šest, takže to udělám zelenou, protože šestka... Tahleto úloha byla docela lehká.
- 0:31:28** Ex3 Dobře, takže zkusíme nějakou těžší. Ještě se tě zeptám k téhle úloze, před tím byla dráha těch zelených šipek, tady jsme měly ty fialové šipky, je to tady taky nějak podobně, že jdu zase od čísla až do čísla podle stejných šipek? Tady jsme šly po té fialové, tady před tím to bylo po té zelené. Je to tady taky po nějaké barvě stejně?
- 0:31:51** K3 Jo, je. Protože je dva a kolik mi chybí do čtyř, jsou dva, čtyři a kolik mi chybí do šesti, jsou dva a šest a kolik mi chybí do osmi jsou taky.
- 0:32:01** Ex4 Výborně, takže tady jsi šla po těch oranžových. Supr.

## EVIDENCE

- 0:29:02** K1 ukazuje na  $A$ ,  $D$  a píše  $\alpha = 2$ , pak ukazuje na  $D$ ,  $\gamma$  a píše  $B = 10$ .  
**0:29:42** K1 po chvíli přemýšlení uvažuje o  $C = 8$ , což i napíše. Je vidět, že tuší problém.  
**0:30:02** Ex2 opravuje chybu v úloze a předkládá úlohu znovu.

## Příloha 2

- 0:30:17 K2** ukazuje na  $D$ ,  $\beta$  a píše  $B = 8$ , vzápětí píše  $\alpha = 2$ .
- 0:30:38 K2** ukazuje na  $C$ ,  $d$ ,  $B$  a píše  $C = 6$ , poté ukazuje na  $A$ .  $C$  a kreslí fialovou šipku  $b$  orientovanou k  $C$ .
- 0:31:02 K2** ukazuje na  $D$ ,  $C$  a kreslí oranžovou šipku  $e$  orientovanou k  $C$ , nakonec kreslí zelenou šipku  $a$  orientovanou k  $B$ .
- 0:31:36 Ex3** ukazuje na dráhy šipek v předchozích úlohách.
- 0:31:54 K3** ukazuje dráhu oranžových šipek přesně tak, jak to chtěl experimentátor slyšet.

## KOMENTÁŘ

**K1** Kristýnka správně odhalila, že když doplní číslo 10, musela by v pavučině mít šipku hodnoty 8, kterou nemá.

**K2** Sama Kristýnka komentuje, že úloha byla lehká, což opravdu byla.

**K2** Vždy přičítá „Tady něco plus dva má dát osm a to bude šest, protože šest plus dva je osm.“, „Čtyři a kolik mi chybí do šesti“. Nikdy nepoužívá odčítání, neumí pracovat s šipkou jako antisignálem.

**Ex3** Experimentátor se opět snaží upozornit Kristýnku na dráhu jednobarevných šipek.

## Exp 0212

## PROTOKOL

- 0:32:03 Ex1** Tak. Třetí příklad od konce.
- 0:32:09 K1** Mhm. Takže, jedna a kolik mi chybí do tří, jsou dva. Takže to už mám tady. Tři a ko... plus dva, protože to je pět, dopíšu pětku. Jedna a kolik mi chybí do pěti jsou čtyři, takže tady mám fialovou, takže sem dám šipku. Teďka. Tady to zapeklitý číslo. Jo, už asi vím. Tady bude... Tady trojka nemůže bejt, takže... čtyřka... Tady jde, tady jsem přišla na jeden způsob. Tady by mohla bejt sedmička, protože pět a kolik mi chybí do sedmi, to je dva, to je tady a že by to šlo zase po zelenejch šípkách.
- 0:33:56 Ex2** Mhm, výborně.
- 0:33:57 K2** A nebo už mě nic nenapadá. A jedna, ko... ta oranžová by byla šestka. Jedna a kolik mi chybí do sedmi, by byla. Vyzkouším napsat, jestli to vyjde.
- 0:34:12 - 0:38:10 chyba nahrávky: opakování předchozí části**
- 0:38:10** Tři a kolik mi chybí do sedmi, to je čtyři, takže udělám fialovou šipku. No, doufám že to vyjde.
- 0:38:26 Ex3** Výborně. Zkus teďko přemýšlet... Je to dobře, vyšlo to samozřejmě všechno, udělala to výborně. Jestli by tady mohlo být i jiné číslo nahoře. Takže znaly jsme vlastně jenom ty dvě zelený...
- 0:38:41 K3** Já vím...
- 0:38:42 Ex4** A oranžovou, takže tyhle dvě jako bysme tu neměly. A hodnota tý šipky

## Příloha 2

oranžový by musela být samozřejmě taky jiná.

- 0:38:50 K4** Já myslím, že nemohlo, protože... Jako kdyby byla hodnoty jiný, těch šipek?
- 0:38:57 Ex5** Dvojku a čtyřku máme danou, takže jenom oranžová by mohla mít jinou hodnotu, tus vlastně vymyslela ty, takže jenom oranžová by mohla mít jinou hodnotu. Mohla by tam být třeba šestka?
- 0:39:08 K5** Ne, protože tady by to nevzniklo.
- 0:39:11 Ex6** A teď se zeptám. Vlastně vím, že tady to číslo musí být větší než jedna, protože ta šipka jde od tohoto čísla k tomuhle, tak mohla by tam být třeba dvojka?
- 0:39:28 K6** Mm (ne).
- 0:39:29 Ex7** Proč ne?
- 0:39:30 K7** Protože tady nemáme nikde tu šipku trojku, která by nám dala pětku.
- 0:39:37 Ex8** A mohla by tam být třeba... Jaké jsem říkala teďko číslo?
- 0:39:42 K8** Dvojku.
- 0:39:43 Ex9** Tak mohla by tam být čtyřka?
- 0:39:50 K9** Mm. (ne)
- 0:39:51 Ex10** Proč ne?
- 0:39:52 K10** Protože tady zase dělá problém ta dvojka, že by to ta čtyřka nedala,...to by se muselo přičíst dva a to by bylo šest.

## EVIDENCE

- 0:32:26 K1** ukazuje na  $C$ ,  $B$  a píše  $B = 5$ , poté hned kreslí fialovou šipku  $f$  orientovanou k  $B$ .
- 0:32:53 K1** ukazuje na  $A$ .
- 0:33:45 K1** po dlouhém přemýšlení vysvětluje a ukazuje na  $A$ ,  $B$ ,  $A$ ,  $a$  a na cestu zelených šipek.
- 0:34:03 K2** ukazuje na  $D$ ,  $c$  a píše  $A = 7$ ,  $\gamma = 6$ , kreslí zelenou šipku  $a$  s orientací k  $A$  a poté fialovou šipku  $b$  s orientací k  $A$ .
- 0:38:50 K4** Vrtí se na židli.
- 0:39:08 K5** ukazuje na  $A$ .
- 0:39:15 Ex6** ukazuje na  $D$ ,  $c$ ,  $A$ .

## KOMENTÁŘ

**K1** V této úloze Kristýnka použila jednobarevnou dráhu šipek, na kterou se ji experimentátor několikrát snažil navést v předchozích úlohách.

**K3** Experimentátor zbytečně moc mluví, zasahuje do myšlení. Kristýnka to dává najevo.

Vrtí se na židli – experiment už je příliš zdlouhavý.

**K4** Kristýnka je pravděpodobně už unavená, úlohu vyřešila a nechce se o ní více bavit.

**K7** Správně zdůvodňuje, proč  $A$  musí být pouze 7.

### **Exp 0213**

#### **PROTOKOL**

- 0:40:01 Ex1** Dobře, supr. Výborně. Jsi šikulka. Tak, předposlední příklad. Tady máme jenom jedno číslo teďka.
- 0:40:18 K1** Takže tady asi začnu od té desítky. Tady bude něco a kolik mi chybí do deseti a tady mám dvojku, takže to něco bude osm. Deset... Počkat. Tady by mohla bejt, já si to zkusím udělat lehce tužkou, ale ještě to radši, ještě ne.
- 0:41:13 Ex2** Jasně.
- 0:41:31 K2** Šipka by mohla bejt šest, a to by byla... Čtyři a kolik mi chybí do osmi... No, šlo by to, protože tady, to obtáhnu, ať je to trochu světlejší. Protože třeba čtyři a kolik mi chybí do osmi, to jsou čtyři, takže bych tady udělala oranžovou šipku. Čtyři a kolik mi chybí do šesti to jsou dva, ty mám tady, šest a kolik mi chybí do osmi, to jsou dva, takže tady bych udělala fialovou šipku. A šest a kolik mi chybí do deseti, to jsou čtyři, takže tady bych měla zase oranžovou.
- 0:42:46 Ex3** Vyšlo? Všude to sedí?
- 0:42:47 K3** Jo.
- 0:42:48 Ex4** Tak, teď se tě zeptám. Ty jsi začala od té osmičky. Ta byla jasná. Proč tě pak napadlo, že tady bude ta čtyřka? Jak jsi k tomu došla, že tam bude ta čtyřka, nebo že by tam mohla být čtyřka?
- 0:42:58 K4** Já nevím, já jsem si tak tam zkoušela všechny čísla a ta šestka mi tam nějak naskočila sama, já nevím.
- 0:43:09 Ex5** Takže tak, tak spíš žes to zkoušela a že ta čtyřka sis myslela, že by to mohlo vyjít, taks to zkoušela dopočítat.
- 0:43:13 K5** No, no.

#### **EVIDENCE**

- 0:40:18 K1** Vyděšení (jen jedno číslo je dané). Ukazuje, že začne od  $C$ ,  $b$ ,  $A$  a píše  $A = 8$ .
- 0:41:08 K2** ukazuje na  $B$  a lehce tužkou píše  $B = 4$  a  $\gamma = 6$ , pak píše  $D = 6$ , kontroluje a raduje se, že jí to vychází.
- 0:41:59 K2** obtahuje jemně napsaná čísla.
- 0:42:09 K2** ukazuje na  $B$ ,  $A$  a kreslí oranžovou šipku  $a$  k  $A$ , pak kontroluje šipku  $f$  mezi  $B$  a  $D$ .
- 0:42:24 K2** ukazuje na  $D$ ,  $A$  a kreslí fialovou šipku  $c$  orientovanou k  $A$ , poté kreslí oranžovou šipku  $e$  orientovanou k  $C$ .
- 0:42:49 Ex4** ukazuje na  $A$ ,  $D$ ,  $C$ ,  $B$ .

### KOMENTÁŘ

**K1** Bojí se neúspěchu, proto raději nejprve píše čísla slabě tužkou.

**K2** Píše nejprve to, co je klíčové, tedy čísla v pavučině, pak teprve doplňuje šipky.

**Ex4** Netuším, jak přišla na řešení, ani ona jej nedokáže vysvětlit.

### Exp 0214

#### PROTOKOL

**0:43:15 Ex1** Dobře, tak úplně poslední příklad. Máme tady. Tady máme dokonce dvanáctku.

**0:43:23 K1** Jéé! Tak, tady už, tady už bude muset být... nula.

**0:43:36 Ex2** Jakto, že nula?

**0:43:38 K2** Protože tady kdybysme to dali, tak nula, tady by třeba... tady musím přičíst čtyři. Tady je třeba jedna a přičtu čtyři, to by bylo pět. Dva a čtyři to by bylo šest. Tři a čtyři sedm, takže tady pasuje jediná nula, ke které když přičtu čtyři, tak by vzniklo čtyři. Zkusím napsat. Světle... Takže ta oranžová šipka by mohla být dvanáct. Tady ta zelená by byla... by mohla být osmička. Tady by byla osmička. A čtyři a ... mi chybí... Fialová... No vychází mi to tak. Tady vlastně nula a kolik mi chybí do čtyř, to jsou čtyři. Nula a kolik mi chybí do dvanácti, to byla ta oranžová šipka. Tady to obtáhnu. No a do osmi mi chybí osm, takže tady by byla osm. Čtyři a kolik mi chybí do osmi, to by bylo čtyři, takže fialová šipka. A osm, kolik mi chybí do dvanácti, tak by byly zase čtyři, takže taky oranž... teda žl... fialová šipka.

**0:45:25 Ex3** Vychází?

**0:45:26 K3** Mhm.

**0:45:27 Ex4** Tak supr. To je všechno, co mám. Tak já děkuju moc. Jsi šikulka.

**0:45:31 K4** Jo, prosim.

#### EVIDENCE

**0:43:21 K1** reaguje udiveně na číslo 12.

**0:43:38 K2** ukazuje na  $B$ ,  $\alpha$ .

**0:44:01 K2** píše  $B = 0$ ,  $\gamma = 12$ ,  $\beta = 8$ ,  $A = 8$ .

**0:44:36 K2** obtahuje dosud napsaná čísla a znovu zdůvodňuje.

**0:45:08 K2** ukazuje na  $C$ ,  $A$  a kreslí fialovou šipku  $b$  orientovanou k  $A$  a fialovou šipku  $c$  orientovanou k  $D$ .

### KOMENTÁŘ

**K1** Přišla na přítomnost nuly. Z toho měla nejspíš radost, proto zaujatě vysvětluje, proč tam ta nula musí být.

Úloha opět nebyla příliš složitá.



Příloha 2

Kaskáda 2 - Kristýnka

<p>1. vzorová úloha</p>	<p>2.</p>	<p>3. chyba</p>
<p>4.</p>	<p>5.</p>	<p>6.</p>
<p>7.</p>	<p>8.</p>	<p>9.</p>
<p>10.</p>	<p>11.</p>	<p>12.</p>
<p>13.</p>	<p>14.</p>	

## Experiment 6

### Tobiáš – 3. třída

#### Exp 0601

#### PROTOKOL

- 0:00:05 Ex1** Tak, máme tady první úlohu. Zkus se na ni podívat, ta už je vyřešená, tam není potřeba vůbec nic, nic řešit. A zkus se podívat, jestli, jestli by si odhadl, jak to tam funguje, jaký tam je princip. Jsou tam nějaká čísla, nějaké šipky.
- 0:00:21 T1** No že třeba... no jenom trošku...jedna a dva, no že třeba jedna a dva jsou tři, je tady spojený, jedna, dva a tři jsou čtyři, akorát že jenom ta dvojka.
- 0:00:37 Ex2** Já se tě zeptám, tys říkal jedna, dva a tři jsou čtyři.
- 0:00:38 T2** Ne, jedna, dva jsou tři a tady jsou ty šipky, ta zelená a oranžová, to je ta zelená, oranžová a fialová k té čtyřce a to se taky rovná tři, čtyři...
- 0:00:49 Ex3** Co se rovná čtyři? Tady ti nerozumím teďko.
- 0:00:51 T3** No že jedna, dva tři se rovná čtyři, právě že tady je...tady je ta od jedničky je ta fialová čárka ke čtyřce, ta zelená a ta oranžová.
- 0:01:00 Ex4** Dobře, tady máme ještě nějaká čísla napsaná nad těmi šipkami. Tak ještě se zkus podívat, já myslím, že to s tím bude ještě nějak souviset.
- 0:01:08 T4** Náký... Náký body budu počítat, nebo...
- 0:01:23 Ex5** Tak zkus se podívat mezi jedničkou a čtyřkou máme fialovou šipku. A nad tou fialovou...
- 0:01:33 T5** No že jedna a tři se rovná čtyři.
- 0:01:35 Ex6** Výborně. A jak to bude třeba se zelenou šipkou?
- 0:01:38 T6** Že dva a dva se rovná čtyři a jedna a dva se rovná tři.
- 0:01:44 Ex7** Výborně, takže myslíš, že už víš? ... jak to tam funguje? Dobře.
- 0:01:46 T7** Mhm.

#### EVIDENCE

- 0:00:05 Ex1** Zvědavě kouká střídavě experimentátora, střídavě na úlohu, pozorně naslouchá.
- 0:00:21 T1** Tobiáš skáče experimentátorovi do řeči, ještě než dokončí větu.Ukazuje na A, C, B, pak na A, c, D; C, e, D; B, f, D.
- 0:00:37 Ex2** ukazuje na A, C, B, D.
- 0:00:39 T2** ukazuje na A, C, B; d, a, e, f, c; rukou mávne nad celou pavučinou.
- 0:00:51 T3** ukazuje na A, C, B, D; A, c; C, e; B, f.

### Příloha 3

- 0:01:00 Ex4** snaží se poukázat na „legendu“ k pavučině, tedy na hodnoty šipek v levé části papíru.
- 0:01:08 T4** Očním kontaktem hledá pomoc/nápovědu/souhlas... experimentátora, pohrává si s tužkou.
- 0:01:23 Ex5** Experimentátor se snaží nastalou situaci řešit a pomáhá žákovi. Ukazuje na  $A$ ,  $D$ ,  $\gamma$ .
- 0:01:33 T5** ukazuje na  $A$ ,  $\gamma$ ,  $D$ . Z Tobiášova hlasu je zřetelná radost z poznání systému pavučin.
- 0:01:35 Ex6** chválí Tobiáše, má radost.
- 0:01:38 T6** ukazuje na  $B$ ,  $\beta$ ,  $D$ ;  $A$ ,  $B$ .

### KOMENTÁŘ

**T1** Okamžitě se v situaci nějakým způsobem orientuje, avšak ne dle zákonitostí, které fungují ve všech pavučinách. Ne zcela správné pochopení situace bylo zapříčiněno neznalostí matematického prostředí, ale také především nepropojením všech prvků úlohy (pavučina a její legenda, neboli hodnoty šipek v levé části papíru). Tobiáš sám pocítuje, že jeho vysvětlení nebude zcela správné a univerzální. Tento problém šel možná odstranit poukázáním na funkční různobarevnost šipek. Správně si však všimá dvou možných cest z jedničky do trojky, taktéž, možná ne zcela vědomě, si všiml, že všechny šipky ústí do čísla čtyři.

**T3** Hovoří o čárce místo šipky. Pravděpodobně se jedná jen o špatné pojmenování, protože v předchozím vstupu hovořil o šipkách.

**Ex4** Snaha navést žáka k propojení hodnot šipek s pavučinou. Tomuto problému by šlo zřejmě předejít předložením ne zcela vyřešené úlohy, ale úlohy s chybějícím údajem, byť jen velmi snadno doplnitelným.

**T4** Tobiáš si nedokáže informace z legendy propojit s ostatní částí úlohy. Pravděpodobně je ovlivněn jiným schématem, napadá ho, že čísla nad šipkami jsou body.

**Ex5** Pomoc je možná až příliš návodná. Možná by bývalo stačilo na legendu poukázat.

**T6** S malou pomocí se Tobiáš v situaci hravě zorientoval. Nyní je zřejmé, že pronikl k podstatě řešení pavučin, k základním zákonitostem.

### Exp 0602

### PROTOKOL

- 0:01:47 Ex1** Tak já ti dám tady první úlohu, kde už budeš muset něco řešit. Tak, chybí nám tady číslo a tvým úkolem je to číslo dopočítat. Tak jestli chceš tužku nebo svoji tužku...
- 0:02:02 T1** Mlčí.
- 0:02:07 Ex2** Mhm, a proč pětka?
- 0:02:09 T2** Protože čtyři a jedna je pět, tři a dva je taky pět a tři a dva je taky pět.

### EVIDENCE

0:02:02 T1 Tobiáš se v úloze nejprve mlčky, s podepřenou hlavou orientuje, poté rázně dopisuje  $D = 5$ .

0:02:09 T2 Ukazuje na  $A, c, D; B, f, D; C, e, D$ .

### KOMENTÁŘ

Ex2 Řešení je správné, Tobiášův postup jistý, přesto chce experimentátor slyšet nahlas strategii řešení, myšlenkový pochod.

T2 Vhled do situace odůvodněním řešení ( $D$ ) všemi třemi možnostmi (od  $A, B$  i  $C$ ) je zřejmý.

### Exp 0603

### PROTOKOL

0:02:17 Ex1 Výborně. Tady nám toho chybí trošičku víc.

0:02:37 T1 Mám doplnit i tohle?

0:02:37 Ex2 Mhm.

0:02:54 T2 Mhm.

0:02:55 Ex3 Výborně, můžem další?

0:02:56 T3 Jo.

### EVIDENCE

0:02:26 T1 píše  $C = 5$ .

0:02:37 T1 ukazuje na  $\beta$ .

0:02:45 T1 píše  $D = 3$ .

0:02:49 T1 píše  $\beta = 2$ .

### KOMENTÁŘ

Úloha byla pro žáka příliš snadná, neznamená žádnou výzvu, potřebu zapojit logické myšlení. Kaskáda měla být gradována, již od úlohy č. 3, „strměji“.

### **Exp 0604**

#### **PROTOKOL**

0:02:59 T1 Mlčí.

0:03:29 T2 Další.

#### **EVIDENCE**

0:03:02 T1 píše  $A = 2$ , okamžitě poté  $B = 1$ .

0:03:16 T1 píše  $D = 4$ .

0:03:19 T1 píše  $\beta = 2, \gamma = 3$ .

0:03:29 T2 téměř znuděně žádá o další úlohu.

#### **KOMENTÁŘ**

Pokud ne dříve, nyní měla rozhodně následovat úloha obtížná, znamenající pro žáka výzvu, problém. Řešení této úlohy bylo pro Tobiáše zcela explicitní záležitostí. Měla jsem reagovat daleko flexibilněji a obtížnou úlohu připravit klidně před žákem.

### **Exp 0605**

#### **PROTOKOL**

0:03:30 Ex13 Další můžem? Paráda. Tady ti ještě půjčím fixy barevné, tady budeš doplňovat ještě šipku.

0:02:40 T1 Mlčí.

0:04:11 Ex14 Dobře.

#### **EVIDENCE**

0:03:56 T1 kreslí oranžovou šipku  $f$  orientovanou k  $D$ , poté se podívá na experimentátora.

#### **KOMENTÁŘ**

T1 Po dokončení dává najevo, že jsou úlohy příliš snadné, má je rychle vyřešené. Příliš mnoho snadných úloh za sebou může žáka znudit, odvést jeho pozornost i snížit jeho koncentraci.



**Exp 0606**

**PROTOKOL**

0:04:11 T1 Mlčí.

**EVIDENCE**

0:04:19 T1 zapisuje  $\gamma = 6$ .

0:04:27 T1 píše  $\alpha = 2$ .

0:04:38 T1 kreslí zelenou šipku  $d$  orientovanou k  $C$  a nakonec fialovou šipku  $f$  orientovanou k  $D$ .

**KOMENTÁŘ**

T1 Nemá žádný problém se správností orientace šipek.

**Exp 0607**

**PROTOKOL**

0:04:58 Ex1 Další.

0:04:59 T1 Mlčí.

0:05:29 T2 Tady už je víc možností jakoby.

0:05:31 Ex2 Mhm, jak to?

0:05:33 T3 Protože můžu dát jedničku zelenou i... ne nemůžu. Můžu?!

0:05:44 Ex3 Tak můžeš nebo nemůžeš?

0:05:45 T4 Můžu!

0:05:46 Ex4 Můžeš, výborně. Tak parádní postřeh. Tak tady ti řeknu, že si můžeš vybrat.

0:05:52 T5 Takže, můžu dát...

0:06:22 Ex5 No.

**EVIDENCE**

0:05:09 T1 píše  $D = 4$ .

0:05:29 T2 tázavě se podívá na experimentátora.

0:05:33 T3 ukazuje na  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ . Znejistil nad svou úvahou.

0:05:46 Ex4 Za tento postřeh se dostalo Tobiášovi ze strany experimentátora patřičné pochvaly.

0:05:52 T5 volí hodnotu fialové šipky  $\gamma = 3$  a dokresluje fialovou šipku  $f$  s orientací k  $D$

a následně dopisuje  $\alpha = 1$  a dokresluje zelené šipky  $d$ ,  $b$  a  $c$  správně orientované.

### KOMENTÁŘ

**T2** Po krátkém přemýšlení si Tobiáš všiml toho, čeho experimentátor ne, že úloha nemá jediné řešení, je zadána nejednoznačně! K hodnotám šipek  $\alpha$  a  $\gamma$  je možné přiřadit hodnoty 1 a 3 libovolně, stejně jako dokreslení šipek  $b$ ,  $c$ ,  $d$  (zelené/fialové);  $f$  (zelená/fialová).

Nejednoznačné řešení může být voleno záměrně (ke zjištění žákovi pozornosti, všímavosti, hloubky myšlení), v každém případě by měl experimentátor o nejednoznačnosti dopředu vědět!

Tobiášovo odhalení více možností řešení poukazuje na jeho vhled do problematiky i hloubku jeho myšlení.

### Exp 0608

#### PROTOKOL

**0:06:23 Ex1** Výborně, tak to ti taky nedělalo problém. Zkusíme další.

**0:06:30 T1** Mlčí.

**0:07:02 T2** Nene, tady nemůže být pětka.

**0:07:07 Ex2** Proč ne?

**0:07:08 T3** Protože tady je trojka. Ne vlastně může. No takže fialová, takže může.

**0:07:19 Ex3** Proč jsi myslel, že nemůže?

**0:07:20 T4** No protože jsem si neuvědomil, že tu je fialová čára.

**0:07:23 Ex4** Dobře, takže je to v pořádku?

**0:07:25 T5** Mhm.

#### EVIDENCE

**0:06:32 T1** píše  $\alpha = 4$ ,  $\alpha = 1$ .

**0:06:46 T1** píše  $D = 5$ , poté bere do ruky oranžovou fixu a kreslí oranžovou šipku  $e$  orientovanou k  $D$ .

**0:07:02 T2** Tobiáš se zarazil, nesouhlasně kýve rukou podepřenou hlavou, ukazuje tužkou na  $D = 5$ .

**0:07:08 T3** ukazuje na  $B = 3$ .

**0:07:15 T3** po zahledění se na úlohu, si uvědomuje své chybné tvrzení a opravuje se.

**0:07:20 T4** ukazuje na  $f$ .

### KOMENTÁŘ

**Ex3** Zde jsem se jako experimentátor chtěla dozvědět více o příčině Tobiášova zaváhání. Jeho vysvětlení si překládám tak, že si neuvědomil, že fialová šipka  $f$  má hodnotu  $\gamma = 2$ . Podstatou této chyby by mohla být snížená koncentrace, nebo jen chvilková nepozornost, přehlédnutí.

**T4** Šipku nazývá čarou. U Tobiáše je zjevné, že si uvědomuje úlohu šipek a jejich orientace, proto záměnu šipky za čáru považují spíše za přeřeknutí či použití jiného slova.

### Exp 0609

#### PROTOKOL

0:07:26 Ex1 Mhm, tak další.

0:07:28 T1 Mlčí.

0:07:49 T2 Tady si taky můžu vybrat..... Mhm. Fialovou jedničku. Mohla být... Oranžová musí být jednička.

0:08:54 T3 Dobrý.

0:08:55 Ex2 Výborně.

#### EVIDENCE

0:07:38 T1 píše  $A = 3$ .

0:07:49 T2 krátce zaváhá, pak dopisuje hodnotu fialové šipky  $\gamma = 1$ , uprostřed tahu se však zastaví, znovu si prohlíží úlohu a polohlasem si pro sebe mumlá. Poté píše  $\alpha = 1$

0:08:16 T2 dopisuje  $D = 2$ . Další soustředěnost je doprovázena okusováním tužky.

0:08:29 T2 přepisuje hodnotu fialové šipky na  $\gamma = 3$ .

0:08:33 T2 bere do ruky fialovou fixu a dokresluje fialovou šipku  $d$  s orientací k  $C$ , oranžovou šipku  $b$  s orientací k  $C$  a zelenou šipku  $e$  orientovanou k  $C$ .

### KOMENTÁŘ

**T2** Na první pohled se Tobiášovi může zdát, že i u této úlohy není řešení jednoznačné. Po hlubším zamyšlení nad úlohu je tato spekulace vyvrácena. Jednoznačnost této úlohy je dána cestou z  $B$  ( $= 1$ ) do  $A$  ( $= 3$ ) přes  $D$ , které může být pouze 2. Proto je hodnota oranžové šipky  $f$  (i ostatních) jednoznačně dána ( $\alpha = 1$ ).

Tobiáš kreslí některé šipky obráceně, než je jejich výsledná orientace (například šipku orientovanou k  $A$  kreslí z  $A$  do  $B$ , nicméně výslednou orientaci zakreslí správně).

**Exp 0610**

**PROTOKOL**

- 0:09:13 T1 Tady dvojka.
- 0:10:12 T2 Tady je někde chyba.
- 0:10:14 Ex1 A proč myslíš, že je tam chyba?
- 0:10:18 T3 Hm... Myslím že... musím dát nějaké číslo... a to aby se rovnalo dva, to by musela být jednička, ale ta jednička je ze čtyřky, ale...
- 0:11:02 T4 Míinus tam nemůžu dát?
- 0:11:04 Ex2 To je dobrá otázka. Tak zkus, jak myslíš, že by to mohlo být. Zkus to vyřešit, úplně jak chceš. Klidně zkus i záporná čísla, mínus, jak myslíš.
- 0:11:18 T5 Kdyby tady byla něco, z toho jednička, tak plus jedna, tři plus jedna, čtyři.
- 0:11:25 Ex3 Mhm...  
(znovu si kreslím zadání úlohy, abych si sama vyzkoušela řešení...)
- 0:11:43 T6 Já sem blbej, že jsem... Tady musí být šestka. Já...(??)...Chápu to!
- 0:12:12 Ex4 Můžu se tě ještě zeptat, jak jsi nakonec přišel na tu šestku? Ta ti dělala trochu problém.
- 0:12:16 T7 Osm mínus dva je šest a tady je ta oranžová šipka.
- 0:12:19 Ex5 Mhm, mhm. A proč jsi na to do té doby nepřišel? Co, co ti tam dělalo problém?
- 0:12:24 T8 No protože já jsem si do té doby neuvědomil, že to, já jsem si myslel, že jenom odsud sem můžu a ne...
- 0:12:30 Ex6 Jasně, takže ty sis neuvědomil, že může jít ta šipka jakoby i opačně. No výborně, ale přišels na to.

**EVIDENCE**

- 0:09:10 T1 po krátkém zorientování v úloze bere do ruky oranžovou fixu a píše  $a = 2$ .
- 0:09:20 T1 dopisuje  $B = 8$ , dokresluje zelenou šipku  $a$  s orientací k  $B$ .
- 0:09:37 T1 Je zřetelné mírná frustrace, když neví, jak pokračovat. Podpírá si hlavu, kouká do kamery. Je však vidět hluboká soustředěnost a přemýšlení.
- 0:10:12 T2 ukazuje někam směrem k  $C$ .
- 0:10:18 T3 ukazuje na  $A, b; A, C, D$ . Tobiáš mluví velmi potichu, polohlasně, přerývaně, poměrně nejistě. Je zřejmé, že současně při vysvětlování přemýšlí nad způsobem řešení. Dále přemýšlí, prsty si ukazuje po papíře, šeptem si povídá sám pro sebe.
- 0:11:02 T4 Otázku o mínus pronáší s pohledem na experimentátora a s lehkým úsměvem.
- 0:11:04 Ex2 Experimentátor je otázkou zaskočen, především proto, že úloha není vůbec těžká. Správně však nápad ocení a pochválí.

### Příloha 3

- 0:11:18 T5** Ukazuje na hodnoty šipek,  $A$ ,  $C$ ,  $D$ . Tobiáš vysvětluje, kde si myslí, že je v zadání úlohy chyba - potřeboval by mít u některé šipky hodnotu jedna.
- 0:11:25 Ex3** ze strany experimentátora se Tobiášovi nedostává pomoci. Čeká, jak si Tobiáš se situací poradí.
- 0:11:43 T6** píše  $C = 6$ . Tobiáš chvíli přemýšlí, pak vítězoslavně prohlásí „chápu to“ a kreslí šipku  $e$  s orientací k  $C$ , poté šipku  $b$  s orientací k  $C$ .
- 0:12:16 T7** Zde Tobiáš vysvětluje výpočet, kterého si tak dlouho nevšiml. Ukazuje na  $B$ ,  $a$ ,  $C$ .
- 0:12:24 T8** Ukazuje na směr šipky  $e$ , u které si myslel, že může vést pouze k  $D$ , nikoliv naopak.

### KOMENTÁŘ

**Ex2** Zde si experimentátor vzpomněl, že dotazy a nápady dětí musí být oceněny. Myslím, že zde byla situace docela vhodně zahrána „do autu“, zodpovědnost přenesena pouze na žáka., v jehož silách rozhodně je úlohu dořešit.

Přibližně uprostřed experimentu této úlohy jsem si znovu nakreslila zadání úlohy, abych si sama vyzkoušela řešení a přišla na obtíž, se kterou se potýká Tobiáš. Na žádný problém jsem však nenarazila.

**T5** Tobiášův omyl v sobě skrývá určitou hloubku myšlení. V situaci, kdy vidí číslo  $A = 2$  a od něj dvě možné cesty k číslu  $D = 4$ , cítí, že pokud přímá cesta je zastoupena  $c = 2$ , pak cesta přes dvě šipky, které nezná, by logicky mohla znamenat přes dvě šipky stejné barvy a hodnoty 1. Potom by číslo  $C$ , které je uprostřed oné druhé cesty, muselo být 3. Tobiáš zde vnímá princip sčítání šipek i vlastnost hledání jednobarevné cesty. Opomíjí zde však zbylou část pavučiny, která tuto jeho hypotézu vyvrací.

**T6** Tobiáš našel klíčový bod v pavučině, a to, že číslo  $C$  je zcela jasně určeno pomocí  $B$  a šipky  $d$ . Nyní je také schopen vidět, že lze dokreslit šipku  $e$  i směrem opačným, než jak o ní uvažoval.

**Ex5** Toto byla experimentátorova otázka, kterou může dítě dosti těžko zodpovědět. S ohledem na vysokou inteligenci žáka jsem však vyzkoušela, zda příčinu svého zavání dokáže Tobiáš vysvětlit. Mé očekávání se potvrdilo.

### Exp 0611

#### PROTOKOL

- 0:12:36 Ex1** Tak zkusíme další, jestli si s ním poradíš.
- 0:12:37 T1** Mlčí.
- 0:13:36 T2** Jo ještě tady tu...
- 0:13:47 Ex2** Ten byl jednodušší...



### EVIDENCE

- 0:12:37 T1 píše  $A = 7$ .
- 0:12:57 T1 po krátkém zamyšlení píše hodnotu zelené šipky  $\alpha = 2$  a propiskou hodnotu fialové šipky  $\beta = 4$ .
- 0:13:13 T1 kreslí fialovou šipku  $b$  s orientací k  $A$ .
- 0:13:24 T1 píše  $B = 5$ . Poté bere zelenou fixu a dokresluje zelenou šipku  $a$  s orientací k  $A$ .
- 0:13:36 T2 všimá si ještě nedokreslené šipky  $f$ , pro kterou volí fialovou barvu a správně ji orientuje k  $B$ .

### KOMENTÁŘ

**Ex1** Experimentátor předpokládal, že úloha bude pro žáka náročná, nicméně se zmýlil a své tvrzení poté, co Tobiáš úlohu během 1 minuty vyřešil, mění.

**T1** Tobiáš začíná úlohu vypočítáním čísla  $A$ , což je logický začátek, má přirozenou tendenci začít úlohu řešit odshora, mohl však začít určením hodnoty zelené šipky, tu určuje jako druhou. Poté dochází k zajímavému jevu – Tobiáš určuje hodnotu fialové šipky, přestože fialovou šipku dosud v pavučině nemá nakreslenu. Vidí však, že mezi čísly  $A$  a  $C$  je potřeba dokreslit šipku o hodnotě 4, tudíž jediná šipka, která může mít takovou hodnotu, je fialová.

### Exp 0612

### PROTOKOL

- 0:13:49 Ex1 Tak zkusíme tady...
- 0:13:51 T1 Mlčí.
- 0:14:56 Ex2 Tak, jakš přišel na to, že tam bude ta osmička?
- 0:15:01 T2 Čtyři... Čty... Čtyři, aby to šlo dvanáctku čtyři do dvanácti je osm.
- 0:15:09 Ex3 Výborně, takže sis zjistil zelenou šipku.

### EVIDENCE

- 0:13:54 T1 píše  $B = 0$ , hned poté dopisuje hodnotu oranžové šipky  $\gamma = 12$ .
- 0:14:31 T1 po několikavteřinovém přemýšlení dopisuje hodnoty  $\beta = 8$ ,  $A = 8$ , kreslí fialovou šipku  $c$  s orientací k  $D$  a fialovou šipku  $b$  s orientací k  $A$ .
- 0:15:01 T2 ukazuje na  $C$ ,  $e$ ,  $D$ .

### KOMENTÁŘ

**T1** Tobiáše nezaskočí ani přítomnost čísla nula, ani čísla přesahující číslo 10. Úloha byla pro Tobiáše snadná, ač experimentátor předpokládal zaváhání nad doplněním málo používaného čísla – nuly.

### Exp 0613

### PROTOKOL

- 0:15:13 Ex1** Tak, chýlíme se pomalu ke konci.
- 0:15:15 T1** Mlčí.
- 0:17:34 T2** To nedává smysl. Protože tady to musím... musí to bejt někde do čtyřky?... Když sem dam dvojku, tak potom sem... Jednička, tam to jednička... Dva...
- 0:18:28 T3** Jo, chápu. Oranžová dvojka. Trojka, jednička bude zelená. Jedna... plus jedna je tři... Jo, takže. Mhm?
- 0:19:05 Ex2** Jo, paráda, výborně.

### EVIDENCE

- 0:15:19 T1** Tobiáš začíná s kreslením fialové šipky  $c$  orientované k  $D$ . Následně hloubavé přemýšlení během řešení celé úlohy je doprovázeno povzdechy, podpíráním hlavy, mumláním si pro sebe, ukazováním po papíře, tčkáním očima po všech částech úlohy, občasným pohledem do kamery či na experimentátora. Několikrát se Tobiáš chystá zapsat nějaký údaj, vždy si to však rozmyslí.
- 0:17:34 T2** ukazuje na  $C$ ,  $D$ ;  $C$ ,  $B$ . Podívá se na experimentátora, na kameru, je zjevné, že si neví rady a žádá o nápovědu, té se mu však nedostává.
- 0:18:25 T2** Tobiáš si zkouší psaním ve vzduchu nad papírem dosadit čísla dvě a tři za  $C$ .
- 0:18:28 T3** dochází k pochopení. Dopisuje hodnotu oranžové šipky  $\beta = 2$ . Ukazuje na  $C$ ,  $B$ , dopisuje hodnotu zelené šipky  $\alpha = 1$  a nakonec  $B = 2$  a  $C = 3$ . Na Tobiášovi je vidět radost z nalezení řešení úlohy.

### KOMENTÁŘ

**T2** Tobiáš se polohlasem dělí o své úvahy. Když však nevidí žádnou pomoc ze strany experimentátora, opět pokračuje potichu. Experimentátor záměrně nedával Tobiášovi nápovědu, byl rád, že je úloha pro Tobiáše náročná, přestože on sám ji jako příliš náročnou nevidí. Očekával radost z objevení problému a vyřešení úlohy tak, jak to již u několika předchozích úloh proběhlo.

Úloha je zaměřena na odhalení principu sčítání šipek. Tobiášova „obtíž“ je v tom, že chtěl na řešení přijít logicky, nikoli zkoušením. Je však vidět, že nakonec přece zkouší dosadit čísla 2 a 3 za  $C$ , což ho posune k vyřešení úlohy. Myslím, že se zde nakonec jednalo skutečně o strategii pokus-omyl, nikoliv o odhalení principu sčítání šipek.

### Příloha 3

**Ex3** Nezasahování experimentátora do Tobiášova řešení bylo myslím vhodné. Bylo zřejmé, že dříve nebo později si se situací poradí sám. Experimentátor však mohl po vyřešení požadovat vysvětlení, jak došlo k odhalení. Toto vysvětlení by bývalo mohlo potvrdit či vyvrátit, že Tobiáš tipoval.

Úloha byla jedna z prvních, která byla pro Tobiáše výzvou, byla pro něj obtížná. Po ní měla následovat úloha obdobná, avšak s vyššími a jinak uspořádanými čísly.

### **Exp 0614**

#### **PROTOKOL**

- 0:19:05 Ex1 Ještě tenhle...
- 0:19:06 T1 Mlčí.
- 0:19:43 T2 Dám... eee...
- 0:20:24 T3 Mhm.
- 0:20:58 T4 Takže.
- 0:22:48 T5 Mhm.
- 0:23:01 Ex2 Když tak to klidně škrtni a napiš ji vedle.
- 0:23:03 T6 Mhm.
- 0:23:05 Ex3 Tak, no, supr.
- 0:23:49 T7 To může bejt.
- 0:24:35 Ex4 Já jsem to když tak překreslila, jestli... že už tam máš to škrtní. Jestli chceš...
- 0:24:39 T8 Mhm. Děkuju.
- 0:24:49 T9 Dvojka, musí bejt...
- 0:25:48 T10 Tady to nák... Tady musí být náký číslo, ale to číslo musí bejt...
- 0:26:32 T11 Kdyby sem sem dal jedničku, tak by to potom bylo jedna plus jedna se rovná dvě. Plus tři je pět. Sem by sem dopsal pětku, fialovou sem.
- 0:26:42 Ex5 Tak zkus to.
- 0:26:53 T12 Jedna plus jedna... Čtyři...
- 0:27:46 Ex6 Tak dobře, já se tě akorát ještě zeptám, jak jsi přišel na tu pětku.
- 0:27:52 T13 No... Nevim, nevim. Když se to dělá, tak člověk musí vyzkoušet několik způsobů.
- 0:28:03 Ex7 Mhm...
- 0:28:09 T14 No když... nevim.
- 0:28:19 Ex8 Vychází to tam takhle všechno?
- 0:28:21 T15 Jo?!
- 0:28:22 Ex9 Je to tam všechno dobře?

### Příloha 3

- 0:28:30 T16 Hm... Ta dvojka!
- 0:28:33 Ex10 No, copak tam je s ní? Copak tam nevychází?
- 0:28:37 T17 Nula a dva... tady sem. Jedna a jedna není dva.
- 0:28:48 Ex11 Ještě jednou mi to řekni, teď ti nerozumím.
- 0:28:49 T18 Že jedna a dva není dva. Tady by musela bejt oranžová čára.
- 0:28:58 Ex12 A proč by tam musela být? Tady mám nulu, zelenou šipku, která je dva a vychází nám dva. To není dobře?
- 0:29:05 T19 No, ale tady mám ještě oranžovou čáru, a to... Jo, takže je to správně! Je to správně.
- 0:29:14 Ex13 Tak a ještě se podívej na fialovou šipku, ta má jakou hodnotu?
- 0:29:18 T20 Tři.
- 0:29:20 Ex14 Mhm.
- 0:29:33 T21 Takže tady to, ta čer... ta tady ta červená čára by musela bejt tady za čtyři a to by byla v tom případě čtyřka. Takže...
- 0:29:42 Ex15 Mhm, výborně.
- 0:29:45 T22 Čtyři...
- 0:29:51 Ex16 Teď už je to všechno správně?
- 0:29:53 T23 Mhm.
- 0:29:54 Ex17 Dobře, ještě se tě zeptám, ty už máš ten příklad dopočítaný. Ty jsi začal od té jedničky a od oranžové šipky. Jak, jak si přišel na to, že oranžová šipka, eee, oranžová šipka byla jedna dána, ne, jaksi přišel na to, že tady budou oranžové šipky a mezi nimi bude jednička? Na to přišel tím zkoušením, jaksi říkal?
- 0:30:13 T24 No vlastně já jsem si tam uvědomil, že nula, tady to už vlastně platí za jednu, takže oranžová, oranžovou šipku už jsem tady měl, nebo?
- 0:30:23 Ex18 A na tu jak jsi přišel na tu oranžovou? Tus tam doplňoval ty, tu oranžovou. Jak jsi na ni přišel, že tam bude.
- 0:30:28 T25 No, že když sem... kdyby sem tam doplnil fialovou, kdyby sem tam namontoval ten, tenhle výsledek, no nevím.
- 0:30:39 Ex19 Takže to prostě takhle dopočítal, zkoušel, až ti vyšlo, že to bude takhle.
- 0:30:42 T26 No a já jsem si hlavně uvědomil, že když je tady nula a dva, tak tady musí bejt nějaké číslo mezi nima..., aby se to taky rovnalo.

### EVIDENCE

- 0:19:21 T1 píše  $\beta = 2$ .
- 0:19:43 T2 ukazuje na  $A, C, B$ , ťuká propiskou do  $B$ , pak ukazuje na  $B, D, A, D$ .
- 0:19:46 Samotnému experimentátorovi se zadání úlohy nezdá. Zdá se, že chybí jeden z údajů. Vstává proto ze svého místa a jde si pro své poznámky – zadání úloh při jejich vymýšlení.

Příloha 3

- 0:19:53** T1 chce něco doplnit, zarazí se však, povzdechne si.
- 0:20:16** Experimentátor listuje ve svých poznámkách, což odvádí Tobiášovu pozornost od úlohy.
- 0:20:25** T3 zdá se, že Tobiáš na něco přišel. Vítězné přitakání a ukazuje na  $B, C, A, C, D, C, B, C, D$ .
- 0:20:59** T4 Tobiáš bere do ruky červenou fixu a dopisuje  $D = 5$ .
- 0:21:12** T4 kreslí fialovou šipku  $b$  s orientací k  $C$ , poté kreslí oranžovou šipku  $d$  s orientací k  $C$ .
- 0:21:54** T4 povzdechem vyjadřuje zklamání, neví, jak dál. Ukazuje na hodnoty šipek,  $C, A, C, D, B, D, A, D$ .
- 0:22:15** T4 odkládá tužku a vzdychá, opírá se o opěradlo židle.
- 0:22:48** T5 bere energicky do ruky červenou fixu a dopisuje  $\delta = 5$ . Hned poté obtahuje fialovou šipku  $b$  červenou fixou. Po radě experimentátora tuto šipku škrtá a kreslí ji vedle.
- 0:23:09** T6 přečmárává oranžovou šipku  $d$  a kreslí vedle ní fialovou šipku. Poté Tobiáš opět dlouho hledí na úlohu, chvílemi vyhledává oční kontakt experimentátora.
- 0:23:45** Ex3 Experimentátor kreslí znovu zadání úlohy, což Tobiáše vyruší, možná i znervózní, a poté ho nabízí Tobiášovi, aby se v situaci lépe vyznal.
- 0:24:03** T7 Tobiáš pokládá z ruky na stůl fialovou fixu, aby ji mohl experimentátor použít.
- 0:24:38** T8 Tobiáš si pokládá nové zadání na původní, přičemž obrací na staré a kouká, na dopsané hodnoty.
- 0:24:49** T9 Podle původní úlohy dopisuje  $\beta = 2$ . Ukazuje na  $D, B, C, D$ , opírá se o židli, něco si mumlá.
- 0:25:18** T9 Nové zadání opět kontroluje s původním. Při řešení už i uhýbá očima od úlohy.
- 0:25:51** T10 ukazuje na  $B$ , hodnoty šipek, krouží tužkou nad pavučinou.
- 0:26:26** T11 Energické gesto celým tělem značí další nápad.
- 0:26:32** T11 ukazuje na  $C$ , přičemž kouká na experimentátora a jakoby se ho táže, ukazuje na  $C, B, D$ , hodnotu šipky  $\delta$ .
- 0:26:47** T12 kreslí šipku  $b$  s orientací k  $C$ , taktéž oranžovou barvou šipku  $d$  s orientací k  $B$ , dopisuje  $C = 1$ .
- 0:27:02** T12 Tobiáš se ohýbá pro spadlou tužku.
- 0:27:13** T12 dokresluje šipku  $f$  s orientací k  $D$ .
- 0:27:20** T12 Chystá se dopsat  $D$ , avšak na pár okamžiků se zastaví a kontroluje celou úlohu, poté píše  $D = 5$ . Následně dopisuje  $\delta = 5$ . Pokračuje dokreslením červené šipky  $c$  s orientací k  $D$ . Jeho pohled na experimentátora sděluje, že je hotov.
- 0:27:45** Ex6 Experimentátor se nenápadně snaží poukázat na chybu ( $D = 5$ ).
- 0:28:10** T14 kontroluje pavučinu, krouží nad pavučinou tužkou, kouká na  $D$ .
- 0:28:27** Z chodby je slyšet velký hluk, Tobiáš je však ponořen do úvah, takže ho hluk ani



### Příloha 3

v nejmenším nevyruší, nerozptýlí.

- 0:28:30 T16** Tobiáš pochybuje o  $B = 2$ , která je však dána a zde problém není.
- 0:28:41 T17** ukazuje na  $A, B, A, C, B$ .
- 0:28:47 T18** ukazuje na  $A, C, B, a$ .
- 0:28:58 Ex12** ukazuje na  $A, a, \beta, B$ .
- 0:29:05 T19** ukazuje na  $C, d$ . Radostně prohlašuje, že to má správně.
- 0:29:33 T21** Po poměrně dlouhém soustředění si Tobiáš všimá chyby, které se dopustil. Ukazuje na hodnotu šipky  $\delta$  a šipku  $c$ .
- 0:29:46 T22** Hodnotu červené šipky přepisuje na  $\delta = 4$  a taktéž  $D = 4$ .
- 0:29:54 Ex17** Experimentátor se chce tázat na Tobiášovy myšlenkové postupy, avšak do otázky se sám zamotává.
- 0:30:13 T24** ukazuje na  $A, b, a$ .
- 0:30:42 T26** ukazuje na  $A, B; A, B, C$ .

### KOMENTÁŘ

**Ex** Ve svých poznámkách jsem našla úlohu opravdu tak, jak jsem ji zadala Tobiášovi. O stupeň jednodušší by však řešení bylo, kdyby byla udána hodnota červené šipky ( $\delta = 4$ ).

**T4** V tuto chvíli měl možná přijít experimentátorův dotaz, zda nechce Tobiáš malinko napovědět, poradit. Zde by bylo vhodné odhalit hodnotu červené šipky ( $\delta = 4$ ).

Tobiáš se soustředil na cestu od  $A$  ( $0$ ) do  $D$ . Doplnil  $D = 5$ , k čemuž ho zřejmě navedla fialová šipka  $e$ . V následující chvíli došlo u Tobiáše k chybě ve výpočtu, totiž že si špatně spočetl, že  $5 - 0 = 5$ , nikoliv  $6$ . Proto také dokreslil fialovou šipku  $b$ . Dokreslení oranžové šipky  $d$  je už jen na základě dopočítání k číslu  $C$ , které však Tobiáš z neznámého důvodu nenapsal, přestože s ním musel jasně počítat jako s číslem  $3$ .

**T5** Tobiáš se zamotal do úlohy, škrtl a přepisuje, nicméně je vidět, že nemá dostatek energie, protože své činy nedomyšlí.

**T9** Tobiáš přepisuje jen to, čím si je jistý, a to je  $\beta = 2$ , nikoliv hodnotu červené šipky. Zde je zřejmá počáteční frustrace. Experimentátor měl zasáhnout.

**T10** Tobiáš zjevně „volá“ o pomoc, kterou měl experimentátor, pokud ne dřív, tak nyní, nabídnout.

**T11** Tobiáš konečně na něco přišel, je však již tak znejistěn svým řešením, že se raději táže experimentátora, očekává souhlasné potvrzení své domněnky.

**T12** Tobiáš se dopouští chyby, která je zcela jistě dána únavou, píše  $D = 5$ , přestože na základě nedávno doplněného  $C = 1$  musí být  $D = 4$ .

**T16** Experimentátorovo váhání a nabádání ke kontrole Tobiáše znejistí tak, že zapochybuje i o číslu, které bylo na začátku dáno. Přibližně 2 minuty Tobiáš hledá, kde se dopustil chyby, kterou sám nevidí, ale na niž ho experimentátor navádí.

**T17** Tobiáš sčítá čísla v kolečkách, došlo k záměně řešitelského postupu.

**T21** Zajímavé je Tobiášovo vyjadřování o hodnotě šipky – „...fialová by musela platit za čtyři...“.

### Příloha 3

**T26** Tobiáš vysvětluje princip sčítání šipek a hledání jednobarevné cesty, nicméně si neuvědomuje, že šipky zde doplnil on, tudíž tím zcela jasně nevysvětluje, jak přišel na způsob doplnění šipek.

### Exp 0615

#### PROTOKOL

**0:30:51 Ex1** Dobře. Tak mám tady poslední příklad, chceš ještě počítat?

**0:30:54 T1** Jo.

**0:30:55 Ex2** Dobře, takže poslední úloha. Ta si myslím, že bude jednodušší, než byla tahleta, takže to asi zvládneš.

**0:31:06 T2** Čtyři, jedna, dva... oranžová dva. Červená teda bude platit za čtyři. Čtyři, tady bude zelená a tady taky.

**0:31:40 Ex3** Výborně.

#### EVIDENCE

**0:30:54 T1** Přes značné potíže s řešením předchozí úlohy Tobiáš dychtivě očekává další úlohu a zvědavě kouká na její zadání.

**0:31:07 T2** dopisuje  $A = 1$ ,  $B = 2$ , hodnotu oranžové šipky  $\beta = 2$ , červenou šipku  $c$  s orientací k  $D$ , hodnotu červené šipky  $\delta = 4$ , zelenou šipku  $b$  s orientací k  $C$ , a takéž zelenou šipku  $f$  s orientací k  $D$ .

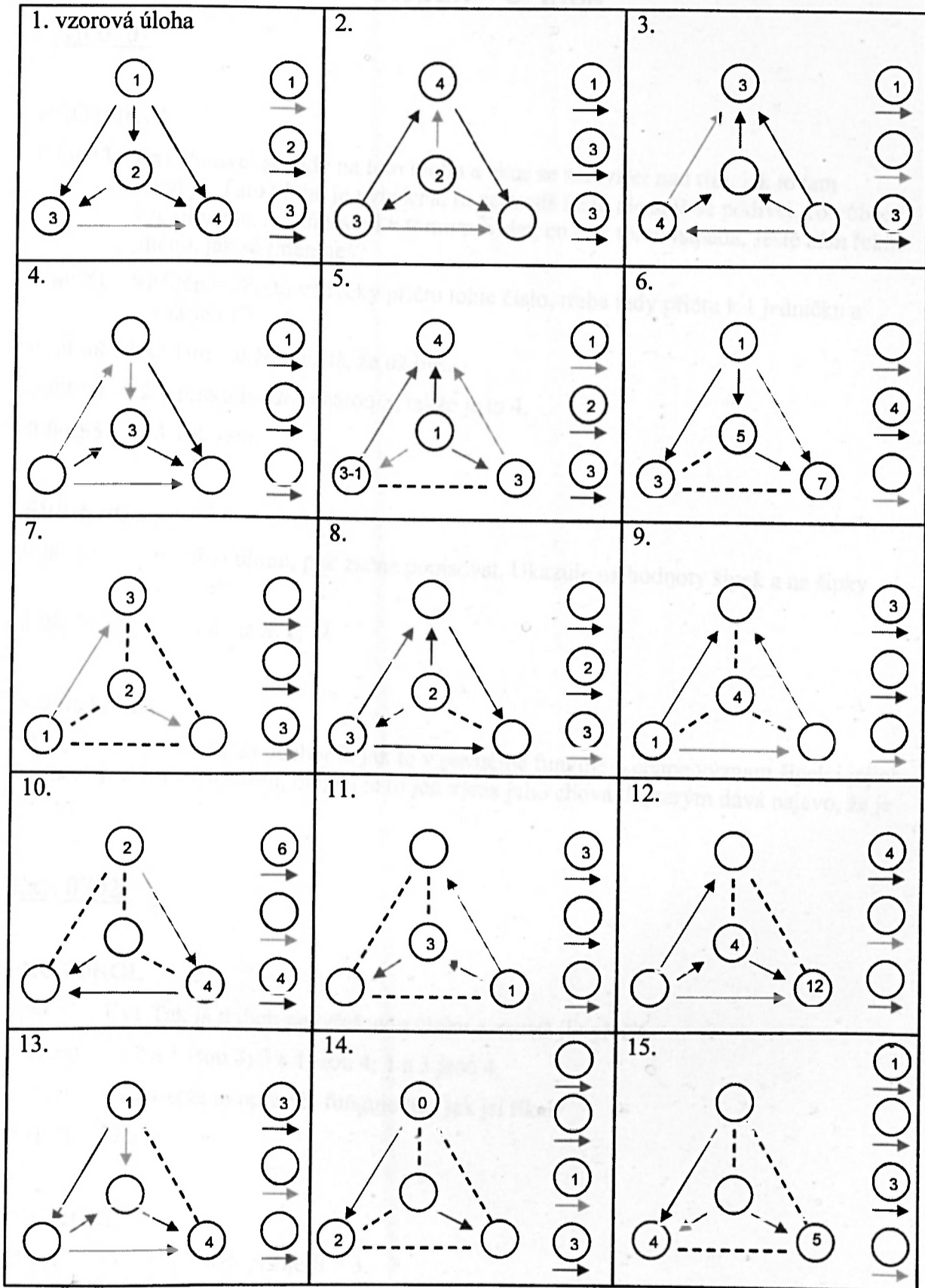
#### KOMENTÁŘ

**Ex2** Závěrečná část výpovědi: „...takže to asi zvládneš.“ byla nevhodná, protože Tobiáš zvládl vyřešit i předchozí úlohu, přestože byla velmi obtížná.

Poslední úloha byla až příliš snadná, což možná v nastalé situaci (po obtížném desetiminutovém řešení předchozí úlohy) vůbec nevadilo. Byla tak pozitivním zakončením.

Příloha 3

Kaskáda 6 - Tobiáš



## Experiment 7

Štěpán – 3. třída

### Exp 0701

#### PROTOKOL

- 0:00:13 **Ex1** Podívej se tady na tuto úlohu a zkus se zamyslet nad tím, jak to tam funguje. Tato úloha je vyřešená, tu nemusíš řešit, ale spíš se podívej, co vůbec v té úloze je. A můžeš mi k tomu povídat, co tě k tomu napadá. Ještě nám řekni jméno, jak se jmenuješ?
- 0:00:41 **Š1** Štěpán. Že to vždycky přičtu tohle číslo, třeba tady přičtu k 1 jedničku a rovná se to 2.
- 0:00:48 **Ex2** Hm, takže myslíš, že už bys...
- 0:00:50 **Š2** 1 přičtu modrou čárou 3, takže je to 4.
- 0:00:55 **Ex3** Tak fajn.

#### EVIDENCE

- 0:00:33 **Š1** prohlíží úlohu, pak začne popisovat. Ukazuje na hodnoty šipek a na šipky v pavučině.
- 0:00:50 **Š2** ukazuje na *A*, *c*, *D*.

#### KOMENTÁŘ

**Š1** Hned na první pohled pochopil, jak to v pavučině funguje – chápe význam šipek i jejich hodnot. Šipku nazval čárou, možná je to jen výraz jeho chování, kterým dává najevo, že je nad věcí.

### Exp 0702

#### PROTOKOL

- 0:00:57 **Ex1** Tak já ti dám nevyřešenou úlohu a zkusíš ji vyřešit.
- 0:01:00 **Š1** 2 a 1 jsou 3; 3 a 1 jsou 4; 1 a 3 jsou 4.
- 0:01:19 **Ex2** Takže to opravdu funguje tak, jak jsi říkal?
- 0:01:20 **Š2** Hm.

#### EVIDENCE

- 0:01:03 **Š1** šeptá si a dopisuje  $B = 3$ .
- 0:01:14 **Š1** píše  $B = 4$  a posouvá papír s vyřešenou pavučinou před experimentátora.

### KOMENTÁŘ

Š1 Bez problémů doplňuje čísla podle hodnot šipek uvedených vlevo. Úloha je pro něj zcela explicitní.

### Exp 0703

#### PROTOKOL

- 0:01:23 Ex1 Tak, tenhle je ještě trošku těžší.  
0:01:29 Š1 Budu přičítat 2, červená je 2, modrá 1.  
0:01:41 Š2 A zelená... 3.  
0:01:45 Ex2 Funguje ti to všude?  
0:01:46 Š3 Jo.  
0:01:47 Ex3 Dobře, děkuji.

#### EVIDENCE

- 0:01:29 Š1 ukazuje na  $b$  a doplňuje  $\beta = 2$ , pak  $\alpha = 1$ .  
0:01:41 Š2 doplňuje  $\gamma = 3$ .

### KOMENTÁŘ

Ex1 Úloha, kterou předkládá je stále příliš snadná pro žáka, který se tak dobře zorientoval v pavučině hned od začátku.

Š1 Hodnoty šipek dokáže zcela jasně vyčíst z pavučiny.

### Exp 0704

#### PROTOKOL

- 0:01:55 Ex1 Tak tady ti dám barevné fixy.  
0:02:01 Š1 Zelená, tohle je mínus?  
0:02:28 Š2 Tady taky zelená.  
0:02:43 Š3 Plus 3.  
0:02:49 Ex3 Tak, já ti jenom ještě vrátím tu úlohu, co jsi předtím vypočítal, a podívej se na to, jestli je tam nějaký rozdíl, v tom, co ty jsi tam...  
0:03:07 Š4 Že tyhle čísla se úplně obrátila.  
0:03:10 Ex4 To jsi si všiml správně, já jsem myslela, ještě se podívej tady takhle na tohleto, jak to tam vlastně je. Ty jsi tam totiž dokresloval těmi barvenými fixami něco a co je dokresleno tady?



#### Příloha 4

- 0:03:29 Š5 No čáry.  
0:03:30 Ex5 Čáry?  
0:03:31 Š6 No.  
0:03:32 Ex6 Jo?  
0:03:34 Š7 A šipky.  
0:03:36 Ex7 No a ty jsi dokreslil co, čáry nebo šipky?  
0:03:39 Š8 Čáry.  
0:03:40 Ex8 A jsou tam čáry nebo šipky?  
0:03:43 Š9 Tady jsou čáry a tady jsou šipky.  
0:03:45 Ex9 Já to pořád nechápu, proč tady jsou čáry a tady šipky.  
0:03:49 Š10 Já jsem je tam nenakreslil.  
0:03:52 Ex10 A je to důležité, jestli je tam šipka nebo čára?  
0:03:54 Š11 Ne.  
0:03:55 Ex11 Myslíš, že to není důležité?  
0:03:58 Š12 Ne.

#### EVIDENCE

- 0:01:57 Š1 bere do ruky červenou fixu, ukazuje na  $C$ , chvíli přemýšlí, usmívá se.  
0:02:20 Š1 kreslí zelenou čáru na místo  $c$ .  
0:02:29 Š2 kreslí zelenou čáru na místo  $a$  a  $e$ .  
0:02:43 Š3 kreslí modrou čáru na místo  $d$ .  
0:02:49 Ex3 předkládá předchozí úlohu.  
0:03:07 Š4 ukazuje na hodnoty šipek  $\alpha$  a  $\gamma$ .  
0:03:10 Ex4 ukazují na pavučinu a dokreslené čáry.  
0:03:43 Š9 ukazuje na předchozí úlohu a současnou úlohu.

#### KOMENTÁŘ

Š1 Nevím, proč ho napadlo, že by tam mohlo být mínus, nevím ani, k čemu jeho otázka směřovala, ale předpokládám, že jeho zmatení vyplývalo z toho, že si dosud nevšiml, že směr šipek má nějakou funkci a tudíž teď, když má sám doplňovat šipky (on doplňuje čáry), neví, je překvapen, že se dá i odčítat.

Š3 Během 20 sekund bez problémů doplňuje barevné čáry, ne šipky. Štěpánovi jsou jasné hodnoty šipek, jejich orientaci zatím opomíjí.

Š4 Nechápe mou otázku, ale odpovídá správně.

Ex8 Špatně položená otázka.

Š 11 Nevidí zatím rozdíl mezi šipkou a čárou – nepřipisuje směru šipky důležitost – může to vyplývat z nedostatečné zkušenosti s úlohami. Mou chybou mohlo být, že jsem mu na

## Příloha 4

začátku dala pavučinu vyřešenou, možná kdybych mu dala rovnou úlohu, musel by se více soustředit na šipky a jejich směr.

### Exp 0705

#### PROTOKOL

- 0:04:00 Ex1 Tak zkusíme další příklad, jo?
- 0:04:05 Š1 Šeptá si, není rozumět.
- 0:04:31 Š2 4.
- 0:04:38 Š3 4, 6.
- 0:05:06 Š4 Červená.
- 0:05:15 Ex2 Tak, já bych se tě na něco zeptala. Jak jsi přišel tady na tu 6? Tys ji tam tak rychle doplnil, jak jsi na ni přišel?
- 0:05:24 Š5 No 2 + 4.
- 0:05:26 Ex3 A proč tam tu 4 přičítáš?
- 0:05:28 Š6 No, že je to zelená čára.
- 0:05:31 E4 Hm a proč by to třeba nemohlo být... když si to vezmeme tady od té 8, tak proč je tam ta 6?
- 0:05:41 Š7 No protože přičítáme 2.
- 0:05:44 Ex5 A proč tam nemůže být 10? To by bylo 8+2.
- 0:05:47 Š8 To by neodpovídalo tady tomu.
- 0:05:52 Ex6 Aha, dobře.

#### EVIDENCE

- 0:04:20 Š1 modrým fixem dokresluje čáru na místo  $e$ .
- 0:04:28 Š2 dopisuje  $\beta = 4$ .
- 0:04:47 Š3 dopisuje číslo  $B = 6$ .
- 0:05:11 Š4 šeptá a kreslí červenou čáru na místo  $a$  a odkládá fix.
- 0:05:15 Ex2 ukazuje na  $B$ .
- 0:05:24 Š5 ukazuje na  $C$  a  $\beta$ .
- 0:05:31 Ex4 ukazuje na  $D$  a  $B$ .
- 0:05:47 Š8 ukazuje na  $C$ .

#### KOMENTÁŘ

Š4 Stále nevnímá rozdíl mezi čarou a šipkou, ale úloha a její řešení je pro něj explicitní, postupuje zcela logicky a systematicky.

#### Příloha 4

**Ex3** Chci ho navést na směr šipek.

**Š8** Správně argumentuje ve vztahu k jiným číslům, ale směr šipek ho stále nezajímá.

#### Exp 0706

#### PROTOKOL

**0:06:04 Ex1** Tak já ti dám další úlohu.

**0:06:11 Š1** 3... 3.

**0:06:56 Š2** Červená.

**0:07:11 Š3** Teď nějaká zelená.

**0:07:20 Š4** Zelená bude 9.

**0:07:38 Ex2** Tak, ty jsi to teda doplnil tak rychle, že já pořád nechápu, proč někde je ta šipka a někde je jen ta čára. Zkus mi to vysvětlit, jak to chápeš ty, proč tady mám z 3 mám šipku a dostanu 6; a tady mám 3 a mám jenom čáru a dostanu 9?

**0:07:59 Š5** No protože přičítám červenou 6.

**0:08:03 Ex3** A tady nepřičítám?

**0:08:07 Š6** Tady taky.

**0:08:09 Ex4** Takže je to jedno, jestli čára nebo šipka.

**0:08:10 Š7** No.

**0:08:11 Ex5** Hm...

**0:08:14 Š8** To by mohlo být i mínus, když je šipka, tak nemůže být mínus.

**0:08:16 Ex6** Aha, no a jak tedy jsi přišel na to, že tady to budeš přičítat a nebudeš to odčítat?

**0:08:22 Š9** No tady  $6 + 3$  je, že jo,  $9$  a  $9 - 6$  je  $3$  a  $3 + 6$  je  $9$ .

**0:08:35 Ex7** Hm, no a co myslíš, že je správně, když bych nakreslila tohle a tohle, myslíš, že je to to samé?

**0:08:48 Š10** Co je tohle za číslo?

**0:08:50 Ex8** 3, promiň, já píšu..

**0:09:05 Š11** No, je to úplně stejný.

**0:09:07 Ex9** A když bych tam určila, že ta šipka má být 3? Je to to samé?

**0:09:19 Š12** Ehm.

#### EVIDENCE

**0:06:15 Š1** doplňuje  $a = 3$ .

**0:06:40 Š1** ukazuje na  $C$  a  $d$  a po chvíli píše  $B = 9$ .

**0:06:59 Š2** kreslí červenou čáru na místo  $f$ .

#### Příloha 4

- 0:07:15 Š3 píše  $A = 12$ .
- 0:07:26 Š4 dopisuje  $\gamma$  a zbývající modrou čáru na místo  $a$ .
- 0:07:41 Š4 odkládá fix a dává najevo, že je hotov.
- 0:07:47 Ex2 ukazuje na  $e$  a  $f$ , kde je místo šipky čára.
- 0:08:03 Ex3 ukazuje na  $f$ .
- 0:08:07 Ex5 bere papír a chce přejít k další úloze, Štěpán ještě vysvětluje.
- 0:08:16 Ex6 ukazuje na  $f$ .
- 0:08:22 Š9 ukazuje na  $C$ ,  $a$ ,  $B$ , pak na  $B$ ,  $f$ ,  $D$ .
- 0:08:41 Ex7 píše 3 a kreslí šipku směřující k číslu 6 a pod to případ opačný: 6 a šipka směřující k 3.
- 0:08:48 Š10 ukazuje na číslo 3, které experimentátor právě napsal.
- 0:09:11 Ex9 píše vedle hodnotu šipky.

#### KOMENTÁŘ

Š1 Začíná tím, co je evidentní.

Š4 Úloha je pro něj explicitní, postupuje krok po kroku, jen stále doplňuje pouze čáry, ne šipky.

Ex2 Snažím se jej navést na smysl orientace šipek.

Š7 Štěpán stále tvrdí, že nezáleží na směru šipky.

Š8 Podává vysvětlení – chápe šipku jako něco, co pouze přičítá, ale on vidí u čísel i možnost odčítání, proto kreslí pouze čáru.

Š9 Svě tvrzení dokládá na situaci dolních čísel, že  $9 - 3 = 6$  a  $6 + 3 = 9$ . Vnímá, že je to stejné.

Š10 Nevidí rozdíl mezi 3 šipka 6 a 6 šipka 3. Štěpán považuje čáru za univerzálnější nástroj, který v sobě skrývá sčítání i odčítání. Neuvědomuje si, že šipka v sobě také skrývá obojí a navíc vymezuje přesněji řešení. Experimentátor měl předložit úlohu, ve které by orientace šipka hrála zásadnější roli. Takovou úlohu bychom dostali, pokud bychom vynechali více čísel v pavučině.

#### Exp 0707

#### PROTOKOL

- 0:09:22 Ex1 Tak se podíváme na další úlohu – tady už musíš doplnit šipky a hodnoty šipek nebo čar...
- 0:09:38 Š1 6, zelená je 6.
- 0:09:50 Š2 Modrá bude 2.
- 0:10:25 Š3 Takže červená 4.

#### Příloha 4

0:10:53 Ex2 To byla rychlost!

#### EVIDENCE

0:09:38 Š1 dopisuje  $\gamma = 6$ .

0:09:54 Š2 dopisuje  $\alpha = 2$ .

0:10:13 Š2 kreslí modrou čáru na místo  $a$ .

0:10:29 Š3 dopisuje  $\beta = 4$ .

0:10:35 Š3 kreslí červenou čáru na místo  $c$ .

0:10:44 Š3 kreslí modrou čáru na místo  $b$  a červenou čáru na místo  $d$ .

#### KOMENTÁŘ

Ex1 Ve snaze neovlivňovat žáka a nenutit mu představu šipek se zmiňuje o čarách.

Š1 Během 1 minuty vyřešil úlohu.

Š3 Dokáže vyvodit, že červená šipka bude 4, protože jinou šipku takové hodnoty nemá úloha je pro něj stále explicitní, nicméně stále doplňuje pouze čáry.

#### Exp 0708

#### PROTOKOL

0:10:56 Ex1 Já ti dám další...

0:11:18 Š1 Počítá se tady i do záporných čísel?

0:11:21 Ex2 No jak myslíš, co myslíš?

0:11:27 Ex3 Jak tě napadlo, že bys mohl počítat do záporných čísel?

0:11:31 Š2 No 4 – 8...

0:11:34 Ex4 Hm a co bys dostal?

0:11:35 Š3 Mínus 4.

0:11:36 Ex5 A myslíš, že by tam mohlo být mínus 4 nebo nemohlo? Proč jsi tam vlastně napsal tu 8 nakonec? Proč jsi tam nenapsal tu mínus 4?

0:11:45 Š4 Protože pak bych tady přičítal k zápornému číslu.

0:11:49 Ex6 A to se nedá?

0:11:50 Š5 Dá, já netvrdím, že nedá...

0:11:55 Ex7 No, jak myslíš..

0:11:57 Š6 Mlčí.

0:13:29 Š7 4...

0:13:45 Š8 Mlčí.



#### Příloha 4

- 0:14:31 Š9 To znamená, že tady by byla 12.
- 0:14:41 Ex8 Tak hotovo? A já se tě musím přece jen zeptat, ty jsi tady říkal, jestli to můžou být taky záporná čísla. Myslíš, že tam můžou být záporná čísla?
- 0:14:56 Š10 Myslím, že jo.
- 0:14:57 Ex9 Tak chceš to vyzkoušet?

#### EVIDENCE

- 0:10:58 Ex1 předkládá úlohu.
- 0:11:15 Š1 bere do ruky modrou fixu, píše  $C = 8$ .
- 0:11:29 Š4 ukazuje na  $A$  a  $\beta$ .
- 0:11:55 Š6 ukazuje na pavučinu, přemýšlí, dává si ruku na bradu.
- 0:12:34 Š6 škrtně  $C = 8$  a přepisuje ho na  $C = 12$ , mlčí.
- 0:13:31 Š7 dopisuje  $\alpha = 4$  a  $D = 8$ .
- 0:13:49 Š8 ukazuje na  $B$ , pak na  $D$ , dlouho přemýšlí.
- 0:14:25 Š8 dopisuje  $B = 0$ .
- 0:14:34 Š9 dopisuje  $\gamma = 12$ .

#### KOMENTÁŘ

Š1 Píše chybně  $C = 8$ . Jeho chyba je způsobena tím, že v době, kdy číslo píše, již přemýšlí nad možností záporných čísel, proto napíše chybně číslo 8, které chtěl pouze přičíst. Jeho úvaha o záporných číslech je důsledkem toho, že Štěpán stále nevnímá funkci šipek, protože šipka tady v tom případě vylučuje záporná čísla.

Š4 Uvádí důvod, proč záporná čísla vyloučil. Jeho vysvětlení však nedává zcela smysl.

Š6 Po 1 minutě opravuje chybu, které se dopustil.

Š7 Toto byl klíčový moment, kdy nebylo evidentní, jak dál postupovat. Štěpán správně vypočítal hodnotu červené šipky, která ho posunula dál. Hodnotu červené šipky pravděpodobně spočítal tak, že si uvědomil, že od 4 ke 12 vedou 2 červené šipky, proto jedna má hodnotu 4. Myslím, že odhalil princip sčítání šipek.

Š8 Hodně dlouho přemýšlí nad číslem  $B$ , přestože je číslo evidentní na základě odhalené hodnoty šipky. Myslím, že si nulou jako číslem nebyl zcela jistý, protože s ní nemá příliš velké zkušenosti a málo se s ní počítá.

Tato úloha je první, která je pro něj úlohou implicitní, hledá řešení a nové možnosti v pavučině.

#### Exp 0709

#### PROTOKOL

- 0:14:59 Ex1 Já jsem ti ji nakreslila ještě jednou tu úlohu, tak to vyzkoušej, třeba ta úloha

#### Příloha 4

může mít více řešení nebo jenom tohle, co jsi vypočítal, je to jediné správné. Já ti ji takhle nechám nad tím. Já ti to dám trochu blíž, aby to bylo vidět na kameru.

- 0:16:21** Š1 Míinus 4...
- 0:17:25** Š2 Záporná čísla tam nejdou.
- 0:17:26** Ex2 Nejdou? A jak jsi na to přišel? Zkusíš mi to nějak...
- 0:17:28** Š3 No že tady by se muselo odčítat 8 a to by bylo -4 a tady by muselo být nějaké číslo a to by muselo dávat jako -4.
- 0:17:43** Ex3 A takové číslo neexistuje?
- 0:17:44** Š4 Ne.
- 0:17:45** Ex4 Nejde tam.
- 0:17:47** Š5 Ne, protože když to přičtu číslo, tak to pak zase musím odečíst, protože tady je červená čára.
- 0:17:58** Ex5 A tady ho odečíst můžu to číslo?
- 0:18:01** Š6 No tady by to šlo.
- 0:18:08** Ex6 A proč to někde jde a někde nejde?
- 0:18:10** Š7 Nevím.
- 0:18:28** Š8 Že vždycky, když to přičtu, tak to číslo, který přičtu tak to musím odečíst a vznikne mi jakoby to zbytečný číslo.

#### EVIDENCE

- 0:14:59** Ex1 předkládá znovu stejnou úlohu a vybízí žáka k tomu, aby ověřil, zda může úloha mít řešení za použití záporných čísel.
- 0:15:32** Š1 ukazuje na *D*.
- 0:15:48** Š1 ukazuje na *C*.
- 0:16:13** Š1 dopisuje  $C = -4$  a přemýšlí, vrtí se na židli.
- 0:17:25** Š2 odpovídá po minutě a půl přemýšlení a mlčení.
- 0:17:28** Š3 ukazuje na *A*, pak *C*, potom přechází k *D*, *e*, *C*.
- 0:17:47** Š5 ukazuje na *c*, *B*.
- 0:17:58** Ex5 ukazují na *b*.
- 0:18:13** Ex6 mlčí, neuzavírá úlohu, nechává Štěpána přemýšlet.
- 0:18:28** Š8 ukazuje na *c*.

#### KOMENTÁŘ

Š5 Správně vnímá, že ke 4 musí něco přičíst, chápe zde správně směr šipky, pak ale tvrdí, že od tohoto čísla by se muselo něco odečíst, přestože šipka ukazuje na sčítání. Jeho problém zde spočívá stále v neobjevení funkce šipek. Protože pokud bych směr šipky brala jako odčítání, úloha i se zápornými čísly by měla řešení.

**Exp 0710**

**PROTOKOL**

- 0:18:42 **Ex1** Tak se přesuneme k další úloze. Tato šipka je červená, jo, Já jsem ji tam špatně nakreslila, to byla moje chyba.
- 0:19:15 **Š1** 4 + ...
- 0:21:48 **Š2** Mlčí.
- 0:21:55 **Š3** 6...
- 0:22:20 **Ex2** Tak, ty jsi to zase doplnil tak rychle, můžeš mi jenom říct, jak jsi na to tak rychle přišel?
- 0:22:28 **Š4** No rychle ne.
- 0:22:29 **Ex3** Co ti napovědělo, že si pak tak rychle doplnil všechna ta čísla?
- 0:22:35 **Š5** No že jsem doplnil tady ty čísla.
- 0:22:38 **Š6** Že když je tady plus 1, tak bude 5; 5 + 1 bude 6, takže červená bude 2, a 6 – 3 je 3 a plus 1 je 4.
- 0:22:53 **Ex4** A jak jsi přišel na tu 1? To jsi zkusil nebo...?
- 0:22:57 **Š7** No, to jsem zkusil.
- 0:22:59 **Ex5** To jsi zkusil a náhodou tam seděla.
- 0:23:01 **Š8** Ehm.
- 0:23:02 **Ex6** A ještě se tě zeptám na druhou věc, ty jsi říkal, že tady máš 6 – 3, jak jsi přišel na to, že tady bude mínus?
- 0:23:10 **Š9** Tady přičítám, takže tady můžu i odčítat.
- 0:23:13 **Ex7** A jak to poznám? Ty to říkáš správně, ale jak to já poznám?
- 0:23:19 **Š10** Že když je šipka tak, tak přičítám a když je takhle, tak odčítám.
- 0:23:25 **Ex8** Já se vrátím k té úloze, co jsi předtím počítal. Jak já tady poznám z těch čar, jestli budu odčítat nebo přičítat?
- 0:23:35 **Š11** To si musíte vypočítat.
- 0:23:36 **Ex9** No, to musím. A dalo by se to udělat nějak, abych já to poznala?
- 0:23:45 **Š12** Ehm.
- 0:23:47 **Ex10** Jak?
- 0:23:48 **Š13** No šipkama.
- 0:23:50 **Ex11** Hm, a myslíš, že tedy záleží na tom, jestli tam jsou šipky nebo čáry?
- 0:23:55 **Š14** Já si myslím, že někdy jo a někdy ne.
- 0:23:57 **Ex12** Aha, tak jo, děkuji.

### EVIDENCE

- 0:18:42 Ex1 předkládá úlohu. Ukazuje na  $f$  a upozorňuje na její správnou barvu.
- 0:19:07 Š1 povzdychne si.
- 0:19:17 Š1 ukazuje na  $D$ , pak na  $C$ , přemýšlí, žmoulá roh papíru, mlčí, ukazuje na  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $C$ , kouká se střídavě na papír, na kameru.
- 0:21:49 Š2 dopisuje  $\alpha = 1$  a  $D = 5$ .
- 0:21:59 Š3 dopisuje  $C = 6$  a  $\beta = 2$ , nakonec  $B = 3$ . Odkládá fixy a podívá se na experimentátora.
- 0:22:33 Š5 ukazuje na hodnoty šipek vlevo.
- 0:22:40 Š6 ukazuje cestu  $D, e, C$ , pak  $A, b, C$ , dále  $C, d, B$ , nakonec  $B, a, A$ .
- 0:23:10 Š9 ukazuje na  $D, e, C$ , a obráceně na  $C, e, D$ .
- 0:23:19 Š10 ukazuje na směr šipky  $a$ .
- 0:23:25 Ex8 předkládám předchozí úlohu, ve které Štěpán doplňoval místo šipek čáry.

### KOMENTÁŘ

Š1 Neví, odkud by začal, chvíli vypadá nervózně, unaveně, pak je zase vidět, že přemýšlí nad konkrétními čísly.

Š2 Po 3 minutách zjistil hodnotu zelené šipky, což bylo klíčový moment k vyřešení úlohy. Záměrem úlohy bylo odhalit princip sčítání šipek, tedy že pokud modrá šipka je rovna 3, pak zelená musí být rovna 1. Štěpán však podle svých slov hodnotu zelené šipky odhadl.

Š3 Během 1 minuty úlohu kompletně vyřešil.

Ex2 Nepřiměřená otázka, Štěpán úlohu nevyřešil rychle, což sám komentuje.

Ex4 Špatně položená otázka, navádím ho.

Š6 Správně ukazuje cesty šipek a uvádí sčítání a odčítání správně podle toho, jakou má šipka orientaci.

Š9 Ukazuje správný směr šipky pro sčítání a opačně to vnímá jako odčítání, což je správně. Zdá se, že začíná vnímat, že i šipka může znamenat odčítání, pokud jdeme proti jejímu směru.

Š13 Přiznává a uvědomuje si, že šipky mají svou funkci.

Š14 Je vidět, že Štěpán si už uvědomuje, že orientace šipky má svůj smysl, nicméně nedokáže ještě určit, zda je její orientace důležitá vždy. Štěpán si právě udělal izolovaný model, kdy orientace šipky hraje roli, nemá však ještě model generický.

### Exp 0711

### PROTOKOL

- 0:24:00 Ex1 Já mám pro tebe ještě poslední úlohu. Nejsi už unavený?
- 0:24:02 Š1 Ne.

#### Příloha 4

- 0:24:03 Ex2 Ne? Tak ještě poslední úlohu.  
0:24:07 Š2 3 a 4 je 7.  
0:24:25 Š3 Takže to bude 2.  
0:24:31 Š4 5 a 2 je 7.  
0:24:37 Š5 Červená...  
0:25:28 Š6 9, takže červená bude šestka.  
0:25:38 Š7 A tady...  
0:25:57 Ex3 Tak výborně, já ti Štěpánku moc děkuji.

#### EVIDENCE

- 0:24:11 Š2 doplňuje  $D = 7$ .  
0:24:29 Š3 doplňuje  $\alpha = 2$ .  
0:24:33 Š4 doplňuje  $C = 5$ .  
0:24:37 Š5 přemýšlí nad hodnotou červené šipky, ukazuje na  $B$ , které nezná a přemýšlí.  
0:25:26 Š6 doplňuje  $B = 9$  a  $\gamma = 6$ .  
0:25:41 Š7 ukazuje na místo, kde má doplnit šipku, bere do ruky zelenou fixu a kreslí zelenou čáru na místo  $d$ , po chvíli ji dokresluje na šipku se správnou orientací.

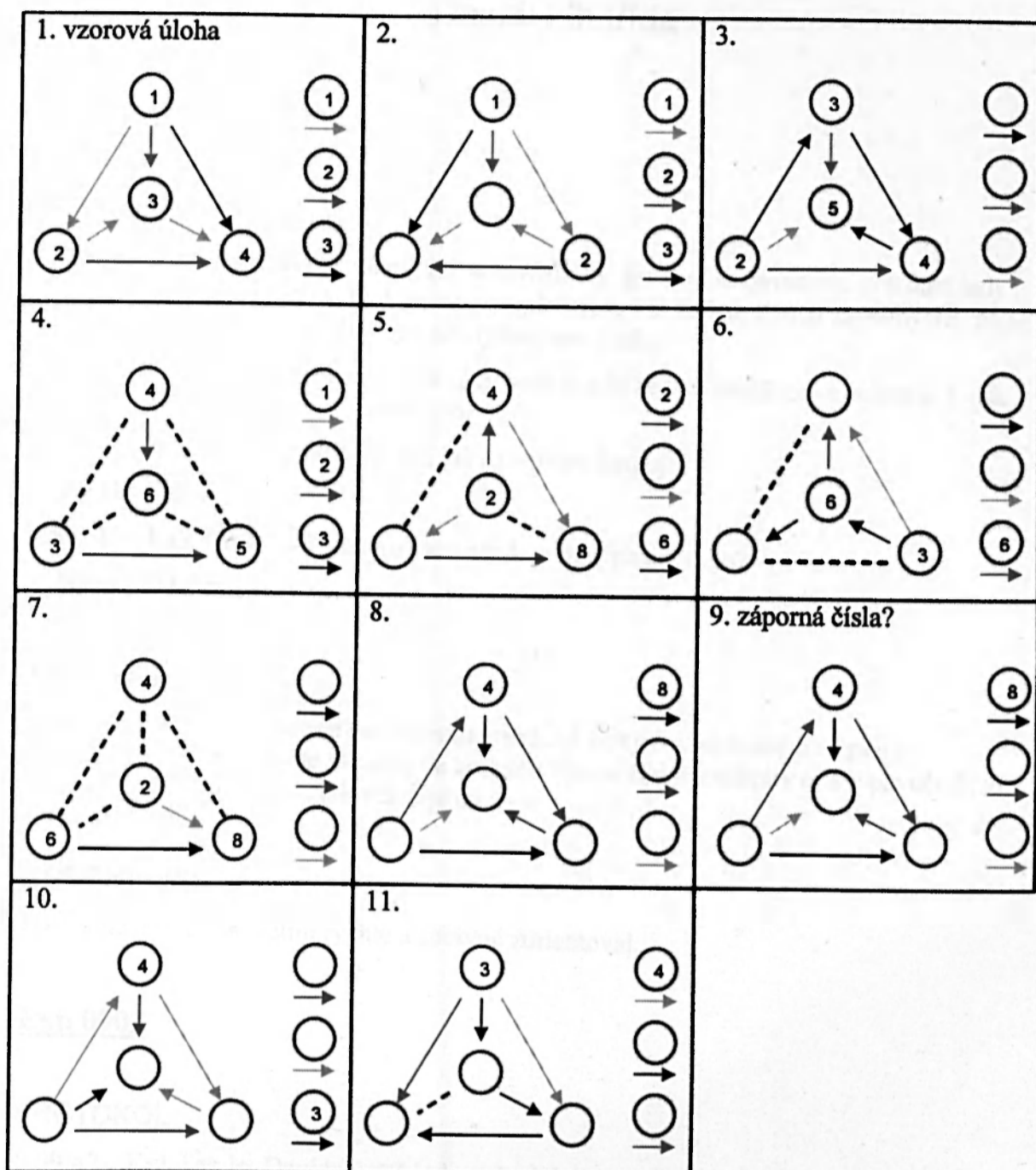
#### KOMENTÁŘ

Š7 Úloha je pro něj explicitní, je snazší než úloha předchozí, i přesto, že se zde opět objevuje princip sčítání šipek. Štěpán zde poprvé sám kreslí šipku místo čáry. Pravděpodobně pochopil, že šipka a její orientace má svůj význam.



Příloha 4

Kaskáda 7 - Štěpán



## Experiment 9

David – 3. třída

### Exp 0901

#### PROTOKOL

- 0:00:08 Ex1** Tak Davide, mám tady takové úlohy, jmenují se pavučiny, já ti dám tady vzorovou úlohu. Tato úloha je vyplněná, to vidíš. Tak a zkus zapřemýšlet, co se v té úloze děje. Viděl jsi někdy takovou úlohu?
- 0:00:24 D1** No, moc ne a než.... že tady bude 4 a že se to 4 zvětší o 4 a zelená o 2, pak dáme... fialová se zvětší o 6.
- 0:00:40 Ex2** Takže myslíš, že víš, jak to v úloze funguje?
- 0:00:42 D2** Ano.
- 0:00:43 Ex3** Tak ti můžu dát rovnou nějakou nevyplněnou, jo?
- 0:00:46 D3** Ano.

#### EVIDENCE

- 0:00:24 D1** ukazuje perem na hodnotu oranžové šipky  $\beta$  a následně na šipku  $c$  v pavučině, poté ukazuje na hodnotu zelené šipky  $a$  a šipky  $a, b$  v pavučině, to samé provádí s fialovou šipkou.

#### KOMENTÁŘ

**D1** David se v úloze velmi rychle a správně zorientoval.

### Exp 0902

#### PROTOKOL

- 0:00:47 Ex1** Tak jo, Davide, ještě jedna věc, kdybys, oni tam pak budou těžší úlohy, kdybys chtěl pomoci, tak mi řekni, jo? Tak, já ti dám tady k dispozici barevné fixy.
- 0:00:55 D1** Mlčí.
- 0:01:09 Ex2** Tak a můžu se tě jenom rychle zeptat, jak jsi přišel třeba tady na tu jedničku?
- 0:01:14 D2** Že tady je oranžová, ta se zvětšuje o 1, tak jsem sem dal 1 protože to vychází 2.
- 0:01:22 Ex3** Tak výborně, děkuju.

### EVIDENCE

- 0:00:55 D1 vepisuje  $A = 1$ .  
0:01:02 D1 vepisuje  $C = 3$ .  
0:01:06 D1 vepisuje  $B = 4$ .  
0:01:08 D1 zavírá pero, naznačuje, že úlohu vyřešil.  
0:01:10 Ex2 ukazuje na  $A$ .  
0:01:14 D3 ukazuje perem cesty v pavučině.

### KOMENTÁŘ

**D1** Začal od čísla  $A$ , které zjistí na základě odečtení od  $D$ . Je patrné, že jasně pochopil orientaci šipky. Je přirozené, že začíná od čísla  $A$ , pokud se v úloze dobře orientuje.

**Ex2** Experimentátor se zbytečně ptá na vysvětlení, přestože je zjevné, že David zcela pochopil základní principy v pavučině.

### Exp 0903

### PROTOKOL

- 0:01:28 D1 Ehm, tady je 3. Tohle je nula?  
0:01:50 Ex1 Tam máš něco doplnit, to je prázdné kolečko, to nevíš, kolik to je.  
0:02:39 D2 Tady musí být...jo... tady už...ted' už myslím...  
0:03:11 D3 Jo.  
0:03:44 D4 Tady už...ted' už myslím.  
0:03:47 Ex2 Ted' už ti to sedí?  
0:03:50 D5 ...Jo.  
0:03:51 Ex3 Tak, výborně, děkuju.

### EVIDENCE

- 0:01:28 D1 otevírá pero a vepisuje  $B = 3$ .  
0:01:42 D1 vepisuje  $A = 3$ .  
0:01:50 Ex1 objasňuje, že se nejedná o nulu, ale o prázdné kolečko.  
0:01:50 D1 ukazuje perem na kolečko hodnoty oranžové šipky  $a$ .  
0:02:09 D2 dopisuje  $a = 6$ .  
0:02:13 D2 píše  $A = 9$  a maže vepsanou 3..  
0:02:25 D2 ukazuje perem na šipku  $f$ .  
0:02:36 D2 vepisuje  $D = 9$ .

## Příloha 5

0:03:02 D2 maže hodnotu oranžové šipky  $\alpha$  a přepisuje ji na 3.

0:03:03 D2 maže  $A = 9$  a píše tam 3.

0:03:35 D3 vpisuje  $A = 6$  a vzápětí maže předchozí číslo.

### KOMENTÁŘ

D1 Píše chybně číslo  $A = 3$ . Proč udělal tuto chybu se objasní po jeho otázce, zda hodnota oranžové šipky je nula. David si to zprvu myslel, až po tom, co mu pavučina nesedí, ptá se, zda je to opravdu nula.

D2 David nevnímá hodnotu šipky, má selektivní myšlení. Nevidí, že by měl 2 stejné hodnoty šipek a že pouze na základě zelené šipky může určit hodnotu oranžové. Nevím, proč napsal hodnotu oranžové 6, možná protože doplnil  $C = 3$  a  $3 + 6 = 9$ , což je hodnota fialové šipky.

D2 Chybné číslo vpisuje na základě chybného předchozího doplnění hodnoty šipky.

D2 Nyní se orientuje na hodnotu zelené šipky, podle ní doplňuje  $D$ . Chvilí váhá, protože si uvědomuje, že mu nebude sedět horní číslo, nicméně po kontrole rázně vpisuje  $D = 9$ .

D2 Kontroluje a v duchu přepočítává pavučinu, ví, že udělal někde chybu.

D2 Spočítal, že chybu udělal v hodnotě oranžové šipky, na což přišel na základě šipky zelené a čísla  $A$ . Přepisuje nejprve hodnotu oranžové šipky, což způsobí, že v jeho hlavě je nyní číslo 3, které také chybně doplní za  $A$ .

D3 Váhá nad číslem  $A$ , které napsal, po dobu 20 vteřin. Číslo  $A$  napsal jako provizorium bez dostatečné energie, což si však uvědomuje, a proto jej prověřuje. Je to ilustrací alertu, který zde zafungoval.

D3 Podle pohybu ruky lze usuzovat, že si je David zcela jistý číslem  $A$ , které právě doplnil.

D3 Velmi váhavě dává najevo, že je hotov, přestože si je jistý, že tentokrát má úlohu správně. Pravděpodobně je to způsobeno rozladěním ze zdlouhavého řešení a opravování chyb.

### Exp 0904

#### PROTOKOL

0:03:50 Ex1 Takže můžu?

0:03:51 přerušení z technických důvodů

0:04:12 D1 Ajaj...

0:06:05 D2 Už to mám.

0:06:06 Ex2 Tak, dobrý jo? Může se tě jenom rychle zeptat, ty jsi tady tak rychle napsal tu 4, jak jsi na ni přišel, když jsi neznal ani jednu tu šipku?

0:06:14 D3 No protože směr  $2 + 2$  je 4 a aby vyšlo právě na tu šestku, tak jsem tam musel dát ještě jednou tu 2.

0:06:27 Ex3 Ehm, výborně, děkuju.

### EVIDENCE

- 0:04:10 Ex1 předkládá úlohu.
- 0:04:24 D1 po krátkém zorientování vepisuje hodnotu zelené šipky  $\beta = 4$ .
- 0:04:44 D1 vepisuje hodnotu oranžové šipky  $\alpha = 2$ .
- 0:04:46 D1 vzápětí píše  $C = 4$ .
- 0:05:01 D1 vepisuje hodnotu fialové šipky  $\gamma = 8$ .
- 0:05:34 D1 po 30 vteřinách vepisuje hodnotu fialové šipky  $\gamma = 6$  a maže předchozí 8.
- 0:05:56 D1 vepisuje  $B = 8$ .
- 0:05:59 D1 prohlíží celou pavučinu, kontroluje.
- 0:06:09 Ex2 ukazuje na  $C$ .
- 0:06:14 D3 ukazuje na  $A = 2$  a jede po dráze šipek  $b, e$  vedoucích k číslu  $D$ .

### KOMENTÁŘ

D1 David povzdechem vyjadřuje, že s úlohou bude mít problém, že je pro něj náročná. Můžeme v něm však také vidět odhodlání úlohu vyřešit.

D1 Začíná zcela logicky od nejjasnějšího místa.

D1 Stačí mu pouze 20 vteřin, aby odhalil hodnotu oranžové šipky, tedy aby si uvědomil princip jednobarevné cesty a dělení společné hodnoty šipek.

D1 Píše chybně hodnotu fialové šipky. Je to způsobeno tím, že předtím správně vypočítal číslo  $D = 8$ , které má nyní v hlavě, nicméně prvně chce doplnit hodnotu fialové šipky, proto dochází k chybě doplněním onoho čísla. Je příliš soustředěn na doplnění hodnot šipek, pak teprve výsledného čísla. Považuji to za metakognitivní potřebu.

D1 Po 30 vteřinách se opravuje.

D1 David je natolik znejistěný předchozími chybami, že úlohu pro jistotu kontroluje, než ji prohlásí za vyřešenou.

D3 Davidovo objasnění, jak postupoval při výpočtu hodnoty oranžové šipky a čísla  $B$  mě překvapilo. Byla jsem přesvědčená, že odhalil princip dělení jednobarevné cesty. Na základě jeho vysvětlení se však domnívám, že na číslo  $B = 4$  přišel náhodou, zkusil dosadit za hodnotu šipky  $b=2$ , což se mu následně potvrdilo u šipky  $e$ .

### Exp 0905

### PROTOKOL

- 0:06:32 Ex1 Tak, já ti dám další, počkej, počkej...jo.
- 0:06:35 D1 Ajaj...
- 0:06:39 Ex2 Anebo promiň, já ti dám... protože máme málo času, tak ti dám hnedka další, ta je podobná. Tak, tady už se budou doplňovat i šipky, tak tady máš



## Příloha 5

barvičky.

- 0:06:54 D2** Tak to bude těžký.
- 0:09:08** přerušení z technických důvodů
- 0:09:14** konec pauzy
- 0:09:17 Ex3** Tak já se tě zeptám, proč jsi tam doplnil 30? Jak jsi ji vypočítal?
- 0:09:22 D3** No že  $20 + 30$  je 50.
- 0:09:33 Ex4** Aha, a když ti dám teď tu předchozí úlohu, tam ti to taky takto funguje, že  $4+6$  je 8?
- 0:09:52 D4** Ne,  $2 + 2$  je 6.
- 0:09:57 D5**  $20 + 30$  je...
- 0:12:50 D6** A můžu tam dávat i mínus?
- 0:12:52 Ex5** No, myslíš, že by tam mínus sedělo, že by tam mínus mohlo být?

## EVIDENCE

- 0:06:35 D1** otevírá pero a chystá se řešit.
- 0:06:39 Ex2** odebírání úlohu a předkládá jinou.
- 0:06:56 D2** mlčí a prohlíží úlohu, hledá, odkud by začal.
- 0:07:44 D2** píše  $C = 20$ .
- 0:07:48 D2** píše  $D = 30$ .
- 0:07:57 D2** bere fialový fix.
- 0:08:15 D2** kreslí fialovou šipku  $e$  s orientací k  $D$ .
- 0:09:18 Ex3** ukazuje na  $D$ .
- 0:09:25 D3** ukazuje na  $C$  a  $D$ , pak na  $B$ .
- 0:09:33 Ex4** předkládá předchozí úlohu a ukazuje na  $C$ ,  $D$ ,  $B$ .
- 0:09:35 D4** přemýšlí.
- 0:09:52 D4** ukazuje na  $C$  a přechází zrakem zpět k původní úloze.
- 0:11:09 D5** bere do ruky zmizík a maže číslo  $C$ .
- 0:11:30 D5** ukazuje zmizíkem do spodní části pavučiny.
- 0:12:50 D6** po dlouhé době promluvil.

## KOMENTÁŘ

**Ex2** Úloha ve skutečnosti není vůbec podobná, ale naprosto jiná, objevuje se v ní poprvé dokreslení šipek. Experimentátor chtěl Davida uklidnit.

**D2** David více než 1 minutu přemýšlí, jak úlohu uchopit. Je nutné si uvědomit, že úloha je pro něj první, ve které se objevuje dokreslení šipek, tedy v předložené pavučině vytečkované linie. Jeho dlouhé přemýšlení může souviset s nedostatečným porozuměním tohoto nového prvku.

## Příloha 5

**D2** David doplnil do pavučiny čísla  $C = 20$  a  $D = 30$ , poté tato čísla spojil fialovou šipkou  $e$ , jejíž hodnotu nezná. Z jeho řešení je patrné, že našel důvod, proč pavučinu takto doplnit. Jeho následné minutové přemýšlení je známkou váhání nad tím, co napsal.

**D3** Na základě otázky experimentátora vysvětluje svůj postup – sčítá čísla v kolečkách. U Davida v hlavě jsou přítomny různé myšlenkové operace opírající se o různé struktury. Jedna z nich může pocházet z řešení pyramidových úloh, ve kterých se čísla sčítají. Pravděpodobně došlo k vytěsnění jedné strategie druhou, a to na základě lepší znalosti pyramid na úkor nového typu úloh, pavučin.

**D4** David argumentuje špatně vypočítaným příkladem. V nahrávce není zcela jasné rozumět, zda David skutečně říká, že  $2 + 2$  je 6 nebo  $2 + 2$  je 4. V prvním případě by se mohlo jednat o přeřeknutí, kdy chtěl říct  $2 + 4 = 6$ , což by jej ovšem utvrzovalo v jeho strategii sčítání čísel. Ve druhém případě by se jednalo o jeho znovuuvědomění si role hodnot šipek. Experimentátor zjevně rozuměl  $2 + 2 = 4$ , a proto nechal Davida tak dlouho bez přerušení.

**D5** Davidův výrok „ $20 + 30$  je...“ potvrzuje, že David skutečně stále zůstává u špatně zvolené strategie, tedy sčítání čísel.

**D5** Po dobu 3 minut se nic neděje. David si nevšimá hodnoty oranžové šipky, kterou zná; vnímá jen pavučinu. V hlavě se mu míchají různé postupy. Je zjevné, že výchozí bod pro vyřešení pavučiny nepřitahuje jeho pozornost. Pavučina nebyla vhodně zvolena, protože se v ní objevují 2 nové parametry – vynechané šipky a dvoumístná čísla.

## Exp 0906

### PROTOKOL

- 0:13:00 Ex1** Tak Davide, jestli chceš, já bych ti tady dala podobnou, jenom tam jsou trošku jiná čísla. Zkus tuto.
- 0:13:14 D1** Mlčí.
- 0:17:07 Ex2** Můžu ti něco poradit?
- 0:17:08 D2** Hm...
- 0:17:09 Ex3** Já bych tě tady jenom upozornila, ty si tam stíníš trošku rukou, aby sis všimnul tady, jestli nemáš něco porazeno, jestli by ti to k něčemu pomohlo.
- 0:17:23 D3** Mlčí.
- 0:18:40 Ex4** Tak co kdybychom začali... tady vidíš, že oranžová šipka...
- 0:18:44 D4** Je 3.
- 0:18:46 Ex5** A kde máš oranžovou šipku v pavučině?
- 0:18:49 D5** Tady.
- 0:18:50 Ex6** Hm...
- 0:18:51 D6** Takže by tady měla být 3, aby vyšla ta 5... i 2.
- 0:19:02 Ex7** Hm...tak a jak bys ještě doplnil ty šipky?
- 0:19:03 D7** Mlčí.

## Příloha 5

**0:20:21 Ex8** Tak dobrý? Hotovo? Výborně, děkuju!

### EVIDENCE

**0:13:00 Ex1** předkládá podobnou úlohu (čísla jsou pouze jednotková).

**0:13:22 D1** mlčí, jezdí perem nad pavučinou.

**0:16:03 D1** vepisuje  $D = 2$ .

**0:16:13 D1** přepisuje číslo  $D = 1$ , předchozí číslo 2 škrte.

**0:17:11 Ex3** ukazuje na hodnoty šipek vlevo na papíře.

**0:17:23 D3** mlčí, přemýšlí, hraje si s perem.

**0:18:40 Ex4** přerušuje dlouhou dobu mlčení, chce pomoci.

**0:18:42 Ex5** ukazuje na hodnotu oranžové šipky  $\gamma$ .

**0:18:49 D5** ukazuje oranžovou šipku  $f$  v pavučině.

**0:18:51 D6** ukazuje na  $D$  a vysvětluje, co by zde mělo být na základě oranžové šipky  $f$  směřující k  $B$ .

**0:19:07 D6** přepisuje číslo  $D = 2$ .

**0:19:10** hluk způsobený příchodem lidí do místnosti - David reaguje na hluk, dívá se, kdo vešel.

**0:19:13 D6** dívá se zpátky na úlohu.

**0:19:20 D6** vepisuje  $C = 4$ .

**0:19:27 D6** dopisuje hodnotu zelené šipky  $\alpha = 1$ .

**0:20:00 D7** kreslí zelenou šipku  $d$ .

**0:20:10 D7** dopisuje hodnotu fialové šipky  $\beta$ .

**0:20:15 D7** kreslí fialovou šipku  $e$ ,  $a$ .

### KOMENTÁŘ

**Ex1** Experimentátor si uvědomil, že dvojciferná čísla mohou Davida mást, proto předkládá stejnou úlohu, ve které se však objevují pouze čísla jednociferná upravená z dvojciferných vynecháním nuly na konci.

**D1** Pro Davida není úloha snazší, 3 minuty hledá, odkud by začal. Pak vepíše správně číslo  $D = 2$ , nicméně po chvíli ho přepisuje na  $D = 1$ . Pravděpodobně si stále není jistý.

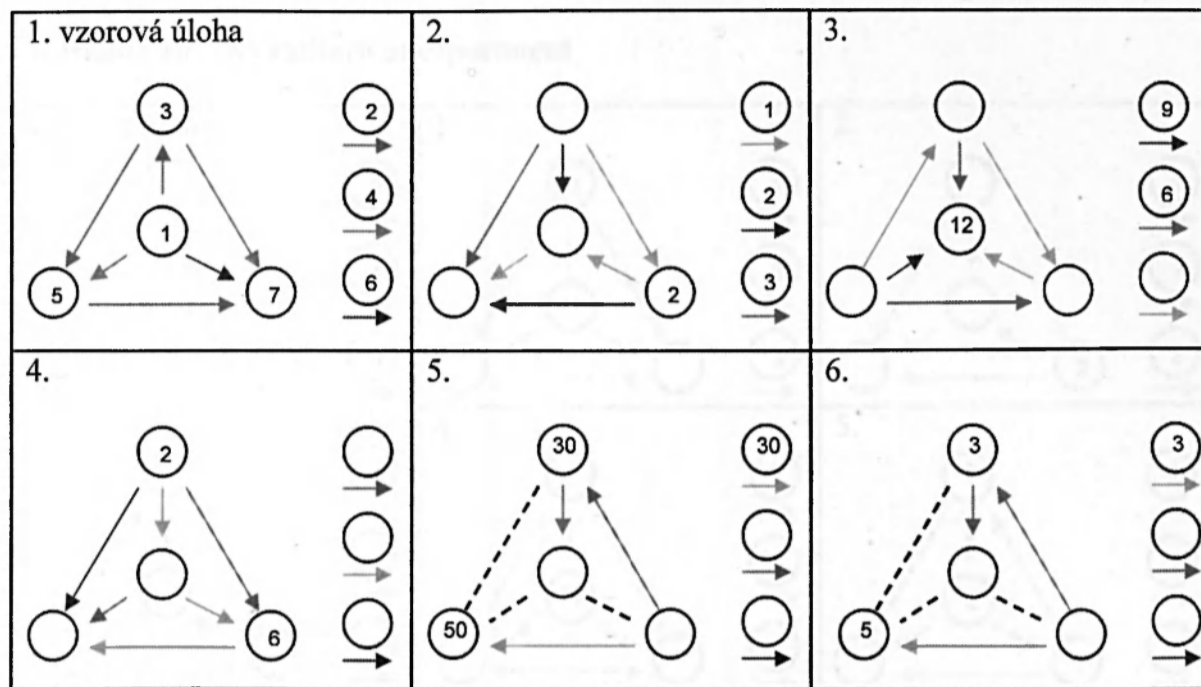
**Ex3** Po příliš dlouhé době se snaží pomoci, navést Davida ke správné řešitelské strategii.

**Ex4** Předchozí vstup experimentátora Davidovi nepomohl, proto experimentátor navádí znovu, tentokrát konkrétněji, což má za následek Davidovo připomenutí si významu hodnot šipek v pavučině.

**D4-7** Během 1 minuty David vyřešil úlohu.

Příloha 5

Kaskáda 9 – David



## Kvantitativní experiment

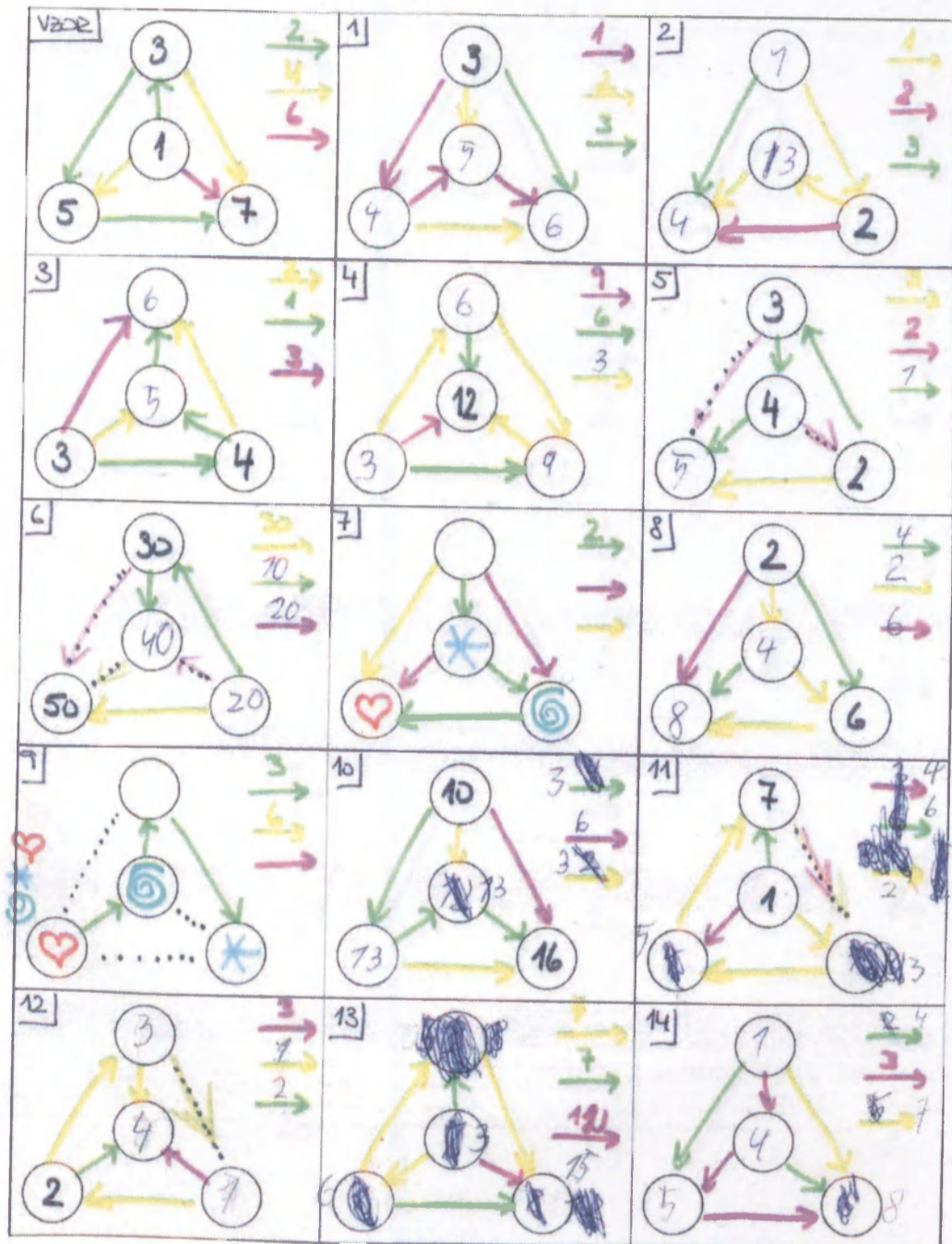
### Kaskáda 10 – Kvantitativní experiment

<p>vzorová úloha</p>	<p>1.</p>	<p>2.</p>
<p>3.</p>	<p>4.</p>	<p>5.</p>
<p>6.</p>	<p>7.</p>	<p>8.</p>
<p>9.</p>	<p>10.</p>	<p>11.</p>
<p>12.</p>	<p>13. chyba</p> <p>Doplň čísla tak, aby nejmenší bylo 3 a největší 15.</p>	<p>14.</p> <p>Doplň čísla tak, aby jejich součet byl 22.</p>



Ukázka řešení - Štěpán

*Štěpán - mis*



Doplň čísla tak, aby  
nejmenší bylo 3 a  
největší 15.

Doplň čísla tak,  
aby jejich součet  
byl 22.

Příloha 6

Ukázka řešení - Tobiáš

Tobiáš



DOPRAVA ČÍSLA TAK, ABY  
NEJMENŠÍ BYLO 3  
A NEJVEČŠÍ 15.

DOPRAVA ČÍSLA TAK,  
ABY JEJICH SOUČET  
BYL 22.



Příloha 6

Ukázka řešení - David

DAVID  
KOVÁŘ

DOPLNĚ ČÍSLA TĚLEŤKY  
NEJMENŠÍ BYLO 3  
A NEJVĚTŠÍ 15.

DOPLNĚ ČÍSLA TĚLEŤKY  
ABY JEJICH SOUČET  
BYL 22.