Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Jakub Kováč

Asymptotické riadenie portfólia pre niekoľko akcií

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci diplomovej práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.
Študijný program: Matematika, Finančná a poistná matematika

2009

Na tomto mieste by som rád poďakoval Mgr. Petru Dostálovi, Ph.D. za jeho trpezlivosť a množstvo podnetných rád a pripomienok.

Prehlasujem, že som svoju diplomovú prácu napísal samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa Jakub Kováč

Obsah

Názov práce: Asymptotické riadenie portfólia pre niekoľko akcií
Autor: Jakub Kováč
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedúci diplomovej práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.
e-mail vedúceho: dostal@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Cieľom práce je nájdenie optimálnej obchodnej stratégie pre investora vlastniaceho portfólio akcií a obchodujúceho na akciovom a peňažnom trhu. Investorovým cieľom je maximalizovať trhovú cenu portfólia v nekonečnom časovom horizonte. Trhovú cenu akcií v portfóliu modelujeme pomocou viacrozmerného Brownovho pohybu. Ďalšiu dimenziu skúmaného problému zavedieme možnosťou nákupu a predaja jednotlivých akcií. S využitím Itôovho stochastického kalkulu odvodíme základné vlastnosti spojitého modelu. Vzhľadom na ťažkosti spojené s riešením úlohy v spojitom modeli aproximujeme spojitý model modelom diskrétnym. Na záver práca poskytuje návod k použitiu Howardovho algoritmu v diskrétnom modeli. Hlavným prínosom práce je predstavenie a dôkaz obecného Howardovho iteračného algoritmu, ktorý nám umožní v diskrétnom prípade nájsť optimálnu obchodnú stratégiu.

Kľúčové slová: Markovove procesy, Howardov algoritmus, Brownov pohyb

Title: Asymptotic Control of Portfolio of Several Assets
Author: Jakub Kováč
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.
Supervisor's e-mail: dostal@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: We consider an investor who invests in a stock and money market and whose goal is to maximize the market value of her portfolio in the very long run. The goal of the thesis is to find an optimal trading strategy for the investor. The stocks' market values are simulated by multidimensional Brownian motion. The possibility to buy and sell stocks introduces a new dimension to the dynamics of the problem. By using the Itoô calculus we derive the basic properties of the continous model. Considering the continous model difficulties with finding the optimal trading strategy, we aproximate the continous model by a dsicrete model. In the end, the thesis presents hints to use the Howard algorithm in the discrete case. The main contribution of the thesis is the introduction and proof of the Howard algorithm which can be used as a tool to find the optimal trading strategy in the discrete model.

Keywords: Markov process, Howard's algorithm, Brownian motion

Úvod

Diplomová práca sa zaoberá nájdením optimálnej obchodnej stratégie pri obchodovaní s viacerými akciami. Optimálne riešenie je hľadané pri existencii transakčných nákladov v diskrétnom modeli, ktorý aproximuje model spojitý.

Prvá kapitola je venovaná zhrnutiu poznatkov o riadených a neriadených spojitých Markovových reťazcoch a generovaniu Markovových reťazcov podľa homogénnych a nehomogénnych po častiach konštantných riadení. Kľúčovou časťou prvej kapitoly a i celej práce je popis a dôkaz Howardova iteračného algoritmu v sekcii 1.6, ktorý je potom využitý v diskrétnom modeli k nájdeniu optimálnej obchodnej stratégie. Howardov algoritmus je čiastočne prispôsobený podmienkam, v ktorých bude v druhej kapitole využitý. Úvod kapitoly vychádza predovšetkým z publikácií [3] a [9]. Prevažná časť prvej kapitoly je napísaná relatívne obecne, čo prispieva k jej rozsahu.

Druhá kapitola sa na úvod zaoberá obecnou teóriou stochastického kalkulu a predstavením viacrozmerného Brownovho pohybu. Táto prevažne toeretická časť vychádza z publikácie [4]. Kapitola pokračuje definíciou spojitého modelu pre viacero akcií a jeho dynamizáciou. Práca sa v tejto časti sústreďuje na rozpracovanie teórie obsiahnutej v [1]. Spojitý model je následne aproximovaný modelom diskrétnym, v ktorom je možné použiť Howardov algoritmus na nájdenie optimálneho riadenia. Pri písaní druhej kapitoly mi pomohla i bakalárska práca [11].

Kapitola 1

Markovove procesy so spojitým časom

Prvá kapitola mojej práce poskytne náhľad na spojité Markovove procesy s ocenením prechodov a priblíži problematiku hľadania optimálneho riadenia pre tieto procesy. Kapitola poskytuje teoretický základ pre budovanie modelu optimálnej obchodnej stratégie v druhej kapitole. Úvodná časť kapitoly sa venuje prierezu základných poznatkov o spojitých Markovových reťazcoch a formulácií viet, ktoré budú neskôr v kapitole využité. Po úvodnej časti nasledujú podkapitoly zaoberajúce sa generovaním spojitých Markovových reťazcov, ktoré boli rozpracované obecnejšie, ako je tomu vo väčšine dnešnej dostupnej literatúry. Kapitola končí formulovaním a dokázaním Howardovho algoritmu pre nájdenie optimálneho homogénneho riadenia.

1.1 Základné pojmy

V úvodnej časti mojej práce si zhrnieme základné poznatky o spojitých Markovových reťazcoch.

Definícia 1.1.1. Nech $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravdepodobnostný priestor, nech $T \subseteq \mathbb{R}$. Rodina reálných náhodných veličín $X = \{X_t : t \in T\}$ definovaných na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sa nazýva *náhodný proces.*

Poznámka 1.1.1. V prípade, že $T = \mathbb{N}_0$ alebo $T = \mathbb{Z}$, hovoríme o *procese s diskrétnym časom.* Ak $T = [a, b]$, kde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, hovoríme o *procese so spojitým časom.* Pokiaľ náhodné veličiny X_t nadobúdajú len diskrétnych hodnôt, hovoríme, že ide o *proces s diskrétnymi stavmi*, ak nadobúdajú hodnôt z nejakého intervalu, hovoríme o *procese so spojitými stavmi.*

Definícia 1.1.2. *Trajektóriou* $X(\omega)$ náhodného procesu X na T nazývame funkciu definovanú na T, ktorá priradí $t \to X_t(\omega)$ pre fixnú náhodnú zložku $\omega \in \Omega$.

Definícia 1.1.3. Hovoríme, že náhodný proces je *spojitý (spojitý sprava, spojitý zľava)*, ak jeho trajektórie su spojité (spojité sprava, spojité zľava) pre každé $\omega \in \Omega$.

Poznámka 1.1.2. Obdobne sa dajú zadefinovať procesy *klesajúce, s konečnou variáciou* a iné. Malá modifikácia Definície 1.1.3 nám dáva tiež *spojitosť takmer určite, klesajúcosť takmer určite,* a iné.

Množinu hodnôt náhodných veličín X_t budeme značiť L. Obmedzíme sa na reťazce s diskrétnymi stavmi a bez újmy na obecnosti položíme $L = \mathbb{N}_0$.

Definícia 1.1.4. Nech je daný sprava spojitý náhodný proces $\{X_t : t \geq 0\}$ na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s hodnotami v L. Tento systém sa nazýva *Markovov reťazec so spojitým časom a množinou stavov* L, ak existuje systém matíc $\{\mathbf{P}(s,t) : 0 \leq s \leq t < \infty\}$ taký, že platí

(i) $\mathbf{P}(s,t)\,\mathbf{P}(t,r) = \mathbf{P}(s,r)$ pre $0 \leq s < t < r$,

(ii) $\mathbf{P}(s,s) = \mathbf{I}$ pre $0 \leq s$,

(iii) $\lim\limits_{u \to t^+} \mathbf{P}(s,u) = \mathbf{P}(s,t)$ pre $s \leq t$,

(iv) $p_{ij}(s,t) = P(X_t = j | X_s = i, X_{s_n} = i_n, ..., X_{s_0} = i_0)$ pre časy $0 \leq s_0 < s_1 < ... < s_n < s < t$ a pre stavy $i, j, i_0, i_1, ..., i_n \in L$, pre ktoré je $P(X_s = i, X_{s_n} = i_n, ..., X_{s_0} = i_0) > 0$ a $n \in \mathbb{N}_0$, pričom $p_{ij}(s,t)$ je prvok v i-tom riadku a j-tom stĺpci matice $\mathbf{P}(s,t)$.

Poznámka 1.1.3. Hovoríme, že náhodný proces $\{X_t : t \geq 0\}$ s množinou stavov L má *markovovskú vlastnosť*, ak platí

$$P(X_t = j | X_s = i, X_{s_n} = i_n, ..., X_{s_0} = s_0) = P(X_t = j | X_s = i) \tag{1.1}$$

pre všetky časy $0 \leq s_0 < s_1 < ... < s_n < s < t$ a pre všetky stavy $i, j, i_0, i_1, ..., i_n \in L$, pre ktoré je $P(X_s = i, X_{s_n} = i_n, ..., X_{s_0} = i_0) > 0$ a $n \in \mathbb{N}_0$.

Poznámka 1.1.4. Z bodu (iv) definície Markovovho reťazca zrejme plynie, že Markovov reťazec má markovovskú vlastnosť (1.1).

Naskytá sa otázka, či náhodný proces, ktorý splňuje markovovskú vlastnosť, je už Markovov. Predošleme, že Veta 1.1.1 za určitých predpokladov toto tvrdenie dokazuje. Nasledovať budú prípravné lemmata, ktoré nám neskôr pomôžu túto Vetu dokázať.

Poznámka 1.1.5. Nech náhodný proces $\{X_t : t \geq 0\}$ splňuje

$$\lim_{h \to 0^+} \inf \{P(X_{t+h} = i | X_t = i) : P(X_t = i) > 0, t \leq T\} = 1, \quad T \in [0, \infty), \tag{1.2}$$

ak existuje $t \leq T$ také, že $P(X_t = i) > 0$. Potom ak $P(X_t = i) > 0$, tak tiež $P(X_r = i) > 0$ pre každé $r > t$. To plynie z nasledujúceho rozpisu pre dostatočne veľké k

$$\begin{aligned} P(X_r = i) &\geq P\left(X_r = i, X_{r\frac{k-1}{k} + \frac{t}{k}} = i, ..., X_t = i\right) \\ &= P\left(X_r = i | X_{r\frac{k-1}{k} + \frac{t}{k}} = i\right) ... P\left(X_{\frac{r}{k} + t\frac{k-1}{k}} = i | X_t = i\right) > 0. \end{aligned}$$

Lemma 1.1.1. *Nech máme náhodný proces $\{X_t : t \geq 0\}$ s hodnotami v L splňujuci (1.2) a nech $u = \inf\{w \geq 0 : P(X_w = i) > 0\}$. Potom pre $t > u$ platí*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup\{|P(X_t = j|X_q = i) - P(X_t = j|X_s = i)| : u < s, q \leq t, |s - q| < \varepsilon\} = 0.$$

Dôkaz. Pre $u < s \leq q$ dostaneme

$$P(X_t = j|X_s = i) \leq P(X_t = j, X_q = i|X_s = i) = P(X_t = j|X_q = i)\ P(X_q = i|X_s = i),$$

d'alšou úpravou dosataneme nerovnosť

$$\begin{aligned} P(X_t = j|X_s = i) - P(X_t = j|X_q = i) &\geq -P(X_t = j|X_q = i)\ [1 - P(X_q = i|X_s = i)] \\ &\geq P(X_q = i|X_s = i) - 1. \end{aligned}$$

Opačnú nerovnosť získame nasledovne

$$\begin{aligned} P(X_t = j|X_s = i) &\leq P(X_t = j|X_q = i) + \sum_{k \neq i} P(X_t = j|X_q = k)\ P(X_q = k|X_s = i) \\ &\leq P(X_t = j|X_q = i) + 1 - P(X_q = i|X_s = i). \end{aligned}$$

Celkovo teda dostávame

$$\begin{aligned} P(X_t = j|X_s = i) - P(X_t = j|X_q = i) &\leq [P(X_q = i|X_s = i) - 1]\ [P(X_t = j|X_q = i) - 1] \\ &\leq 1 - P(X_q = i|X_s = i) \end{aligned}$$

a tvrdenie plynie z podmienky (1.2). □

Dôsledok 1.1.1. Z predchádzajúceho lemmatu plynie, že za predpokladu (1.2) existuje pre $t > u$ lokálne rovnomerná limita

$$\lim_{q \to u^+} P(X_t = j|X_q = i),$$

ktorú označíme $p_{ij}(u,t)$ a pre $s \leq u$ položíme $P(X_t = j|X_s = i) = p_{ij}(u,t)$.

Veta 1.1.1. *Nech máme náhodný proces $\{X_t : t \geq 0\}$ s hodnotami v L, ktorý splňuje markovovskú vlastnosť (1.1) a vlastnosť (1.2). Potom proces $\{X_t : t \geq 0\}$ je Markovov reťazec.*

Dôkaz. Bod (iv) definície Markovovho reťazca nás navádza, ako definovať matice $\mathbf{P}(s,t)$ pre $0 \leq s < t$ také, že $P(X_s = i) > 0$. Pre $s < t$ teda definujme matice nasledovne

$$\begin{aligned} p_{ij}(s,t) &= P(X_t = j|X_s = i), && \text{ak } P(X_s = i) > 0, \\ &= \delta_{ij}, && \text{ak } P(X_s = i) = 0, t \leq u, \\ &= p_{ij}(u,t), && \text{ak } P(X_s = i) = 0, t > u, \end{aligned}$$

kde $u = \inf\{w \geq s : P(X_w = i) > 0\}$ a δ_{ij} je Croneckerovo delta. Pre $s = t$ dodefinujeme $\mathbf{P}(s,s) = \mathbf{I}$. Stačí nám teda ukázať, že takto definovaný systém matíc spĺňa podmienky (i) - (iv) z definície Markovovho reťazca. Dokazovať budeme najskôr vlastnosť (iv) a skončíme u vlastnosti (i).

(iv) Plynie priamo z definície systému matíc a predpokladu splnenia markovovskej vlastnosti pre $s < t$.

(iii) Dôkaz rozdelíme na dve časti. Nech $s \leq t$ a predpokladajme najskôr, že $P(X_s = i) > 0$. Potom, z podmienky (1.2) plynie, že

$$P(X_r = j|X_s = i) = P(X_t = j|X_s = i) + o(1),$$

kde $o(1) \to 0$ pre $r \to t^+$. Môžeme teda písať'

$$\lim_{v \to t^+} p_{ij}(s, v) = p_{ij}(s, t).$$

Druhou časť'ou je situácia, kedy $s \leq t$ a $P(X_s = i) = 0$. Definujme si, podobne ako pri konštrukcii matíc, $u = \inf\{w \geq s : P(X_w = i) > 0\}$. Nastat' môžu dva scenáre:

a) ak $s \leq t \leq u$, potom

$$\lim_{v \to t^+} p_{ij}(s, v) = \lim_{v \to t^+} \delta_{ij} = \delta_{ij} = p_{ij}(s, t),$$

b) ak $s \leq u < t$, potom vzhl'adom na predpoklad (1.2) máme

$$\begin{aligned} \lim_{v \to t^+} p_{ij}(s, v) = \lim_{v \to t^+} p_{ij}(u, v) = \lim_{v \to t^+} \lim_{w \to u^+} p_{ij}(w, v) = \lim_{w \to u^+} \lim_{v \to t^+} p_{ij}(w, v) \\ = \lim_{w \to u^+} p_{ij}(w, t) = p_{ij}(s, t). \end{aligned}$$

(ii) Plynie priamo z definície systému matíc, kde sme položili $\mathbf{P}(s, s) = \mathbf{I}$ pre $s \geq 0$.

(i) Pre $0 \leq s < t < r$ také, že $P(X_s = i) > 0$ máme

$$\begin{aligned} p_{ij}(s, r) &= P(X_r = j|X_s = i) = \sum_{k \in A} P(X_t = k|X_s = i)\, P(X_r = j|X_t = k, X_s = i) \\ &= \sum_{k \in A} P(X_t = k|X_s = i)\, P(X_r = j|X_t = k) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s, t)\, p_{kj}(t, r) \end{aligned}$$

kde $A = \{k \in L : P(X_t = k) > 0\}$ a druhá rovnost' plynie z vety o úplnej pravdepodobnosti. Pri tretej rovnosti využívame markovovskú vlastnost'. Štvrtá rovnost' platí vzhl'adom na nulovost' členov $p_{ik}(s, t)$ pre $k \in L \backslash A$.

Pre $0 \leq s < t < r$ také, že $P(X_s = i) = 0$, definujeme $u = \inf\{w \geq s : P(X_w = i) > 0\}$. Nastat' môžu tri scenáre:

a) ak $s \leq u < t$, potom máme s využitím platnosti (i) pre q také, že $P(X_q = i) > 0$ a podmienky (1.2) máme

$$\begin{aligned} p_{ij}(s, r) = p_{ij}(u, r) = \lim_{v \to u^+} p_{ij}(v, r) = \lim_{v \to u^+} \sum_{k \in L} p_{ik}(v, t)\, p_{kj}(t, r) \\ = \sum_{k \in L} p_{ik}(u, t)\, p_{kj}(t, r) = \sum_{k \in L} p_{ik}(s, t)\, p_{kj}(t, r), \end{aligned}$$

b) ak $t \leq u < r$, potom

$$p_{ij}(s,r) = p_{ij}(u,r) = \sum_{k \in L} \delta_{ik}\, p_{kj}(u,r) = \sum_{k \in L} p_{ik}(s,t)\, p_{kj}(t,r),$$

c) a ak $r \leq u$, potom máme

$$p_{ij}(s,r) = \delta_{ij} = \sum_{k \in L} \delta_{ik}\, \delta_{kj} = \sum_{k \in L} p_{ik}(s,t)\, p_{kj}(t,r).$$

$\square$

Ak je množina stavov L naviac konečná, nazývame Markovov reťazec *konečný*. Ďalej, podmienené pravdepodobnosti $P(X_t = j | X_s = i)$ pre $t \geq s$ sme označovali ako $p_{ij}(s,t)$ a budeme ich nazývať *pravdepodobnosťami prechodu* zo stavu i v čase s do stavu j v čase t. Pravdepodobnosti prechodu $p_{ij}(s,t)$ tvoria prvky *matice prechodu* $\mathbf{P}(s,t)$. Obdobne, pravdepodobnosť $P(X_t = i)$ budeme označovať ako $p_i(t)$ a budeme o nej hovoriť ako o *absolútnej pravdepodobnosti* stavu i v čase t a špeciálne absolútnu pravdepodobnosť v čase 0 označíme ako p_i a budeme ju nazývať *počiatočná pravdepodobnosť* stavu i.

Definícia 1.1.5. Nech je daný sprava spojitý náhodný proces $\{X_t : t \geq 0\}$ na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s hodnotami v L. Tento systém sa nazýva *homogénny Markovov reťazec so spojitým časom a množinou stavov* L, ak existuje systém matíc $\{\mathbf{P}(s,t) : 0 \leq s \leq t < \infty\}$ taký, že platí:

(i) $\mathbf{P}(s)\,\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(s+t)$ pre $0 \leq s, t$,

(ii) $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$,

(iii) $\lim\limits_{u \to s^+} \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(s)$ pre $0 \leq s$,

(iv) $p_{ij}(t-s) = P(X_t = j | X_s = i, X_{s_n} = i_n, ..., X_{s_0} = i_0)$ pre časy $0 \leq s_0 < s_1 < ... < s_n < s < t$ a pre stavy $i, j, i_0, i_1, ..., i_n \in L$, pre ktoré je $P(X_s = i, X_{s_n} = i_n, ..., X_{s_0} = i_0) > 0$ a $n \in \mathbb{N}_0$, pričom $p_{ij}(t-s)$ je prvok v i-tom riadku a j-tom stĺpci matice $\mathbf{P}(t-s)$.

Poznámka 1.1.6. Ak proces $\{X_t, t \geq 0\}$ je homogénny Markovov reťazec so spojitým časom a množinou stavov L, potom je i Markovovým procesom s maticami pravdepodobností prechodu: matice prechodu platí

$$\mathbf{P}(s,t) = \mathbf{P}(t-s), \qquad 0 \leq s < t. \tag{1.3}$$

Lemma 1.1.2. *Nech máme náhodný proces $\{X_t : t \geq 0\}$ s hodnotami v L, ktorý je sprava spojitý a splňuje markovovskú vlastnosť (1.1), kde pravá strana závisí len na rozdieli $t - s$. Potom je proces homogénnym Markovovým procesom.*

Dôkaz. Vzhľadom na Vetu 1.1.1 nám pre dôkaz markovovskosti stačí ukázať, že proces splňuje podmienku (1.2). Závislosť markovovskej vlastnoti (1.1) na rozdieli $t - s$ nám pre $T \in [0, \infty)$ dáva

$$\lim_{h \to 0^+} \inf \{P(X_{t+h} = i | X_t = i) : P(X_t = i) > 0, t \leq T\} = \lim_{h \to 0^+} P(X_h = i | X_0 = i) = 1,$$

kde posledná rovnosť vyplýva zo spojitosti procesu sprava a Lebesgeouvej vety o majorante, ktorá nám umožní zamenit' spojitosť a podmienenú pravdepodobnosť. Ďalej pre $h \geq 0$ definujeme matice

$$\mathbf{P}(h) = \lim_{s \to \infty} \mathbf{P}(s, s+h),$$

kde $\mathbf{P}(s, s+h)$ sú matice pravdepodobností prechodu definované vo Vete 1.1.1. Z konštrukcie matíc $\mathbf{P}(s, s+h)$ vyplýva, že pre dostatočne veľké s sú už matice konštantné. Overenie podmienok uvedených v Definícií 1.1.5 prenecháme na váženého čitateľa. □

V ďalšom texte sa budeme zaoberať spojitými konečnými homogénnymi Markovovými reťazcami a pre zjednodušenie ich budeme nazývať homogénne Markovove reťazce. Bez újmy na obecnosti teda môžeme predpokladať $S = \{0, 1, 2, ..., N\}$. Vzhľadom k (1.3) môžeme označiť pravdepodobnosti prechodu $p_{ij}(s, s+t)$ ako $p_{ij}(t)$ pre $s \geq 0, t \geq 0$. Maticu $\mathbf{P}(t)$ tvorenú prvkami $p_{ij}(t)$ nazveme *maticou prechodu za dobu t*. Zrejme z definície matíc prechodu je $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$. Obdobne, platí $\sum_{j \in L} p_{ij}(t) = 1$ pre každé nezáporné t, teda matice $\{\mathbf{P}(t) : t \geq 0\}$ sú stochastické.

Veta 1.1.2. *Nech je daný homogénny Markovov reťazec s konečnou množinou stavov L. Pre každé $i \in L$ existuje limita*

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} := q_i \leq \infty, \tag{1.4}$$

pre každé $i, j \in L$, $i \neq j$ existujú limity

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{p_{ij}(h)}{h} := q_{ij} \leq \infty, \tag{1.5}$$

a platí

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i. \tag{1.6}$$

Dôkaz. Dôkaz vzorcov (1.4) a (1.5) je možné vyhľadať v [5], veta II.2.4 a veta II.2.5. Vzťah (1.6) sa dostane limitným prechodom. Zo stochastickosti matíc $\mathbf{P}(h)$ máme pre $h > 0$ a $i \in L$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1-\sum_{j\in L} p_{ij}(h)}{h} \\
\frac{1-p_{ii}(h)}{h} &= \frac{\sum_{j\neq i} p_{ij}(h)}{h}.
\end{aligned}$$

Limitným prechodom dostávame

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{1-p_{ii}(h)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sum_{j\neq i} p_{ij}(h)}{h} \\
q_i &= \sum_{j\neq i} q_{ij}.
\end{aligned}$$

Posledná úprava vychádza z existencie limít (1.4) a (1.5), konečnosti súm a pravidlu práce s limitami, ktoré hovorí, že limita súčtu je súčet limít, pokiaľ je výraz na pravej strane definovaný. V našom prípade sú limity na pravej strane nezáporné, a teda ich súčet je definovaný. □

Definícia 1.1.6. Nezáporné čísla q_{ij} definované vo Vete 1.1.2 sa nazývajú *intenzity prechodu* zo stavu i do stavu j, nezáporné číslo q_i sa nazýva *celková intenzita*. Matica $\mathbf{Q} = \{q_{ij} : i, j \in L\}$, kde $q_{ii} = -q_i$, sa nazýva *matica intenzít* a vektor $\mathbf{q} = \{q_i : i \in L\}$ nazývame *vektorom intenzít výstupu*.

K ďaľším zo základných pojmov, s ktorými sa v práci stretneme patrí i nerozložiteľnosť.

Definícia 1.1.7. Pre homogénny Markovov reťazec hovoríme, že stav j je *dosiahnuteľný* zo stavu i, ak existuje $t \geq 0$ také, že $p_{ij}(t) > 0$. Naopak, ak pre všetky $t \geq 0$ je $p_{ij}(t) = 0$, hovoríme, že j *nie je dosiahnuteľný* z i.

Definícia 1.1.8. Homogénny Markovov reťazec sa nazýva *nerozložiteľný*, ak každý jeho stav je dosiahnuteľný z každého iného stavu. V opačnom prípade je *rozložiteľný*.

Definícia 1.1.9. Neprázdna uzavretá množina stavov C sa nazýva *uzavretá*, ak žiadny stav mimo C nie je dosiahnuteľný zo žiadneho stavu z C.

Pred nasledujúcou definícioiu si zaveďme označenie $P_j(A)$ ako pravdepodobnosti javu A za podmienky, že reťazec začína v stave j. Obdobne $E_j(A)$ je stredná hodnota javu A za podmienky, že reťazec začína v stave j.

Definícia 1.1.10. Pre homogénny sprava spojitý Markovov reťazec nazývame stav $j \in L$ *trvalý*, ak buď $q_j = 0$ (j je *absorpčný*), alebo $q_j > 0$ a súčasne $P_j(\tau_j(1) < \infty) = 1$, kde

$$\tau_j(1) = \inf\{t > 0 : j = X_t \neq X_{t^-}\}$$

je čas prvého skoku do stavu j.
Trvalý stav $j \in L$ sa nazýva *nenulový*, ak buď $q_j = 0$, alebo $E_j\left(\tau_j(1) < \infty\right)$.
Stav $j \in L$ sa nazýva *prechodný*, ak $q_j > 0$ a $P_j\left(\tau_j(1) = \infty\right) > 0$.

Veta 1.1.3. *Množina stavov homogénneho Markovovho ret'azca L sa dá zapísat' ako zjednotenie*

$$L = P \cup T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_m,$$

kde P je množina stavov prechodných a T_1, T_2, ... T_m sú disjunktné uzavreté nerozložiteľné množiny stavov trvalých, pričom $1 \leq m \leq N$.

Dôkaz. Pre diskrétne homogénne Markovove ret'azce viz Kapitola 2.4 na str. 36-41 v [9]. Pre spojité homogénne Markovove ret'azce tvrdenie plynie z Vety 3.13 na str. 91 v [9]. □

Vd'aka predchádzajúcej vete je možné zapísat' maticu prechodu (po eventuálnom prečíslovaní) homogénneho Markovovho ret'azca nasledujúco

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1(t) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2(t) & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{P}_m(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_1(t) & \mathbf{Q}_2(t) & \dots & \mathbf{Q}_m(t) & \mathbf{Q}_{m+1}(t) \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{P}_1(t)$,...,$\mathbf{P}_m(t)$ sú štvorcové matice pravdepodobností prechodu v čase t medzi trvalými stavmi v podret'azcoch T_1,...,T_m a $\mathbf{Q}_1(t)$,...,$\mathbf{Q}_{m+1}(t)$ obsahujú pravdepodobnosti prechodu z prechodných stavov.

Dôsledok 1.1.2. Všetky stavy nerozložiteľného konečného Markovovho ret'azca sú trvalé.

Poslednou problematikou, ktorej sa budeme v úvodnej kapitole venovat' je limitné rozdelenie Markovovho ret'azca.

Definícia 1.1.11. Pravdepodobnostné rozdelenie $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_i : i \in L\}$ na L sa nazýva *limitné rozdelenie*, ak pre všetky $i, j \in L$

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = \pi_j.$$

Otvára sa otázka, kedy má homogénny Markovov ret'azec limitné rozdelenie. Odpoved' nájdeme v d'alšom texte. Zatial' si uved'me len pomocnú vetu.

Veta 1.1.4. *Vektor limitných pravdepodobností π pre nerozložiteľný homogénny Markovov ret'azec je jednoznačne určený sústavou rovníc*

$$\mathbf{Q}^{T}\,\boldsymbol{\pi} = 0$$

a podmienkami $\pi_j > 0$ pre všetky $j \in L$ a $\sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1$.

Dôkaz. Viz Veta 1 na str. 31 v [3]. □

V práci budeme tiež potrebovat' vetu, ktorá udáva súvislost' intenzít prechodu s deriváciami pravdepodobností prechodu v obecnom bode.

Veta 1.1.5. *Majme homogénny Markovov ret'azec s konečnou množinou stavov L. Predpokladajme, že $q_i < \infty$ pre všetky $i \in L$ a platí (1.6). Potom pravdepodobnosti prechodu $p_{ij}(t)$ sú diferencovateľné pre všetky $i, j \in L$ a $t > 0$ a platí*

$$\mathbf{P}^{'}(t) = \mathbf{Q}\,\mathbf{P}(t) \quad \text{a} \quad \mathbf{P}^{'}(t) = \mathbf{P}(t)\,\mathbf{Q}.$$

Dôkaz. Viz Veta 3.9 na str. 82 v [9]. □

1.2 Konštrukcia homogénneho Markovovho ret'azca

V tejto podkapitole si ukážeme ako skonštruovat' homogénny Markovov ret'azec. Táto konštrukcia bude tvorit' základ budovaného modelu.

Definícia 1.2.1. Majme daný konečný Markovov ret'azec $\{X_t : t \geq 0\}$. Definujme náhodné veličiny charakterizujúce časy prechodov medzi stavmi ret'azca

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 0, \\ \tau_{n+1} &= \inf \{t > \tau_n : X_t \neq X_{\tau_n}\}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Potom vnoreným ret'azcom k ret'azcu $\{X_t : t \geq 0\}$ nazývame postupnost' náhodných veličín $\{Y_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ definovanú ako

$$\begin{aligned} Y_0 &= X_0, \\ Y_n &= X_{\tau_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Konštrukcia ret'azca prebieha nasledujúco. Najskôr predpokladajme existenciu množiny stavov $S = \{0, 1, 2, ..., N\}$, vektoru $\mathbf{q} \geq 0$, ktorý bude charakterizovat' vektor intenzít výstupu, stochastickej matice $\mathbf{Q}^*$, ktorá bude charakterizovat' pravdepodobnosti prechodu vnoreného ret'azca a počiatočnej podmienky $x_0 \in L$. Stavy, ktorých intenzita výstupu je nekonečná budeme nazývat' radikálne a stavy s konečnou intenzitou výstupu označíme ako stavy stabilné. Zadefinujeme si maticu intenzít prechodu $\mathbf{Q} = \{q_{ij} : i, j \in L\}$

$$\mathbf{Q} = diag\,(\mathbf{q})\ (\mathbf{Q}^* - \mathbf{I})\,, \tag{1.7}$$

kde $diag\,(\mathbf{q})$ je matica, ktorá má na diagonále zložky vektora $\mathbf{q}$ a inde nuly. V matici $\mathbf{Q}^*$ budú na diagonále nuly pre stavy, ktoré nie sú absorpčné. Nech máme d'alej postupnost' nezávislých rovnako rozdelených kladných náhodných veličín $\{D_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, pričom D_n sú exponenciálne rodelené so strednou hodnotou $\mathrm{E}D_n = 1$. Táto postupnost' je naviac nezávislá na postupnosti rovnako rozdelených nezávislých náhodných veličín $\{U_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, ktoré majú rovnomerné rozdelenie na intervale $(0, 1)$. Definujme ešte funkciu $f(u, i)$ na $L \times [0, 1]$ predpisom

$$f(u, i) = j \Longleftrightarrow \sum_{l=0}^{k-1} q^*_{ij} < u \leq \sum_{l=0}^{k} q^*_{ij}.$$

Pomocou veličín U_n a z nich odvodenej funkcie f vygenerujeme rekurentne vnorený ret'azec $\{X^*_n, n \in \mathbb{N}_0\}$

$$\begin{aligned} X^*_0 &= x_0 \\ X^*_{n+1} &= f\left(X^*_n, U_n\right), \qquad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Teda zrejme $\mathrm{P}\left(X^*_n = j \middle| X^*_{n-1} = i\right) = q^*_{ij} \quad \forall i, j \in L, n \in \mathbb{N}$. Nie je t'ažké ukázat', že vygenerovaný vnorený ret'azec má markovovskú vlastnost', viz Príklad 2.5 v [9]. Ďalej definujme takzvané doby medzi prechodmi

$$\begin{aligned}\tau_0 &= 0,\\ \tau_{k+1} &= \tau_k + \frac{D_k}{q_{X_k^*}}, \qquad k \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

Táto definícia dobre funguje pre $0 < q_{X_k^*} < \infty$. Pre $q_{X_k^*} = \infty$ dodefinujeme $\tau_{k+1} = \tau_k$ a pre $q_{X_k^*} = 0$ položíme $\tau_{k+1} = \infty$. Zrejme platí

$$\tau_{k+1} = \sum_{j=0}^{k} \frac{D_j}{q_{X_j^*}}, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

V doterajšom priebhu sme vygenerovali reťazec $\{X_k^* : k \in \mathbb{N}_0\}$ a časy $\{\tau_i : i \in \mathbb{N}_0\}$. Táto dvojica charakterizuje obecný reťazec, pričom hodnota X_k^* reprezentuje stav, v ktorom sa reťazec nachádza po k skokoch a τ_k reprezentuje čas, v ktorom ku k-temu skoku došlo. V obecnom reťazci sa nám môže stať, že v jednom časovom okamihu dôjde k viacerým prechodom po sebe. S tým sú spojené určité ťažkosti a je prirodzené sa na takúto situáciu pozerať ako na jeden realizovaný prechod, čo nás vedie k pojmu redukovaného reťazca s počiatočnou podmienkou. Ten kopíruje obecný reťazec s tým, že nezaznamenáva radikálne stavy. Jedinou výnimkou je počiatočný stav, ktorý je zvolený ľubovoľne, a teda x_0 môže byť stav radikálny. Konštrukcia

$$\begin{aligned}X_{0^-} &= x_0,\\ X_t &= X_n^*, \qquad \text{ak } \tau_n \le t < \tau_{n+1}\end{aligned} \tag{1.8}$$

definuje redukovaný reťazec s počiatočnou podmienkou x_0 k vygenerovanému obecnému reťazcu. Všimnime si, že počiatočnú pozíciu reťazca v (1.8) definujeme zľava. Dôvod je ten, že chceme, aby boli sprava spojité trajektórie, a teda i pravdepodobnosti prechodu. Ku skoku bude môcť prísť v 0 zľava. Vráťme sa ešte k definícií τ_k. Môže sa stať, že $q_{X_j^*} = \infty$. K tomu, aby $\tau_k \to \infty$ pre $k \to \infty$ skoro určite, musíme zaviesť dodatočný predpoklad, ktorý hovorí, že v obecnom reťazci neexistuje uzavretý cyklus trvalých radikálnych stavov. Za tohoto predpokladu, reťazec X_j^* niekedy opustí množinu radikálnych stavov a zo silného zákona veľkých čísel dostaneme, že $\tau_k \to \infty$ pre $k \to \infty$ skoro určite. Prepodklad teda zabezpečí, že reťazec neexploduje skoro určite, my však potrebujeme, aby neexplodoval určite. Preto tie $\omega \in \Omega$, pre ktoré reťazec exploduje z pravdepodobnostného priestoru vynecháme. Nasledujúce pomocné lemma nám umožní dokázať, že skonštruovaný redukovaný reťazec je Markovov.

Lemma 1.2.1. *Nasledujúce systémy javov sú podmienene nezávislé javom* $[\tau_k \le s < \tau_{k+1}, X_s = j, X_0 = j_0]$

(i) $\tau_1, X_{\tau_1}, ..., \tau_k, X_{\tau_k}$

(ii) $\tau_{k+1}, X_{\tau_{k+1}}, \tau_{k+2}, X_{\tau_{k+2}}, ...$

Dôkaz. Nech $x_0 = 0$. Z konštrukcie procesu plynie, že združená hustota $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ a $X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, ..., X_{\tau_n}$ voči miere $\lambda^n \otimes \left(\sum_{s\in L} \delta_s\right)^n$, kde $\sum_{s\in L} \delta_s$ je čítacia miera na L, je tvaru

$$
\begin{aligned}
&P(X_{\tau_i} = j_i, \tau_i \in \mathrm{d}x_i, i \leq n | X_0 = j_0) \\
&\qquad = q_{j_0 j_1} ... q_{j_{n-1} j_n} e^{-\left[q_{j_0} x_1 + q_{j_1}(x_2 - x_1) ... q_{j_{n-1}}(x_n - x_{n-1})\right]} I_{\{0 < x_1 < ... < x_n\}}.
\end{aligned}
$$

Potom

$$
\begin{aligned}
&P(X_{\tau_i} = j_i, \tau_i \in \mathrm{d}x_i, i \leq n | \tau_k \leq s < \tau_{k+1}, X_s = j, X_0 = j_0) \\
&\qquad = \frac{I_{\{j = j_k, x_k \leq s < x_{k+1}\}} \, P(X_{\tau_i} = j_i, \tau_i \in \mathrm{d}x_i, i \leq n | X_0 = j_0)}{P(\tau_k \leq s < \tau_{k+1}, X_s = j | X_0 = j_0)} \\
&\qquad = I_{\{0 < x_1 < ... < x_k \leq s\}} \, e^{-\left[q_{j_0} x_1 + q_{j_1}(x_2 - x_1) ... q_{j_k}(s - x_{k-1})\right]} \\
&\qquad\quad I_{\{s < x_{k+1} < ... < x_n\}} \, e^{-\left[q_{j_k}(x_{k+1} - s) ... q_{j_{n-1}}(x_n - x_{n-1})\right]} \\
&\qquad\quad \frac{q_{j_0 j_1} ... q_{j_{n-1} j_n}}{P(\tau_k \leq s < \tau_{k+1}, X_s = j | X_0 = j_0)}.
\end{aligned}
$$

Vidíme, že hustota je v súčinovom tvare, a teda javy sú podmienene nezávislé. □

Veta 1.2.1. *Konštrukcia (1.8) s vektorom intenzít výstupu* $\mathbf{q} \geq 0$ *a maticou pravdepodobností prechodu* $\mathbf{Q}^*$ *definuje homogénny Markovov reťazec.*

Dôkaz. Vzhľadom na Vetu 1.1.1 nám pre dôkaz toho, že reťazec je Markovov, postačí ukázať sprava spojitosť a markovovskú vlastnosť skúmaného reťazca. Spojistosť reťazca sprava vyplýva priamo z konštrukcie (1.8). Pripomenieme, že potrebujeme ukázať, že platí

$$
P(X_t = j | X_s = i, X_{s_n} = i_n, ..., X_{s_0} = s_0) = P(X_t = j | X_s = i)
$$

pre všetky časy $0 \leq s_0 < s_1 < ... < s_n < s < t$ a pre všetky stavy $i, j, i_0, i_1, ..., i_n \in L$, pre ktoré je $P(X_s = i, X_{s_n} = i_n, ..., X_{s_0} = i_0) > 0$ a $n \in \mathbb{N}_0$. Dôkaz markovovskej vlastnosti sa bude opierať o predchádzajúce lemma. V ňom sme ukázali, že javy (ii) pri podmieňovaní javom $[\tau_k \leq s < \tau_{k+1}, X_s = j, X_0 = j_0]$ majú rovnaké rozdelenie ako systém javov (i) pri podmieňovaní javom $[X_0 = j_0]$. Použijeme vetu o transformácií, kde namiesto veličiny τ_{k+1} uvažujeme veličinu $\tau_{k+1} - s$ a dostávame (vzhľadom na posun v jednej súradnici je Jakobián rovný 1), že javy $tau_{k+1} - s, X_{tau_{k+1}}, ...$ majú pri podmieňovaní javom $[\tau_k \leq s < \tau_{k+1}, X_s = j, X_0 = j_0]$ rovnaké rozdelenie ako javy $tau_1, X_{tau_1}, ...$ pri podmieňovaní javom $[X_0 = j_0]$. Z tejto úvahy plynie

$$
\begin{aligned}
P(X_{t_n} = \beta_n, &X_{t_{n-1}} = \beta_{n-1}, ..., X_{t_0} = \beta_0 | \tau_k \leq s < \tau_{k+1}, X_s = \alpha, X_0 = i) \\
&= P(X_{t_n - s} = \beta_n, X_{t_{n-1} - s} = \beta_{n-1}, ..., X_{t_0 - s} = \beta_0 | X_0 = \alpha).
\end{aligned}
$$

S využitím tejto rovnosti a vety o úplnosti pravdepodobností odvodíme nasledujúcu rovnosť

$$\begin{aligned}P(X_{t_n} = \beta_n, &X_{t_{n-1}} = \beta_{n-1}, ..., X_{t_0} = \beta_0 | X_s = \alpha, X_0 = i)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}_0} P(X_{t_n} = \beta_n, X_{t_{n-1}} = \beta_{n-1}, ..., X_{t_0} = \beta_0 | \tau_k \leq s < \tau_{k+1}, X_s = \alpha, X_0 = i)\\ &\qquad P(\tau_k \leq s < \tau_{k+1} | X_s = \alpha, X_0 = i)\\ &= P(X_{t_n - s} = \beta_n, X_{t_{n-1}-s} = \beta_{n-1}, ..., X_{t_0 - s} = \beta_0 | X_0 = \alpha). \qquad (1.9)\end{aligned}$$

S využitím rovnosti (1.9) dostaneme

$$\begin{aligned}P(X_t = \xi, &X_s = \alpha, X_{s_m} = \alpha_m, ..., X_{s_2} = \alpha_2 | X_{s_1} = \alpha_1, X_0 = \alpha_0)\\ &= P(X_{t-s_1} = \xi, X_{s-s_1} = \alpha, X_{s_m - s_1} = \alpha_m, ..., X_{s_2 - s_1} = \alpha_2 | X_0 = \alpha_1).\end{aligned}$$

Ďalej prenesieme $X_{s_2} = \alpha_2$ do podmienky a použijeme predchádzajúcu rovnosť

$$\begin{aligned}P(X_t = \xi, &X_s = \alpha, X_{s_m} = \alpha_m, ..., X_{s_3} = \alpha_3 | X_{s_2} = \alpha_2, X_{s_1} = \alpha_1, X_0 = \alpha_0)\\ &= \frac{P(X_t = \xi, X_s = \alpha, X_{s_m} = \alpha_m, ..., X_{s_2} = \alpha_2 | X_{s_1} = \alpha_1, X_0 = \alpha_0)}{P(X_{s_2} = \alpha_2 | X_{s_1} = \alpha_1, X_0 = \alpha_0)}\\ &= \frac{P(X_{t-s_1} = \xi, X_{s-s_1} = \alpha, X_{s_m - s_1} = \alpha_m, ..., X_{s_2 - s_1} = \alpha_2 | X_0 = \alpha_0)}{P(X_{s_2 - s_1} = \alpha_2 | X_0 = \alpha_1)}\\ &= P(X_{t-s_1} = \xi, X_s = \alpha, X_{s_m - s_1} = \alpha_m, ..., X_{s_3 - s_1} = \alpha_3 | X_{s_2 - s_1} = \alpha_2, X_0 = \alpha_1)\\ &= P(X_{t-s_2} = \xi, X_s = \alpha, X_{s_m - s_2} = \alpha_m, ..., X_{s_3 - s_2} = \alpha_3 | X_0 = \alpha_2).\end{aligned}$$

Ďalej postupujeme indukciou a získame rovnosť

$$P(X_t = \xi | X_s = \alpha, X_{s_m} = \alpha_m, ..., X_{s_1} = \alpha_1, X_0 = \alpha_0) = P(X_{t-s} = \xi | X_0 = \alpha).$$

Obecne teda platí

$$\begin{aligned}P(X_t = \xi | X_s = \alpha, &X_{s_m} = \alpha_m, ..., X_{s_1} = \alpha_1, X_{s_0} = \alpha_0)\\ &= \sum_{j\in L} P(X_t = \xi | X_s = \alpha, X_{s_m} = \alpha_m, ..., X_{s_1} = \alpha_1, X_{s_0} = \alpha_0, X_0 = j)\\ &\qquad P(X_s = \alpha, ..., X_{s_0} = \alpha_0 | X_0 = j)\\ &= P(X_{t-s} = \xi | X_0 = \alpha).\end{aligned}$$

Z horeuvedenej rovnosti plynie markovovská vlastnosť, pretože

$$\begin{aligned} P(X_t = \xi | X_s = \alpha) &= P(X_{t-s} = \xi | X_0 = \alpha) \\ &= P(X_t = \xi | X_s = \alpha, X_{s_m} = \alpha_m, ..., X_{s_1} = \alpha_1, X_{s_0} = \alpha_0). \end{aligned}$$

Homogenita je zrejmá z prvej horeuvedenej rovnosti, z ktorej plynie, že matice $\mathbf{P}(s,t)$ závisia iba na rozdieli $s - t$. □

Obráťme ešte pozornosť na maticu intenzít prechodu medzi stabilnými stavmi v redukovanom reťazci $\widehat{\mathbf{Q}}$, ktorá sa líši od matice intenzít pre obecný reťazec $\mathbf{Q}$. Redukovaný reťazec je definovaný na intervale $[0, \infty)$, kde kopíruje redukovaný reťazec s počiatočnou podmienkou vygenerovanom pomocou (1.8). Vzhľadom na to, že „vynechávame" počiatočnú podmienku v 0^-, tak je redukovaný reťazec definovaný iba pre stabilné stavy. Predtým ako pristúpime k definovaniu matice intenzít pre redukovaný reťazec zavedieme sériu označení.

Bez újmy na obecnosti predpokladajme, že v obecnom reťazci sú stavy usporiadané od stabilných trvalých, ktoré označíme T, cez stabilné prechodné, ktoré označíme P, až ku radikálnym, ktoré označíme R. Množinu všetkých stabilných stavov označíme S. Môžeme teda písať

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_S & \mathbf{Q}_R \\ * & * \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{Q}_S$ je matica intenzít prechodu zo stabilných stavov S do stabilných stavov S, $\mathbf{Q}_R$ je matica intenzít prechodu zo stabilných stavov S do radikálnych stavov R a $*$ sú matice, pre ktoré nezavádzame značenie. Ďalej označme maticu pravdepodobností okamžitého prechodu pre obecný reťazec

$$\mathbf{Q}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_S^* & \mathbf{Q}_R^* \end{pmatrix},$$

potom platí

$$\widehat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}_S + \mathbf{Q}_R \; (\mathbf{I}_R - \mathbf{Q}_R^*)^{-1} \; \mathbf{Q}_S^*. \tag{1.10}$$

Naviac vieme, že množiny trvalých stavov sú uzavreté, čiže môžeme písať

$$\widehat{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{Q}}_T & \mathbf{0} \\ \widehat{\mathbf{Q}}_Q & \widehat{\mathbf{Q}}_P \end{pmatrix}.$$

Poznámka 1.2.1. Matica $\mathbf{I}_R - \mathbf{Q}_R^*$ použitá v (1.10) je regulárna, ak všetky vlastné čísla matice $\mathbf{Q}_R^*$ ležia vo vnútri kruhu s polomerom 1 a stredom v 0. To je napríklad splnené, ak neexistuje uzavretý reťazec radikálnych stavov, čo je predpoklad, ktorý sme v našej konštrukcii zaviedli.

Poznámka 1.2.2. Zastavme sa pri definícií (1.10). Pre zachovanie vlastností obecného ret'azca musí byt' matica intenzít prechodu v redukovanom ret'azci „navýšená“ oproti normálnemu ret'azcu o intenzity prechodu skrz radikálne stavy. Maticu intenzít prechodu v redukovanom ret'azci sme definovali ako súčet dvoch matíc. Prvky prvej matice $\mathbf{Q}_S$ sa dajú interpretovat' ako priame intenzity prechodu do d'alšieho stavu. Druhá matica $\mathbf{Q}_R \left(\mathbf{I}_S - \mathbf{Q}_R^*\right)^{-1} \mathbf{Q}_S^*$ sa skladá zo súčinu dvoch prvkov, $\mathbf{Q}_R$ označuje intenzity prechodu zo stabilných do radikálnych stavov a matica $\left(\mathbf{I}_S - \mathbf{Q}_R^*\right)^{-1} \mathbf{Q}_S^*$ sa dá interpretovat' ako pravdepodobnost' absorpcie radikálnych stavov do stabilných stavov.

1.3 Riadené konečné homogénne Markovove ret'azce so spojitým časom a ocenením prechodov

Definícia 1.3.1. Majme daný Markovov ret'azec s množinou stavov $L = \{0, 1, 2, ..., N\}$. Ku každému stavu $s \in L$ uvažujme konečnú množinu možných rozhodnutí Z_s. Potom množinu $\mathbb{Z} = \prod_{s \in L} Z_s$ nazývame *množinou možných riadení* a merateľné zobrazenie $\mathbf{z} : [0, \infty) \to \mathbb{Z}$, ktoré každému okamihu $t \geq 0$ priradí vektor rozhodnutí $\mathbf{z}(t) \in Z$ nazývame *nehomogénnym riadením ret'azca.*
Ak $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(0)$ pre všetky $t > 0$, hovoríme o *homogénnom riadení.*

Nech je daná množina $L = \{0, 1, 2, ..., N\}$, množina možných rozhodnutí $\mathbb{Z} = \prod_{s \in L} Z_s$ a na nej definované pevné homogénne riadenie ret'azca $\mathbf{z} = \{z_s \in Z_s : s \in L\}$. Ďalej nech k riadeniu $\mathbf{z}$ je definovaná stochastická matica $\mathbf{Q}^*$, vektor $\mathbf{q} \geq 0$, matica výnosov z prechodu $\mathbf{R}$, vektor výnosov zo zotrvania $\mathbf{r}$ a počiatočná podmienka x_0. Matica výnosov z prechodu $\mathbf{R} = \{r_{ij}; i, j \in L\}$ ohodnocuje prechody medzi stavmi v ret'azci, pričom zložka r_{ij} je ohodnotenie prechodu zo stavu i do stavu j a závisí len na rozhodnutí z_i, naviac $r_{ii} = 0$. Vektor výnosov zo zotrvania $\mathbf{r} = \{r_i : i \in L\}$ ohodnocuje čas strávený v jednolivých stavoch, pričom r_i je ohodnotenie zotrvania v stave i po jednotku času a závisí len na rozhodnutí z_i. Z predchádzajúcej kapitoly vieme, že ku každému pevne zvolenému $\mathbf{z}$ s danými parametrami dokážeme vygenerovat' obecný ret'azec charakterizovaný dobami medzi prechodmi a diskrétnym homogénnym Markovovým ret'azcom popisujúcim po sobe nasledujúce prechody. Obecnému ret'azcu prislúcha matica pravdepodobností prechodu vnoreného ret'azca $\mathbf{Q}^*$, vektor intenzít výstupu $\mathbf{q}$, matica intenzít prechodu $\mathbf{Q}$ a počiatočná podmienka x_0.

Predpokladajme, že sledujeme systém do času t. Označme si $\phi_i(t)$ celkový čas, počas ktorého je systém v stave i do času t a $\phi_{ij}(t)$ počet prechodov zo stavu i do stavu j do času t. Potom výnos z realizácie ret'azca do času t sa dá vypočítat' ako

$$V(t) = \sum_{i=0}^{N} r_i \, \phi_i(t) + \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} r_{ij} \, \phi_{ij}(t). \tag{1.11}$$

Tento výnos je zrejme náhodná veličina a nás bude zaujímat' jej podmienená stredná hodnota za podmienky, že ret'azec je v čase 0^- v stave x_0, označme si ju $\mathbf{v}_{x_0}(t)$. Označme si ešte $\mathbf{v}(t) = \{v_i(t), i \in L\}$. Pre stav $i \in L$ označme

$$\boldsymbol{\rho} = \{\rho_i : i \in L\}, \qquad \rho_i = r_i + \sum_{j=0}^{N} r_{ij} \, q_{ij}. \tag{1.12}$$

Pre stavy $i \in L$, pre ktoré je intenzita prechodu nekonečná $q_i = \infty$, dôjde s istotou k okamžitému prechodu z radikálneho stavu i a tento prechod sa vzhľadom na konštrukciu riadi rozdelením vnoreného ret'azca $\left\{q_{ij}^* : j \in L\right\}$. U týchto stavov nás teda bude zaujímat' hodnota

$$\boldsymbol{\rho}^* = \{\rho_i^* : i \in L\}, \qquad \rho_i^* = \sum_{j=0}^{N} r_{ij} \, q_{ij}^*. \tag{1.13}$$

Vektor $\boldsymbol{\rho}$ by sme pre stabilné stavy mohli interpretovať ako priemerný výnos v stave i za jednotku času. Obdobne, $\boldsymbol{\rho}^*$ by sa dalo interpretovať ako priemerný výnos v radikálnom stave i, keďže však reťazec v radikálnych stavoch nezotrváva, je priemerný výnos rovný strednej hodnote výnosu z okamžitého prechodu.

Lemma 1.3.1. *Nech máme daný homogénny Markovov reťazec $\{X_t : t \geq 0\}$ s konečnou množinou stavov L a s konečným vektorom intenzít výstupu $0 \leq \mathbf{q} < \infty$. Ďalej nech $\phi_{ij}(t)$ je počet prechodov zo stavu i do stavu j do času t. Potom platí*

$$\mathrm{E}\left(\phi_{ij}(t)|X_{0^-} = x_0\right) = \int_0^t P\left(X_s = i|X_{0^-} = x_0\right) q_{ij}\, \mathrm{d}s, \qquad t \geq 0, i, j \in L.$$

Dôkaz. Z Vety 1.1.2 plynie existencia funkcie $g(h) = o(h)$ pre $h \to 0^+$ taká, že

$$P\left(X_{s+h} = j|X_s = i\right) = q_{ij}\, h + g(h).$$

Ďalej definujme neklesajúcu postupnosť funkcií

$$f_n\left(t\right) = \sum_{k=1}^{2^n} I_{\left\{\text{na intervale } \left(\frac{k-1}{2^n} t, \frac{k}{2^n} t\right\rangle \text{ dôjde ku skoku z i do j}\right\}},$$

ktoré monotónne konvergujú k funkcii $\phi_{ij}(t)$. Označme jav, že reťazec skočí v intervale $\left(\frac{k-1}{2^n} t, \frac{k}{2^n} t\right\rangle$ z i do j ako A_{nk}. Podľa Léviho vety máme

$$\mathrm{E}\left(\phi_{ij}(t)|X_{0^-} = x_0\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} P\left(A_{nk}|X_{0^-} = x_0\right).$$

Vzhľadom k Vete 1.1.2 môžeme písať

$$\begin{aligned} P\left(A_{nk}|X_{0^-} = x_0\right) &\leq \left(q_{ij}\, t\, 2^{-n} + g(t\, 2^{-n})\right) P\left(\exists s \in \left(\frac{k-1}{2^n}\, t, \frac{k}{2^n}\, t\right\rangle, X_{s^-} = i|X_{0^-} = x_0\right) \\ &\leq \left(q_{ij}\, t\, 2^{-n} + g(t\, 2^{-n})\right) \left(P\left(X_{\frac{k-1}{2^n}\, t} = i|X_{0^-} = x_0\right) + G(t\, 2^{-n})\right), \end{aligned}$$

kde $G(h) = o(h)$ pre $h \to 0$ a

$$P\left(X_{s+h} = i|X_s \neq i\right) \leq G(h).$$

Potom

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^n} P\left(A_{nk}|X_{0^-}=x_0\right) \leq & \sum_{k=1}^{2^n} P\left(X_{\frac{k-1}{2^n}t}=i|X_{0^-}=x_0\right) q_{ij}\, t\, 2^{-n} \\ & + \sum_{k=1}^{2^n} g(t\, 2^{-n}) \\ & + \sum_{k=1}^{2^n} G(t\, 2^{-n}) \left[q_{ij}\, t\, 2^{-n} + g(t\, 2^{-n})\right],\end{aligned}$$

kde druhý a tretí sčítanec konverguje k nule vzhľadom na $g(h) = o(h)$ a $G(h) = o(h)$ pre $h \to 0^+$. Ďalej

$$\sum_{k=1}^{2^n} P\left(X_{\frac{k-1}{2^n}t}=i|X_{0^-}=x_0\right) q_{ij}\, t\, 2^{-n} \to \int_0^t P\left(X_s=i|X_{0^-}=x_0\right) q_{ij}\, \mathrm{d}s$$

vzhľadom na spojitosť podmienených pravdepodobností sprava a ich obmedzenosť. Odhadli sme teda podmienenú strednú hodnotu zhora

$$\mathrm{E}\left(\phi_{ij}(t)|X_{0^-}=x_0\right) \leq \int_0^t P\left(X_s=i|X_{0^-}=x_0\right) q_{ij}\, \mathrm{d}s.$$

Pravdepodobnosti obmedzíme i z druhej strany

$$\begin{aligned}P\left(A_{nk}|X_{0^-}=x_0\right) & \geq P\left(X_{\frac{k-1}{2^n}t}=i|X_{0^-}=x_0\right) P\left(X_{\frac{k}{2^n}t}=j|X_{\frac{k-1}{2^n}t}=i, X_{0^-}=x_0\right) - H(t\, 2^{-n}) \\ & \geq P\left(X_{\frac{k-1}{2^n}t}=i|X_{0^-}=x_0\right) q_{ij}\, t\, 2^{-n} + \tilde{H}(t\, 2^{-n}),\end{aligned}$$

kde $H(h) = o(h)$ a $\tilde{H}(h) = o(h)$ pre $h \to 0^+$ a druhá nerovnosť plynie opäť z Vety 1.1.2. Sčítaním získame

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^n} P\left(A_{nk}|X_{0^-}=x_0\right) \geq & \sum_{k=1}^{2^n} P\left(X_{\frac{k-1}{2^n}t}=i|X_{0^-}=x_0\right) t\, 2^{-n} + \sum_{k=1}^{2^n} \tilde{H}(t\, 2^{-n}) \\ & \to \int_0^t P\left(X_s=i|X_{0^-}=x_0\right) q_{ij}\, \mathrm{d}s,\end{aligned}$$

teda

$$\int_0^t P\left(X_s=i|X_{0^-}=x_0\right) q_{ij}\, \mathrm{d}s \leq \mathrm{E}\left(\phi_{ij}(t)|X_{0^-}=x_0\right) \leq \int_0^t P\left(X_s=i|X_{0^-}=x_0\right) q_{ij}\, \mathrm{d}s.$$

□

Predchádzajúce lemma využijeme v nasledujúcej vete pre redukovaný Markovov reťazec s počiatočnou podmienkou. Vieme, že redukovaný reťazec s počiatočnou podmienkou definuje na intervale $[0, \infty)$ redukovaný reťazec, kde už pracujeme iba so stabilnými stavmi a môžeme použiť lemmu. Tomuto redukovanému reťazcu prislúcha matica intenzít prechodu $\widehat{\mathbf{Q}}$. Pred samotnou vetou si zavedieme sériu označení a interpretujeme vektor priemerného výnosu pre redukovaný reťazec.

Bez újmy na obecnosti budeme v nasledujúcej časti predpokladať, že stavy redukovaného reťazca s počiatočnou podmienkou sú usporiadané od trvalých stabilných cez trvalé prechodné až k radikálnym stavom. Pri zachovaní označenia množín stabilných stavov ako S, stabilných trvalých stavov ako T, stabilných prechodných stavov ako P a radikálnych stavov ako R označíme

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_S \\ * \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\rho}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}^*_S \\ \boldsymbol{\rho}^*_R \end{pmatrix}.$$

Pre vektor priemerného výnosu za jednotku času v redukovanom reťazci platí

$$\widehat{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\rho}_S + \mathbf{Q}_R \, \left(\mathbf{I}_R - \mathbf{Q}^*_R\right)^{-1} \, \boldsymbol{\rho}^*_R, \tag{1.14}$$

a môžeme písať

$$\widehat{\boldsymbol{\rho}} = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\rho}}_{kT} \\ \widehat{\boldsymbol{\rho}}_{kP} \end{pmatrix}.$$

Poznámka 1.3.1. Podobne ako sme interpretovali maticu intenzít prechodu v redukovanom reťazci (znova bez prívlastku s počiatočnou podmienkou) v Poznámke 1.2.2, budeme interpretovať i vektor priemerného výnosu za jenotku času v redukovanom reťazci. Vektor je určený pomocou dvoch vektorov. Prvý vektor $\boldsymbol{\rho}_S$ symbolizuje priemerný výnos, ktorý obdržíme v stabilnom stave. Priemerný výnos v redukovanom reťazci však musí odrážať i prechody cez radikálne stavy, kde každý prechod je ohodnotený pomocou $\boldsymbol{\rho}^*$. Vieme, že matica $\left(\mathbf{I}_R - \mathbf{Q}^*_R\right)^{-1}$ sa dá rozpísať ako nekonečný rad

$$\left(\mathbf{I}_R - \mathbf{Q}^*_R\right)^{-1} = \mathbf{I}_R + \mathbf{Q}^*_R + \left(\mathbf{Q}^*_R\right)^2 + ...,$$

čiže celkovo môžeme druhú časť vektora rozpísať ako

$$\mathbf{Q}_R \, \left(\mathbf{I}_R - \mathbf{Q}^*_R\right)^{-1} \, \boldsymbol{\rho}^*_R = \mathbf{Q}_R \, \boldsymbol{\rho}^*_R + \mathbf{Q}_R \, \mathbf{Q}^*_R \, \boldsymbol{\rho}^*_R + \mathbf{Q}_R \, \left(\mathbf{Q}^*_R\right)^2 \, \boldsymbol{\rho}^*_R + ...,$$

kde jednotlivé členy interpretujeme nasledovne

$\mathbf{Q}_R \, \boldsymbol{\rho}^*_R$	priemerný výnos vstupu do radikálnych stavov
$\mathbf{Q}_R \, \mathbf{Q}^*_R \, \boldsymbol{\rho}^*_R$	priemerný výnos za 1. prechod v rámci radikálnych stavov
$\mathbf{Q}_R \, \left(\mathbf{Q}^*_R\right)^2 \, \boldsymbol{\rho}^*_R$	priemerný výnos za 2. prechod v rámci radikálnych stavov
$\vdots$	$\vdots$

Poznámka 1.3.2. Môžeme si položiť otázku, aké ohodnotenie budú mať stavy v redukovanom reťazci s počiatočnou podmienkou. Reťazec je totožný s redukovaným reťazcom (bez prívlastku s počiatočnou podmienkou) až na počiatočný stav, teda jedinou zmenou bude výnos za prechod z počiatočného stavu do stavu v čase 0. Pre stabilný počiatočný stav je situácia jednoduchá, pretože nám reťazec neskočí, a teda ohodnotenie bude nulové. Pri radikálnych stavoch je situácia obtiažnejšia. Podobnou úvahou, akú sme použili v predchádzajúcej Poznámke by sme prišli k záveru, že ak reťazec začne v stave $x_0 \in R$, tak očakávaný výnos v čase 0 bude

$$\mathbf{e_{x_0}}^{\mathsf{T}} \; (\mathbf{I_R} - \mathbf{Q}^*_R)^{-1} \; \boldsymbol{\rho}^*_R.$$

Poznámka 1.3.3. Význam redukovaného reťazca s počiatočnou podmienkou tkvie v tom, že jeho výnos (1.11) je totožný s výnosom obecného Markovovho reťazca, z ktorého bol vytvorený. Podporou tohto tvrdenia sú Poznámky 1.3.2, 1.3.1 a 1.2.2, v ktorých sme videli, že priemerný výnos i priemerný výnos z počiatočného stavu započítavajú všetky prechody, ktoré obecný reťazec vygeneroval. Naviac v stabilných stavoch sa reťazce zhodujú.

Pre nasledujúcu vetu označme

$$\bar{\boldsymbol{\rho}}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_S \\ (\mathbf{I}_R - \mathbf{Q}^*_R)^{-1} \; \boldsymbol{\rho}^*_R \end{pmatrix}, \qquad \bar{\boldsymbol{\rho}} = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\rho}} \\ \mathbf{0}_R \end{pmatrix}.$$

Ďalej zavedieme maticu pravdepodobností prechodu pre redukovaný reťazec s počiatočnou podmienkou. Označme ju $\bar{\mathbf{P}}(t)$ a úvahou odvodíme, že pre $t \geq 0$ platí

$$\bar{\boldsymbol{P}}(0) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_S & \mathbf{0} \\ (\mathbf{I_R} - \mathbf{Q}^*_R)^{-1} \; \mathbf{Q}^*_S & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \bar{\mathbf{P}}(t) = \bar{\mathbf{P}}(0)\, \mathbf{P}(t), \tag{1.15}$$

kde $\mathbf{P}(t)$ je matica pravdepodobností prechodu pre redukovaný reťazec a $(\mathbf{I_R} - \mathbf{Q}^*_R)^{-1} \; \mathbf{Q}^*_S$ interpretujeme ako pravdepodobnosti absorpcie radkikálnych stavov do stavov stabilných. Všimnime si, že pre systém matíc 1.15 by sme museli upraviť Definíciu 1.1.4, ktorá nepočíta s počiatočným stavom v čase 0^-. Pre počiatočný stav dodefinujeme $\bar{\mathbf{P}}(0^-) = \mathbf{I}$.

Veta 1.3.1. *Nech máme daný homogénny Markovov reťazec $\{X_t : t \geq 0\}$ s konečnou množinou stavov L, s maticou intenzít prechodu $\mathbf{Q}$, s vektorom intenzít výstupu $\mathbf{q} \geq 0$ a počiatočnou podmienkou x_0, ktorý vznikol generáciou z homogénneho riadenia $\mathbf{z}$. Potom pre redukovaný reťazec s počiatočnou podmienkou prislúchajúcemu tomuto Markovovmu reťazcu platí, že jeho podmienená stredná hodnota $\mathbf{v}(t)$ splňuje rovnosť*

$$\mathbf{v}(t) = \int_0^t \bar{\mathbf{P}}\,(s)\, \mathrm{d}s\, \bar{\boldsymbol{\rho}} + \; \bar{\boldsymbol{\rho}}^*, \qquad t \geq 0.$$

Dôkaz. Vzhľadom na rovnicu (1.11) máme

$$v_{x_0}(t) = \mathrm{E}\left(V(t)|X_{0^-} = x_0\right) = \sum_{i\in L} r_i\, \mathrm{E}\left(\phi_i(t)|X_{0^-} = x_0\right) + \sum_{i,j\in L} r_{ij}\, \mathrm{E}\left(\phi_{ij}(t)|X_{0^-} = x_0\right).$$

Dopočítame podmienené stredné hodnoty:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\phi_i(t)|X_{0^-} = x_0\right) &= \int_0^t \mathrm{P}\left(X_s = i|X_{0^-} = x_0\right) \mathrm{d}s = \int_0^t \mathbf{e}_{x_0}^{\intercal}\, \bar{\mathbf{P}}\,(s)\; \mathbf{e}_i\, \mathrm{d}s, \\
\mathrm{E}\left(\phi_{ij}(t)|X_{0^-} = x_0\right) &= \int_0^t \mathrm{P}\left(X_s = i|X_{0^-} = x_0\right)\; \widehat{q}_{ij}\; I_{\{\,q_i<\infty\}}\, \mathrm{d}s \\
&\quad + \mathbf{e}_{x_0}^{\intercal} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_R + \mathbf{Q}_R^* + (\mathbf{Q}_R^*)^2 + \ldots \end{pmatrix} \mathbf{e}_i\, q_{ij}^*\, I_{\{\,q_{x_0}=\infty\}} \\
&= \int_0^t \mathbf{e}_{x_0}^{\intercal}\, \bar{\mathbf{P}}\,(s)\; \mathbf{e}_i\, \widehat{q}_{ij}\; I_{\{\,q_i<\infty\}}\, \mathrm{d}s + \mathbf{e}_{x_0}^{\intercal} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ (\mathbf{I}_R - \mathbf{Q}_R^*)^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{e}_i\, q_{ij}^*\, I_{\{q_{x_0}=\infty\}},
\end{aligned}$$

kde prvá rovnosť v prvom riadku platí vzhľadom na $\phi_i(t) = \int_0^t I_{\{X_s=i\}}\mathrm{d}s$ a rovnosť v druhom riadku platí vzhľadom na Lemma 1.3.1 a Poznámku 1.3.2. Pre $\mathbf{v}(t)$ teda dostávame

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) &= \sum_{i\in L} r_i \int_0^t \bar{\mathbf{P}}\,(s)\; \mathbf{e}_i\, \mathrm{d}s \\
&\quad + \sum_{i,j\in L} r_{ij} \left(\int_0^t \bar{\mathbf{P}}\,(s)\; \mathbf{e}_i\, \widehat{q}_{ij}\; I_{\{\,q_i<\infty\}} \mathrm{d}s + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ (\mathbf{I}_R - \mathbf{Q}_R^*)^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{e}_i\, q_{ij}^* \right) \\
&= \int_0^t \bar{\mathbf{P}}\,(s)\, \mathrm{d}s\, \bar{\boldsymbol{\rho}} + \bar{\boldsymbol{\rho}}^*.
\end{aligned}$$

□

Ak do podmienok Vety 1.3.1 pridáme podmienku nerozložiteľnosti reťazca a konečných intenzít, dá sa dokázať ešte viac. Pripomenieme, že v tom prípade platí, vďaka Dôsledku 1.1.2, že všetky stavy reťazca sú trvalé.

Veta 1.3.2. *Pre podmienenú strednú hodnotu platí*

$$\frac{\mathrm{d}}{dt}\mathbf{v}(t) = \mathbf{Q}\,\mathbf{v}(t) + \boldsymbol{\rho}. \tag{1.16}$$

Dôkaz. Viz Veta 1 na str. 46 v [3]. □

K tomu, aby sme ukázali ako sa postupuje pri praktickom výpočte budeme potrebovať pomocné tvrdenie o matici intenzít prechodu $\mathbf{Q}$.

Veta 1.3.3. *V nerozložiteľnom reťazci je* 0 *jednoduchým charakteristickým číslom matice intenzít* $\mathbf{Q}$. *Pre všetky ostatné charakteristické čísla* λ_k *platí* $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$.

Dôkaz. Viz Veta 1 na str. 43 v [3]. □

Vďaka tejto vete si môžeme usporiadať jednotlivé vlastné čísla podľa veľkosti ich reálnych častí:

$$0 = \lambda_0 > \mathrm{Re}(\lambda_1) \geq \mathrm{Re}(\lambda_2) \geq \ldots \geq \mathrm{Re}(\lambda_\mu).$$

Pri tomto označení sa dá dokázať nasledujúca veta.

Veta 1.3.4. *Pre nerozložiteľný Marokovov reťazec so spojitým časom existuje kladné limitné rozdelenie* $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_j : j \in L\}$ *a naviac platí pre* $t \to \infty$

$$p_{ij}(t) = \pi_j + o(e^{-\sigma t}), \qquad i, j \in L, \sigma \in (0, \mathrm{Re}\,|\lambda_1|).$$

Dôkaz. Viz Veta 2. na str. 45 v [3]. □

Pri zavedení označenia $p_{ij}(t) = \pi_j + a_{ij}(t)$ a $A_{ij} = \int_0^\infty a_{ij}(s)\mathrm{d}s$ a z predchádzajúcej vety plynie

Veta 1.3.5. *Pre nerozložiteľný reťazec platí*

$$v_i(t) = ct + b_i + o(e^{-\sigma t}), \qquad i \in L, t > 0, \tag{1.17}$$

kde σ *je konštanta z intervalu* $(0, \mathrm{Re}\,|\lambda_1|)$ *a čísla* c, b_i *nezávisia na* t *pričom*

$$c = \sum_{j=0}^{N} \pi_j \rho_j,$$
$$b_i = \sum_{j=0}^{N} A_{ij} \rho_j, \qquad i \in L.$$

Dôkaz. Viz Veta 2. na str. 48 v [3]. □

Pri praktickom výpočte môžeme postupovať dvoma spôsobmi. Prvým spôsobom je výpočet matice prechodu $\mathbf{P}(s) = e^{\mathbf{Q}s}$ pomocou Perronovho vzorca. Členy matice prechodu $p_{ij}(t)$ sa následne dosadia do riešenia diferenciálnej rovnice (1.16), ktoré je v tvare

$$\mathbf{v}(t) = \int_0^t \mathbf{P}(s)\mathrm{d}s.\boldsymbol{\rho}, \qquad t > 0.$$

Druhým, spravidla rýchlejším spôsobom, je zanedbanie zbytku v (1.17) a dosadenie rovnice „bez zbytku“ do (1.16). Dostaneme

$$c = \sum_{j=0}^{N} q_{ij}\,(c\,t + b_j) + \rho_i, \qquad\qquad i \in L,$$

z čoho vzhľadom na $\sum_{j=1}^{N} q_{ij} = 0$ máme

$$c = \sum_{j=0}^{N} q_{ij}\,b_j + \rho_i, \qquad\qquad i \in L. \tag{1.18}$$

(1.18) je sústava N rovníc, ktoré nestačia k určeniu $N+1$ neznámych c, b_i, $i \in L$, stačia však k určeniu c a $b_i^{'} = b_i - b_N$, $i \in L$. To nám určí vektor $\mathbf{v}(t)$ až na konštantu. Pre Howardov algoritmus je vhodné si uvedomiť', že namiesto b_N si môžeme zvoliť' i inú konštantu, ktorá sa bude interpretovať' ako normalizácia pre hodnoty $b_i^{'}$. Táto normalizácia nebude mať' vplyv na hodnotu c vzhľadom na $\sum_{j=0}^{N} q_{ij} = 0$.

1.4 Konštrukcia nehomogénneho Markovovho ret'azca pre po častiach konštantné nehomogénne riadenie

Podobným spôsobom ako sme konštruovali homogénny Markovov ret'azec pre homogénne riadenie budeme postupovat' pri konštrukcii nehomogénneho Markovovho ret'azca pre po častiach konštantné nehomogénne riadenie. Majme teda nehomogénne sprava spojité riadenie $\mathbf{z}(t)$, ktoré je po častiach konštantné, t.j. existujú časy $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_k < ...$ také, že

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}^k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}_0.$$

Zrejme na každom intervale $[t_k, t_{k+1})$ môžeme zopakovat' konštrukciu pre homogénny redukovaný Markovov ret'azec s počiatočnou podmienkou, jediné na čo si musíme dávat' pozor je, aby ret'azec na seba nadväzoval v časoch t_k, kedy sa mení riadenie. Pri zmene riadenia však dochádza i k zmene intenzít a zmene typu bodov - z trvalého stavu sa môže stat' prechodný a opačne. Inými slovami, v čase zmeny riadenia môže dochádzat' ku skokom s nekonečnou intenzitou. Ako sme už viackrát spomínali, skoky s nekonečnou intenzitou budú prichádzat' zl'ava, aby sme zabezpečili spojitost' ret'azca sprava.

Pre samotnú konštrukciu ret'azca predpokladajme existenciu množiny stavov $L = \{0, 1, 2, ..., N\}$, postupnosti vektorov $\{\,_k\mathbf{q} > 0 : k \in \mathbb{N}_0\}$, ktoré budú charakterizovat' vektory intenzít výstupu pre riadenia $\mathbf{z}^k$, postupnosti stochastických matíc $\{_k\mathbf{Q}^* : k \in \mathbb{N}_0\}$, ktoré budú charakteriozvat' pravdepodobnosti prechodu vnorených ret'azcov k obecným ret'azcom prislúchajúcim jednotlivým riadeniam $\mathbf{z}^k$ a počiatočnej podmienky $x_0 \in L$. Nech máme d'alej ku každému riadeniu $\mathbf{z}^k$ postupnost' nezávislých rovnako rozdelených kladných náhodných veličín $\{\,_kD_n : n, k \in \mathbb{N}_0\}$, pričom $_kD_n$ sú exponenciálne rozdelené so strednou hodnotou $\mathrm{E}\,_kD_n = 1$. K tomuto riadeniu majme d'alšiu postupnost' rovnako rozdelených nezávislých náhodných veličín $\{\,_kU_n : n, k \in \mathbb{N}_0\}$, ktoré majú rovnomerné rozdelenie na intervale $(0, 1)$. Naviac predpokladáme, že veličiny $\{\,_kD_n : n, k \in \mathbb{N}_0\}$ a $\{\,_kU_n : n, k \in \mathbb{N}_0\}$ sú navzájom nezávislé. Definujme ešte funkcie $_kf(u, i)$ na $L \times [0, 1]$ predpismi

$$_kf(u, i) = j \Longleftrightarrow \sum_{l=0}^{k-1} {_kq^*_{ij}} < u \leq \sum_{l=0}^{k} {_kq^*_{ij}}.$$

Algoritmus generovania nehomogénneho ret'azca s počiatočnou podmienkou pre po častiach konštantné nehomogénne riadenie:

1. ${}_0X_0^* := x_0$
   $X_{0^-} := X_0^*$
   $j := 0$

2. Opakuj
   Polož $n := 0$

   Opakuj

$$\begin{aligned} {}_jX_{n+1}^* &:= {}_jf\,(\,{}_jX_n^*,\ {}_jU_n) && (1.19)\\ {}_j\tau_{n+1} &:= {}_j\tau_n + \frac{{}_jD_n}{{}_jq_{{}_jX_n^*}} + \sum_{i=0}^{j} t_i && (1.20)\\ X_t &:= {}_jX_{n+1}^* \quad \text{pre} \quad {}_j\tau_n \le t < \min\{\,{}_j\tau_{n+1}, t_{j+1}\} && (1.21)\\ K_j &:= n\\ n &:= n+1 \end{aligned}$$

   pokým ${}_j\tau_n < t_{j+1}$

   ${}_{j+1}X_0^* := {}_jX_{K_j}^*$
   ${}_j\tau_0 := 0$
   $j := j+1$

Algoritmus je založený na rovnakej myšlienke ako konštrukcia redukovaného homogénneho Markovovho ret'azca s počiatočnou podmienkou. Prvý bod algoritmu definuje počiatočnú podmienku ret'azca zľava. Druhý bod má za úlohu generovat' ret'azec pre časy $t \ge 0$. Konštrukcia (1.19) generuje vnorený ret'azec na časovom intervale $[t_j, t_{j+1})$. Vnorený ret'azec nám určuje, do ktorého nasledujúceho bodu skočí generovaný ret'azec. Následne je pomocou (1.20) generovaný čas skoku. Konečne, predpis (1.21) definuje priamo hodnoty generovaného ret'azca. V tomto bode je nutné testovat' i to, či je čas skoku stále v intervale $[t_j, t_{j+1})$. Ak ${}_j\tau_n \ge t_{j+1}$, opakujeme ten istý cyklus pre interval $[t_{j+1}, t_{j+2})$ s novými parametrami (nové intenzity, nové matice prechodu vnoreného ret'azca, ...). Ešte pred prechodom zabezpečíme náväznost' ret'azca a jeho spojitost' sprava pomocou definície ${}_{j+1}X_0^* := {}_jX_{K_j}^*$.

Poznámka 1.4.1. Je treba si uvedomit', že u ret'azca vygenerovaného k nehomogénnemu po častiach konštantnému riadeniu neplatí obecne podmienka (1.2). Tento ret'azec sa totiž v časoch t_k môže opät' dostat' do radikálnych stavov. Uved'me, že vygenerovaný ret'azec však i napriek tomu je Markovov. Dôkaz prenecháme váženému čitateľovi.

1.5 Riadené konečné nehomogénne Markovove reťazce so spojitým časom a ocenením prechodov

Nech je daná množina možných rozhodnutí $\mathbb{Z} = \prod_{s\in L} Z_s$. Ďalej nech je dané pevné po častiach konštantné riadenie reťazca $\mathbf{z}(t) = \{z_s(t) \in Z_s : s \in L, t \geq 0\}$. Keďže je riadenie po častiach konštantné, existuje postupnosť $\{t_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ taká, že

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{z}^k, \qquad t_k \leq t < t_{k+1}, k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Nech máme ďalej dané postupnosti vektorov intenzít výstupu $\{{}_k\mathbf{q} : k \in \mathbb{N}_0\}$ a matíc pravdepodobností prechodu vnoreného reťazca $\{{}_k\mathbf{Q}^* : z \in \mathbb{N}_0\}$ prislúchajúce intervalom, na ktorých je riadenie konštantné. Pre toto riadenie vieme skonštruovať obecný nehomogénny reťazec s počiatočnou podmienkou x_0 charakterizovaný dobami medzi prechodmi (1.19) a diskrétnym reťazcom (1.20) popisujúcim po sebe idúce preskoky. Tento reťazec je obdobou obecného reťazca pre homogénne riadenie. Nech naviac máme k riadeniu reťazca danú postupnosť matíc výnosov z prechodu $\{{}_k\mathbf{R} = \{{}_kr_{ij} : i, j \in L\} : k \in \mathbb{N}_0\}$, kde ${}_kr_{ij}$ je výnos, ktorý prinesie prechod zo stavu i do stavu j, ktorý nastane v časovom intervale $[t_k, t_{k+1})$ s riadením $\mathbf{z}^k$, pričom ${}_kr_{ii}\!=\!0$, a postupnosť vektorov výnosov zo zotrvania $\{{}_k\mathbf{r} = \{{}_kr_i : i \in L\} : k \in \mathbb{N}_0\}$, kde ${}_kr_i\, h$ je výnos zo zotrvania v stave i po kladnú dobu h v časovom intervale $[t_k, t_{k+1})$ s riadením $\mathbf{z}^k$.

Predpokladajme, že sledujeme obecný reťazec do času t, pričom bez újmy na obecnosti môžeme predpokladať, že $t \in [t_K, t_{K+1})$. Pre $0 \leq k \leq K$ si označme ${}_k\phi_i(t)$ celkový čas, počas ktorého je systém v časovom intervale $[t_k, \min\{t_{k+1}, t\})$ v stave i a ${}_k\phi_{ij}(t)$ počet prechodov zo stavu i do stavu j v časovom intervale $[t_k, \min\{t_{k+1}, t\})$. Potom výnos z realizácie reťazca za dobu t sa dá vypočítať ako

$$V(t) = \sum_{i\in L}\sum_{k=0}^{K} {}_kr_i\, {}_k\phi_i(t) + \sum_{i,j\in L}\sum_{k=0}^{K} {}_kr_{ij}\, {}_k\phi_{ij}(t). \tag{1.23}$$

Tento výnos je zrejme náhodná veličina a nás bude zaujímať, podobne ako v podkapitole 1.3, jej podmienená stredná hodnota za podmienky, že reťazec je v čase 0 v stave i, označme si ju $v_i(t)$. Rovnako označíme $\mathbf{v}(t) = \{v_i(t), i \in L\}$. Pre stav $i \in L$ a čas $s \in [t_l, \min\{t_{l+1}, t\})$ také, že intenzita výstupu zo stavu i je v čase s konečná, t.j. ${}_lq_i < \infty$, označme

$${}_l\boldsymbol{\rho} = \{{}_l\rho_i, i \in L\}, \qquad {}_l\rho_i = {}_lr_i + \sum_{j\in L} {}_lr_{ij}\, {}_lq_{ij}.$$

Pre stavy $i \in L$, pre ktoré je intenzita prechodu nekonečná ${}_lq_i = \infty$, dôjde s istotou v čase s k prechodu zo stavu i do iného stavu a tento prechod sa riadi rozdelením $\left\{{}_lq^*_{ij} : j \in L\right\}$. Nás teda bude zaujímať hodnota

$${}_l\boldsymbol{\rho}^* = \{{}_l\rho_i : i \in L\}, \qquad {}_l\rho_i = \sum_{j\in L} {}_lr_{ij}\, {}_lq^*_{ij}.$$

Označme ešte pre $l \in \mathbb{N}_0$

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{\rho}}_i^*(t_l^-) &= 0, && \text{ak } i \in {}_lS,\\
&= \mathbf{e}_i^{\mathsf{T}} \left(\mathbf{I}_{{}_lR} - \mathbf{Q}^*_{{}_lR}\right)^{-1} \boldsymbol{\rho}^*_{{}_lR}, && \text{ak } i \in {}_lR,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{\rho}}_i^*(s) &= \widehat{\rho}_i, && \text{ak } i \in {}_lS, s \in [t_l, t_{l+1}),\\
&= 0, && \text{inak } i \in {}_lR, s \in [t_l, t_{l+1}).
\end{aligned}
$$

K obecnému ret'azcu sme vygenerovali nehomogénny ret'azec (1.21). Na tento ret'azec sa môžeme dívat' ako na sled redukovaných ret'azcov s počiatočnými podmienkami. Zavedieme preto matice pravdepodobností prechodu pre po sebe idúce redukované ret'azce s počiatočnými podmienkami. Pre $l \in \mathbb{N}_0$ máme

$$
{}_l\bar{\boldsymbol{P}}(0) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{{}_lS} & \mathbf{0} \\ \left(\mathbf{I}_{{}_lR} - \mathbf{Q}^*_{{}_lR}\right)^{-1} \mathbf{Q}^*_{{}_lS} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad {}_l\bar{\mathbf{P}}(t) = {}_l\bar{\mathbf{P}}(0)\, {}_l\mathbf{P}(t), \qquad t \geq 0,
$$

kde ${}_l\mathbf{P}(t)$ je matica pravdepodobností prechodu príslušného redukovaného ret'azca. Pre celý neohomogénny ret'azec generovaný pomocou (1.21) zavedieme maticu pravdepodobností prechodu nasledovne

$$
\bar{\boldsymbol{P}}(s,t) = {}_k\bar{\mathbf{P}}(t_{k+1} - s) \left[\prod_{j=k+1}^{l-1} {}_j\bar{\mathbf{P}}(t_{j+1} - t_j)\right] {}_l\bar{\mathbf{P}}(t - t_l), \qquad t \geq s, t \in [t_l, t_{l+1}), s \in [t_k, t_{k+1}).
$$

Pre zjednodušenie značenia zavedieme

$$
\bar{\boldsymbol{P}}(t) = \bar{\boldsymbol{P}}(0,t).
$$

Špeciálne

$$
\bar{\boldsymbol{P}}(t_l^-) = \prod_{j=0}^{l-1} {}_j\bar{\mathbf{P}}(t_{j+1} - t_j).
$$

Za tohto označenia platí obdoba Vety 1.3.1.

Veta 1.5.1. *Nech máme daný nehomogénny Markovov ret'azec $\{X_t : t \geq 0\}$ s počiatočnou podmienkou, ktorý vznikol generáciou (1.21) z po častiach konštantného nehomogénneho riadenia $\mathbf{z}$ definovaného pomocou (1.22). Potom jeho podmienená stredná hodnota $\mathbf{v}(t)$ splňuje*

$$
\mathbf{v}(t) = \int_0^t \bar{\mathbf{P}}(s)\, \bar{\boldsymbol{\rho}}(s)\, \mathrm{d}s + \sum_{k; t_k \leq t} \bar{\mathbf{P}}\left(t_k^-\right) \bar{\boldsymbol{\rho}}^*(t_k^-), \qquad t > 0. \tag{1.24}
$$

Dôkaz. Budeme postupovat' podobne, ako v dôkaze Vety 1.3.1. Vzhľadom na rovnicu (1.23) máme

$$v_{x_0}(t) = \mathrm{E}\left(V(t)|X_{0^-} = x_0\right) = \sum_{i\in L}\sum_{k=0}^{K} {}_k r_i\, \mathrm{E}\left({}_k\phi_i(t)|X_{0^-} = x_0\right) + \sum_{i,j\in L}\sum_{k=0}^{K} {}_k r_{ij}\, \mathrm{E}\left({}_k\phi_{ij}(t)|X_{0^-} = x_0\right).$$

Dopočítame podmienené stredné hodnoty:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left({}_k\phi_i(t)|X_{0^-} = x_0\right) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{\mathrm{P}}\left(X_s = i|X_{0^-} = x_0\right) \mathrm{d}s = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{e}_{x_0}^{\mathsf{T}}\ \bar{\mathbf{P}}\left(s\right)\ \mathbf{e}_i\, \mathrm{d}s \\
\mathrm{E}\left({}_k\phi_{ij}(t)|X_{0^-} = x_0\right) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{P}\left(X_s = i|X_{0^-} = x_0\right)\ {}_k\widehat{q}_{ij}\ I_{\{\,{}_k q_i<\infty\}}\, \mathrm{d}s \\
&\quad + \sum_{l\in_k R} \mathrm{P}\left(X_{t_k^-} = l|X_{0^-} = x_0\right)\ \left[\mathbf{e}_l^{\mathsf{T}}\ \left(\mathbf{I}_R - \mathbf{Q}_R^*\right)^{-1}\ \mathbf{e}_i\right]\ {}_k q_{ij}^* \\
&= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{e}_{x_0}^{\mathsf{T}}\ \bar{\mathbf{P}}\left(s\right)\ \mathbf{e}_i\ {}_k\widehat{q}_{ij}\ I_{\{\,{}_k q_i<\infty\}}\, \mathrm{d}s \\
&\quad + \sum_{l\in_k R} \left[\mathbf{e}_{x_0}^{\mathsf{T}}\ \bar{\mathbf{P}}(t_k^-)\ \mathbf{e}_l\right]\ \left[\mathbf{e}_l^{\mathsf{T}}\ \left(\mathbf{I}_R - \mathbf{Q}_R^*\right)^{-1}\ \mathbf{e}_i\right]\ {}_k q_{ij}^*.
\end{aligned}$$

Prvá rovnost' v prvom riadku platí vzhľadom na ${}_k\phi_i(t) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} I_{\{X_s=i\}}\, \mathrm{d}s$. Prvá rovnost' v druhom riadku platí vzhľadom na Lemma 1.3.1 a vzhľadom k Poznámke 1.3.2. Pre $\mathbf{v}(t)$ teda dostávame

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) &= \sum_{i\in L}\sum_{k=0}^{K} {}_k r_i \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{P}\left(s\right)\ \mathbf{e}_i\, \mathrm{d}s + \sum_{i,j\in L}\sum_{k=0}^{K} {}_k r_{ij}\ \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{P}\left(s\right)\ \mathbf{e}_i\ {}_k\widehat{q}_{ij}\ I_{\{\,{}_k q_i<\infty\}} \mathrm{d}s\right) \\
&\quad + \sum_{i,j\in L}\sum_{k=0}^{K}\sum_{l\in_k R} {}_k r_{ij}\ \left[\bar{\mathbf{P}}(t_k^-)\ \mathbf{e}_l\right]\ \left[\mathbf{e}_l^{\mathsf{T}}\ \left(\mathbf{I}_R - \mathbf{Q}_R^*\right)^{-1}\ \mathbf{e}_i\right]\ {}_k q_{ij}^* \\
&= \int_0^t \bar{\mathbf{P}}\left(s\right)\ \bar{\boldsymbol{\rho}}(s)\, \mathrm{d}s + \sum_{k;t_k\le t} \bar{\mathbf{P}}\left(t_k^-\right)\ \bar{\boldsymbol{\rho}}^*\left(t_k^-\right).
\end{aligned}$$

□

1.6 Howardov algoritmus pre nájdenie optimálneho homogénneho riadenia

Predstavme si teraz situáciu, kedy chceme nájsť optimálne homogénne riadenie, ktoré by nám prinieslo maximálny očakávaný výnos $\mathbf{v}(t)$. Odpoveďou na to, ako takéto riadenie nájsť, je Howardov algoritmus, ktorý si najskôr predstavíme a následne dokážeme, že algoritmus nájde optimálne riadenie. Predtým si však pre zjednodušenie zápisu zavedieme označenie.

Pre potreby algoritmu budeme uvažovať množinu stavov $L = \{1, ..., N\}$ a množinu riadení $\mathbb{Z} = \prod_{i \in L} Z_i$. Algoritmus nám bude generovať postupnosť homogénnych riadení ${}_k\mathbf{z} \in \mathbb{Z}$, pre tieto riadenia označíme ${}_{{}_k\mathbf{z}}\mathbf{Q}$, ${}_{{}_k\mathbf{z}}\boldsymbol{\rho}$, ${}_{{}_k\mathbf{z}}\boldsymbol{\pi}$, ${}_{{}_k\mathbf{z}}\mathbf{b}'$ a ${}_{{}_k\mathbf{z}}c_i$ ako ${}_k\mathbf{Q}$, ${}_k\boldsymbol{\rho}$, ${}_k\boldsymbol{\pi}$, ${}_k\mathbf{b}'$ a ${}_kc_i$. Tento zjednodušený systém značenia budeme využívať i u ostatných symbolov. Ďalej pre dané ${}_k\mathbf{z}$ budeme v algoritme identifikovať množinu stabilných stavov, ktorú označíme ${}_kS$ a množinu radikálnych stavov, ktorú označíme ${}_kR$. Množinu stabilných stavov tvoria stavy, ktoré majú konečnú intenzitu výstupu. Tieto stavy môžu byť trvalé alebo prechodné. Množiny trvalých stabilných stavov budeme značiť ${}_kT_l$, kde $l = 1, ..., {}_km$ a množinu prechodných stavov s konečnou intenzitou ${}_kP$. Naopak množinu radikálnych stavov tvoria stavy s nekonečnou intenzitou výstupu. Bez újmy na obecnosti budeme predpokladať, že stavy sú zoradené od stavov prislúchajúcich do ${}_kT_1$ až ku stavom prislúchajúcim do ${}_kR$ (inak by sme ich preusporiadali), inými slovami môžeme maticu intenzít zapísať nasledovne

$$
{}_k\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} {}_k\mathbf{Q}_{{}_kS} & {}_k\mathbf{Q}_{{}_kR} \\ * & * \end{pmatrix},
$$

kde ${}_k\mathbf{Q}_{{}_kS}$ je matica intenzít prechodu zo stabilných stavov ${}_kS$ do stabilných stavov ${}_kS$, ${}_k\mathbf{Q}_{{}_kR}$ je matica intenzít prechodu zo stabilných stavov ${}_kS$ do radikálnych stavov ${}_kR$ a $*$ sú matice, pre ktoré nezavádzame značenie. Označme vrchnú časť matice ${}_k\mathbf{Q}$ ako

$$
{}_k\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} {}_k\mathbf{Q}_{{}_kS} & {}_k\mathbf{Q}_{{}_kR} \end{pmatrix}.
$$

Ďalej definujeme maticu pravdepodobností okamžitého prechodu

$$
{}_k\mathbf{Q}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{{}_kS} & \mathbf{0}_{{}_kR} \\ {}_k\mathbf{Q}^*_{{}_kS} & {}_k\mathbf{Q}^*_{{}_kR} \end{pmatrix},
$$

kde ${}_k\mathbf{Q}^*_{{}_kS}$ je matica pravdepodobností okamžitého prechodu z radikálnych stavov ${}_kR$ do stabilných stavov ${}_kS$ a ${}_k\mathbf{Q}^*_{{}_kR}$ je matica pravdepodobností okamžitého prechodu z radikálnych stavov ${}_kR$ do radikálnych stavov ${}_kR$. Definujme ešte redukovaný reťazec, ktorý bude obsahovať všetky stavy pôvodného reťazca mimo stavov radikálnych. Maticu intenzít v redukovanom reťazci ${}_k\widehat{\mathbf{Q}}$ definujeme podobne ako v (1.10)

$$
{}_k\widehat{\mathbf{Q}} =_k \mathbf{Q}_{{}_kS} + {}_k\mathbf{Q}_{{}_kR} \left(\mathbf{I}_{{}_kR} - {}_k\mathbf{Q}^*_{{}_kR}\right)^{-1} {}_k\mathbf{Q}^*_{{}_kS}.
$$

Naviac vieme, že množiny trvalých stavov sú uzavreté, čiže platí

$$
{}_k\widehat{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} {}_k\widehat{\mathbf{Q}}_{kT} & \mathbf{0}_{kP} \\ {}_k\widehat{\mathbf{Q}}_{kQ} & {}_k\widehat{\mathbf{Q}}_{kP} \end{pmatrix},
$$

kde ${}_kT = \cup_{l=1}^{km} {}_kT_l$. Zavedieme ešte označenie vektoru priemerného výnosu za jednotku času

$$
{}_k\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} {}_k\boldsymbol{\rho}_{kS} \\ * \end{pmatrix}, \qquad {}_k\boldsymbol{\rho}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{kR} \\ {}_k\boldsymbol{\rho}^*_{kR} \end{pmatrix},
$$

kde podobne ako v (1.12) a (1.13) je

$$
\begin{aligned}
{}_k\rho_i &= {}_kr_i + \sum_{j=1}^{N} {}_kr_{ij}\, {}_kq_{ij}, && i \in {}_kS, \\
{}_k\rho_i^* &= \sum_{j=1}^{N} {}_kr_{ij}\, {}_kq_{ij}^*, && i \in {}_kR.
\end{aligned}
$$

Pomocou vzťahu (1.14) určíme vektor priemerného výnosu za jednotku času pre redukovaný reťazec

$$
{}_k\widehat{\boldsymbol{\rho}} = {}_k\boldsymbol{\rho}_{kS} + {}_k\mathbf{Q}_{kR} \left(\mathbf{I}_{kR} - {}_k\mathbf{Q}^*_{kR}\right)^{-1} {}_k\boldsymbol{\rho}^*_{kR}
$$

a opäť môžeme písať

$$
{}_k\widehat{\boldsymbol{\rho}} = \begin{pmatrix} {}_k\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{kT_1} \\ {}_k\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{kT_2} \\ \vdots \\ {}_k\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{kP} \end{pmatrix}.
$$

Pre množiny radikálnych a stabilných rozhodnutí zavedieme označenie

$$
\begin{aligned}
Z_i^S &= \left\{\gamma_i \in Z_i : {}_{\gamma_i}q_{ij} < \infty \quad \forall j \in L\right\}, && i \in L, \\
Z_i^R &= \left\{\gamma_i \in Z_i : {}_{\gamma_i}q_{ij} = \infty \quad \text{pre aspoň jedno } j \in L\right\}, && i \in L, \\
L_S &= \left\{i \in L : Z_i^S \neq \emptyset\right\}, \\
L_R &= \left\{i \in L : Z_i^R \neq \emptyset\right\}.
\end{aligned}
$$

Ďalej definujeme

$$
\begin{aligned}
{}_kc_i(\varepsilon_i) &= {}_{\varepsilon_i}\rho_i + \sum_{j \in L} {}_{\varepsilon_i}q_{ij}\, {}_kb_j', && i \in L_S, && (1.25) \\
{}_k\mathbf{b}'_{\varepsilon R}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \left(\mathbf{I}_{\varepsilon R} - {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{Q}^*_{\varepsilon R}\right)^{-1} \left[{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\rho}^*_{\varepsilon R} + {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{Q}^*_{\varepsilon S}\, {}_k\mathbf{b}'_{\varepsilon S}\right], && \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{Z}. && (1.26)
\end{aligned}
$$

Pre potreby algoritmu zavádzame ešte maximálne c

$$ {}_k\bar{c} = \max\{\, {}_kc_l :\; l \in \{1, 2, ..., {}_km\}\}. $$

Ďalej definujeme pre ${}_k\mathbf{z}$ množinu vyvolených stavov ako množinu ${}_kT_l$, pre ktorú je ${}_kc_l = {}_k\bar{c}$. Pokiaľ viacero množín ${}_kT_l$ nadobúda maximálne c, volíme množinu vyvolených stavov ako ľubovoľnú z nich. Pre stavy $i \in {}_kT$ zavádzame index bezvýznamnosti

$$ \begin{aligned} {}_k\zeta_j &= 0, \qquad \text{ak } j \text{ je z množiny } {}_k\mathbf{z}\text{-vyvolených stavov,} \\ &= 1, \qquad \text{inak.} \end{aligned} $$

V Howardovom algoritme budeme index bezvýznamnosti používať pri určovaní normalizácie vektora $\mathbf{b}'$. Pre dostatočne veľké $a > 0$ definujeme vektor bezvýznamnosti ako

$$ {}_k\xi_j = -\,{}_k\zeta_j\, a, \qquad i \in {}_kT. $$

Bezvýznamnosť pre stabilné prechodné stavy a radikálne stavy sa bude prenášať cez pravdepodobnosti absorpcie do vyvolených a nevyvolených trvalých stabilných stavov. Formálne budeme bezvýznamnosť definovať v rámci algoritmu.

Howardov algoritmus:

1. Určíme množiny stavov L_R a L_S. Zvolíme počiatočné homogénne riadenie ${}_0\mathbf{z}$. Nastavíme $k = 0$.

2. Pre dané ${}_k\mathbf{z}$ identifikujeme množinu stabilných stavov ${}_kS$ a množinu radikálnych stavov ${}_kR$. Ďalej určíme množiny trvalých stabilných stavov ${}_kT_l$, kde $l = 1, ..., {}_km$ a množinu prechodných stabilných stavov ${}_kP$. Spočítame vektory ${}_k\boldsymbol{\rho}_{{}_kS}$, ${}_k\boldsymbol{\rho}^*_{{}_kR}$, ${}_k\widehat{\boldsymbol{\rho}}$ a maticu ${}_k\widehat{\mathbf{Q}}$.

3. Vypočítame vektor ${}_k\widetilde{\mathbf{b}}'$ nasledovne:

   (i) Pre každé $l = 1, 2, ..., {}_km$ a množinu trvalých stavov ${}_kT_l$ vypočítame sústavu rovníc (1.18), kde namiesto ${}_kb$ píšeme ${}_kb'$

   $$\begin{aligned} {}_kc_l &= \sum_{j \in {}_kT_l} {}_k\widehat{q}_{ij}\, {}_kb'_j + {}_k\widehat{\rho}_i, \qquad i \in {}_kT_l, \\ {}_kb'_j &= 0, \qquad \text{pre jedno ľubovoľne zvolené } j \in {}_kT_l. \end{aligned}$$

   Dostávame časť vektora ${}_k\mathbf{b}'$ prislúchajúcu trvalým stabilným stavom, označíme ${}_k\mathbf{b}'_{{}_kT}$ a konštanty ${}_kc_l$ pre $l = 1, 2, ..., {}_km$. Následne určíme ${}_k\bar{c}$ a množinu vyvolených stavov. Nakoniec položíme

   $${}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{{}_kT} = {}_k\mathbf{b}'_{{}_kT} + {}_k\boldsymbol{\xi}_{{}_kT}, \qquad j \in {}_kT$$

   a opäť označíme časť vektora ${}_k\widetilde{\mathbf{b}}'$ prislúchajúcu trvalým stabilným stavom ako ${}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{{}_kT}$.

   (ii) Pre prechodné stabilné stavy reťazca definujeme

   $${}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{{}_kP} = {}_k\widehat{\mathbf{Q}}^{-1}_{{}_kP} \left({}_k\bar{c}\; \mathbf{1}_{{}_kP} - {}_k\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{{}_kP} - {}_k\widehat{\mathbf{Q}}_{{}_kQ}\; {}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{{}_kT} \right).$$

   Časť vektora ${}_k\widetilde{\mathbf{b}}'$ prislúchajúcu stabilným stavom označíme ako ${}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{{}_kS}$.

   (iii) Pre radikálne stavy reťazca definujeme

   $${}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{{}_kR} = \left(\mathbf{I}_{{}_kR} - {}_k\mathbf{Q}^*_{{}_kR}\right)^{-1} \left[{}_k\boldsymbol{\rho}^*_{{}_kR} + {}_k\mathbf{Q}^*_{{}_kS}\; {}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{{}_kS} \right].$$

4. Pre $i \in L_S$ označíme

   $$\varepsilon_i = \arg \max_{\delta_i \in \mathbb{Z}_i^S} \{ {}_k\widetilde{c}_i(\delta_i) \},$$

   kde

$$ {}_k\widetilde{c}_i(\delta_i) = {}_{\delta_i}\rho_i + \sum_{j\in L} {}_{\delta_i}q_{ij}\, {}_k\widetilde{b}'_j $$

Pre $i \in L_S$, pre ktoré

$$ {}_k\widetilde{c}_i(\boldsymbol{\varepsilon}^i) > {}_k\bar{c} \qquad \text{položíme} \qquad \beta_i = \varepsilon_i $$

a pre $j \neq i$ položíme $\beta_j = {}_kz_j$. Ak $\boldsymbol{\beta} \neq {}_k\mathbf{z}$, tak položíme ${}_{k+1}\mathbf{z} = \boldsymbol{\beta}$, zvýšime $k := k+1$ a vrátime sa do kroku 2. Inak pokračujeme bodom 5.

5. Pre $i \in L_R$ označíme

$$ \boldsymbol{\varepsilon}_i = \arg\max_{\delta_i \in Z_i^R} \left\{ {}_{\delta_i}\rho_i^* + \sum_{j\in L} {}_{\delta_i}q_{ij}^*\ {}_k\widetilde{b}'_j \right\}. $$

Pre $i \in L_R$, pre ktoré je

$$ {}_{\delta_i}\rho_i^* + \sum_{j\in L} {}_{\delta_i}q_{ij}^*\ {}_k\widetilde{b}'_j > {}_k\widetilde{b}'_i \quad \text{položíme } {}_{k+1}z_i = \delta_i $$

a pre ostatné $j \neq i$ položíme ${}_{k+1}z_j = {}_kz_j$. Ak ${}_{k+1}\mathbf{z} \neq {}_k\mathbf{z}$, zvýšime k:=k+1 a vrátime sa do kroku 2. Inak riadenie $\widehat{\mathbf{z}} = {}_{k+1}\mathbf{z}$ nazývame riadenie nájdené Howardovým algoritmom a algoritmus končí.

Poznámka 1.6.1. V bode 3. (i) je nutné si uvedomit', že zvolená normalizácia b'_j nemá vplyv na hodnoty ${}_kc_l$ vzhl'adom na $\sum_{j\in {}_kT_l} {}_k\widehat{q}_{ij} = 0$.

Poznámka 1.6.2. V bode 3. (ii) a (iii) sa dá vidiet', ako sa bezvýznamnost' prenáša do prechodných stabilných a radikálnych stavov. Pre prechodné stabilné stavy máme

$$ \begin{aligned} {}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{{}_kP} &= {}_k\widehat{\mathbf{Q}}^{-1}_{{}_kP} \left({}_k\bar{c}\ \mathbf{1}_{{}_kP} - {}_k\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{{}_kP} - {}_k\widehat{\mathbf{Q}}_{{}_kQ}\ {}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{{}_kT} \right) \\ &= {}_k\widehat{\mathbf{Q}}^{-1}_{{}_kP} \left({}_k\bar{c}\ \mathbf{1}_{{}_kP} - {}_k\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{{}_kP} - {}_k\widehat{\mathbf{Q}}_{{}_kQ}\ {}_k\mathbf{b}'_{{}_kT} \right) - {}_k\widehat{\mathbf{Q}}^{-1}_{{}_kP}\, {}_k\widehat{\mathbf{Q}}_{{}_kQ}\, {}_k\boldsymbol{\xi}_{{}_kT}, \end{aligned} $$

kde

$$ \begin{aligned} {}_k\widehat{\mathbf{Q}}^{-1}_{{}_kP}\, {}_k\widehat{\mathbf{Q}}_{{}_kQ} &= \left[diag\,(\,{}_k\widehat{\mathbf{q}}_{{}_kP}) \left({}_k\widehat{\mathbf{Q}}^*_{{}_kP} - \mathbf{I}_{{}_kP} \right) \right]^{-1} {}_k\widehat{\mathbf{Q}}_{{}_kQ} \\ &= \left({}_k\widehat{\mathbf{Q}}^*_{{}_kP} - \mathbf{I}_{{}_kP} \right)^{-1} [diag\,(\,{}_k\widehat{\mathbf{q}}_{{}_kP})]^{-1}\ {}_k\widehat{\mathbf{Q}}_{{}_kQ} \\ &= \left({}_k\widehat{\mathbf{Q}}^*_{{}_kP} - \mathbf{I}_{{}_kP} \right)^{-1} {}_k\widehat{\mathbf{Q}}^*_{{}_kQ} \end{aligned} $$

sú pravdepodobnosti absorpcie do trvalých stavov. Inými slovami vektor

$$ {}_k\boldsymbol{\xi}_{{}_kP} = {}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{{}_kP} - {}_k\mathbf{b}'_{{}_kP} = \left(\mathbf{I}_{{}_kP} - {}_k\widehat{\mathbf{Q}}^*_{{}_kP}\right)^{-1} {}_k\widehat{\mathbf{Q}}^*_{{}_kQ}\ {}_k\boldsymbol{\xi}_{{}_kT} $$

nám ukazuje ako sa bezvýznamnosti z trvalých stabilných stavov prenášajú. Prechodné stavy, ktoré s kladnou pravdepodobnosťou skončia v bezvýznamných trvalých stabilných stavoch budú bezvýznamné, teda ξ_j bude vysoko záporné. Naopak stavy, ktoré s istotou skončia vo významných stavoch budú opäť významné, teda $\xi_j = 0$. Tieto skutočnosti budú dôležité pre dôkaz, že Howardov algoritmus nájde optimálne riešenie. Obdobne zistíme, že pre radikálne stavy platí

$$ {}_k\boldsymbol{\xi}_{{}_kR} = {}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{{}_kR} - {}_k\mathbf{b}'_{{}_kR} = \left(\mathbf{I}_{{}_kR} - {}_k\mathbf{Q}^*_{{}_kR}\right)^{-1} {}_k\mathbf{Q}^*_{{}_kS}\ {}_k\boldsymbol{\xi}_{{}_kS}. $$

Poznámka 1.6.3. V bode 3. (iii) Howardovho algoritmu využívame inverznú maticu k definicií vektoru ${}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{{}_kP}$. Z Poznámky 1.2.1 vieme, že požadovaná matica je regulárna, ak neexistuje uzavretý reťazec radikálnych stavov. V Howardovom algoritme teda musíme voliť počiatočné riadenie tak, aby táto podmienka bola splnená. Počas generovania riadení ${}_k\mathbf{z}$ nedôjde k tomu, že sa takýto reťazec vytvorí vďaka podmienke v kroku 5, ktorý jediný mení trvalé stabilné stavy na radikálne. Z tvaru maximalizačnej podmienky plynie, že pre po sebe idúce riadenia ${}_k\mathbf{z}$ a ${}_{k+1}\mathbf{z}$ platí

$$ \begin{aligned} {}_{k+1}\boldsymbol{\rho}^* + {}_{k+1}\mathbf{Q}^*_{{}_{k+1}R}\ {}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{{}_{k+1}R} &\geq {}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{{}_{k+1}R} \\ {}_{k+1}\boldsymbol{\rho}^* + \left({}_{k+1}\mathbf{Q}^*_{{}_{k+1}R} - \mathbf{I}_{{}_{k+1}R}\right) {}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{{}_{k+1}R} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} $$

Ďalej nájdeme stacionárne rozdelenie $\pi^*_{{}_{k+1}R}$ vnoreného reťazca ${}_{k+1}\mathbf{z}$-radikálnych stavov, inými slovami nájdeme rozdelenie $\pi^*_{{}_{k+1}R}$, pre ktoré je

$$ \left(\boldsymbol{\pi}^*_{{}_{k+1}R}\right)^{\mathsf{T}} {}_{k+1}\mathbf{Q}^*_{{}_{k+1}R} = \left(\boldsymbol{\pi}^*_{{}_{k+1}R}\right)^{\mathsf{T}}. $$

Rovnicu vynásobíme stacionárnym rozdelením a dostávame

$$ 0 \leq \left(\boldsymbol{\pi}^*_{{}_{k+1}R}\right)^{\mathsf{T}} \left[{}_{k+1}\boldsymbol{\rho}^* + \left({}_{k+1}\mathbf{Q}^*_{{}_{k+1}R} - \mathbf{I}_{{}_{k+1}R}\right) {}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{{}_{k+1}R}\right] = \left(\boldsymbol{\pi}^*_{{}_{k+1}R}\right)^{\mathsf{T}} {}_{k+1}\boldsymbol{\rho}^* < 0. $$

kde posledná nerovnosť predpokladá, že ${}_{k+1}\boldsymbol{\rho}^* < \mathbf{0}$. Pre náš prípad je to logický predpoklad, pretože ${}_{k+1}\boldsymbol{\rho}^*$ interpretujú okamžité výnosy z nákupu/predaja akcií, ktoré sú postihnuté transakčnými nákladmi. Posledná nerovnosť tiež znamená spor s nerovnosťou na ľavej strane, z čoho vyplýva, že pokiaľ je predpoklad ${}_{k+1}\boldsymbol{\rho}^* < \mathbf{0}$ splnený, znamená to, že Howardov algoritmus ani v priebehu nevytvorí riadenie s uzavretým cyklom radikálnych stavov.

Poznámka 1.6.4. Obdobne i v bode 3. (ii) Howardovho algoritmu využívame inverznú maticu k matici ${}_k\widehat{\mathbf{Q}}_{{}_kP}$. Ukážeme, že táto matica je regulárna. Označme ${}_k\widehat{\mathbf{Q}}^*_{{}_kP}$ maticu pravdepodobností prechodu z prechodných stabilných stavov do prechodných stabilných stavov vo vnorenom ret'azci a ${}_k\widehat{\mathbf{q}}_{{}_kP}$ vektor intenzít výstupu z prechodných stavov. Vieme, že uzavretý ret'azec prechodných stavov neexistuje, čiže matica $\mathbf{I}_{{}_kP} -_k \widehat{\mathbf{Q}}^*_{{}_kP}$ je regulárna. Ďalej si uvedomíme, že maticu intenzít sme v (1.7) definovali pomocou matice pravdepodobností prechodu vo vnorenom ret'azci nasledovne

$$
{}_k\widehat{\mathbf{Q}}_{{}_kP} = diag\,(\,{}_k\widehat{\mathbf{q}}_{{}_kP})\,\left({}_k\widehat{\mathbf{Q}}^*_{{}_kP} - \mathbf{I}_{{}_kP}\right),
$$

Vzhl'adom na to, že v Howardovom algoritme sa nikdy nevyskytne riadenie, ktoré by tvorilo uzavretý cyklus radikálnych stavov (viz Poznámka 1.6.3), je matica ${}_k\widehat{\mathbf{Q}}_{{}_kP}$ regulárna.

V nasledujúcej časti budeme dokazovat', že algoritmus nájde opitmálne homogénne riadenie. Dôkaz bude rozdelený do viacerých viet. Kl'účová prvá veta bude pojednávat' o tom, akým spôsobom je možné zvýšit' ${}_{\boldsymbol{\varepsilon}}c$. Druhá veta ukáže, že Howardov algoritmus skončí po konečnom počte krokov. Posledná veta ukáže, že riadenie $\widehat{\mathbf{z}}$ nájdené Howardovým algoritmom je v zmysle očakávaného výnosu $\mathbf{v}(t)$ pre vel'ké t optimálne až na konštantu. Najskôr si však povedzme, čo dané ${}_{\boldsymbol{\varepsilon}}c$ znamená

$$
{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{c} = {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\rho}_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}S} + {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbb{Q}\,{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{b}', \qquad \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{Z}, \tag{1.27}
$$

$$
{}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{c}(\boldsymbol{\varepsilon}) = {}_{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{\rho}_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}S} + {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbb{Q}\,{}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{b}', \qquad \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{Z}. \tag{1.28}
$$

Veta 1.6.1. *Nech máme dve riadenia $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\delta} \in \mathbb{Z}^*$. Potom platí*

$$
{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\pi}^{\mathsf{T}}\,(\,{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{c} - {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{c}(\boldsymbol{\varepsilon})) = {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\pi}^{\mathsf{T}}\,{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{Q}_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}R}\left({}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{b}'_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}R}(\boldsymbol{\varepsilon}) - {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{b}'_{{}_{\varepsilon}R}\right),
$$

kde ${}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{b}'_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}R}(\boldsymbol{\varepsilon})$, ${}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{c}$ a ${}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{c}(\boldsymbol{\varepsilon})$ sú definované podl'a (1.26), (1.27) a (1.28), a ${}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\pi}$ je stacionárne rozdelenie v $\boldsymbol{\varepsilon}$-redukovanom ret'azci.

Dôkaz. Počítame

$$
\begin{aligned}
{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\pi}^{\mathsf{T}}\,{}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{c}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\pi}^{\mathsf{T}}\left({}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\rho}_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}S} + {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbb{Q}\,{}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{b}'\right) = {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\pi}^{\mathsf{T}}\left({}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\rho}_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}S} + {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{Q}_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}S}\,{}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{b}'_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}S} + {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{Q}_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}R}\,{}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{b}'_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}R}\right) \\
&= {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\pi}^{\mathsf{T}}\left({}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\widehat{\boldsymbol{\rho}} + {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\widehat{\mathbf{Q}}\,{}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{b}'_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}S} + {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{Q}_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}R}\,{}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{b}'_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}R} - {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{Q}_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}R}\left(\mathbf{I}_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}R} - {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{Q}^*_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}R}\right)^{-1}\left[{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\rho}^*_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}R} + {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{Q}^*_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}R}\,{}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{b}'_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}S}\right]\right) \\
&= {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\pi}^{\mathsf{T}}\left({}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\widehat{\boldsymbol{\rho}} + {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\widehat{\mathbf{Q}}\,{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{b}'_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}S}\right) + {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\pi}^{\mathsf{T}}\,{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{Q}_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}R}\left({}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{b}'_{{}_{\varepsilon}R} - {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{b}'_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}R}(\boldsymbol{\varepsilon})\right).
\end{aligned}
$$

Ďalej máme

$$
\begin{aligned}
{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{c} = {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\rho}_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}S} + {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbb{Q}\,{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{b}' &= {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\rho}_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}S} + {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{Q}_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}S}\,{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{b}'_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}S} + {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{Q}_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}R}\left(\mathbf{I}_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}R} - {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{Q}^*_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}R}\right)^{-1}\left[{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\rho}^*_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}R} + {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{Q}^*_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}R}\,{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{b}'_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}S}\right] \\
&= {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\widehat{\boldsymbol{\rho}} + {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\widehat{\mathbf{Q}}\,{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{b}'_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}S}.
\end{aligned}
$$

Spojením týchto dvoch rovníc dostávame

$$
{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\pi}^{\mathsf{T}}\,{}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{c}(\boldsymbol{\varepsilon}) = {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\pi}^{\mathsf{T}}\,{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{c} + {}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\pi}^{\mathsf{T}}\,{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{Q}_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}R}\left({}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{b}'_{{}_{\varepsilon}R} - {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{b}'_{{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}R}(\boldsymbol{\varepsilon})\right),
$$

z čoho už jednoduchou úpravou dostávame tvrdenie. □

Poznámka 1.6.5. Pre dôkaz Howardovho algoritmu budeme potrebovať vedieť, ako sa bezvýznamnosť prejavuje v hodnote $\widetilde{c}_i(\boldsymbol{\varepsilon})$. Počítajme teda

$$\begin{aligned}{}_k\widetilde{c}_i(\delta_i) &= {}_{\delta_i}\rho_i + \sum_{j\in L} {}_{\delta_i}q_{ij}\, {}_k\widetilde{b}'_j = {}_{\delta_i}\rho_i + \sum_{j\in L} {}_{\delta_i}q_{ij}\, {}_kb'_j + \sum_{j\in L} {}_{\delta_i}q_{ij} \left({}_k\widetilde{b}'_j - {}_kb'_j \right) \\ &= {}_kc_i(\delta_i) + \sum_{j\in L} {}_{\delta_i}q_{ij}\, {}_k\xi_j .\end{aligned}$$

Poznámka 1.6.6. Rozoberme ešte podmienku v kroku 5. Ak nastane zmena je

$${}_{\delta_i}\rho^*_i + \sum_{j\in L} {}_{\delta_i}q^*_{ij}\ {}_k\widetilde{b}'_j > {}_k\widetilde{b}'_i .$$

V maticovej podobe píšeme

$${}_{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{\rho}^*_{\boldsymbol{\delta}R} + {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{Q}^*_{\boldsymbol{\delta}S}\, {}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{\boldsymbol{\delta}S} + {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{Q}^*_{\boldsymbol{\delta}R}\, {}_k\mathbf{b}'_{\boldsymbol{\delta}R} \geq {}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{\boldsymbol{\delta}R},$$

čo poľahky upravíme na tvar

$${}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{\boldsymbol{\delta}R} \leq \left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\delta}R}\, {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{Q}^*_{\boldsymbol{\delta}R}\right)^{-1} \left[{}_{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{\rho}^*_{\boldsymbol{\delta}R} + {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{Q}^*_{\boldsymbol{\delta}S}\, {}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{\boldsymbol{\delta}S} \right].$$

Vzhľadom na to, že matice $\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\delta}R}\, {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{Q}^*_{\boldsymbol{\delta}R}\right)^{-1}$ a ${}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{Q}^*_{\boldsymbol{\delta}S}$ sú nezáporné, tak nám stačí, aby platilo ${}_{\boldsymbol{\delta}}\widetilde{\mathbf{b}}'_{\boldsymbol{\delta}S} \geq {}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{\boldsymbol{\delta}S}$ k tomu, aby

$${}_{\boldsymbol{\delta}}\widetilde{\mathbf{b}}'_{\boldsymbol{\delta}R} = \left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\delta}R}\, {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{Q}^*_{\boldsymbol{\delta}R}\right)^{-1} \left[{}_{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{\rho}^*_{\boldsymbol{\delta}R} + {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{Q}^*_{\boldsymbol{\delta}S}\, {}_{\boldsymbol{\delta}}\widetilde{\mathbf{b}}'_{\boldsymbol{\delta}S} \right] \geq {}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{\boldsymbol{\delta}R}.$$

V našej úvahe pokračujeme ďalej na prechodné stabilné stavy. Keďže matica ${}_{\boldsymbol{\delta}}\widehat{\mathbf{Q}}_{\boldsymbol{\delta}P}$ je nekladná a matica ${}_{\boldsymbol{\delta}}\widehat{\mathbf{Q}}_{\boldsymbol{\delta}Q}$ je nezáporná, stačí nám, aby platilo ${}_{\boldsymbol{\delta}}\widetilde{\mathbf{b}}'_{\boldsymbol{\delta}T} \geq {}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{\boldsymbol{\delta}T}$ k tomu, aby

$${}_{\boldsymbol{\delta}}\widetilde{\mathbf{b}}'_{\boldsymbol{\delta}P} = {}_{\boldsymbol{\delta}}\widehat{\mathbf{Q}}^{-1}_{\boldsymbol{\delta}P} \left({}_{\boldsymbol{\delta}}c\, \mathbf{1}_{\boldsymbol{\delta}P} - {}_{\boldsymbol{\delta}}\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{\delta}P} - {}_{\boldsymbol{\delta}}\widetilde{\mathbf{b}}'_{\boldsymbol{\delta}T} \right) \geq {}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{\boldsymbol{\delta}P}.$$

Pred dôkazom druhej vety sme nútení zaviesť dodatočný predpoklad neexistencie netriviálnej izolovanej množiny stavov. Predpokladajme teda, že ku každej netriviálnej uzavretej množine stavov $A \subset L$ existuje stav $i \in A$ a rozhodnutie $\delta_i \in Z_i$ také, že naruší uzavretosť množiny A skrz stav i, teda existuje $j \in L \backslash A$ také, že ${}_{\delta_i}q_{ij} > 0$.

Veta 1.6.2. *Howardov algoritmus skončí po konečne veľa krokoch.*

Dôkaz. Dôkaz bude predpokladať práve jednu zmenu v reťazci. Pre viacero zmien naraz prenecháme dôkaz na váženého čitateľa. Dôkaz rozdelíme na tri časti. Prvá časť ukáže, že ak nastane zmena v ${}_k\mathbf{z}$-vyvolenom stave, ktorý zmení rozhodnutie na stabilné tak ${}_{k+1}\bar{c} - {}_kc > 0$. Druhá časť sa bude venovať ostatným zmenám na stabilné rozhodnutia. Tretia časť dôkazu sa bude venovať situácií, keď nastane zmena na radikálne rozhodnutie. Vďaka zakomponovaniu bezvýznamnosti do rozhodovania sa nám nemôže stať, že by sa vyvolený stav stal bezvýznamným alebo čiastočne významným. Inými slovami, množina vyvolených stavov sa nezmenšuje.

a) Nech teda nastane zmena v ${}_k\mathbf{z}$-vyvolenom stave i, teda ${}_{k+1}z_i \neq {}_k z_i$. Prvý prípad nastáva v 4. kroku algoritmu. Z neho vyplýva, že existuje $\delta_i \in Z_i^S$ také, že ${}_k\widetilde{c}_i(\delta_i) > {}_k\bar{c}$. Keďže i je ${}_k\mathbf{z}$-vyvolený stav platí vzhľadom k Poznámke 1.6.5 a definícií bezvýznamnosti ${}_k\widetilde{c}_i(\delta_i) = {}_k c_i(\delta_i)$, čiže ${}_k c_i(\delta_i) > {}_k\bar{c}$. Zaveďme označenie ${}_{k+1}\mathbf{z}$ vyvolenej množiny ${}_{k+1}V$. Potom vzhľadom k Vete 1.6.1, kde je pravá strana nulová, pretože na ${}_{k+1}\mathbf{R}$ nedošlo k žiadnej zmene rozhodnutia, počítame

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{j \in {}_{k+1}T} {}_{k+1}\pi_j \left({}_{k+1}c_j - {}_k c_j({}_{k+1}z_j)\right) = \sum_{j \in {}_{k+1}V} {}_{k+1}\pi_j \left({}_{k+1}\bar{c} - {}_k c_j({}_{k+1}z_j)\right) \\
&= {}_{k+1}\pi_i \left({}_k\bar{c} - {}_k c_i(\delta_i)\right) + \left({}_{k+1}\bar{c} - {}_k\bar{c}\right) \sum_{j \in {}_{k+1}V} {}_{k+1}\pi_j .
\end{aligned}
$$

kde druhá rovnosť vychádza z toho, že mimo vyvolených stavov neprebehla žiadna zmena. Tretia rovnosť vychádza zo vzťahu ${}_k c_j({}_{k+1}z_j) = {}_k c_j({}_k z_j) = {}_k\bar{c}$ pre $j \neq i$. Z poslednej rovnosti je už vidieť, že ${}_{k+1}\bar{c} - {}_k\bar{c} > 0$.

b) Túto časť dôkazu prenecháme na váženého čitateľa. Idea je, že stav, ktorý zmení rozhodnutie na stabilné a nie je vyvolený sa musí zákonite naviazať na vyvolené stavy a stať sa stavom prechodným stabilným. Táto zmena zachováva ${}_k\bar{c}$ na rovnakej výške, a teda musíme ukázať, že zmena zvyšuje ${}_k\widetilde{\mathbf{b}}'$.

c) Ak nastane zmena na radikálne rozhodnutie, musí nastať v kroku 5, teda ${}_k\bar{c}$ sa nemení. Nech teda nastane v bode i. Je nutné si uvedomiť, že na ${}_{k+1}T$ nenastanú žiadne zmeny, a teda platí

$$
{}_{k+1}\widetilde{\mathbf{b}}'_{{}_{k+1}T} = {}_k\widetilde{\mathbf{b}}'_{{}_{k+1}T}.
$$

To nám spolu s Poznámkou 1.6.6 dáva, že

$$
{}_{k+1}\widetilde{\mathbf{b}}' \geq {}_k\widetilde{\mathbf{b}}'.
$$

Navyše podmienka v 5. kroku algoritmu nám dáva ostrú nerovnosť v jednej zložke.

Ukázali sme, že každá zmena zvyšuje buď ${}_k\bar{c}$ alebo ak ${}_k\bar{c} = {}_{k+1}\bar{c}$, tak ${}_{k+1}\widetilde{\mathbf{b}}' \geq {}_k\widetilde{\mathbf{b}}'$, pričom v jednej zložke je nerovnosť ostrá. To nám vzhľadom na konečnosť množiny stavov L dáva tvrdenie. □

Zaveďme označenie pre optimálne riadenie $\widehat{\mathbf{z}}$

$$
\begin{aligned}
{}_{\widehat{\mathbf{z}}}\bar{c} &= \widehat{c}, \\
{}_{\widehat{\mathbf{z}}}\widetilde{\mathbf{b}}' &= \widehat{\mathbf{b}}'.
\end{aligned}
$$

Poznámka 1.6.7. Z konštrukcie algoritmu vyplývajú 2 základné nerovnosti. Podmienka ${}_k\widetilde{c}(\varepsilon_i) > {}_k\bar{c}$ v 4. kroku algoritmu nám zabezpečí, že pre ľubovoľné $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}$ platí nerovnosť

$$ {}_{\mathbf{z}}\boldsymbol{\rho}_{{}_{\mathbf{z}}S} + {}_{\mathbf{z}}\mathbb{Q}\,\widehat{\mathbf{b}}' \leq \mathbf{1}_{{}_{\mathbf{z}}S}\,\widehat{c}. $$

Podmienka v 5. kroku algoritmu nám ďalej pre ľubovoľné $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}$ dáva

$$ {}_{\mathbf{z}}\boldsymbol{\rho}^* + {}_{\mathbf{z}}\mathbf{Q}^*\,\widetilde{\mathbf{b}}' \leq \widehat{\mathbf{b}}'. $$

Veta 1.6.3. *Riadenie nájdené Howardovým algoritmom $\widehat{\mathbf{z}}$ je optimálne medzi homogénnymi riadeniami až na konštantu.*

Dôkaz. Vezmime si ľubovoľné riadenie $\mathbf{z}$. Pre riadenie $\mathbf{z}$ existuje množina stabilných stavov ${}_{\mathbf{z}}S$ a radikálnych stavov ${}_{\mathbf{z}}R$. Zadefinujeme si vektorovú funkciu

$$ {}_{\mathbf{z}}\mathbf{h}(t) = {}_{\mathbf{z}}\mathbf{v}(t) + {}_{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{P}}(t)\,\widehat{\mathbf{b}}' - \mathbf{1}_L\,\widehat{\mathbf{c}}\,t, $$

kde ${}_{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{P}}(t)$ je matica pravdepodobností prechodu redukovaného Markovovho reťazca s počiatočnou podmienkou generovaného homogénnym riadením $\mathbf{z}$. Matica pravdepodobností prechodu je definovaná pomocou vzťahu (1.15). V prvom rade budeme chcieť zistiť, že táto funkcia je nerastúca. Bez újmy na obecnosti predpokladajme, že stavy sú zoradené od ${}_{\mathbf{z}}S$ po ${}_{\mathbf{z}}R$. Počítajme

$$ \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\,{}_{\mathbf{z}}\mathbf{h}(t)}{dt} &= \frac{\mathrm{d}\,{}_{\mathbf{z}}\mathbf{v}(t)}{dt} + \frac{\mathrm{d}\,{}_{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{P}}(t)}{dt}\,\widehat{\mathbf{b}}' - \mathbf{1}_L\,\widehat{\mathbf{c}} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{dt}\int_0^t {}_{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{P}}(s)\,\mathrm{d}s\,{}_{\mathbf{z}}\bar{\boldsymbol{\rho}} + {}_{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{P}}(0)\,{}_{\mathbf{z}}\mathbf{P}(t)\begin{pmatrix} {}_{\mathbf{z}}\widehat{\mathbf{Q}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\widehat{\mathbf{b}}' - \mathbf{1}_L\,\widehat{\mathbf{c}} \\ &= {}_{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{P}}(t)\left[\begin{pmatrix} {}_{\mathbf{z}}\bar{\boldsymbol{\rho}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}_{\mathbf{z}}\widehat{\mathbf{Q}}\,\widehat{\mathbf{b}}'_{{}_{\mathbf{z}}S} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} - \mathbf{1}_L\,\widehat{\mathbf{c}}\right] \leq \mathbf{0}, \end{aligned} $$

kde druhá rovnosť plynie z Vety 1.3.1 a z Kolmogorových diferenciálnych rovníc - Veta 1.1.5. Tretia rovnosť plynie z faktu, že ${}_{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{P}}(t)\,\mathbf{1}_L\,\widehat{\mathbf{c}} = \mathbf{1}_L\,\widehat{\mathbf{c}}$ vzhľadom na stochastickosť matice ${}_{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{P}}(t)$. Konečne, posledná nerovnosť vychádza zo 4. kroku Howardovho algoritmu a skutočnosti, že $\widehat{\mathbf{z}}$ je výsledkom Howardovho algoritmu. Túto nerovnosť overíme. Vyjdeme z prvej nerovnosti v Poznámke 1.6.7 a počítame

$$ \begin{aligned} \mathbf{1}_{{}_{\mathbf{z}}S}\,\widehat{c} &\geq {}_{\mathbf{z}}\boldsymbol{\rho}_{{}_{\mathbf{z}}S} + {}_{\mathbf{z}}\mathbb{Q}\,\widehat{\mathbf{b}}' = {}_{\mathbf{z}}\boldsymbol{\rho}_{{}_{\mathbf{z}}S} + \left(\, {}_{\mathbf{z}}\mathbf{Q}_{{}_{\mathbf{z}}S} \,\middle|\, {}_{\mathbf{z}}\mathbf{Q}_{{}_{\mathbf{z}}R} \,\right)\widehat{\mathbf{b}}' \\ &\geq {}_{\mathbf{z}}\boldsymbol{\rho}_{{}_{\mathbf{z}}S} + {}_{\mathbf{z}}\mathbf{Q}_{{}_{\mathbf{z}}S}\,\widehat{\mathbf{b}}'_{{}_{\mathbf{z}}S} + {}_{\mathbf{z}}\mathbf{Q}_{{}_{\mathbf{z}}R}\,\widehat{\mathbf{b}}'_{{}_{\mathbf{z}}R} = {}_{\mathbf{z}}\widehat{\boldsymbol{\rho}} + {}_{\mathbf{z}}\widehat{\mathbf{Q}}\,\widehat{\mathbf{b}}'_{{}_{\mathbf{z}}S}, \end{aligned} $$

kde posledná rovnosť vychádza z definovania $\widehat{\mathbf{b}}'_{{}_{\mathbf{z}}R}$ v 3. kroku algoritmu a definície $\widehat{\boldsymbol{\rho}}$ a $\widehat{\mathbf{Q}}$.

Ukázali sme teda, že podmienený stredný výnos ${}_{\mathbf{z}}\mathbf{v}(t)$ je na intervale $[0,\infty)$ nerastúcou funkciou. Z predchádzajúcej teórie vieme, že v redukovanom Markovovom reťazci s počiatočnou podmienkou môže nastať skok s nekonečnou intenzitou v počiatočnom bode (a nikde inde), a preto musíme počiatočný stav ošetriť zvlášť. Označme

$$\Delta\,{}_{\mathbf{z}}\mathbf{h}(0) = {}_{\mathbf{z}}\mathbf{h}(0) - {}_{\mathbf{z}}\mathbf{h}(0^-)$$

a počítajme

$$\begin{aligned}
\Delta\,{}_{\mathbf{z}}\mathbf{h}(0) &= \Delta\,{}_{\mathbf{z}}\mathbf{v}(0) + \Delta\,{}_{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{P}}(0)\,\widehat{\mathbf{b}}' - \mathbf{1}_L\,\widehat{c}\,\Delta t = {}_{\mathbf{z}}\mathbf{v}(0) + \left({}_{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{P}}(0) - \mathbf{I}_L\right)\widehat{\mathbf{b}}' \\
&= {}_{\mathbf{z}}\bar{\boldsymbol{\rho}}^* + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \left(\mathbf{I}_{\mathbf{zR}} - {}_{\mathbf{z}}\mathbf{Q}^*_{\mathbf{z}R}\right)^{-1}\,{}_{\mathbf{z}}\mathbf{Q}^*_{\mathbf{z}S} & -\mathbf{I}_{\mathbf{z}R} \end{pmatrix}\widehat{\mathbf{b}}' \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \left(\mathbf{I}_{\mathbf{z}R} - {}_{\mathbf{z}}\mathbf{Q}^*_{\mathbf{z}R}\right)^{-1}\,{}_{\mathbf{z}}\boldsymbol{\rho}^*_{\mathbf{z}R} + \left(\mathbf{I}_{\mathbf{z}R} - {}_{\mathbf{z}}\mathbf{Q}^*_{\mathbf{z}R}\right)^{-1}\,{}_{\mathbf{z}}\mathbf{Q}^*_{\mathbf{z}S}\,\widehat{\mathbf{b}}'_{\mathbf{z}S} - \widehat{\mathbf{b}}'_{\mathbf{z}R} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \left(\mathbf{I}_{\mathbf{z}R} - {}_{\mathbf{z}}\mathbf{Q}^*_{\mathbf{z}R}\right)^{-1}\left[{}_{\mathbf{z}}\boldsymbol{\rho}^*_{\mathbf{z}R} + {}_{\mathbf{z}}\mathbf{Q}^*_{\mathbf{z}S}\,\widehat{\mathbf{b}}'_{\mathbf{z}S}\right] - \widehat{\mathbf{b}}'_{\mathbf{z}R} \end{pmatrix} \le \mathbf{0},
\end{aligned}$$

kde tretia rovnosť vychádza z Vety 1.3.1 a definície matíc ${}_{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{P}}(t)$. Nerovnosť vychádza z 5. kroku algoritmu a skutočnosti, že riadenie $\widehat{z}$ je výsledkom Howardovho algoritmu. Opäť si túto skutočnosť dokážeme. Vyjdeme z druhej nerovnosti Poznámke 1.6.7 a počítame

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{b}}'_{\mathbf{z}R} &\ge {}_{\mathbf{z}}\boldsymbol{\rho}^*_{\mathbf{z}R} + \left({}_{\mathbf{z}}\mathbf{Q}^*_{\mathbf{z}S} \,\middle|\, {}_{\mathbf{z}}\mathbf{Q}^*_{\mathbf{z}R}\right)\widehat{\mathbf{b}}' = {}_{\mathbf{z}}\boldsymbol{\rho}^*_{\mathbf{z}R} + {}_{\mathbf{z}}\mathbf{Q}^*_{\mathbf{z}S}\,\widehat{\mathbf{b}}'_{\mathbf{z}S} + {}_{\mathbf{z}}\mathbf{Q}^*_{\mathbf{z}R}\,\widehat{\mathbf{b}}'_{\mathbf{z}R} \\
&\ge \left(\mathbf{I}_{\mathbf{z}R} - {}_{\mathbf{z}}\mathbf{Q}^*_{\mathbf{z}R}\right)^{-1}\left[{}_{\mathbf{z}}\boldsymbol{\rho}^*_{\mathbf{z}R} + {}_{\mathbf{z}}\mathbf{Q}^*_{\mathbf{z}S}\,\widehat{\mathbf{b}}'_{\mathbf{z}S}\right].
\end{aligned}$$

Dokázali sme, že funkcia ${}_{\mathbf{z}}\mathbf{h}(t)$ je nerastúca v t. V špeciálnom prípade $\mathbf{z} = \widehat{\mathbf{z}}$ je funkcia konštantná. Z definície vektoru $\widehat{\mathbf{b}}'_{\widehat{R}}$ priamo plynie konštantnosť v počiatočnom bode a z definície $\widehat{\mathbf{b}}'_{\widehat{P}}$ a Vety 1.6.2, v ktorej sa odvodilo, že v optimálnom riadení sú všetky stavy vyvolené, plynie konštantnosť na intervale $[0,\infty)$. Nerastúcosť funkcie ${}_{\mathbf{z}}\mathbf{h}(t)$ využijeme pre odhad rozdielu medzi ${}_{\mathbf{z}}\mathbf{v}(t)$ a $\widehat{\mathbf{v}}(t)$

$$\begin{aligned}
{}_{\mathbf{z}}\mathbf{v}(t) + {}_{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{P}}(t)\,\widehat{\mathbf{b}}' - \mathbf{1}_L\,\widehat{\mathbf{c}}\,t = {}_{\mathbf{z}}\mathbf{h}(t) \le {}_{\mathbf{z}}\mathbf{h}(0^-) = {}_{\mathbf{z}}\mathbf{v}(0^-) + \mathbf{I}_L\,\widehat{\mathbf{b}}' = \widehat{\mathbf{b}}' = \widehat{\mathbf{h}}(0^-) \\
= \widehat{\mathbf{h}}(t) = \widehat{\mathbf{v}}(t) + \widehat{\bar{\mathbf{P}}}(t)\,\widehat{\mathbf{b}}' - \mathbf{1}_L\,\widehat{c}\,t,
\end{aligned}$$

teda

$$\widehat{\mathbf{v}}(t) \ge {}_{\mathbf{z}}\mathbf{v}(t) + \left[{}_{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{P}}(t) - \widehat{\bar{\mathbf{P}}}(t)\right]\widehat{\mathbf{b}}' = {}_{\mathbf{z}}\mathbf{v}(t) + o(1).$$

□

Poznámka 1.6.8. Funkcia $\mathbf{h}(t)$ je nerastúca v t i pokiaľ uvažujeme po častiach konštantné nehomogénne riadenia. Dôsledkom toho je, že pre po častiach konštantné riadenie $\mathbf{z}$ platí

$$\widehat{\mathbf{v}}(t) \geq {}_{\mathbf{z}}\mathbf{v}(t) + o(1),$$

kde $\widehat{\mathbf{v}}(t)$ je očakávaný výnos pre homogénne riadenie nájdené Howardovým algoritmom.

Kapitola 2

Optimálna obchodná stratégia

Cieľom druhej kapitoly je nájsť optimálne riadenie investorovho portfólia. Kapitola sa na úvod zaoberá obecnou teóriou stochastického kalkulu a vyslovením Itôovej formule. Pokračujeme konštrukciou spojitého modelu, ktorý je postavený na viacrozmernom Brownovom pohybe. Zavedením operácií nákupu a predaja sa model zdynamizuje a odvodia sa základné vzťahy. Spojitý model je následne aproximovaný modelom diskrétnym, v ktorom už môže byť použitý Howardov algoritmus pre nájdenie optimálneho riadenia.

2.1 Stochastický diferenciál a Itôova formula

V tejto kapitole budeme obecne pracovať s náhodným procesom $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ definovanom na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Chcel by som upozorniť, že z praktických dôvodov sme nútení k zmene značenia časovej zložky pre náhodné procesy, kedy namiesto doteraz užívaného označenia X_t pre náhodnú veličinu v čase t budeme užívať označenia $X(t)$. Obdobne ako sme v Definícií 1.1.3 zadefinovali spojitosť náhodného procesu, zadefinujeme náhodné procesy s konečnou variáciou.

Definícia 2.1.1. Hovoríme, že náhodný proces X má *konečnú variáciu*, ak pre všetky jeho trajektórie $X(\omega)$ platí, že

$$X^v(t, w) = \sup_{\delta(t)} V^{\Delta(t)}\left(X(\omega)\right) < \infty, \quad \Delta(t) = \{0 = t_0 < .... < t_k = t\},$$

kde $\Delta(t)$ obieha všetky konečné delenia intervalu $[0, t]$ a kde pre konkrétne delenie $\Delta(t) = \{0 = t_0 < .... < t_k = t\}$ je funkcia $V^{\Delta(t)}$ definovaná nasledovne

$$V^{\Delta(t)}\left(X(\omega)\right) = \sum_{j=1}^{k} |X(t_j, \omega) - X(t_{j-1}, \omega)|.$$

Lemma 2.1.1. *Nech X je spojitý náhodný proces s konečnou variáciou, potom X^v je spojitý neklesajúci náhodný proces.*

Dôkaz. Viz str. 232, Lemma 1.2.1. v [4]. $\square$

Poznámka 2.1.1. Pre spojitý náhodný proces X s konečnou variáciou budeme proces X^v nazývať *variáciou* procesu X.

Definícia 2.1.2. Hovoríme, že náhodný proces X má *konečnú kvadratickú variáciu*, ak existuje spojitý náhodný proces $\{\langle X\rangle(t), t \geq 0\}$ taký, že

$$\langle X\rangle(t) = \operatorname*{plim}_n Q^{\Delta_n(t)}(X), \qquad \forall|\Delta_n(t)| \to 0, \quad t \geq 0,$$

kde $Q^{\Delta_n(t)}(X) = \sum_{j=1}^{k_n} |X(t_j^n) - X(t_{j-1}^n)|^2$. Tento proces budeme nazývať *kvadratická variácia* náhodného procesu X.

Definícia 2.1.3. Nech L je lineárny priestor náhodných procesov s konečnou variáciou a nech $X, Y \in L$. Na L definujeme bilineárnu formu $\langle X, Y\rangle$ predpisom

$$\langle X, Y\rangle(t) = \frac{1}{4}\left(\langle X+Y\rangle(t) - \langle X+Y\rangle(t)\right) = \operatorname*{plim}_n Q^{\Delta_n(t)}(X, Y), \quad t \geq 0,$$

kde $Q^{\Delta(t)}(X, Y)$ je definovaná ako

$$\sum_{j=1}^{k} \left(X(t_j) - X(t_{j-1})\right)\left(Y(t_j) - Y(t_{j-1})\right) = \frac{1}{4}\left(Q^{\Delta(t)}(X+Y) - Q^{\Delta(t)}(X-Y)\right).$$

Tento proces budeme nazývať *kovariancia* náhodného procesu X.

Simulácia pohybu cien akcií bude konštruovaná na základe informácie, ktorá je k dispozícií. Matematickou predstavou časového vývoja informácií vzťahujúcich sa k určitému predmetu skúmania vyjadruje neklesajúca sústava javových polí $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$. $\mathcal{F}_t$ je interpretované ako súbor náhodných javov, o ktorých je v čase t známe, či nastali alebo nenastali. Náhodné javy z $\mathcal{F}_t$ ide stručne nazývať javy do doby t. Hovoríme tiež, že $\mathcal{F}$ definuje *časovú dynamiku* v množine náhodných javov. Tieto skutočnosti si matematicky formalizujme súborom definícií z [4]. Uvedieme len základné definície a prípadných záujemcov odkážeme na náhľad do prislúchajúcej literatúry.

Definícia 2.1.4. Hovoríme, že $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ je *filtráciou* pravdepodobnostného priestoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ak

(i) $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ je σ-algebra pre každé $t \geq 0$,

(ii) $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ kedykoľvek je $s \leq t$.

Pre $t = \infty$ označíme $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\cup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\right)$. Nech je X náhodný proces na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Jemu prislúchajúce filtrácie

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\left(X(s), s \leq t\right), \qquad \mathcal{F}_\infty = \sigma\left(X(t), t \leq 0\right),$$

budeme nazývať *kanonické filtrácie*.

Definícia 2.1.5. Nech na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ existuje filtrácia $\{\mathcal{F}_t\}$. Náhodný proces X nazývame $\mathcal{F}_t$ *-adaptívny proces*, ak $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$ pre všetky $t \geq 0$.

Definícia 2.1.6. Stochastický proces nazývame $\mathcal{F}_t$ *-progresívny*, ak

$$(s, \omega) \to X(s, \omega) \quad \text{je} \quad \mathcal{B}\,[0, t] \otimes \mathcal{F}_t \to \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ - merateľná mapa} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Označíme $\mathrm{PM}(\mathcal{F}_t)$ množinu všetkých $\mathcal{F}_t$-progresívnych procesov.

Poznámka 2.1.2. V definícií integrálu podľa procesu budeme pracovať s procesmi s konečnou variáciou. Označme si teda

$$\mathrm{CFV}(\mathcal{F}_t) = \left\{B \text{ spojitý } \mathcal{F}_t \text{ -adaptívny proces s } B^v(t) < \infty\, \forall t \in \mathbb{R}^+, B(0) = 0\right\}.$$

Definícia 2.1.7. Nech máme náhodné procesy $G \in \mathrm{PM}(\mathcal{F}_t)$ a $B \in \mathrm{CFV}(\mathcal{F}_t)$. Označme

$$T(G, B) = \left\{\omega \in \Omega, \int_0^t |G(s, \omega)| \,\mathrm{d}B^v(s, \omega) < \infty \quad \forall t \geq 0\right\},$$

$$\left(\int_0^t G(s) \,\mathrm{d}B(s)\right)(\omega) = I_{T(G,B)} \int_0^t G(s, \omega) \,\mathrm{d}B(s, \omega), \quad (t, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega.$$

Proces $\int G \,\mathrm{d}B = \left(\int_0^t G(s) \,\mathrm{d}B(s), t \geq 0\right)$ budeme nazývať *integrál procesu G vzhľadom k procesu B*.

Pre náš prípad bude nutné naviazať na predchádzajúcu definíciu a uviesť integrovanie vzhľadom k procesom, ktoré sú lokálnymi $\mathcal{F}_t$ martingalmi. V tomto bode by sme prípadných záujemcov odkázali na publikáciu [4], v ktorej sú podrobne zadefinované lokálne martingaly. My budeme predpokladať znalosť tohto pojmu a označíme si

$$\mathrm{CM}_{loc}(\mathcal{F}_t) = \{ \text{ spojité lokálne } \mathcal{F}_t \text{ martingaly } M \text{ s } M(0) = 0 \text{ skoro určite } \},$$
$$\mathrm{PM}_p(B, \mathcal{F}_t) = \left\{G \in \mathrm{PM}(\mathcal{F}_t) : \int_0^t |G(s)|^p \,\mathrm{d}B^v(s) < \infty \text{ skoro určite } \forall t \in \mathbb{R}^+\right\}.$$

Definícia 2.1.8. Nech máme náhodné procesy $M \in \mathrm{CM}_{loc}(\mathcal{F}_t)$ a $G \in \mathrm{PM}_2(\langle M\rangle, \mathcal{F}_t)$. Proces $I^M(G) \in \mathrm{CM}_{loc}$ nazývame *stochastický integrál G vzhľadom k M*, ak skoro určite platí

$$\left\langle I^M(G), N\right\rangle(t) = \int_0^t G \,\mathrm{d}\langle M, N\rangle, \quad t \geq 0 \quad \forall N \in \mathrm{CM}_{loc}.$$

Proces $I^M(G)$ budeme značiť ako $\int G \,\mathrm{d}M$ a $I_t^M(G)$ ako $\int_0^t G(s) \,\mathrm{d}M(s)$.

Poznámka 2.1.3. Ak $N \in \mathrm{CM}_{loc}(\mathcal{F}_t)$ je taký, že $N = \int G \, \mathrm{d}M$ skoro určite, potom budeme ekvivalentne písat', že $\mathrm{d}N = G \, \mathrm{d}M$ a hovoríme, že náhodný proces N má *stochastický diferenciál.*

Poznámka 2.1.4. Pre $X \in \mathrm{CSM}(\mathcal{F}_t)$, kde $\mathrm{CSM}(\mathcal{F}_t)$ je množina spojitých $\mathcal{F}_t$ -semimartingalov, vieme náhodný proces X rozložit' na súčet $X = X(0) + B + M$, kde $B \in CFV(\mathcal{F}_t)$ a $M \in \mathrm{CM}_{loc}(\mathcal{F}_t)$. Tento rozklad je jednoznačný skoro určite a môžeme ho ekvivalentne zapísat' v difrenciálnej podobe ako $\mathrm{d}X = \mathrm{d}B + \mathrm{d}M$. Ak označíme $\mathrm{PM}_{12}(X, \mathcal{F}_t) = \mathrm{PM}_1(\langle B \rangle, \mathcal{F}_t) \cap \mathrm{PM}_2(\langle M \rangle, \mathcal{F}_t)$, potom definujeme stochastický integrál procesu $G \in \mathrm{PM}_{12}(X, \mathcal{F}_t)$ vzhl'adom na proces X predpisom

$$\int G \, \mathrm{d}X = \int G \, \mathrm{d}B + \int G \, \mathrm{d}M.$$

Pokial' $Y \in \mathrm{CSM}(\mathcal{F}_t)$ je taký, že $Y = \int G \, \mathrm{d}X$, píšeme ekvivalentne $\mathrm{d}Y = G \, \mathrm{d}X$.

Jedným zo základných výsledkov teórie stochastického integrálu je Itôova formula, ktorá umožňuje za určitých podmienok derivovat' náhodnú funkciu.

Veta 2.1.1. *Nech G je otvorená množina v $\mathbb{R}^d$, $f \in C^2(G)$ a $\mathbf{X} \in CSM^d$ taký, že $\mathbf{X} \in G$ všade na $\mathbb{R}^d \times \Omega$. Pre $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d)^{\mathsf{T}} \in G$ označme*

$$f_i(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x^i}(\mathbf{x}), \quad f_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j}(\mathbf{x})$$

Potom proces $f(X) \in CSM$ a jeho stochastický diferenciál je rovný

$$\mathrm{d}f(X) = \sum_{i=1}^{d} f_i(\mathbf{X}) \, \mathrm{d}X_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} f_{ij}(\mathbf{X}) \, \mathrm{d} \langle X_i, X_j \rangle, \quad t \geq 0. \tag{2.1}$$

Dôkaz. Viz str. 288, Veta 2.2.8. v [4]. □

2.2 Konštrukcia spojitého modelu

Spojitý model bude modelovat' vývoj hodnoty portfólia investora, ktorý investuje do rizikových akcií alebo na peňažnom trhu do bezrizikových aktív. V tejto podkapitole budem vychádzat' z článku [1]. Úvodom si zadefinujeme Wienerov proces.

Definícia 2.2.1. Spojitý r-rozmerný náhodný proces $\mathbf{W} = (W_1, ..., W_r)^{\mathsf{T}}$ nazývame *r-rozmerný Wienerov proces*, ak jeho prírastky

$$W(t_1) - W(t_0),\ W(t_1) - W(t_0),\ ...,\ W(t_n) - W(t_{n-1}), \qquad \forall t_0 < t_1 < ... < t_n,\ n \in \mathbb{N}$$

sú nezávislé a $\mathcal{L}(W(t) - W(s)) = N_r(0, |t - s| \, \mathbf{I}_r)$ pre $t, s \geq 0$ a kde $\mathbf{I}_r$ je jednotková matica $r \times r$.

Lemma 2.2.1. *Majme daný r-rozmerný Wienerov proces* $\mathbf{W}$*. Potom* W_i *sú procesy s konečnou variáciou a platí*

$$\begin{aligned}\langle W_i\rangle (t) &= t \quad \forall t \in \mathbb{R}^+,\ i = 1,2,...,r,\\ \langle W_i, W_j\rangle (t) &= 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+,\ i \neq j,\ i,j = 1,2,...,r.\end{aligned}$$

Dôkaz. Viz str. 239, Veta 1.2.2 v [4] a Kapitola 12 v [7]. □

V spojitom modeli bude mať investor na výber r rôznych akcií a jedno bezrizikové aktívum. Cenu akcií budeme modelovať viacrozmerným geometrickým Brownovým pohybom. Konkrétne, budeme predpokladať, že trhová cena akcií je r-rozmerný $\mathcal{F}_t$-semimartingal, kde $\mathcal{F}_t$ je kanonická filtrácia Wienerovho procesu $\mathbf{W}(t)$, so stochastickým diferenciálom

$$\mathrm{d}\mathbf{X}(t) = \mathbb{X}(t)\,\boldsymbol{\mu}\,\mathrm{d}t + \mathbb{X}(t)\,\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\mathbf{W}(t), \qquad \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^r,$$

kde $\mathbf{W}(t)$ je r-rozmerný Wienerov proces, $\mathbb{X}(t) = diag\,(\mathbf{X}(t))$ je matica, ktorá má na diagonále zložky vektora $\mathbf{X}(t) = (X_1(t),...,X_r(t))^{\mathsf{T}}$ a na iných miestach nuly, ďalej $\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ je pozitívne definitívna matica taká, že $\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\,\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\Sigma}$ a $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^r$. Označme náhodný vektor počtu akcií v čase t ako $\mathbf{H}(t) = (H_1(t),...,H_r(t))^{\mathsf{T}}$, kde $H_i(t)$ vyjadruje počet akcií i v čase t, označme ešte $\mathbb{H}(t) = diag\,\mathbf{H}(t)$. Obdobne označíme pozíciu investora na trhu v čase t ako $\mathbf{G}(t) = (G_1(t),...,G_r(t))^{\mathsf{T}}$, kde $G_i(t)$ vyjadruje podiel investícií do akcií i v investorovom portfóliu v čase t. Konečne, označme $Y(t)$ ako hodnotu portfólia. Pri tomto označení je možné zapísať ceny akciových častí portfólia ako

$$Y(t)\,\mathbf{G}(t) = \mathbb{H}(t)\,\mathbf{X}(t) = \mathbb{X}(t)\,\mathbf{H}(t). \tag{2.2}$$

Predstavme si, že investor neobchoduje, inými slovami $\mathbf{H}(t)$ je konštantné. V tomto prípade je zmena trhovej ceny portfólia $Y(t)$ spôsobená výhradne zmenou trhových cien akcií, teda

$$\mathrm{d}Y(t) = \mathrm{d}\left(\mathbf{H}^{\mathsf{T}}(t)\,\mathbf{X}(t)\right) = \mathbf{H}^{\mathsf{T}}(t)\,\mathrm{d}\mathbf{X}(t) = Y(t)\,\mathbf{G}^{\mathsf{T}}(t)\,\left(\boldsymbol{\mu}\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\mathbf{W}(t)\right).$$

Podľa Itôovej formule (2.1) a s využitím Lemma 2.2.1 máme

$$\begin{aligned} Y(t)\,\mathrm{d}Y^{-1}(t) &= -\frac{\mathrm{d}Y(t)}{Y(t)} + \frac{\mathrm{d}\,\langle Y\rangle (t)}{Y^2(t)}\\ &= -\mathbf{G}^{\mathsf{T}}(t)\,\left(\boldsymbol{\mu}\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\mathbf{W}(t)\right) + \left(\mathbf{G}^{\mathsf{T}}(t)\,\left(\boldsymbol{\mu}\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\mathbf{W}(t)\right)\right)^2\\ &= \mathbf{G}^{\mathsf{T}}(t)\,\left(-\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{G}(t)\right)\mathrm{d}t + \mathbf{G}^{\mathsf{T}}(t)\,\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\mathbf{W}(t). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Opäť podľa Itôovej formule (2.1) odvodíme

$$\mathrm{d}\ln Y(t) = \frac{\mathrm{d}Y(t)}{Y(t)} - \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}\,\langle Y\rangle (t)}{(Y(t))^2}.$$

Agregovaním predchádzajúcich dvoch vzťahov dostávame

$$\mathrm{d}\ln Y(t) = \left(\mathbf{G}^{\mathrm{T}}(t)\,\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\,\mathbf{G}^{\mathrm{T}}(t)\,\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{G}(t)\right)\,\mathrm{d}t + \mathbf{G}^{\mathrm{T}}(t)\,\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\mathbf{W}(t). \tag{2.4}$$

Itôova formula (2.1) nám pomôže i s odvodením stochastického diferenciálu pre pozíciu $\mathbf{G}(t)$ za predpokladu, že investor neobchoduje

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{G}(t) &= \mathbb{H}(t)\,\mathrm{d}\frac{\mathbf{X}(t)}{Y(t)} \\
&= \mathbb{H}(t)\,\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}(t)}{Y(t)} - \frac{\mathrm{d}Y(t)\,\mathbf{X}(t)}{Y^2(t)} - \frac{\mathrm{d}Y(t)\,\mathrm{d}\mathbf{X}(t)}{Y^2(t)} + \frac{\mathrm{d}\left\langle Y\right\rangle(t)\,\mathbf{X}(t)}{Y^3(t)}\right) \\
&= \mathbf{G}(t)\left(-\frac{\mathrm{d}Y(t)}{Y(t)} + \frac{\mathrm{d}\left\langle Y\right\rangle(t)}{Y^2(t)}\right) + \frac{\mathbb{H}(t)\,\mathbb{X}(t)}{Y(t)}\,\left(\boldsymbol{\mu}\mathrm{d}t + \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\mathbf{W}(t)\right) \\
&\quad - \frac{\mathbb{H}(t)\,\mathbb{X}(t)}{Y(t)}\,\left(\boldsymbol{\mu}\mathrm{d}t + \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\mathbf{W}(t)\right)\,\frac{\mathrm{d}Y(t)}{Y(t)} \\
&= \mathbf{G}(t)\,\mathbf{G}^{\mathrm{T}}(t)\,\left((-\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{G}(t))\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}d\mathbf{W}(t)\right) + \mathbb{G}(t)\,\left[(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{G}(t))\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\mathbf{W}(t)\right] \\
&= \left(\mathbb{G}(t) - \mathbf{G}(t)\,\mathbf{G}^{\mathrm{T}}(t)\right)\left[(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{G}(t))\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\mathbf{W}(t)\right],
\end{aligned}$$

kde predposledná rovnosť vychádza zo skutočnosti, že $\frac{\mathbb{H}(t)\,\mathbb{X}(t)}{Y(t)} = \mathbb{G}(t)$. Pri označení

$$S(\mathbf{X}) = \left[\mathbb{X} - \mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\right]\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}, \quad B(\mathbf{X}) = \left[\mathbb{X} - \mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\right]\left[\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{X}\right],$$

platí

$$\mathrm{d}\mathbf{G}(t) = B(\mathbf{G}(t))\,\mathrm{d}t + S(\mathbf{G}(t))\,\mathrm{d}\mathbf{W}(t). \tag{2.5}$$

2.2.1 Dynamizácia modelu a rozšírenie o transakčné náklady

V ďalšom kroku model zdynamizujeme a zavedieme transakčné náklady. Dynamizácia sa prejaví v skutočnosti, že investor môže nakupovať a predávať akcie. Uvažujme, že pri nákupe akcie investor zaplatí $(1+b)$-násobok jej trhovej ceny a pri jej predaji obdrží $(1-c)$-násobok jej trhovej ceny. Je rozumné obmedziť sa na $b \in (0,\infty)$ a $c \in (0,1)$. Konečne, označme $H_i^+(t)$ a $H_i^-(t)$ počet akcií i kúpených a predaných v časovom intervale $[0,t)$. Budeme predpokladať, že tieto procesy sú neklesajúce $\mathcal{F}_t$ -adaptívne a zľava spojité. Dynamizácia modelu sa prejaví v úprave stochastických diferenciálov (2.4) a (2.5). Predstavme si, že investor nakúpi $\Delta H_i(t) \geq 0$ akcií i v čase t. Potom $Y(t)G_i(t)$ vzrastie o hodnotu $X_i(t)\Delta H_i(t)$. Transakčné náklady tohto obchodu budú $b\,X_i(t)\,\Delta H_i(t)$ vzhľadom na skutočnosť, že obchod prebehne v nekonečne krátkom časovom intervale $\langle t, t+\mathrm{d}t\rangle$, počas ktorého sa cena akcie nezmení. O transakčné náklady musí poklesnúť i trhová cena portfólia, čiže hodnota

$$Y(t) + b\,H_i(t)\,X_i(t) = Y(t)\,(1 + G_i(t))$$

bude pri nákupe akcie i konštantná. V diferenciálnej podobe teda dostaneme

$$\mathrm{d}^{+i}\ln Y(t) = -\mathrm{d}^{+i}\ln 1 + b\,G_i(t) = -\frac{b}{1+b\,G_i(t)}\mathrm{d}^{+i}G_i(t),$$

kde d^{+i} reprezentuje infetizimálnu zmenu spôsobenú nákupom akcie i. Obdobne pre predaj akcie i odvodíme vzťah

$$\mathrm{d}^{-i}\ln Y(t) = -\mathrm{d}^{-i}\ln 1 + c\,G_i(t) = -\frac{c}{1-c\,G_i(t)}\mathrm{d}^{-i}G_i(t).$$

Označme

$$\vartheta^{+}(x) = \frac{b}{1+b\,x}, \qquad \vartheta^{-}(x) = \frac{c}{1-c\,x}.$$

Pre hodnotu portfólia teda bude platiť

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\ln Y(t) = {} & \left(\mathbf{G}^{\mathsf{T}}(t)\,\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\,\mathbf{G}^{\mathsf{T}}(t)\,\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{G}(t)\right)\,\mathrm{d}t + \mathbf{G}^{\mathsf{T}}(t)\,\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\mathbf{W}(t) \\ & - \sum_{i=1}^{r}\vartheta^{+}(G_i(t))\,\mathrm{d}^{+i}G_i(t) + \sum_{i=1}^{r}\vartheta^{-}(G_i(t))\,\mathrm{d}^{-i}G_i(t). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Pozícia investora v diferenciálnom tvare bude po zdynamizovaní modelu

$$\mathrm{d}\mathbf{G}(t) = B(\mathbf{G}(t))\,\mathrm{d}t + S(\mathbf{G}(t))\,\mathrm{d}\mathbf{W}(t) + \sum_{i=1}^{r}\mathrm{d}^{+i}\mathbf{G}(t) + \sum_{i=1}^{r}\mathrm{d}^{-i}\mathbf{G}(t), \tag{2.7}$$

kde $\mathrm{d}^{\pm i}\mathbf{G}(t) = \left(\mathrm{d}^{\pm i}G_1(t), ..., \mathrm{d}^{\pm i}G_r(t)\right)^{\mathsf{T}}$. Naviac vieme, že pri nákupe akcie i je hodnota $Y(t)\,G_j(t) = H_j(t)\,X_j(t)$ konštantná pre $i \neq j$. Z tejto skutočnosti odvodíme vzťah medzi $\mathrm{d}^{+i}G_j(t)$ a $\mathrm{d}^{+i}G_i(t)$

$$\mathrm{d}^{+i}G_j(t) = G_j(t)\,\vartheta^{+}(G_i(t))\,\mathrm{d}^{+i}G_i(t) \quad i \neq j.$$

Vzťah (2.7) môže slúžiť ako definičná rovnosť pre $\mathrm{d}^{\pm i}\mathbf{G}(t)$.

2.3 Diskrétny model

Táto časť kapitoly si za úlohu dáva prezentovať návod, akým by sme mohli definovať diskrétny model, v ktorom by sa následne dal využiť Howardov algoritmus pre nájdenie optimálneho riadenia.

2.3.1 Konštrukcia diskrétneho modelu

Diskrétny model bude mať za úlohu čo najlepšie aproximovať spojitý model (2.7). „Dobrú“ aproximáciu nám diskrétny model zabezpečí, pokiaľ ostanú zachované základné vlastnosti spojitého modelu, akými sú stredná hodnota a rozptyl. Predpokladajme, že počiatočná investorova pozícia je

$$\mathbf{G}(0) = \mathbf{g}.$$

Strednú hodnotu určíme s využitím Definície 2.2.1 a diferenciálu (2.7)

$$E(\mathbf{G}(\mathrm{d}t) - \mathbf{G}(0)|\mathbf{G}(0) = \mathbf{g}) \sim E(\mathrm{d}\mathbf{G}(0)|\mathbf{G}(0) = \mathbf{g}) = E(B(\mathbf{G}(0))|\mathbf{G}(0) = \mathbf{g}) = B(\mathbf{g})dt,$$

kde pre dostatočne malé dt je aproximácia dostatočne presná. Pre rozptyl postupujeme obdobne a s využitím Lemma 2.2.1 dostávame

$$\begin{aligned} Var\left(\mathbf{G}(\mathrm{d}t) - \mathbf{G}(0)|\mathbf{G}(0)\right) &\sim Var\left(\mathrm{d}\mathbf{G}(0)|\mathbf{G}(0) = \mathbf{g}\right) \sim E\left(\mathrm{d}\mathbf{G}(0)\ (\mathrm{d}\mathbf{G}(0))^{\mathrm{T}}\,|\mathbf{G}(0)\right) \\ &\sim S(\mathbf{g})\, S^{\mathrm{T}}(\mathbf{g})\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

kde sme zanedbali členy s $(\mathrm{d}t)^2$.

Načrtneme ďalší postup vedúci k diskrétnemu modelu, pričom postupujeme podľa [11]. Ďalším krokom je definovanie stavov reťazca a určenie intenzít prechodu medzi jednotlivými stavmi za predpokladu, že sa neobchoduje, ktoré budú súvisieť so spočítanou podmienenou strednou hodnotou a rozptylom $\mathbf{G}(t)$. Následne sa určia možné rozhodnutia pre jednotlivé stavy reťazca, pričom rozhodnutí pre 2-rozmerný prípad je celkovo 9 - nákup prvej akcie a nákup druhej akcie, nákup prvej akcie a nič nerobiť s druhou akciou ,... Intenzity prechodu sa určia i pre zdynamizovaný model a tieto intenzity nám budú generovať Markovov reťazec.

Následne sa pre diskrétnu aproximáciu zostavia matice ocenenia prechodov R a vektory zotrvania r. Matice ocenenia prechodu a vektory zotrvania budú vychádzať zo vzťahu (2.6). Vektory zotrvania budú definované ako

$$\mathbf{r}(\mathbf{g}) = \mathbf{g}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\,\mathbf{g}^{\mathrm{T}}\,\Sigma\,\mathbf{g}.$$

Pre stabilné rozhodnutia nebudú v modeli žiadne penalizácie pre prechody do ďalších stavov. Je však nutné stanoviť veľkosť penalizácie spôsobenej nákupom a predejom jednej či viacerých akcií, čo odpovedá radikálnemu rozhodnutiu. Toto stanovenie bude vychádzať opäť zo vzťahu (2.6). Po stanovení penalizácií sa už len určí počiatočné priblíženie v Howardovom algoritme a pomocou výpočtovej techniky sa nájde optimálne riadenie.

Záver

Diplomová práca mala za úlohu previesť problém hľadania optimálnej obchodnej stratégie z jednorozmernej situácie na viacrozmernú. Cieľ sa podarilo naplniť čiastočne. Práca poskytuje uvedenie a dôkaz Howardovho algoritmu pre relatívne obecnú skupinu riadení. Príprava na vyslovenie a dôkaz algoritmu sa tiahne celou prvou kapitolou.

V druhej kapitole sa nám podarilo uviesť spojitý model obchodovania s portfóliom akcií. Taktiež nechýbajú položené základy diskrétnej aproximácie spojitého modelu. Druhá kapitola je napísaná s otvoreným koncom zakončená návodom pre ďalší postup, ktorého rozpracovanie môže byť predmetom ďalšieho výskumu.

Záverom by som chcel ešte raz poďakovať Mgr. Petrovi Dostálovi, Ph.D. za dlhé hodiny konzultácií a veľké množstvo nápadov, ktoré mi pri písaní diplomovej práce venoval.

Literatúra

[1] DOSTÁL, Petr: Investment Strategies in the Long Run with Proportional Transaction Costs and HARA Utility Function. Quantitative Finance, zväzok 9, č. 2 (Marec 2009), str. 231-242

[2] DUPAČ, Václav, DUPAČOVÁ, Jitka: Markovovy procesy I. 2. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství 1980, 134 str.

[3] DUPAČ, Václav, DUPAČOVÁ, Jitka: Markovovy procesy II. Dotlač 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství 1980, 91 str.

[4] DUPAČOVÁ, Jitka, HURT, Jan, ŠTĚPÁN, Josef: Stochastic modeling in economics and finance. 1. vyd. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers 2002, 386 str.

[5] CHUNG, Kai Lai: Markov Chains with Stationary Transition Probabilities. 2. vyd. New York: Springer 1967, 301 str.

[6] JANEČEK, Karel, SHREVE, Steven E.: Asymptotic Analysis for Optimal Investment and Consumption with Transaction Costs. Finance & Stochastics, zväzok 8, č. 2 (Máj 2004), str. 181-206, ISSN 0949-2984

[7] MANDL, Petr: Pravděpodobnostní dynamické modely. 1. vyd. Praha: Academia 1985, 181 str.

[8] MERTON, Robert: Optimum Consumption and Portfolio Rules in a continuous-time Model. Journal of Economic Theory, zväzok 3, č. 4 (December 1971), str. 373–413

[9] PRÁŠKOVÁ, Zuzana, LACHOUT, Petr: Základy náhodných procesů. 2. dotlač 1. vyd. Praha: Karolinum 2005, 146 str., I SBN 80-7184-688-0

[10] PRÁŠKOVÁ, Zuzana: Základy náhodných procesů II. 1. vyd. Praha: Karolinum 2004, 151 str., ISBN 80-246-0971-1.

[11] STANÍKOVÁ, Dana: Asymptotické řízení portfolia. Bakalárska práca, Praha: Univerzita Karlova 2006, 36 str.