Posudek oponenta na bakalářskou práci
Tomáše Jargaše „Markovovy procesy se spojitou množinou stavů“

Cílem práce je odvodit (mírné) zesílení klasické Zakaiovy věty o existenci invariantní míry pro stochastické diferenciální rovnice a poté je aplikovat na jistou partikulární třídu rovnic. Tento úkol vyžaduje mathematický aparát výrazně přesahující látku bakalářského studia. Proto bakalarant věnuje stany 8–20 práce shrnutí definic a výsledků, které bude potřebovat. Je v podstatě věci, že to lze vzhledem k možnému rozsahu práce učinit jen velmi minimalistickým způsobem. Na zbylých osmi stránkách jsou pak představeny nové výsledky. Nejprve je dokázána (viz větu 15) Zakaiova věta bez nadbytečných předpokladů na ljapunovskou funci, jež byly obsaženy v práci původní. Jako folklorní výsledek je to známo, ale nejsem si vědom, že by toto znění Zakaiovy věty bylo někde dostupné. Bakalarant, který má k disposici jen velmi speciální případ Itôva lemmatu z knihy [5], přebírá bez důkazu z práce [3] jedno pomocné lemma. To je však nutné jen k ověření předpokladu (3.3) z citované Benešovy věty (věta 13). Ta je však poněkud antikvovaný výsledek a je známo, že platí i bez předpokladu (3.3), takže přejaté lemma 14 není zapotřebí a lze říci, že bakalarant podal úplný důkaz věty 15.

Věta 15 je využita pro odvození postačující podmínky pro existenci invariantní míry pro stochastické diferenciální rovnice v případě jednodimensionálním, viz věta 16. Táž postačující podmínka plyne z (netriviální, čistě analytické) Fellerovy theorie jednodimensionálních difusí i z vět (platných i pro velmi singulární rovnice) z článku [11], který se ovšem opírá o velmi obtížné pravděpodobnostní výsledky z monografie A. S. Čornyje a H. J. Engleberta (*Lecture Notes in Mathematics* 1858). Skutečnost, že bakalarant větu odvodil koncepčně jednoduchým postupem založeným na ljapunovských funkcích, pokladám za zajímavou. Porovnání dostupných výsledků – podrobnější a přesnější než poznánka na straně 23 – by bylo zajímavé, ale přesahuje možnosti bakalářské práce.

Na závěr je rozebráno, co věta 16 dává pro rovnice s předepsaným asymptotickým chováním na okolí $\pm\infty$.

Bakalářská práce tedy obsahuje nové (a netriviální) výsledky ze stochastické analysy. Methody jsou možná trochu rutinní, ale rozhodně náročné na šíři poznatků a postupů, které bylo nutno zvládnout. Zpracování práce je méně uspokojivé. Drobných chyb ve formulích a formulacích, i míst, jimž by prospělo jasnější vyjadřování, je docela dost, byť (až na jednu výjimku) nejde o závažné problémy. Typografie práce je přijatelná, ale množství pravopisných chyb překvapivě vysoké. Tyto výtky konkretisuji níže. Práce s literaturou je v pořádku, zdroje jsou řádně citovány.

Bez ohledu na formální závady však bakalářskou práci vzhledem k náročnosti a kvalitě obdržených výsledků hodnotím vysoko; zadání bylo zjevně splněno a bakalářská práce Tomáše Jargaše **splňuje požadavky na bakalářskou práci kladené**.

Připomínky k mathematické korektnosti. Až na jednu výjimku jde spíše o přepisy,

které nijak závažně neovlivňují srozumitelnost textu. Symbolem x^y (respektive x_y) značíme y-tý řádek shora (respektive zdola) na straně x.
• 9^6: Pravá strana v této rovnosti má být X, nikoliv $\mathrm{E}[X]$.
• 9^{10}: Má být $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ (v textu chybí P).
• 9^{14}: Má být $L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P}|_{\mathcal{B}})$, textu je chybně uvedena σ-algebra $\mathcal{A}$. Táž chyba se opakuje na následujícím řádku.
• Strana 10: Výklad zde těsně sleduje knihu Ethiera a Kurtze [1], v níž je pojem homogenního procesu užíván, ale není vysvětlen ani zaveden. Bakalarant se snažil v definici 11 jejich výklad doplnit, ale celkem správnou intuici formalisoval chybně. V řeči přechodové funkce se levá strana rovnosti (2.1) rovná $P_s(X(t), A)$, pravá strana $P_s(X(0), A)$. Je-li tudíž například X Wienerův proces s počátečním stavem 0, je levá strana náhodná veličina, zatímco pravá strana se rovná konstantě $\mathrm{P}\{X(s) \in A\}$, jelikož $X(0) = 0$ s.j.
• Strana 11, definice 16: U_t zobrazuje $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ do sebe, nikoliv do $\mathbb{R}$. (Mohli bychom definovat U_t jako zobrazení $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{B}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$, ale není to přirozené.)
• Strana 12, formule (2.10): Chybí integrační obor.
• 14^3: Zde je x fixovaná počáteční podmínka, v definici P uvažujeme všechny body $\mathbb{R}^n$, je nutno zvolit jinou proměnnou.
• 19_8: Ve formuli má vlevo být $\mathrm{E}[V(X^x(t \wedge \tau_n))]$.
• Strana 20, věta 13: Ve větě se hovoří o regulárních mírách, což je mnohoznačný pojem a je nutno specifikovat, v jakém smyslu je užíván zde. Ovšem na $\mathbb{R}^n$ je každá konečná borelovská míra regulární ve smyslu práce [9], takže – alternativně – není nutno o regularitě v kontextu bakalářské práce vůbec hovořit.
• Strana 20, věta 14: Domnívám se, že by mělo být explicitně uvedeno, že uvažujíce rovnici (2.13) předpokládáme, že je splněno (2.12); to je nyní jasné jen z kontextu. To samé se týká úvah na řádku 22^2.
• 21^8: Ve formuli má vlevo být $\mathrm{E}[V(X^a(t \wedge \tau_n))]$.
• 21^{12}, 21^{14}: Střední hodnota je jinde značena E, nikoliv kursivním E.
• 22^4: Předpokládat, že $\sigma > 0$ na $\mathbb{R}$, je zcela v pořádku, nicméně přirozený předpoklad je $\sigma^2 > 0$ na $\mathbb{R}$. Lze se ihned přesvědčit, že pro $\sigma < 0$ na $\mathbb{R}$ všechny úvahy projdou beze změny, neboť do výpočtů vstupuje pouze σ^2.
• 25^1: Je vhodné zde zopakovat, že nadále předpokládáme $p, q \leq 1$.

Připomínky k jasnosti výkladu. Opět, žádná z následujících připomínek není zvláště závažná, nepříjemné je spíše množství vágních míst.
• 7^7: Možná by bylo vhodné specifikovat, že $x \in \mathbb{R}^n$. V textu je užíván i symbol $\mathcal{U}_\varepsilon(y)$, který by do seznamu také asi patřil.
• Strana 10, definice 12: Bylo by vhodné specifikovat obor hodnot funkce P.
• Strana 11, formule (2.8): Na pravé straně je iterovaný, nikoliv násobný integrál, tato interpretace by možná stála za zmínku.
• Strana 11, definice 16: Bylo by přirozené říci, jaký je definiční obor a obor hodnot zobrazení T_t. Formální popis je možná příliš technická záležitost, ale slovy by to šlo naznačit.
• 12_4 Bylo by vhodné uvést i kvantifikátor $\forall A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$.

• 14^{12}: Symboly $\mathcal{N}(0,(t-s)I_n)$ a I_n nebyly zavedeny, hodily by se do seznamu použitých zkratek.
• Strana 16, definice 25: Z formulace není úplně zřejmé, zda C závisí na ω či nikoliv, je to jasné jen z kontextu.
• 16_{17}, 19_5, 19_3 i jinde: Poněkud nelogicky je u některých veličin v rámci jednoho vzorce uvedena závislost na ω a u jiných nikoliv, bylo by vhodné to sjednotit.
• 17_2: Bod (ii) věty 9 je formulován trochu neopatrně, ale dost možná ho v rámci této bakalářské práce precisovat nelze.
• 19_5: Bylo by vhodné specifikovat, pro která s nerovnost platí.
• 22^5 a dále na stránce: Uvítal bych, kdyby bylo jasněji vysvětleno, jakou funkci V vlastně hledáme: Začneme požadavkem, že V je nezáporné řešení rovnice $LV = -1$ na $\mathbb{R}$, po polynomiální interpolaci na okolí nuly dostaneme nezápornou C^2-funkci splňující $LV = -1$ na $\mathbb{R} \setminus [-1,1]$, a to nám stačí pro aplikaci Zakaiovy věty.
• 22^9, 22^{10}: Pro jaká x jsou funkce A a B definovány? A myslím, že by stála za připomenutí konvence $\int_0^x = -\int_x^0$ pro $x < 0$, jež se v dalším opakovaně mlčky používá.
• 22_2: Zdá se mi, že by bylo vhodné trochu podrobněji popsat, jak funkci V předefinujeme na okolí 0 tak, aby výsledná funkce byla C^2-hladká v bodech ± 1 (např. zmínit Hermitův interpolační polynom).
• 23_5: Říci explicitně, že konstanta C_K je rovností definována?
• 24_5: Uvést, čemu se konstanty α, β rovnají?

Připomínky k formální úpravě. Rozhodně nezamýšlím uvést podrobný seznam prohřešků proti pravopisné normě, jen charakteristické ukázky. Některé z chyb jsou pravděpodobně slovakismy, ale ne všechny lze tímto omluvit.
• 11_2: Zápis „pro všechna $\forall x \in \mathbb{R}^n$“ je nelogický.
• Zcela soustavně jsou užívány chybné koncovky přídavných jmen v množném čísle středního rodu: „takový“ místo taková atd.
• Chybná diakritika: 8^{10}: kazde, 11^{15}: Pravdepodobnostní, 13_4 Štepán, 17_2: homogénní, 20^{12}: Táto, 24_{14}: koeficientú atd.
• Cbybná interpunkce: 13_1, 16_{17}, 20_{13}: nadbytečné čárky, věta 17: opakovaně chybí čárka před „pak“ a „když“ atd.
• 11_4: Přídavné jméno „fellerovské“ má mít malé počáteční písmeno; 17^{14}: „Pokud“ není na počátku věty, takže velké písmeno je chybně.
• Atd.

V Praze, 1. srpna 2025 Jan Seidler, ÚTIA AV ČR, v.v.i.