



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Matěj Šafář

Geometrie komplexní projektivní přímky

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D.

Studijní program: Matematika pro informační
technologie

Praha 2025

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Děkuji svému vedoucímu doc. RNDr. Zbyňku Šírovi, Ph.D. za pomoc s výběrem tématu, za cenné rady a v neposlední řadě za trpělivost při vedení práce. Také děkuji své rodině za podporu.

Název práce: Geometrie komplexní projektivní přímky

Autor: Matěj Šafář

Ústav: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstrakt: Práce se zabývá geometrií komplexní projektivní přímky a jejími základními vlastnostmi z pohledu Möbiovske geometrie. Komplexní projektivní přímka je nejprve precizně definována a následně geometricky interpretována pomocí stereografické projekce jako Riemannova sféra. Dále jsou studovány Möbiovy transformace jako projektivní automorfismy komplexní projektivní přímky, jejich rozklad na elementární zobrazení a jejich základní vlastnosti, zejména zachování kruhových křivek, konformity a spojitosti. Součástí práce je také rozbor dvojpoměru čtyř bodů jako významného invariantu projektivní geometrie a jeho využití při řešení geometrických úloh.

Klíčová slova: komplexní projektivní přímka, Möbiova transformace, stereografická projekce, dvojpoměr

Title: Geometry of the complex projective line

Author: Matěj Šafář

Department: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: This thesis deals with the geometry of the complex projective line and its fundamental properties from the perspective of Möbius geometry. The complex projective line is first precisely defined and then geometrically interpreted via stereographic projection as the Riemann sphere. The thesis further studies Möbius transformations as projective automorphisms of the complex projective line, their decomposition into elementary transformations, and their basic properties, in particular the preservation of circular curves, conformality, and continuity. The thesis also examines the cross ratio of four points as an important invariant of projective geometry and its application to the solution of geometric problems.

Keywords: complex projective line, Möbius transformation, stereographic projection, cross-ratio

Obsah

Úvod	6
1 Komplexní projektivní přímka	7
1.1 Projektivní prostor	7
1.2 Riemannova sféra	10
2 Möbiovy transformace	19
2.1 Základní typy Möbiových transformací	19
2.2 Vlastnosti Möbiových transformací	24
Závěr	34
Literatura	35
Seznam obrázků	36

Úvod

Möbiovská geometrie představuje přirozené geometrické rozšíření roviny do komplexní projektivní přímky, v němž se jako základní zobrazení uplatňují Möbiovy transformace. Tato zobrazení tvoří grupu projektivních automorfismů \mathbb{CP}^1 a vyznačují se zachováváním kruhových křivek, úhlů a významných projektivních invariantů, jako je dvojpoměr. Möbiovská geometrie tak propojuje prvky eukleidovské, afinní a projektivní geometrie s komplexní analýzou a poskytuje zajímavý pohled na řadu klasických geometrických konstrukcí, které se v tomto kontextu vyznačují mimořádnou elegancí a jednoduchostí.

Cílem této bakalářské práce je popsat jednotným a matematicky přesným způsobem základní pojmy a objekty Möbiovy geometrie. Práce přitom čerpá z různých zdrojů, ve kterých je tato látka koncipována trochu jiným způsobem a je prezentována poněkud méně formálně. Hlavním záměrem této práce je tedy shrnout tuto látku tak, aby byla podána přehledně a srozumitelně, ale zároveň dostatečně exaktně tak, aby svou úrovní odpovídala látce Matematicko-fyzikální fakulty. Ve své práci jsem tedy volil precizní, ale elementární důkazy. Svým obsahem práce navazuje na látku Geometrie 1 a využívá některé základní poznatky z prvního a druhého ročníku bakalářského studia.

V první části jsem shrnul potřebné pojmy z Geometrie 1, zavedl projektivní prostor \mathbb{CP}^1 a ukázal některé jeho vlastnosti. Následně jsem provedl jeho geometrickou interpretaci pomocí stereografické projekce na Riemannovu sféru. Ve druhé části jsem se zaměřil na Möbiovy transformace jako na základní třídu projektivních zobrazení \mathbb{CP}^1 . V první Podkapitole 2.1 jsem nejprve zavedl základní Möbiovy transformace a dokázal jejich základní vlastnosti, v další Podkapitole 2.2 jsou poté uvedena a dokázána zajímavá tvrzení o Möbiovy transformacích spolu s praktickými příklady.

Vlastní přínos práce spočívá především ve zpracování elementárních, avšak precizních důkazů některých tvrzení, které jsou v literatuře často pouze naznačena či zcela chybí. Rovněž jsem doplnil jejich geometrickou interpretaci a vypracoval několik nových příkladů. Konkrétně, v první části 1.2 jsem samostatně vytvořil ilustrace a důkazy bijektivnosti (Věta 1.12), konformity (Věta 1.15) a spojitosti (Věta 1.16) stereografické projekce. V další části jsem samostatně vytvořil důkazy o vlastnostech elementárních Möbiovy transformací, konkrétně důkaz konformity (2.6) a spojitosti (Věta 2.7). V Podkapitole 2.2 jsem dokázal, že každou Möbiovy transformaci lze rozložit na elementární zobrazení: posunutí, otočení, stejnoolehlost a převrácenou kruhovou inverzi (Věta 2.8) a poté jsem využil výsledků z Podkapitoly 2.1 k tomu, abych mohl formulovat důležitá tvrzení o vlastnostech Möbiovy transformací. Na tuto teorii navazují vlastním důkazem (Lemmatu 2.15), který rozebírá chování fixních bodů Möbiovy transformací, a dále jeho praktickým využitím při důkazu existence a jednoznačnosti Möbiovy transformace dané trojicí vzorů a obrazů (Věta 2.16). Na tuto větu dále navazuje Příklad 2.17. Dále jsem vytvořil vlastní důkaz (Věta 2.18), že čtyři body \mathbb{CP}^1 ležící na téže kruhové křivce mají reálný dvojpoměr, a tuto skutečnost jsem ilustroval výpočtem na příkladu (Příklad 2.19). V závěrečné části jsem vytvořil dosti složitý Příklad 2.20, ve kterém ukazují využití Möbiovy transformací při řešení Apolloniovy úlohy v \mathbb{R}^2 .

1 Komplexní projektivní přímka

V této první kapitole pečlivě zavedeme základní pojmy nezbytné k pochopení vlastností a geometrie komplexní projektivní přímky. V první podkapitole popíšeme její vlastnosti z hlediska projektivního prostoru a ve druhé její geometrii pomocí bijekce s Riemannovou sférou.

1.1 Projektivní prostor

Začneme standardní definicí projektivního prostoru a projektivních transformací, viz např. [1, 2].

Definice 1.1. *Mějme vektorový prostor V^{n+1} dimenze $n + 1$ nad tělesem T . Množinu všech 1-dimenzionálních podprostorů V^{n+1} nazveme projektivním prostorem dimenze n nad tělesem T a označujeme jej $\mathbb{P}(V^{n+1})$, nebo jen zkráceně \mathbb{P}^n :*

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1}) = \{LO\{v\} : v \in V^{n+1}, v \neq 0\}. \quad (1.1)$$

Prvky této množiny nazýváme projektivními body a odpovídající vektory v jejich vektorovými zástupci.

Definice 1.2. *Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T . Zobrazení $F : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ nazveme projektivní transformací prostoru \mathbb{P}^n , jestliže existuje bijektivní lineární zobrazení $\bar{F} : V^{n+1} \rightarrow V^{n+1}$ takové, že pro každý nenulový vektor $v \in V^{n+1}$ platí*

$$F(LO\{v\}) = LO\{\bar{F}(v)\}.$$

Pro účel této práce je klíčový následující speciální příklad projektivního prostoru dimenze 1 nad komplexními čísly.

Definice 1.3. *Položíme-li v Definici 1.1 $n = 1$ a $T = \mathbb{C}$ získáme prostor $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$, který budeme označovat $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ a nazývat komplexní projektivní přímka.*

Popíšeme tento důležitý speciální příklad podrobněji. Ze vztahu (1.1) vyplývá, že body komplexní projektivní přímky tvoří jednodimenzionální podprostory generované nenulovými vektory z \mathbb{C}^2 .

Každý bod má nekonečně mnoho vektorových zástupců, které se liší pouze nenulovým násobkem. Projektivní bod budeme reprezentovat souřadnicemi jeho libovolného zástupce. Této reprezentaci říkáme homogenní souřadnice. Pro jednoduchost budeme pro $\lambda \in \mathbb{C}^*$ psát $(z, w)^T = (\lambda z, \lambda w)^T$. V komplexních číslech často na první pohled není vidět, že dva vektory reprezentují stejný bod, uvažme například

$$\begin{pmatrix} 1 + i \\ 1 - i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Důležitým pojmem projektivní geometrie je kanonické vnoření afinní přímky \mathbb{C} do $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ definované jako $z \mapsto (z, 1)^T$. Obrazy tohoto zobrazení se nazývají *vlastní body*. Snadno nahlédneme, že jediný bod $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, který není vlastní, je bod $(1, 0)^T$, který nazýváme *nevlastní bod* a budeme ho nadále označovat z_∞ .

Pro zkoumání vlastností \mathbb{CP}^1 a provádění výpočtů je důležité, že komplexní projektivní přímka je doplněním roviny o jeden bod:

$$\mathbb{CP}^1 \equiv \mathbb{C} \cup \{z_\infty\} \equiv \mathbb{R}^2 \cup \{z_\infty\}.$$

Jak uvidíme později v Podkapitole 1.2 je přirozené umístit bod z_∞ na každou přímku. Hlavní výhodou zmíněného zúplnění a formalismu projektivní geometrie je, že umožňují elegantní studium kružnic a přímk v rovině. Základem toho je definice zahrnující oba tyto typy objektů.

Definice 1.4. *Kruhovou křivkou v \mathbb{CP}^1 rozumíme kružnici v rovině vlastních bodů nebo přímku v rovině vlastních bodů spolu s přidáním nevlastním bodem. Máme tedy dva typy kruhových křivek, pro libovolnou kružnici $k \subset \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ definujeme:*

$$P_k = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} : z \in k \right\}$$

a pro libovolnou přímku $p \subset \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ definujeme:

$$P_p = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} : z \in p \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Je snadné specializovat projektivní transformace z Definice 1.2 na \mathbb{CP}^1 . V tomto případě se těmto zobrazením říká Möbiovy transformace.

Definice 1.5. *Möbiova transformace je projektivní transformace $\tau : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$.*

Každou Möbiovu transformaci můžeme vyjádřit předpisem:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ a matice M je regulární, tedy $ad - bc \neq 0$.

Z lineární algebry víme, že regulární matice odpovídají bijektivním zobrazením, každá Möbiova transformace je tedy bijektivní.

Díky tomu, že souřadnice projektivního bodu jsou jednoznačně určeny až na násobek, je i matice M jednoznačně určená až na násobek.

Složení dvou Möbiových transformací odpovídá násobení příslušných matic. Mějme tedy dvě Möbiovy transformace $\tau_1, \tau_2 : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$, které jsou dány maticemi M_1 a M_2 . Jejich složení je opět Möbiova transformace $\tau_1 \circ \tau_2 : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$, která je určena maticí $M_1 M_2$.

Lemma 1.6. *Möbiovy transformace na vlastních bodech mají tvar lineárně lomených zobrazení.*

Důkaz. Pomocí Möbiovy transformace zobrazíme vlastní bod $(z, 1)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az + b \\ cz + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{az+b}{cz+d} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Odtud vidíme, že na vlastních bodech má transformace tvar:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

□

Zřejmě nemůže platit $c = d = 0$, neboť pak by výše uvedená matice nebyla regulární a nemohlo by se tedy jednat o Möbiovu transformaci.

Pokud $z = -\frac{d}{c}$, tak se jedná o tentýž projektivní bod jako $(-d, c)^T$ a obrazem tohoto bodu je z_∞ .

Na \mathbb{CP}^1 budeme rovněž studovat pojem spojitosti, více o tom bude napsáno v Kapitole 2. Nejprve zavedeme topologii na \mathbb{CP}^1 pomocí konvergence.

Definice 1.7. Řekneme, že posloupnost bodů $A_i \in \mathbb{CP}^1$ konverguje k bodu $A \in \mathbb{CP}^1$, jestliže existují jejich vhodné vektorové zástupci $\mathbf{a}_i \in \mathbb{C}^2$, $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^2$ tak, že platí $\mathbf{a}_i \rightarrow \mathbf{a}$ v \mathbb{C}^2 .

Tedy na vlastních bodech se jedná o stejnou konvergenci jako v $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, neboli:

$$(z_i, 1) \rightarrow (z, 1) \Leftrightarrow z_i \rightarrow z,$$

což odpovídá standardní konvergenci v \mathbb{C} .

Dále se budeme zabývat tím, kdy posloupnost projektivních bodů konverguje k z_∞ , což popisuje následující Lemma.

Lemma 1.8. Posloupnost vlastních projektivních bodů $A_i = (z_i, 1)^T \in \mathbb{CP}^1$ konverguje k $A = z_\infty$ právě tehdy, když $|z_i| \rightarrow \infty$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve $|z_i| \rightarrow \infty$. Jestliže zvolíme vektorové zástupce $\mathbf{a}_i = (1, \frac{1}{z_i})^T$ pro body A_i a $\mathbf{a} = (1, 0)^T$ pro bod $A = z_\infty$, pak platí $\mathbf{a}_i \rightarrow \mathbf{a}$ a tedy podle Definice 1.7 $A_i \rightarrow A$.

Jestliže naopak $|z_i|$ nekonverguje k ∞ , pak existuje omezená vybraná podposloupnost $|z_{i_k}|$. Libovolní vektorové zástupci odpovídajících bodů A_{i_k} mají tvar $\mathbf{a}_{i_k} = (\frac{z_{i_k}}{w_{i_k}}, \frac{1}{w_{i_k}})^T$, kde $w_{i_k} \in \mathbb{C}^*$. Zároveň libovolný vektorový zástupce A má tvar $(\alpha, 0)^T$, kde $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Má-li nyní platit, že $\mathbf{a}_{i_k} \rightarrow \mathbf{a}$, pak tedy musí platit $\frac{1}{w_{i_k}} \rightarrow 0$ a tedy $|w_{i_k}| \rightarrow \infty$. V důsledku by ale platilo $\frac{z_{i_k}}{w_{i_k}} \rightarrow 0$, protože z_{i_k} jsou omezené. Tedy tato první složka vektorů nemůže konvergovat k nenulovému α . Vidíme tedy, že A_i nekonvergují k A . \square

Na \mathbb{CP}^1 zavedeme ještě jeden důležitý pojem, který budeme používat zejména v Kapitole 2, konkrétně dvojpoměr.

Definice 1.9. V prostoru \mathbb{CP}^1 uvažujme čtyři navzájem různé body A, B, C, D . Necht $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ jsou jejich vektorové zástupci a necht platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Pak definujeme dvojpoměr uspořádané čtveřice bodů

$$(A, B, C, D) := \frac{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}{\frac{\beta_2}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2} \in \mathbb{C}.$$

Tento výraz nezávisí na volbě vektorových zástupců, důkaz viz [2], str. 44.

Pro ilustraci výpočtu využijeme následující příklad, ve kterém pomocí soustavy lineárních rovnic určíme vyjádření bodů C a D jako lineárních kombinací bodů A a B , a následně spočítáme hodnotu dvojpoměru.

Příklad 1.10. Mějme body $A, B, C, D \in \mathbb{CP}^1$ zadané v homogenních souřadnicích následovně:

$$A = (2i, 1)^T, \quad B = (3, 1 + i)^T, \quad C = (18i - 2, 5i - 1)^T, \quad D = (5i - 1, 1 + 4i)^T.$$

Hledáme koeficienty α_1, β_1 , pro které platí:

$$C = \alpha_1 A + \beta_1 B.$$

Po dosazení dostáváme soustavu:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2i & 3 & 18i - 2 \\ 1 & 1 + i & 5i - 1 \end{array} \right).$$

Řešením této soustavy je:

$$\alpha_1 = 3 + i, \quad \beta_1 = 4i.$$

Obdobně hledáme koeficienty α_2, β_2 , pro které platí:

$$D = \alpha_2 A + \beta_2 B.$$

Po dosazení dostáváme soustavu:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2i & 3 & 5i - 1 \\ 1 & 1 + i & 1 + 4i \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 5 - 2i & 3i + 7 \\ 1 & 1 + i & 1 + 4i \end{array} \right).$$

Řešením této soustavy je:

$$\alpha_2 = 1 + 2i, \quad \beta_2 = 1 + i.$$

Dvojpoměr je dán vztahem:

$$(A, B, C, D) = \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2} = \frac{(1 + 2i)4i}{(3 + i)(1 + i)} = 2i.$$

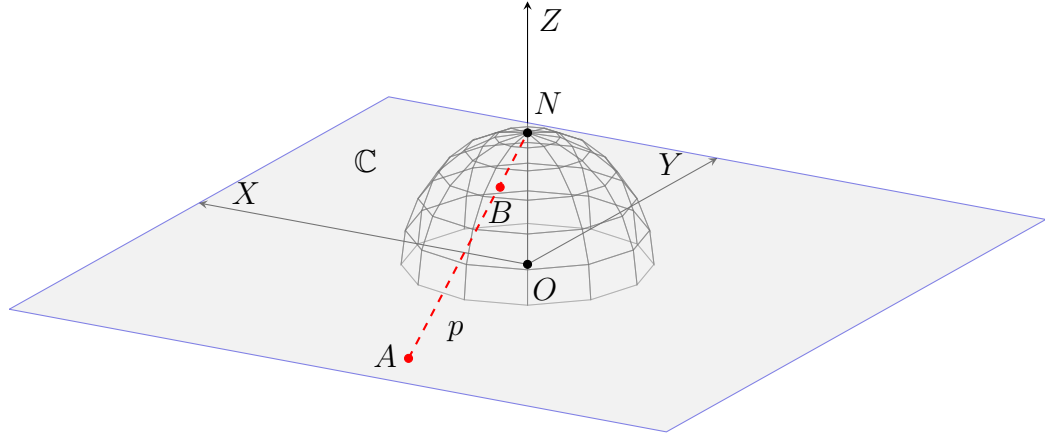
1.2 Riemannova sféra

Komplexní projektivní přímku můžeme také ztotožnit s tzv. Riemannovou sférou \mathbb{S}^2 tak, že popíšeme vzájemně jednoznačné zobrazení zvané stereografická projekce, jež každému bodu na \mathbb{S}^2 přiřazuje bod na \mathbb{CP}^1 . Riemannovu sféru zde definujeme jakožto sféru se středem v počátku a poloměrem 1, neboli:

$$\mathbb{S}^2 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 : X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}.$$

Na této sféře budeme dále označovat bod $N = (0, 0, 1)$. Dále do prostoru \mathbb{R}^3 přirozeným způsobem vnoříme rovinu $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ tak, že každému bodu $x + iy \in \mathbb{C}$ přiřadíme bod $(x, y, 0)$ v \mathbb{R}^3 .

Definice 1.11. Stereografickou projekcí nazveme zobrazení $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$, které každému bodu $B \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ přiřadí vlastní bod $A \in \mathbb{C} \subset \mathbb{CP}^1$, který vznikne jako průsečík přímky NB s komplexní rovinou \mathbb{C} . Pro bod N definujeme $\pi(N) = z_\infty$.



Obrázek 1.1 Stereografická projekce

Následující větu a důkaz částečně přebíráme z [1]. Upravujeme ji však, aby byla v souladu s námi zavedenými přesnějšími definicemi, sjednocujeme značení a precizně doplňujeme některé argumenty zejména ohledně bijektivitu stereografické projekce. Navíc kromě elementárně-geometrických argumentů [1] uvádíme i alternativní analytický důkaz.

Věta 1.12. *Zobrazení π z Definice 1.11 je bijekce. Obrazy bodů $(X, Y, Z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ jsou vlastní body, konkrétně:*

$$\pi(X, Y, Z) = \frac{X}{1-Z} + i \frac{Y}{1-Z}. \quad (1.4)$$

Inverzní zobrazení, které přiřazuje vlastnímu bodu $z = x + iy \in \mathbb{C}$ odpovídající bod na \mathbb{S}^2 , je dáno předpisem:

$$\pi^{-1}(x + iy) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

Důkaz. Označme $B = (X, Y, Z)$ bod na \mathbb{S}^2 různý od N a $A = (x, y)$ bod v rovině odpovídající obrazu bodu B při stereografické projekci. Dále projektujeme úsečku NA kolmo na rovinu $X = 0$ tak, že body B a A zobrazíme po řadě na body D a C , viz Obr. 1.2. Potom D a C mají souřadnice $(0, Y, Z)$ a $(0, y, 0)$ v \mathbb{R}^3 . Sestrojíme kolmici DE z bodu D na osu z . Díky tomu, že ED je rovnoběžná s OC , jsou si trojúhelníky $\triangle NED$ a $\triangle NOC$ podobné. Platí, že $NE : ED = NO : OC$, neboli

$$\frac{1-Z}{Y} = \frac{1}{y},$$

odkud dostaneme, že

$$y = \frac{Y}{1-Z}. \quad (1.5)$$

Projekcí přímky NA na rovinu $Y = 0$ obdobně získáme, že:

$$\frac{1-Z}{X} = \frac{1}{x},$$

z čehož vyplývá, že

$$x = \frac{X}{1 - Z}. \quad (1.6)$$

Pro nalezení inverzního zobrazení $\pi^{-1} : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2$ využijeme toho, že pro souřadnice bodů na \mathbb{S}^2 platí, že $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. Dosazením (1.5) a (1.6) dostáváme:

$$\begin{aligned} (x(1 - Z))^2 + (y(1 - Z))^2 + Z^2 &= 1 && / + 1 \\ (x(1 - Z))^2 + (y(1 - Z))^2 + Z^2 + 1 &= 2 && / - 2Z \\ (x(1 - Z))^2 + (y(1 - Z))^2 + (1 - Z)^2 &= 2(1 - Z) && / : (1 - Z)^2 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 + 1 = \frac{2}{1 - Z} \quad (1.7)$$

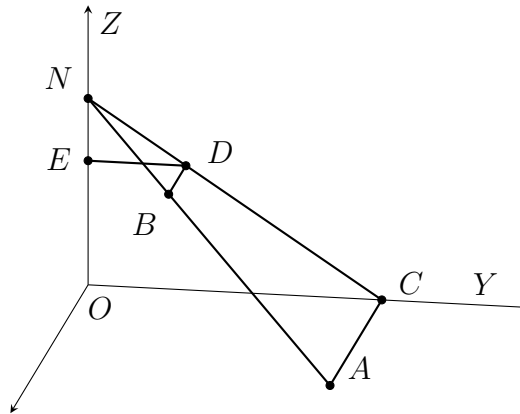
Vyjádřením Z z (1.7) dostáváme požadovaný vztah

$$Z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}. \quad (1.8)$$

Z (1.7) a vzorců (1.5) a (1.6) taktéž dostáváme zbylé vztahy:

$$X = x(1 - Z) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \quad (1.9)$$

$$Y = y(1 - Z) = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \quad (1.10)$$



Obrázek 1.2 Stereografická projekce z bodu N na rovinu $Z = 0$.

Důkaz vyjádření (1.4) bychom mohli také provést metodami analytické geometrie. Přímkou p z bodu N , viz Obr. 1.1, můžeme parametricky vyjádřit rovnicí

$$p = \{(1 - t)N + tA; t \in \mathbb{R}\}.$$

Zabývejme se nyní tím, ve kterém bodě protne přímka p rovinu $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, neboli tím, jaké jsou souřadnice bodu $A = (x, y, 0)$. Platí, že libovolný bod na přímce p

má třetí souřadnici rovnou $1 - t + tz$. Položíme-li tento výraz rovný 0, dostaneme $t = \frac{1}{1-z}$. První souřadnice bodu A je rovna $tx = \frac{x}{1-z}$ a druhá souřadnice je rovna $ty = \frac{y}{1-z}$. Odtud tedy dostáváme vyjádření bodu $A = (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0)$ a vidíme, že obrazy bodů na sféře při stereografické projekci mají tvar (1.4).

Bijektivitu zobrazení π lze poměrně snadno nahlédnout ze samotné definice tohoto zobrazení. Z Obr. 1.1 vidíme, že všechny přímky vycházející z bodu N , kromě rovnoběžky s rovinou $Z = 0$, protínají \mathbb{S}^2 právě v jednom dalším bodě a v právě jednom bodě také rovinu \mathbb{C} .

Pro korektnost ovšem doplníme formální důkaz bijektivnosti tak, že ověříme, že $\pi \circ \pi^{-1} = id$ a $\pi^{-1} \circ \pi = id$. Příným výpočtem dostaneme:

$$\pi \circ \pi^{-1}(x + iy) = \pi \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

Díky tomu, že:

$$1 - \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1},$$

platí:

$$\pi \circ \pi^{-1}(x + iy) = \frac{\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}}{\frac{2}{x^2 + y^2 + 1}} + i \frac{\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}}{\frac{2}{x^2 + y^2 + 1}} = x + iy.$$

Obdobně postupujeme při výpočtu $\pi^{-1} \circ \pi$. Nejprve odvodíme, že:

$$\begin{aligned} \left(\frac{X}{1-Z} \right)^2 + \left(\frac{Y}{1-Z} \right)^2 + 1 &= \frac{X^2 + Y^2 + 1 - 2Z + Z^2}{(1-Z)^2} = \frac{2 - 2Z}{(1-Z)^2} = \frac{2}{1-Z} \\ \left(\frac{X}{1-Z} \right)^2 + \left(\frac{Y}{1-Z} \right)^2 - 1 &= \frac{X^2 + Y^2 - 1 + 2Z - Z^2}{(1-Z)^2} = \frac{2Z(1-Z)}{(1-Z)^2} = \frac{2Z}{1-Z} \end{aligned}$$

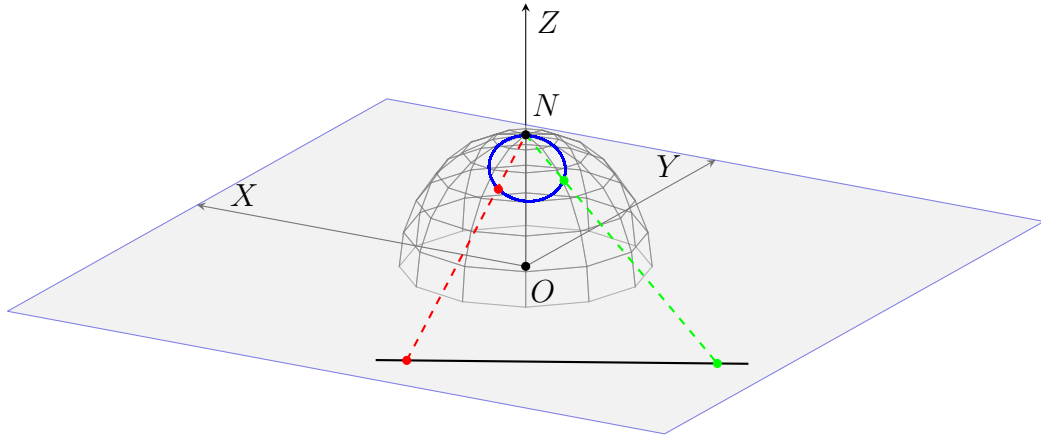
Odtud plyne, že:

$$\pi^{-1} \left(\frac{X}{1-Z} + i \frac{Y}{1-Z} \right) = \left(\frac{\frac{2X}{1-Z}}{\frac{2}{1-Z}}, \frac{\frac{2Y}{1-Z}}{\frac{2}{1-Z}}, \frac{\frac{2Z}{1-Z}}{\frac{2}{1-Z}} \right) = (X, Y, Z).$$

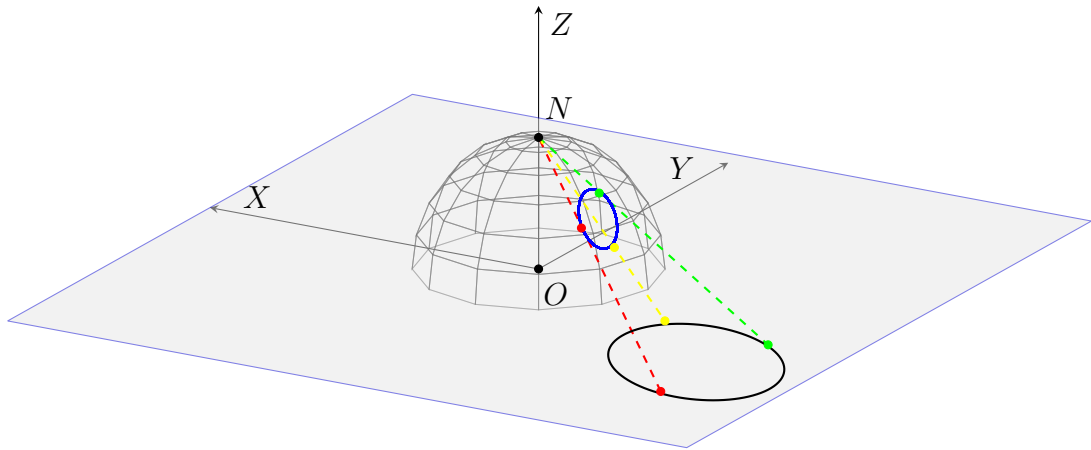
Tímto výpočtem jsme dokázali, že π je bijektivní zobrazení mezi prostory $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ a \mathbb{C} . Z Definice 1.11 víme, že $\pi(N) = z_\infty$ a $\pi^{-1}(z_\infty) = N$, odtud tedy plyne, že π je bijektivní zobrazení mezi celými prostory \mathbb{S}^2 a \mathbb{CP}^1 . □

Následující větu i s důkazem jsem částečně převzal též z [1], str. 292. Doplnil jsem tvrzení o vzájemné jednoznačnosti a důkaz této vlastnosti.

Věta 1.13. *Všechny kružnice na \mathbb{S}^2 se při stereografické projekci vzájemně jednoznačně zobrazují na kruhové křivky na \mathbb{CP}^1 . Přesněji, obrazem kružnice na \mathbb{S}^2 procházející bodem N při stereografické projekci kruhová křivka P_p z Definice 1.4, viz Obr. 1.3 a kružnice na sféře neprocházející bodem N se zobrazují na kruhové křivky P_k na \mathbb{CP}^1 , viz Obr. 1.4.*



Obrázek 1.3 Obraz kružnice procházející N v stereografické projekci



Obrázek 1.4 Obraz kružnice neprocházející N v stereografické projekci

Důkaz. Kružnice na Riemannově sféře je průnikem sféry s rovnicí

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \quad (1.11)$$

a nějaké roviny s rovnicí

$$aX + bY + cZ + d = 0, \quad (1.12)$$

kde alespoň jedna z hodnot a, b, c musí být nenulová. Dosazením (1.8), (1.9) a (1.10) do (1.12) dostáváme:

$$\frac{2ax + 2by + c(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2 + 1} + d = 0.$$

Tento vztah můžeme ekvivalentně přepsat do tvaru:

$$(c + d)x^2 + (c + d)y^2 + 2ax + 2by + (d - c) = 0. \quad (1.13)$$

Pokud kružnice na Riemannově sféře prochází bodem N , potom dosazením $N = (0, 0, 1)$ do (1.12) dostáváme $c + d = 0$. V tomto případě z (1.13) vidíme, že

obrazem kružnice je přímka s rovnicí $ax + by + d = 0$. V opačném případě, tedy pokud $c + d \neq 0$, můžeme rovnici (1.13) vydělit $c + d$, čímž získáme:

$$x^2 + y^2 + \frac{2a}{c+d}x + \frac{2b}{c+d}y = \frac{c-d}{c+d}.$$

Doplněním na čtverec dostaneme:

$$\left(x + \frac{a}{c+d}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{c+d}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}{(c+d)^2}.$$

Tento vztah je rovnicí pro kružnici v $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{CP}^1$ s poloměrem $R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}{(c+d)^2}}$ a středem v bodě $\left(-\frac{a}{c+d}, -\frac{b}{c+d}\right)$.

Abychom prokázali vzájemnou jednoznačnost, ukážeme, že obrazem každé kruhové křivky v \mathbb{CP}^1 je kružnice na \mathbb{S}^2 . Víme, že vztah (1.13) popisuje přímku nebo kružnici v $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$. Dosazením (1.6) a (1.5) do tohoto vztahu dostáváme:

$$(c+d) \left[\left(\frac{X}{1-Z}\right)^2 + \left(\frac{Y}{1-Z}\right)^2 \right] + 2a\frac{X}{1-Z} + 2b\frac{Y}{1-Z} + d - c = 0.$$

Což můžeme ekvivalentně přepsat jako:

$$(c+d)(X^2 + Y^2) + 2aX(1-Z) + 2bY(1-Z) + (d-c)(1-Z)^2 = 0.$$

Díky tomu, že platí (1.11), můžeme poslední rovnost upravit:

$$(c+d)(1-Z)^2 + 2aX(1-Z) + 2bY(1-Z) + (d-c)(1-Z)^2 = 0.$$

Vydělením tohoto vztahu $(1-Z)$ dostáváme:

$$(c+d)(1+Z) + 2aX + 2bY + (d-c)(1-Z) = 0.$$

Přeuspořádáním monočlenů dostáváme:

$$2aX + 2bY + 2cZ + 2d = 0. \quad (1.14)$$

Poslední rovnost ovšem popisuje rovinu v \mathbb{R}^3 . Ukázali jsme tedy, že vzor kružnice nebo přímky na \mathbb{C} při stereografické projekci musí ležet v rovině popsané rovnicí (1.14) a stejně tak na \mathbb{S}^2 , přičemž průnikem roviny a sféry je kružnice na \mathbb{S}^2 . \square

K formulaci a důkazu tvrzení o konformitě stereografické projekce nejprve standardním způsobem zavedeme úhel mezi křivkami.

Definice 1.14. *Mějme regulární hladké křivky $c_1(t)$ a $c_2(s)$ v \mathbb{R}^n takové, že $c_1(t_0) = c_2(s_0)$. Úhel mezi křivkami $c_1(t)$ a $c_2(s)$ v tomto splečném bodě definujeme jako úhel mezi jejich tečnými vektory, přesněji*

$$\alpha = \arccos \left(\frac{c'_1(t_0)}{\|c'_1(t_0)\|} \cdot \frac{c'_2(s_0)}{\|c'_2(s_0)\|} \right). \quad (1.15)$$

Věta 1.15. *Stereografická projekce zachovává velikost úhlů mezi křivkami, tedy se jedná o konformní zobrazení.*

Důkaz. Tvzení v tomto případě dokazují pro zobrazení inverzní k stereografické projekci. Díky tomu, že stereografická projekce je bijektivní a vzájemně jednoznačně zobrazuje křivky na \mathbb{S}^2 na \mathbb{CP}^1 tak dostáváme, že i původní zobrazení je konformní. Mějme regulární hladké rovinné křivky $c_1(t)$ a $c_2(s)$ takové, že $c_1(t_0) = c_2(s_0) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ a zobrazení π^{-1} , které v důkazu nadále označuji ρ , přičemž $B = \rho(x_0, y_0) \neq N$. Definujme $\tilde{c}_1(t) = \rho(c_1(t))$ a $\tilde{c}_2(s) = \rho(c_2(s))$. Dokáži, že potom vektory $\tilde{c}'_1(t_0), \tilde{c}'_2(s_0)$ svírají stejný úhel jako vektory $c'_1(t_0), c'_2(s_0)$. Označme tedy:

$$\rho(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) = (\rho_1(x, y), \rho_2(x, y), \rho_3(x, y)).$$

Dále označme M Jacobiho matici, neboli matici parciálních derivací zobrazení ρ :

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} & \frac{\partial \rho_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial x} & \frac{\partial \rho_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \rho_3}{\partial x} & \frac{\partial \rho_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(y^2 - x^2 + 1) & -4xy \\ -4xy & 2(x^2 - y^2 + 1) \\ 4x & 4y \end{pmatrix} \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

Jednoduše ověříme, že:

$$M^T(x, y)M(x, y) = \underbrace{\left(\frac{2}{1 + x^2 + y^2} \right)^2}_{h(x, y)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ze vzorce pro derivaci složeného zobrazení plyne:

$$\tilde{c}'_1(t)' = (\rho(c_1(t)))' = M(x_0, y_0) \cdot c'_1(t)$$

Obdobně pro křivku $\tilde{c}_2(t)$ dostáváme:

$$\tilde{c}'_2(t)' = (\rho(c_2(t)))' = M(x_0, y_0) \cdot c'_2(t),$$

Odtud plyne, že:

$$\tilde{c}'_1(t_0) \cdot \tilde{c}'_2(s_0) = c_1^T(t_0) M^T M c'_2(s_0) = h(x_0, y_0) c'_1(t_0) c'_2(s_0)$$

a analogicky:

$$\begin{aligned} \|\tilde{c}'_1(t_0)\|^2 &= h(x_0, y_0) \|c'_1(t_0)\|^2 \\ \|\tilde{c}'_2(s_0)\|^2 &= h(x_0, y_0) \|c'_2(s_0)\|^2. \end{aligned}$$

Zřejmě $h(x_0, y_0) \neq 0$, po dosazení do (1.15) tedy dostáváme:

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos \left(\frac{\tilde{c}'_1(t_0) \cdot \tilde{c}'_2(s_0)}{\|\tilde{c}'_1(t_0)\| \|\tilde{c}'_2(s_0)\|} \right) \\ &= \arccos \left(\frac{h(x_0, y_0) c'_1(t_0) \cdot c'_2(s_0)}{\|c'_1(t_0)\| \sqrt{h(x_0, y_0)} \|c'_2(s_0)\| \sqrt{h(x_0, y_0)}} \right) \\ &= \arccos \left(\frac{c'_1(t_0) \cdot c'_2(s_0)}{\|c'_1(t_0)\| \|c'_2(s_0)\|} \right), \end{aligned}$$

čímž dostaneme rovnost s úhlem původních křivek. □

Následující věta a důkaz nejsou převzaty z žádného zdroje, jde tedy o mou vlastní práci.

Věta 1.16. *Stereografická projekce je spojitě bijektivní zobrazení a její inverz je také spojitý, jedná se tedy o homeomorfismus.*

Důkaz. Bijektivnost byla dokázána ve Větě 1.12. Abychom se mohli zabývat konvergencí, připomeňme, že topologii na $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ jsme zavedli v Definici 1.7. Na \mathbb{S}^2 máme topologii zděděnou z \mathbb{R}^3 , jelikož $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$.

V bodech $B \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ platí, že π je dáno racionálními funkcemi, které jsou spojitě v každém bodě, kde jsou definované (jmenovatel $1 - z \neq 0$). Proto je π spojitě ve všech bodech $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. Dále se budeme zabývat spojitostí v N . Podle Lemmatu 1.8 stačí dokázat, že pro každou posloupnost bodů B_n na \mathbb{S}^2 konvergující k bodu N platí, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\pi(B_n)| = \infty.$$

Uvažujme bod $B_n = (X_n, Y_n, Z_n) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. Potom platí, že

$$\pi(B_n) = \left(\frac{X_n}{1 - Z_n}, \frac{Y_n}{1 - Z_n} \right), \quad |\pi(B_n)| = \frac{\sqrt{X_n^2 + Y_n^2}}{1 - Z_n}.$$

Z předpokladů plyne, že $X_n \rightarrow 0, Y_n \rightarrow 0, Z_n \rightarrow 1$, tedy $1 - Z_n \rightarrow 0_+$ a $\sqrt{X_n^2 + Y_n^2} \rightarrow 0$. Z vlastností bodů na sféře plyne, že

$$X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2 = 1 \Rightarrow X_n^2 + Y_n^2 = 1 - Z_n^2,$$

z čehož vyplývá, že

$$|\pi(B_n)| = \frac{\sqrt{1 - Z_n^2}}{1 - Z_n} = \frac{\sqrt{(1 - Z_n)(1 + Z_n)}}{1 - Z_n} = \sqrt{\frac{1 + Z_n}{1 - Z_n}}.$$

Díky tomu, že $Z_n \rightarrow 1$, tak $1 + Z_n \rightarrow 2$ a $1 - Z_n \rightarrow 0_+$, tedy $|\pi(B_n)| = \sqrt{\frac{1 + Z_n}{1 - Z_n}} \rightarrow \infty$, odkud již plyne, že i $\lim |\pi(B_n)| = z_\infty$, dle Lemmatu 1.8.

Dále dokáží, že i π^{-1} je spojitý. Platí, že pro vlastní body je toto zobrazení dáno racionálními funkcemi, jejichž jmenovatel $x^2 + y^2 + 1$ je zjevně nenulový, a tedy je spojitě, zbývá tedy dokázat spojitost v bodě z_∞ . Dokáží tedy, že pokud $(u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ a zároveň $\|(u_n, v_n)\| \rightarrow \infty$, pak $\pi^{-1}(u_n, v_n) \rightarrow N = (0, 0, 1)$. Uvažujme posloupnost takovou, že $u_n^2 + v_n^2 \rightarrow \infty$ a označme $r_n := \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \geq 0$. Potom

$$\pi^{-1}(u_n, v_n) = \left(\frac{2u_n}{r_n^2 + 1}, \frac{2v_n}{r_n^2 + 1}, \frac{r_n^2 - 1}{r_n^2 + 1} \right).$$

Nyní analyzují limitu pro každou souřadnici:

$$\begin{aligned} X &\leq \frac{2|u_n|}{r_n^2 + 1} \leq \frac{2r_n}{r_n^2 + 1} \rightarrow 0 \\ Y &\leq \frac{2|v_n|}{r_n^2 + 1} \leq \frac{2r_n}{r_n^2 + 1} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

tedy $X \rightarrow 0$ a $Y \rightarrow 0$. Pro třetí složku platí:

$$Z = \frac{r_n^2 - 1}{r_n^2 + 1} = \frac{1 - \frac{1}{r_n^2}}{1 + \frac{1}{r_n^2}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$$

Tedy platí, že $Z \rightarrow 1$.

Tímto jsme dokázali spojitost stereografické projekce a jejího inverzu v bodě N , resp. z_∞ , spojitost v ostatních bodech je zřejmá z diskuse výše. Prokázali jsme tedy spojitost ve všech bodech definičního oboru a také že stereografická projekce je homeomorfismus.

□

2 Möbiovy transformace

2.1 Základní typy Möbiových transformací

V této kapitole se zaměříme na konkrétní příklady Möbiových transformací a prozkoumáme jejich základní vlastnosti. Naším cílem bude ukázat, jak se pomocí maticového zápisu dají jednotlivé typy zobrazení, jako jsou rotace, posunutí, stejnolehlosti či inverze, vyjádřit jednotným způsobem. Tyto příklady nám pomohou lépe porozumět geometrickému významu Möbiových transformací a jejich působení na komplexní projektivní přímku, která byla podrobně zavedena v předchozí kapitole.

Definice 2.1. Zobrazení $\mathcal{K} : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$, které každému bodu $(z_1, z_2)^T \in \mathbb{CP}^1$ přiřadí bod $(z'_1, z'_2)^T \in \mathbb{CP}^1$ tak, že platí:

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

se nazývá *převrácená kruhová inverze*.

Vlastnímu bodu $(z, 1)^T$ přiřadí bod $\left(\frac{1}{z}, 1\right)^T$ a můžeme ji tedy také chápat jako složení kruhové inverze podle jednotkové kružnice se středem v počátku a zrcadlení podle reálné osy. Bod z_∞ se zobrazí na bod $(0, 1)^T$. Obrazem $(0, 1)^T$ je bod z_∞ .

Tedy pro $z \neq 0$ platí, že $z \rightarrow \frac{1}{z}$, kde $z = x + yi$. Převrácenou kruhovou inverzi můžeme také definovat pro body $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C} \subseteq \mathbb{CP}^1$ tak, že:

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Příklad 2.2. Pro kruhovou křivku

$$P_p = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}, z \in p \mid \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 2 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, p \subset \mathbb{C}$$

určíme její obraz $\mathcal{K}(P_p)$.

Nejprve na P_p zvolíme tři body

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}, Z_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, Z_3 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

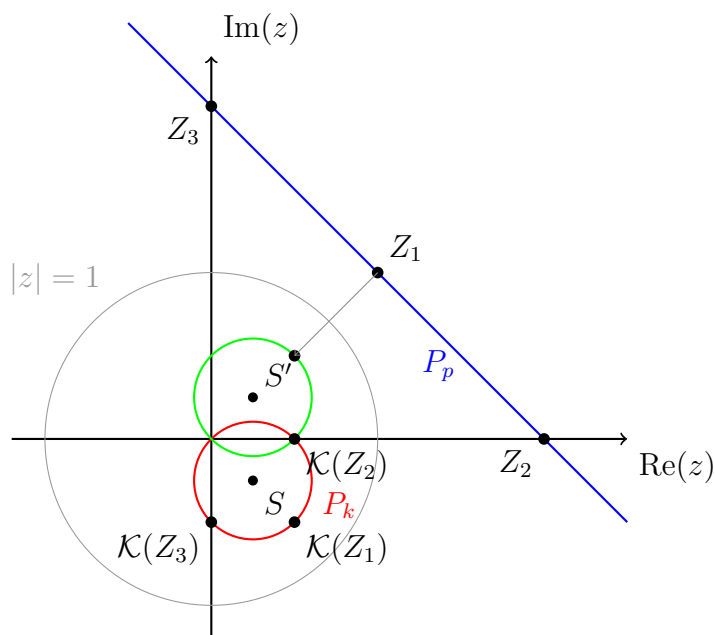
Poté určíme jejich obrazy:

$$\mathcal{K}(Z_1) = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \mathcal{K}(Z_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \mathcal{K}(Z_3) = \begin{pmatrix} \frac{-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Výsledným objektem bude opět kruhová křivka, jak bude dokázáno ve Větě 2.11.

Řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - y\right)^2 &= r^2 \\ \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + y^2 &= r^2 \\ x^2 + \left(-\frac{1}{2} - y\right)^2 &= r^2 \end{aligned}$$



Obrázek 2.1 Obraz přímky P_p při kruhové inverzi podle jednotkové kružnice (zeleně) a výsledný obraz přímky při převrácené kruhové inverzi (červeně)

zjistíme, že body $\frac{1-i}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{i}{2}$ leží na jedné kružnici v \mathbb{C} se středem $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ a poloměrem $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Obrazem křivky P_p tedy bude kruhová křivka

$$P_k = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} : z \in k \right\}, \quad k \subset \mathbb{C},$$

kde k je kružnice s výše uvedeným středem a poloměrem.

Definice 2.3. Zobrazení $\mathcal{P}_\omega : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$, které každému bodu $(z_1, z_2)^T \in \mathbb{CP}^1$ přiřadí bod $(z'_1, z'_2)^T \in \mathbb{CP}^1$ tak, že platí:

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

se nazývá posunutí, kde $\omega \in \mathbb{C}$ je vektor posunutí.

Vlastní bod $(z, 1)^T$ se zobrazí na bod $(z + \omega, 1)^T$. Bod z_∞ se zobrazí sám na sebe.

Definice 2.4. Zobrazení $\mathcal{R}_\phi : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$, které každému bodu $(z_1, z_2)^T \in \mathbb{CP}^1$ přiřadí bod $(z'_1, z'_2)^T \in \mathbb{CP}^1$ tak, že platí:

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

se nazývá otočení o úhel $\phi \in \mathbb{R}$.

Vlastní bod $(z, 1)^T$ se zobrazí na bod $(ze^{i\phi}, 1)^T$. Bod z_∞ se zobrazí sám na sebe. Bod se souřadnicemi (x, y) se zobrazí na bod se souřadnicemi $(x \cos \phi - y \sin \phi, x \sin \phi + y \cos \phi)$.

Definice 2.5. Zobrazení $\mathcal{H}_\lambda : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$, které každému bodu $(z_1, z_2)^T \in \mathbb{CP}^1$ přiřadí bod $(z'_1, z'_2)^T \in \mathbb{CP}^1$ tak, že platí:

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

se nazývá *stejnolehlost*, kde $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je koeficient *stejnolehlosti*.

Vlastní bod $(z, 1)^T$ se zobrazí na bod $(\lambda z, 1)^T$. Bod z_∞ se zobrazí sám na sebe. Bod se souřadnicemi (x, y) se zobrazí na $(\lambda x, \lambda y)$.

Důležitou vlastností Möbiových transformací je, že zachovávají úhly mezi křivkami. Tuto vlastnost by bylo možno obecně odvodit z toho, že jsou vyjádřitelné jako funkce komplexní proměnné. My však tuto vlastnost dokážeme přímo pro námi definované transformace.

Věta 2.6. *Posunutí, otočení, stejnolehlost i převrácená kruhová inverze jsou konformní zobrazení, tedy zachovávají velikosti úhlů.*

Důkaz. V případě otočení, posunutí a stejnolehlosti je tvrzení zřejmé. Větu tedy dokáží pouze pro převrácenou kruhovou inverzi.

Nechť $c_1(t)$ a $c_2(s)$ jsou hladké regulární rovinné křivky takové, že $c_1(t_0) = c_2(s_0) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ a zobrazení \mathcal{K} přičemž $B = \mathcal{K}((x_0, y_0)) \neq z_\infty$. Definujme $\tilde{c}_1(t) = \mathcal{K}(c_1(t))$ a $\tilde{c}_2(s) = \mathcal{K}(c_2(s))$. Dokáži, že potom vektory $\tilde{c}'_1(t_0), \tilde{c}'_2(s_0)$ svírají stejný úhel jako vektory $c'_1(t_0), c'_2(s_0)$.

Z Definice 2.1 víme, že převrácená kruhová inverze má tvar:

$$\mathcal{K}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = (\mathcal{K}_1(x, y), \mathcal{K}_2(x, y)).$$

Dále označme M Jacobiho matici, neboli matici parciálních derivací zobrazení \mathcal{K} :

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial x} & \frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathcal{K}_2}{\partial x} & \frac{\partial \mathcal{K}_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} y^2 - x^2 & -2xy \\ 2xy & y^2 - x^2 \end{pmatrix}.$$

Dále jednoduše ověříme, že:

$$M(x, y)^T M(x, y) = \underbrace{\frac{1}{(x^2 + y^2)^2}}_{h(x, y)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ze vzorce pro derivaci složeného zobrazení plyne:

$$\tilde{c}'_1(t)' = (\mathcal{K} \circ c_i)'(t) = M(c_i(t)) \cdot c'_i(t), \quad i = 1, 2.$$

Odtud plyne, že:

$$\tilde{c}'_1(t_0) \cdot \tilde{c}'_2(s_0) = c_1^T(t_0) M^T M c_2'(s_0) = h(x_0, y_0) c_1'(t_0) c_2'(s_0)$$

a analogicky

$$\|\tilde{c}'_1(t_0)\|^2 = h(x, y) \|c'_1(t_0)\|^2.$$

Zjevně $h(x, y) \neq 0$. Ve výrazu pro úhel mezi zobrazenými křivkami se tedy faktory $h(x, y)$ vykrátí, čímž dostaneme rovnost s úhlem původních křivek. \square

Věta 2.7. *Převrácená kruhová inverze, stejnolehlost, posunutí a otočení jsou spojitá zobrazení na \mathbb{CP}^1 .*

Důkaz. Větu nejprve dokážu pro posunutí, otočení a stejnolehlost. Pro vlastní body je tvrzení zřejmé, neboť všechna zobrazení jsou v tomto případě určena spojitou funkcí komplexního čísla. Pro všechna tři zobrazení platí, že nevlastní bod z_∞ se zobrazí na sebe samotného.

Nechť $(z_n, 1)^T$ je posloupnost vlastních bodů, která konverguje k nevlastnímu bodu z_∞ , tedy $|z_n| \rightarrow \infty$.

- Pro \mathcal{P}_ω máme $\mathcal{P}_\omega(z_n, 1)^T = (z_n + \omega, 1)^T$, a protože $|z_n + \omega| \rightarrow \infty$, platí podle Lemmatu 1.8, že tato posloupnost konverguje k nevlastnímu bodu.
- Pro \mathcal{R}_ϕ máme $\mathcal{R}_\phi(z_n, 1)^T = (z_n e^{i\phi}, 1)^T$, a protože $|z_n e^{i\phi}| = |z_n| \rightarrow \infty$, platí opět podle Lemmatu 1.8, že posloupnost konverguje k nevlastnímu bodu.
- Pro \mathcal{H}_λ máme $\mathcal{H}_\lambda(z_n, 1)^T = (\lambda z_n, 1)^T$, a protože $|\lambda z_n| \rightarrow \infty$, platí totéž.

Ve všech třech případech tedy posloupnost obrazů konverguje k nevlastnímu bodu. Z toho plyne, že každé z těchto zobrazení je spojité na celé \mathbb{CP}^1 .

Nakonec dokážu tvrzení pro převrácenou kruhovou inverzi \mathcal{K} . Spojitost budeme dokazovat pouze v bodech $(0, 1)^T$ a z_∞ , neboť v ostatních bodech je zobrazení určeno spojitou funkcí komplexního čísla.

Nejprve uvažujme bod $(0, 1)^T$. Nechť $(z_n, 1)^T$ je posloupnost vlastních bodů konvergující k $(0, 1)^T$, tedy $z_n \rightarrow 0$. Potom platí

$$\mathcal{K}(z_n, 1)^T = \left(\frac{1}{z_n}, 1 \right)^T,$$

a protože $|z_n| \rightarrow 0$, máme $|\frac{1}{z_n}| \rightarrow \infty$. Podle Lemmatu 1.8 tedy posloupnost obrazů konverguje k nevlastnímu bodu. Zobrazení \mathcal{K} je tedy spojité v bodě $(0, 1)^T$.

Nyní uvažujme nevlastní bod z_∞ . Nechť $(z_n, 1)^T$ je posloupnost vlastních bodů konvergující k z_∞ , tedy $|z_n| \rightarrow \infty$. Potom

$$\mathcal{K}(z_n, 1)^T = \left(\frac{1}{z_n}, 1 \right)^T,$$

a jelikož $|\frac{1}{z_n}| \rightarrow 0$, plyne, že

$$\mathcal{K}(z_n, 1)^T \rightarrow (0, 1)^T = \mathcal{K}(z_\infty).$$

Tím je spojitost v bodě z_∞ dokázána. □

Věta 2.8. *Každou Möbiovu transformaci lze vyjádřit jako složení posunutí, otočení, stejnolehlosti a převrácené kruhové inverze.*

Důkaz. Uvažujme matici Möbiovy transformace:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Pokud $c = 0$, potom zřejmě z regularity matice M je zřejmě $d \neq 0$, a tedy M můžeme až na nenulový násobek $\frac{1}{d}$ rozložit jako:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{P}_{\frac{b}{d}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{a}{d} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{H}_{\frac{a}{d}}}$$

Matice $\mathcal{P}_{\frac{b}{d}}$ odpovídá matici posunutí s parametrem $\frac{b}{d}$ a matice $\mathcal{H}_{\frac{a}{d}}$ matici stejno-
lehlosti s parametrem $\frac{a}{d}$.

V případě, že $c \neq 0$, lze M až na nenulový násobek $\frac{c}{ad-bc}$ zapsat jako součin matic:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{P}_{\frac{a}{c}}} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{H}_{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{K}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{cd}{ad-bc} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{P}_{\frac{cd}{ad-bc}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{c^2}{ad-bc} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_S$$

Matice $\mathcal{P}_{\frac{a}{c}}$, resp. $\mathcal{P}_{\frac{cd}{ad-bc}}$, odpovídá matici posunutí s parametrem $\frac{a}{c}$, resp. $\frac{cd}{ad-bc}$, matice \mathcal{H}_{-1} je matice stejnolehlosti s koeficientem -1 , matice \mathcal{K} je maticí převrácené kruhové inverze a matice S odpovídá matici složení otočení a stejnolehlosti. \square

Znění následujícího lemmatu je uvedeno v [3], ale pouze s naznačeným důkazem. Rozhodl jsem se jej v této práci dokončit a uvést kompletní.

Lemma 2.9. *Každou kružnici a přímku v $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ lze reprezentovat vztahem:*

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : az\bar{z} - \bar{w}z - w\bar{z} + c = 0, a, c \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C}, |w|^2 > ac \right\}. \quad (2.5)$$

Je-li $a \neq 0$, potom (2.5) popisuje kružnici, a pokud $a = 0$, pak (2.5) je rovnicí přímky.

Důkaz. Rovnici každé kružnice můžeme zapsat ve tvaru $|z - z_0| = r$, kde z_0 je střed a $r > 0$ je poloměr. Poté můžeme psát:

$$\begin{aligned} |z - z_0| = r &\Leftrightarrow |z - z_0|^2 = r^2 \Leftrightarrow (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2 \\ &\Leftrightarrow z\bar{z} - \bar{z}_0z - z_0\bar{z} + (|z_0|^2 - r^2) = 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnice odpovídá vztahu (2.5) pro $a = 1, w = -z_0, c = |z_0|^2 - r^2$, kde $|w|^2 - ac = |z_0|^2 - (|z_0|^2 - r^2) = r^2 > 0$.

Každou přímku v komplexní rovině můžeme popsat rovnicí $|z - z_1| = |z - z_2|$ pro nějaké $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Poté platí:

$$\begin{aligned} |z - z_1| = |z - z_2| &\Leftrightarrow |z - z_1|^2 = |z - z_2|^2 \Leftrightarrow (z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1) = (z - z_2)(\bar{z} - \bar{z}_2) \\ &\Leftrightarrow \overline{(z_2 - z_1)z} + (z_2 - z_1)\bar{z} + (|z_1|^2 - |z_2|^2) = 0. \end{aligned}$$

Tedy vztah (2.5) je splněn pro $a = 0, w = z_2 - z_1, c = |z_1|^2 - |z_2|^2$ a $|w|^2 - ac = |z_2 - z_1|^2 > 0$.

Naopak předpokládejme, že platí (2.5). Pokud $a = 0$, poté je tento vztah lineární rovnicí s x a y , kde $z = x + iy$, a tedy (2.5) reprezentuje přímku. Pokud $a \neq 0$, tak vydělením obou stran (2.5) členem a dostáváme:

$$\begin{aligned} z\bar{z} + \frac{\bar{w}}{a}\bar{z} + \frac{w}{a}z + \frac{c}{a} + \frac{|w^2|}{a^2} - \frac{|w^2|}{a^2} &= 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{\bar{w}}{a}\right)\left(\bar{z} + \frac{w}{a}\right) = \frac{|w|^2 - ac}{a^2} \\ \Leftrightarrow \left|z + \frac{\bar{w}}{a}\right|^2 &= \frac{|w|^2 - ac}{a^2} \Leftrightarrow \left|z + \frac{\bar{w}}{a}\right| = \sqrt{\frac{|w|^2 - ac}{a^2}}, \end{aligned}$$

tedy (2.5) odpovídá rovnici kružnice se středem $z_0 = -\frac{\bar{w}}{a}$ a poloměrem $r = \sqrt{\frac{|w|^2 - ac}{a^2}} > 0$. \square

Nyní využijeme předchozího lemmatu k tomu, abychom mohli vyjádřit kruhové křivky v $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$.

Věta 2.10. *Každou kruhovou křivku v $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ můžeme vyjádřit:*

$$\left\{ (z_1, z_2)^T \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1 : az_1\bar{z}_1 + wz_1\bar{z}_2 + \bar{w}z_2\bar{z}_1 + cz_2\bar{z}_2 = 0; \right. \\ \left. a, c \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C}, |w|^2 > ac \right\}. \quad (2.6)$$

Důkaz. Pro popis kruhových křivek v prostoru $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ přejdeme od rovnice (2.5), která popisuje buď kružnici, nebo přímku v komplexní rovině, k jejímu projekтивnímu tvaru. Zavedeme homogenní souřadnice $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tak, že: $z \mapsto \frac{z_1}{z_2}$. Dosazením do (2.5) a vynásobením této rovnice výrazem $|z_2|^2$ dostáváme (2.6). \square

Tento vztah tedy popisuje kruhové křivky v $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Také platí, že (2.6) zahrnuje nevlastní bod z_∞ právě tehdy, když $a = 0$, neboli když se jedná o rovnici přímky.

2.2 Vlastnosti Möbiových transformací

V této sekci nejprve využijeme výsledků z předchozí podkapitoly k tomu, abychom dokázali některé důležité vlastnosti Möbiových transformací. Poté uvedeme a dokážeme další zajímavá tvrzení, která doplníme o praktické příklady.

Věta 2.11. *Každá Möbiova transformace zachovává kruhové křivky.*

Důkaz. Dle Věty 2.8 každou Möbiovu transformaci lze vyjádřit jako složení otočení, posunutí, stejnolehlosti a převrácené kruhové inverze. Posunutí, otočení i stejnolehlost zřejmě zachovávají kruhové křivky, tvrzení tedy stačí dokázat pro převrácenou kruhovou inverzi. Z Definice 2.1 plyne, že převrácená kruhová inverze vlastnímu bodu (z_1, z_2) přiřadí bod (z_2, z_1) . Do předpisu (2.6) tedy za z_1 stačí dosadit z_2 a naopak, čímž dostáváme:

$$az_2\bar{z}_2 + wz_2\bar{z}_1 + \bar{w}z_1\bar{z}_2 + cz_1\bar{z}_1 = 0, |w|^2 > ac.$$

Záměnou koeficientů a a c a dosazením \bar{w} za w dostaneme původní rovnici (2.6), odkud již plyne, že obrazem kruhové křivky je opět kruhová křivka. \square

Důsledek 2.12. *Každá Möbiova transformace zachovává úhly mezi křivkami, neboli se jedná o konformní zobrazení.*

Důkaz. Jak jsme již zmínili, bylo by možné konformitu odvodit obecně z vyjádření transformace jako funkce komplexní proměnné. My však máme k dispozici následující konkrétní argument. Dle Věty 2.8 lze každou Möbiovu transformaci vyjádřit jako složení posunutí, otočení, stejnolehlosti a převrácené kruhové inverze. Z Věty 2.6 víme, že každé z těchto zobrazení zachovává úhly. \square

Důsledek 2.13. *Möbiovy transformace jsou spojité na $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$.*

Důkaz. Nejprve opět využijeme Větu 2.8 o rozkladu Möbiových transformací na posunutí, otočení, stejnolehlosti a převrácené kruhové inverze. Z Věty 2.7 víme, že všechna tato zobrazení jsou spojitá na \mathbb{CP}^1 . Složení spojitých zobrazení je spojité, a tedy i Möbiovy transformace jsou spojité. \square

Věta 2.14. *Möbiovy transformace zachovávají dvojpoměr. Je-li tedy M Möbiova transformace a $A, B, C, D \in \mathbb{CP}^1$, potom*

$$(A, B, C, D) = (M(A), M(B), M(C), M(D)).$$

Důkaz. Označme $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ vektorové zástupce bodů A, B, C, D a necht:

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Potom platí:

$$\begin{aligned}\overline{M}(\mathbf{c}) &= \overline{M}(\alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b}) = \alpha_1 \overline{M}(\mathbf{a}) + \beta_1 \overline{M}(\mathbf{b}) \\ \overline{M}(\mathbf{d}) &= \overline{M}(\alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}) = \alpha_2 \overline{M}(\mathbf{a}) + \beta_2 \overline{M}(\mathbf{b}),\end{aligned}$$

kde \overline{M} je lineární zobrazení příslušné M . Vektory $\overline{M}(\mathbf{a}), \overline{M}(\mathbf{b}), \overline{M}(\mathbf{c}), \overline{M}(\mathbf{d})$ reprezentují body $M(A), M(B), M(C), M(D)$. Vidíme, že M zachovává koeficienty lineární kombinace a dvojpoměr se tedy nezmění. \square

Následující lemma lze v podobném znění nalézt v [4], kap. 3, jako Lemma 3.2.10. Důkaz je zde pouze naznačený, rozhodl jsem se jej tedy dokončit a uvést celý.

Lemma 2.15. *Každá Möbiova transformace má buď 1, nebo 2 pevné body, nebo se jedná o identitu.*

Důkaz. Tuto větu by bylo možno dokázat s využitím tří možných Jordanových tvarů matice transformace. My však dáváme přednost diskuzi s rozlišením, kdy je z_∞ pevným bodem. V důkaze budeme pracovat s obecnou Möbiovu transformací danou maticí:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a postupně vyřešíme dva případy.

- Pokud $c \neq 0$, poté z_∞ není pevným bodem a dále se tedy budeme zabývat pouze vlastními body. Z Lemmatu 1.6 víme, že Möbiovy transformace mají na vlastních bodech tvar lineárně lomených zobrazení, konkrétně:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d, z \in \mathbb{C}.$$

Abychom našli vlastní pevné body Möbiovy transformace danou maticí M , musíme vyřešit rovnici:

$$z = \frac{az + b}{cz + d}. \tag{2.7}$$

Jmenovatel je v tomto případě nenulový, neboť kdyby $z = -\frac{d}{c}$ potom, jak bylo vysvětleno v textu pod Lemmatem 1.6, by obrazem byl nevlastní bod a tedy vlastní bod by se zobrazil na nevlastní, a tedy by nemohl být pevným bodem.

Vynásobením jmenovatelem dostáváme kvadratickou rovnici v proměnné z s komplexními koeficienty:

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0. \quad (2.8)$$

Ze základní věty algebry, [5], plyne, že (2.8) musí mít alespoň jeden kořen. Tedy (2.8) má buď dva různé kořeny, nebo jeden dvojnásobný kořen.

- Pokud $c = 0$, potom z_∞ je pevným bodem a budeme se tedy dále zabývat pouze vlastními body, přičemž opět rozlišíme dva případy:
 - Uvažujme $a \neq d$. Poté (2.8) se redukuje na lineární rovnici, která má jediné řešení $z = \frac{b}{d-a}$, tedy $(\frac{b}{d-a}, 1)^T \neq z_\infty$ je také pevný bod. Tedy v tomto případě máme dva pevné body.
 - Nakonec, pokud $a = d$, tak (2.8) se redukuje na $0 = -b$, tedy $b = 0$, tedy M je identita a každý bod je pevným bodem příslušné Möbiovy transformace.

□

Důkaz následující věty je částečně převzat z [1], str. 311-312, konkrétně důkaz existence. Upravil jsem jej tak, aby především odpovídal pojetí Möbiovy transformací jako maticových zobrazení tak, jak byly zavedené v Kapitole 1.1, a aby byl v souladu s dalším značením používaným v této práci. Důkaz o jednoznačnosti je převzatý z [4], kde je toto tvrzení označeno jako Tvrzení 3.2.10.

Věta 2.16. *Jsou-li dány tři různé vzory $(Z_1, Z_2, Z_3) \in \mathbb{CP}^1$ a tři různé obrazy $(W_1, W_2, W_3) \in \mathbb{CP}^1$, pak existuje právě jedna Möbiova transformace M taková, že $M(Z_i) = W_i$, pro $i = 1, 2, 3$.*

Důkaz. Existence: Existenci předepsaného zobrazení by bylo možné nahlédnout z vhodné volby vektorových zástupců daných vzorů a obrazů, podobně jako tomu je v důkazu Věty 4.13 v [2]. My však opět zvolíme konkrétní konstrukci s rozlišením vlastních a nevlastních bodů.

Najdeme Möbiovu transformaci M , která zadané body $Z_1 = (z_1, 1)^T, Z_2 = (z_2, 1)^T, Z_3 = (z_3, 1)^T$ zobrazí po řadě na body $(0, 1)^T, (1, 1)^T, z_\infty = (1, 0)^T$. Nejprve vyřešíme případ, kdy všechny tři body jsou vlastní.

Z podmínek $Z_1 \mapsto (0, 1)^T$ a $Z_3 \mapsto z_\infty$ snadno určíme, že M musí být tvaru:

$$\begin{pmatrix} k & -z_1 k \\ 1 & -z_3 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{C}.$$

Hodnotu parametru k pak určíme z poslední podmínky $Z_2 \mapsto (1, 1)^T$.

Dále se budeme zabývat případem, kdy $Z_1 = z_\infty$, tedy musí platit:

$$Z_1 = (1, 0)^T \mapsto (0, 1)^T, \quad Z_2 \mapsto (1, 1)^T, \quad Z_3 \mapsto (1, 0)^T.$$

Z první a třetí podmínky opět nejprve určíme, že M musí být tvaru:

$$\begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & -z_3 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{C}.$$

Z podmínky $Z_2 \mapsto (1, 1)^T$ poté opět dopočítáme parametr k .

Dále se budeme věnovat případu, kdy $Z_2 = z_\infty$, tedy:

$$Z_1 \mapsto (0, 1)^T, \quad Z_2 = (1, 0)^T \mapsto (1, 1)^T, \quad Z_3 \mapsto (1, 0)^T.$$

Úlohu můžeme řešit stejně jako v prvním případě, zde ovšem vidíme, že pro splnění druhé podmínky musí být $k = 1$. V tomto případě máme tedy jedinou Möbiovu transformaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & -z_1 \\ 1 & -z_3 \end{pmatrix}.$$

Nakonec popíšeme případ, kdy $Z_3 = z_\infty$, tedy:

$$Z_1 \mapsto (0, 1)^T, \quad Z_2 \mapsto (1, 1)^T, \quad Z_3 = (1, 0)^T \mapsto (1, 0)^T.$$

Obdobným způsobem jako v předchozích případech určíme z první a poslední podmínky, že M musí být tvaru:

$$\begin{pmatrix} k & -z_1 k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z podmínky $Z_2 \mapsto (1, 1)^T$ následně určíme hodnotu k .

Pro libovolné různé vzory $(Z_1, Z_2, Z_3) \in \mathbb{CP}^1$ tedy můžeme najít Möbiovu transformaci M_1 takovou, že:

$$M_1(Z_1) = (0, 1)^T, \quad M_1(Z_2) = (1, 1)^T, \quad M_1(Z_3) = z_\infty.$$

Pro libovolné různé obrazy $(W_1, W_2, W_3) \in \mathbb{CP}^1$ můžeme stejným způsobem nalézt Möbiovu transformaci M_2 takovou, že:

$$M_2(W_1) = (0, 1)^T, \quad M_2(W_2) = (1, 1)^T, \quad M_2(W_3) = z_\infty.$$

Složením těchto Möbiových transformací $M = M_2^{-1} \circ M_1$ získáme výslednou transformaci M pro níž platí:

$$M(Z_i) = W_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Jednoznačnost:

Pro důkaz jednoznačnosti předpokládejme nejprve, že existují dvě Möbiovy transformace U, V takové, že $Z_1 \mapsto W_1, Z_2 \mapsto W_2, Z_3 \mapsto W_3$. Potom $V^{-1} \circ U$ je Möbiova transformace fixující body Z_1, Z_2, Z_3 . Podle Lemmatu 2.15 existuje pouze jedna Möbiova transformace fixující více než dva body, a to identita. Tedy platí:

$$V^{-1} \circ U(Z) = Z, \quad \forall Z \in \mathbb{CP}^1.$$

Odtud dostáváme:

$$U(Z) = V(Z) \quad \forall Z \in \mathbb{CP}^1.$$

□

Následující příklad ilustruje, jak lze najít Möbiovu transformaci, která zobrazuje tři zadané body na tři jiné. Podobné příklady lze nalézt např. v [1], str. 314-315. Řešení tohoto příkladu jsem opět upravil tak, aby odpovídalo koncepci Möbiových transformací v této práci.

Příklad 2.17. Nalezněte matici Möbiovy transformace $M : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$, která splňuje:

$$M(2, 1)^T = (i, 1)^T, \quad M(3, 4)^T = (1 + 3i, 1)^T, \quad M(3, 1)^T = (2, 1)^T$$

V souladu s důkazem předchozí věty nejprve nalezneme matici Möbiovy transformace M_1 , která zobrazuje zadané body $(2, 1)^T, (3, 4)^T, (3, 1)^T$ po řadě na body $(0, 1)^T, (1, 1)^T, z_\infty$. Z Věty 2.16 plyne, že existuje právě jedna taková.

Z podmíněk $(2, 1)^T \mapsto (0, 1)^T$ a $(3, 1)^T \mapsto z_\infty$ plyne, že matice M_1 musí mít tvar:

$$\begin{pmatrix} k & -2k \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{C}.$$

Z podmínky $(3, 4)^T \mapsto (1, 1)^T$ snadno dopočítáme, že $k = \frac{9}{5}$. Matice M_1 má tedy v homogenních souřadnicích tvar:

$$\begin{pmatrix} 9 & -18 \\ 5 & -15 \end{pmatrix}$$

Dále budeme hledat matici Möbiovy transformace M_2 zobrazující body $(i, 1)^T, (1 + 3i, 1)^T, (2, 1)^T$ po řadě na body $(0, 1)^T, (1, 1)^T, z_\infty$. Obdobně nejprve určíme, že matice M_2 musí mít tvar:

$$\begin{pmatrix} k & -ik \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{C}$$

Z podmínky $(1 + 3i, 1)^T \mapsto (1, 1)^T$ plyne, že $k = 1 + i$. Matice M_2 má tedy v homogenních souřadnicích tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 + i & 1 - i \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Nakonec spočítáme matici výsledné Möbiovy transformace $M = M_2^{-1} \circ M_1$ pomocí vynásobení příslušných matic v souladu s Definicí 1.5, tedy:

$$M = \begin{pmatrix} 1 + i & 1 - i \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 9 & -18 \\ 5 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32}{5} - \frac{19i}{5} & -\frac{69}{5} + \frac{48i}{5} \\ \frac{7}{10} - \frac{19i}{10} & \frac{3}{5} + \frac{24i}{5} \end{pmatrix}$$

Věta 2.18. Čtyři různé body $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 \in \mathbb{CP}^1$ leží na kruhové křivce právě tehdy, když je jejich dvojpoměr (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) reálné číslo.

Důkaz. Uvažujme tři různé body $Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{CP}^1$ ležící na kruhové křivce. Potom z předchozí Věty 2.16 plyne, že existuje právě jedna Möbiova transformace M , která tyto body zobrazí po řadě na body $(0, 1)^T, (1, 1)^T, z_\infty$. Z Věty 2.11 plyne, že obrazem kruhové křivky je opět kruhová křivka, tedy obrazem křivky procházející body Z_1, Z_2, Z_3 je přímka $\{(t, 1)^T; t \in \mathbb{R}\} \cup z_\infty$. Uvažujme další bod Z_4 na \mathbb{CP}^1 . Tento bod leží na stejné kruhové křivce jako body Z_1, Z_2, Z_3 právě tehdy, když jeho obraz $M(Z_4)$ leží na reálné přímce.

Z Věty 2.14 plyne, že Möbiovy transformace zachovávají dvojpoměr, tedy:

$$(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) = (M(Z_1), M(Z_2), M(Z_3), M(Z_4)) = (W_1, W_2, W_3, W_4).$$

Dále vyjádříme tyto body v homogenních souřadnicích:

$$W_1 = (0, 1)^T, W_2 = (1, 1)^T, W_3 = (1, 0)^T, W_4 = M(Z_4) = (t, 1)^T.$$

Dále spočítáme dvojpoměr této uspořádané čtveřice, tedy body W_3 a W_4 vyjádříme jako lineární kombinace bodů W_1 a W_2 :

$$\begin{aligned} W_3 &= -1 \cdot W_1 + 1 \cdot W_2 \\ W_4 &= (1-t) \cdot W_1 + t \cdot W_2 \end{aligned}$$

Odtud plyne, že pro dvojpoměr bodů $(M(Z_1), M(Z_2), M(Z_3), M(Z_4))$ platí:

$$(M(Z_1), M(Z_2), M(Z_3), M(Z_4)) = \frac{t-1}{t} = 1 - \frac{1}{t}.$$

Zde $t \neq 1$, neboť v opačném případě by dvojpoměr byl nulový, a tedy by se nemohlo jednat o čtyři různé body. Dvojpoměr je tedy reálné číslo právě když $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, což nastane právě když $M(Z_4)$ je prvkem reálné přímky, neboli právě když Z_4 leží na kruhové křivce spolu s body Z_1, Z_2, Z_3 . \square

Následující příklad ukazuje způsob, jakým lze efektivně určit, zda čtyři zadané body leží na jedné kruhové křivce. Podobný příklad lze nalézt i v [1], str. 316.

Příklad 2.19. *Rozhodněte, zda body:*

$$Z_1 = (i, 1)^T, Z_2 = (1 + 3i, 1)^T, Z_3 = (2, 1)^T, Z_4 = (2 + 3i, 1)^T$$

leží na kruhové křivce.

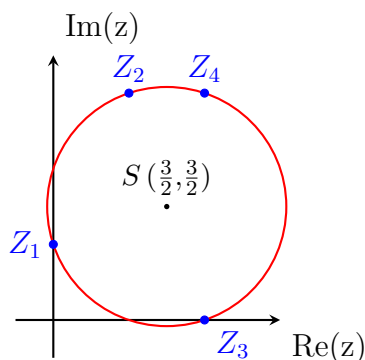
Z Příkladu 2.17 víme, že matice Möbiovy transformace M zobrazující body Z_1, Z_2, Z_3 po řadě na body $(0, 1)^T, (1, 1)^T, z_\infty$ má tvar:

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Z důkazu Věty 2.18 vidíme, že stačí určit $M(Z_4)$. Snadno ověříme, že

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+3i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4i \\ 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Odtud již vidíme, že zadané body leží na jedné kruhové křivce, neboť $\frac{4}{3} \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.



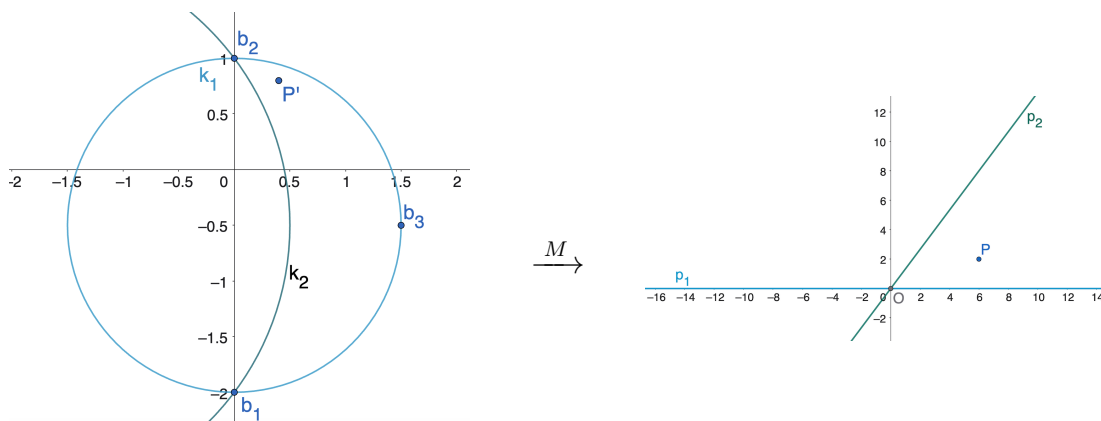
Obrázek 2.2 Body Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 ležící na jedné kružnici.

Na závěr této práce ukážeme, jak lze využít Möbiových transformací k řešení Apolloniovy úlohy v \mathbb{R}^2 . Abychom mohli pracovat s Möbiovými transformacemi v \mathbb{R}^2 , připomeňme, že $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, tedy každý bod $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ považujeme za tentýž bod jako $z = x + iy \in \mathbb{C}$, což odpovídá projektivnímu bodu $(z, 1)^T \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$.

Příklad 2.20. Mějme zadány kružnice:

$$k_1 : x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}, \quad k_2 : (x + 2)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4},$$

a bod $P' = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Máme sestavit kružnici, která se dotýká kružnic k_1 a k_2 a prochází bodem P' . Podstatou řešení je nalezení vhodné Möbiovy transformace M , která úlohu zjednodušuje, viz obr. 2.3.



Obrázek 2.3 Převedení úlohy Möbiovou transformací

Kružnice k_1 a k_2 se protínají v bodech $b_1 = (0, -2)$ a $b_2 = (0, 1)$. Tyto body odpovídají po řadě projektivním bodům $Z_1 = (-2i, 1)^T$ a $Z_2 = (i, 1)^T$. Na k_1 zvolíme další bod, např. $b_3 = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, který odpovídá projektivnímu bodu $Z_3 = \left(\frac{3}{2} - \frac{i}{2}, 1\right)^T$.

Nejprve najdeme Möbiovu transformaci s maticí M , která body Z_1, Z_2, Z_3 zobrazí po řadě na body $(0, 1)^T, z_\infty, (1, 1)^T$. Z podmíněk:

$$(-2i, 1)^T \mapsto (0, 1)^T, \quad (i, 1)^T \mapsto (1, 0)^T$$

určíme, že M musí být tvaru:

$$\begin{pmatrix} k & 2ki \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Z podmínky:

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{i}{2}, 1\right)^T \mapsto (1, 1)^T$$

určíme, že $k = -i$, což odpovídá Möbiově transformaci dané maticí:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Kružnici k_1 jsme tedy tímto způsobem transformovali na přímku $p_1 : y = 0$. Zvolíme další bod na k_2 , např. $(-2, 2)$ a určíme jeho obraz:

$$M \begin{pmatrix} -2 + 2i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 4i \\ -1 - 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2+4i}{-1-2i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}(-3 - 4i) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obraz bodu $(2, 2)^T$ je tedy $(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5})$, a tedy obrazem kružnice k_2 je přímka $p_2 : 4x - 3y = 0$. Nakonec určíme obraz bodu P' :

$$M \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{4i}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 + 14i \\ 1 + 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 2i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obrazem bodu P' je tedy bod $P = (6, 2)$. Původní úlohu jsme tedy převedli na jednodušší úlohu, kdy máme sestavit kružnici, která se dotýká přímek p_1 a p_2 a prochází bodem P . Tuto úlohu lze řešit užitím pouze středoškolských metod.

Nechť $S = (a, b)$ je střed hledané kružnice a r její poloměr. Bod P leží na kružnici:

$$(6 - a)^2 + (2 - b)^2 = r^2 \tag{2.9}$$

Vzdálenost d bodu S od přímky p_2 je rovna:

$$d(S, p_2) = \frac{|4a - 3b|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|4a - 3b|}{5}.$$

Z podmínky dotyku plyne:

$$r = \frac{|4a - 3b|}{5}.$$

Obdobně pro dotyk s přímkou p_1 musí platit:

$$r = |b|.$$

Odtud plyne, že:

$$\begin{aligned} |b| &= \frac{|4a - 3b|}{5} \\ 5|b| &= |4a - 3b|. \end{aligned}$$

Nejprve rozlišíme případ, kdy $r \geq 0$, $4a - 3b \geq 0$, potom:

$$r = b, \quad 4a - 3b = 5b \Rightarrow a = 2b.$$

Po dosazení do (2.9) dostáváme:

$$\begin{aligned} (6 - 2b)^2 + (2 - b)^2 &= r^2 \\ 36 - 24b + 4b^2 + 4 - 4b + b^2 &= b^2 \\ 40 - 28b + 5b^2 &= b^2 \\ 4b^2 - 28b + 40 &= 0 \\ b^2 - 7b + 10 &= 0 \\ (b - 2)(b - 5) &= 0, \end{aligned}$$

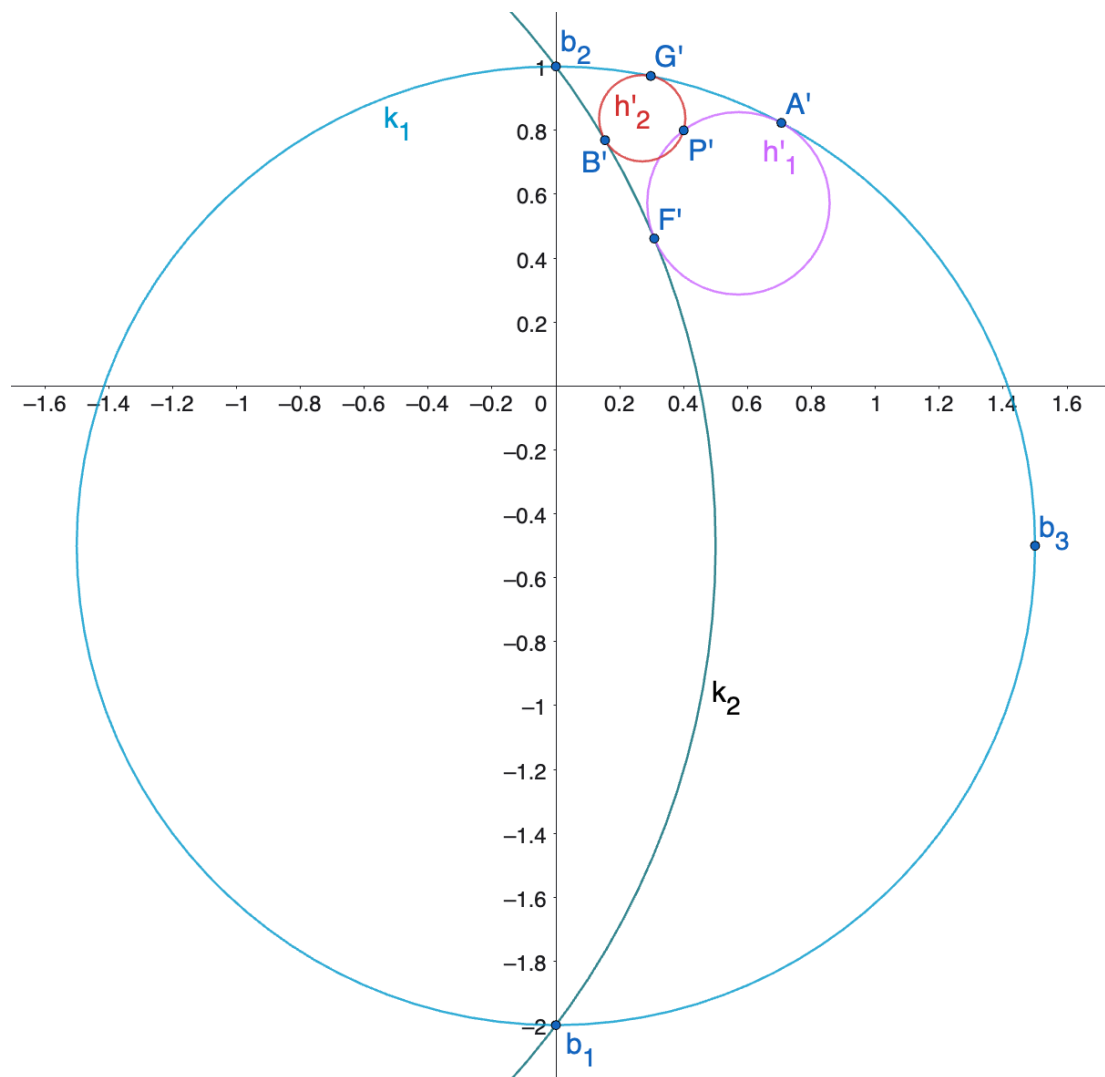
Tedy $b = 2$ nebo $b = 5$, a tedy $a = 4$, nebo $a = 10$. Ostatní kombinace znamének nevedou na nová řešení, tedy řešením v tomto případě jsou dvě kružnice, viz obr. 2.5

$$h_1 : (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4, \quad h_2 : (x - 10)^2 + (y - 5)^2 = 25.$$

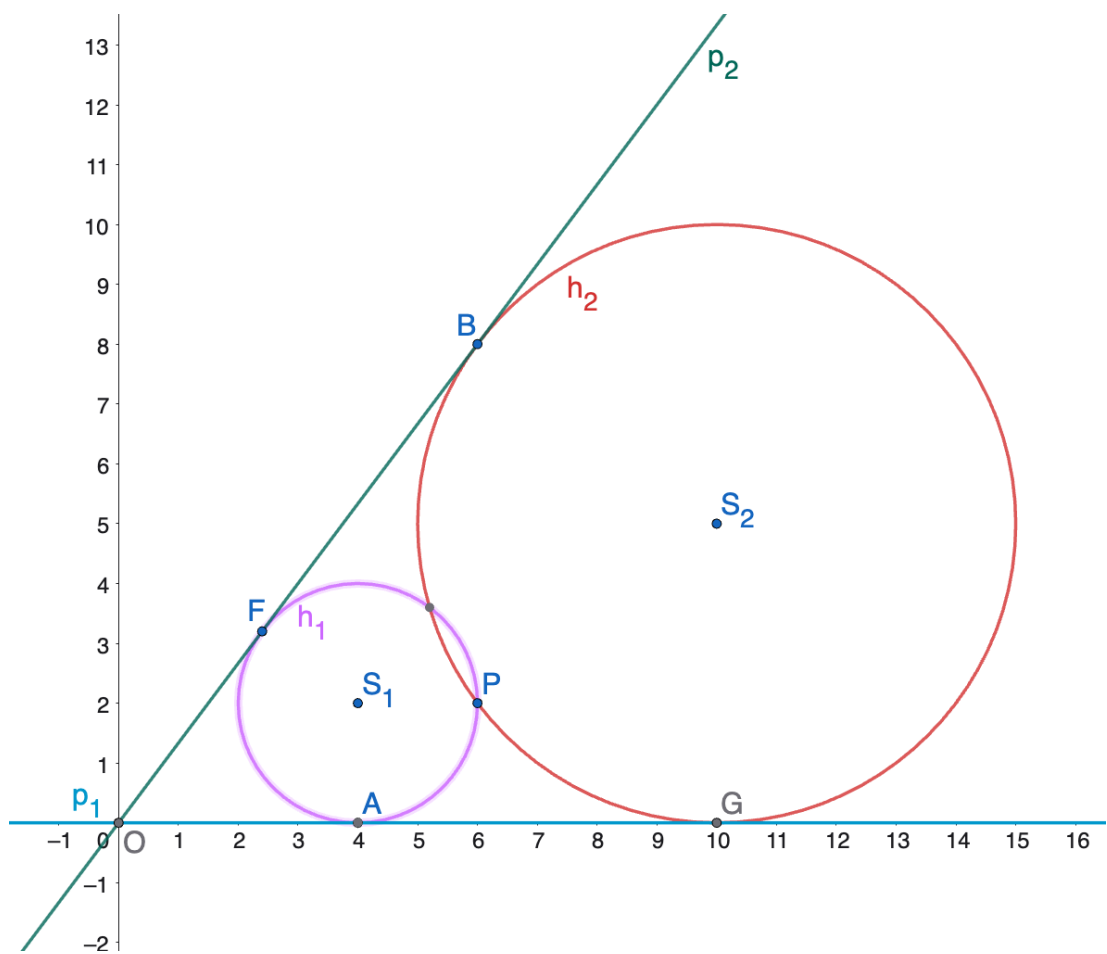
Nyní určíme matici inverzní Möbiovy transformace:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ -i & 1 \end{pmatrix},$$

pomocí níž zobrazíme kružnice h_1 a h_2 na kružnice, které jsou řešením původní úlohy (viz obr. 2.4). Vzhledem k tomu, že nelze zobrazit středy kružnic h_1 a h_2 na středy výsledných kružnic, postupujeme tak, že zobrazíme průsečíky kružnice h_1 s přímkou p_1 (body A, P, F) a průsečíky kružnice h_2 s přímkou p_2 (body B, P, G) a poté sestojíme výsledné kružnice h'_1 a h'_2 pomocí trojic bodů A', P', F' a B', P', G' . Podrobnosti zde vzhledem k rozsahu textu neuvádíme.



Obrázek 2.4 Řešení původní úlohy



Obrázek 2.5 Řešení transformované úlohy

Závěr

V této práci jsme se zabývali geometrií komplexní projektivní přímky a jejími základními vlastnostmi z pohledu Möbiovské geometrie. Precizně definovanou a studovanou komplexní projektivní přímku jsme pomocí stereografické projekce geometricky interpretovali jako Riemannovu sféru. Na tento základ navázalo studium Möbiových transformací jako projektivních automorfismů prostoru $\mathbb{C}P^1$, jejich rozklad na elementární zobrazení a rozbor jejich základních vlastností, zejména zachovávání kruhových křivek, konformity a spojitosti. Důležitou roli v závěru práce sehrál dvojpoměr čtyř bodů jako invariant projektivní geometrie a jeho využití při řešení geometrických úloh.

Vlastní přínos práce spočívá především ve zpracování elementárních, avšak precizních důkazů vybraných tvrzení, která jsou v literatuře často pouze naznačena, a v jejich doplnění o geometrickou interpretaci. Samostatně byly vytvořeny ilustrace stereografické projekce, důkazy jejích vlastností, důkazy spojitosti a konformity elementárních Möbiových transformací a několik vlastních příkladů demonstrujících praktické využití teorie, včetně aplikace při řešení Apolloniovy úlohy. Práce tak propojuje formální aparát projektivní geometrie s geometrickou intuicí a může sloužit jako přehledný úvod do Möbiovské geometrie komplexní projektivní přímky.

Literatura

1. BRANNAN, D.A.; ESPLEN, M.F.; GRAY, J.J. *Geometry*. Cambridge University Press, 2011. ISBN 9781139503709. Dostupné z: <https://books.google.cz/books?id=UlrnKjIjrzQC>.
2. ŠÍR, Z. *Geometrie 1, skripta*. 2024. Dostupné z: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~sir/vyuka/Geometrie1/Skripta2024.pdf>.
3. SOUČEK, V. *Křivky a plochy*. 2010. Dostupné z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~soucek/kpl_10_6.pdf.
4. LYONS, David W. *Introduction to Groups and Geometries*. 2023. Dostupné z: https://quantum.lvc.edu/lyons/algeom_text/algeom_text_files/frontmatter.html.
5. STANOVSKÝ, D. *Algebra*. 2021. Dostupné z: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~stanovsk/vyuka/2122/algebra22.pdf>.

Seznam obrázků

1.1	Stereografická projekce	11
1.2	Stereografická projekce z bodu N na rovinu $Z = 0$	12
1.3	Obraz kružnice procházející N v stereografické projekci	14
1.4	Obraz kružnice neprocházející N v stereografické projekci	14
2.1	Obraz přímky P_p při kruhové inverzi podle jednotkové kružnice (zeleně) a výsledný obraz přímky při převrácené kruhové inverzi (červeně)	20
2.2	Body Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 ležící na jedné kružnici.	29
2.3	Převedení úlohy Möbiovou transformací	30
2.4	Řešení původní úlohy	32
2.5	Řešení transformované úlohy	33