MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Tomáš Jargaš

Markovovy procesy se spojitou množinou stavů

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc.
Studijní program: Finanční Matematika

Praha 2025

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne ....

Podpis autora

Rád bych poděkoval svému vedoucímu prof. RNDr. Bohdanu Maslowskému, DrSc., za jeho cenné rady, trpělivost a odborné vedení během psaní této práce. Mé poděkování patří také mým rodičům za jejich neustálou podporu po celou dobu mého studia.

Název práce: Markovovy procesy se spojitou množinou stavů

Autor: Tomáš Jargaš

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Markovovy procesy představují speciální třídu náhodných procesů, jejichž vývoj závisí pouze na současném stavu a nikoli na celé historii. V této práci nejprve představíme některé základní vlastnosti těchto procesů a poté se zaměříme na procesy, které jsou řešením stochastických diferenciálních rovnic. Následně se zabýváme otázkou existence invariantní míry, která je úzce spojena s existencí stacionárních řešení. Zeslabíme předpoklady známé postačující podmínky a následně pomocí této podmínky ukážeme, kdy máme zaručenu existenci invariantní míry jednorozměrné rovnice. Na závěr odvodíme snadno ověřitelnou postačující podmínku pro případ, kdy známe určité asymptotické vlastnosti koeficientů jednorozměrné rovnice.

Klíčová slova: Markovovy procesy, invariantní míra, pravděpodobnost přechodu

Title: Markov processes with continuous state space

Author: Tomáš Jargaš

Department: Department of probability and mathematical statistics

Supervisor: prof. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc., Department of probability and mathematical statistics

Abstract: Markov processes represent a special class of stochastic processes whose evolution depends only on the current state and not on the entire history. In this work, we first present some basic properties of these processes and then focus on those that are solutions to stochastic differential equations. We subsequently address the question of the existence of an invariant measure, which is closely related to the existence of stationary solutions. We relax the assumptions of a known sufficient condition and then use this condition to demonstrate when the existence of an invariant measure for a one-dimensional equation is guaranteed. Finally, we derive an easily verifiable sufficient condition for the case when certain asymptotic properties of the coefficients of the one-dimensional equation are known.

Keywords: Markov processes, invariant measure, transition probability

Obsah

Úvod **6**

Seznam použitých zkratek **7**

1 Základní pojmy **8**

2 Markovovy procesy **10**
2.1 Definice a základní vlastnosti 10
2.2 Stacionární Markovovy procesy 12
2.3 Wienerův proces 13
2.4 Stochastické diferenciální rovnice 15

3 Invariantní míra **19**
3.1 Základní teorie 19
3.2 Jednorozměrný případ 22

Závěr **29**

Literatura **30**

Úvod

Markovovy procesy představují třídu náhodných procesů, které "nemají paměť"- jejich budoucí vývoj závisí pouze na současném stavu, nikoli na celé historii. V této práci se seznámíme se základní teorií Markovových procesů a poté se zaměříme na otázku existence invariantní míry.

První kapitola obsahuje základní pojmy z teorie pravděpodobnosti, které budeme potřebovat ve zbytku práce.

V druhé kapitole definujeme Markovovy procesy a jejich přechodové funkce, přičemž budeme pracovat se starší definicí z Ethier a Kurtz [1]. Zaměříme se na časově homogenní procesy a formulujeme některé základní výsledky. Omezíme se pak na speciální třídu Markovových procesů, které jsou řešením stochastických diferenciálních rovnic tvaru

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))d\xi(t). \tag{1}$$

Budeme přitom primárně vycházet z definic a vět formulovaných v Seidler [2]. Tyto procesy mají řadu aplikací ve finanční matematice, kde se používají například na modelování cen aktiv anebo krátkodobých úrokových sazeb.

V poslední kapitole ukážeme různé podmínky pro existenci invariantní míry a zobecníme větu formulovanou v článku Zakai [3]. Poté se zaměříme na jednorozměrný případ rovnice (1) a odvodíme postačující podmínku pro existenci invariantní míry této rovnice. Pomocí této věty pak ukážeme, kdy existuje invariantní míra rovnice (1), když známe jenom určité asymptotické vlastnosti koeficientů této rovnice.

Seznam použitých zkratek

$\mathbb{I}_A$	indikátorová funkce množiny A
$\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$	borelovská σ-algebra na $\mathbb{R}^n$
$B(\mathbb{R}^n)$	množina borelovsky měřitelných funkcí $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\mathbf{C}_2(\mathbb{R}^n)$	třída dvakrát spojitě diferencovatelných funkcí $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$	množina pravdepodobnostních měr definovaných na $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$
$\mathcal{U}_\varepsilon$	množina $\{x : \lvert x\rvert < \varepsilon\}$
A^c	komplement množiny A
$a \wedge b$	min(a,b)

1 Základní pojmy

Cílem této kapitoly je zavést některé pojmy a věty, které budeme později potřebovat při zkoumání vlastností Markovových procesů. Předpokládáme, že čtenář má základní znalosti pravděpodobnosti a teorie míry. Budeme vycházet z definic a vět formulovaných v Lachout [4]. V této knize je také možné najít detailní důkazy vět této kapitoly.

Definice 1. *Nechť* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *je pravděpodobnostní prostor a* $(E,\mathcal{E})$ *je měřitelný prostor. Budeme říkat, že zobrazení* $X : \Omega \to E$ *je náhodná veličina (dále jen n.v.) s hodnotami v* $(E,\mathcal{E})$*, jestliže je měřitelná, tj.*

$$[X \in B] := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}B \in \mathcal{A} \text{ pro kazde } B \in \mathcal{E}.$$

Tento fakt budeme vyznačovat zápisem $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$.

Definice 2. *Je-li* X *n.v. definována na* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *s hodnotami v* $(E,\mathcal{E})$*, pak pojmem rozdělení (pravděpodobnosti) n.v.* X *rozumíme pravděpodobnostní míru* P_X *definovanou na* $\mathcal{E}$ *předpisem*

$$\mathrm{P}_X(B) = \mathrm{P}(X \in B) := \mathrm{P}([X \in B]) \text{ pro } B \in \mathcal{E}.$$

Definice 3. *Zavedeme následující značení:*

i) $L = L(\Omega, \mathcal{A})$ *je množina všech reálnych n.v. definovaných na* $(\Omega, \mathcal{A})$*,*

ii) $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}) = \{X \in L(\Omega, \mathcal{A}) : \mathrm{E}[|X|^p] < +\infty\}$ *pro* $1 \le p < +\infty$.

Definice 4. *Mějme* $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *a* σ*-algebru* $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$*. Pak každou reálnou náhodnou veličinu* Y *s vlastnostmi*

i) $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P}|_{\mathcal{B}})$.

ii) Pro každou množinu $B \in \mathcal{B}$ *platí*

$$\int_B X \, dP = \int_B Y \, dP,$$

nazveme podmíněnou střední hodnotou X *vzhledem k* σ*-algebře* $\mathcal{B}$ *a budeme jí označovat* $\mathrm{E}[X \mid \mathcal{B}]$*. Podmíněná střední hodnota není určena jednoznačně, a proto definujeme* $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}]$ *jako množinu všech podmíněných středních hodnot* $\mathrm{E}[X \mid \mathcal{B}]$.

Definice 5. *Nechť* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *je pravděpodobnostní prostor a* $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ *je* σ*-algebra. Pak pro jev* $A \in \mathcal{A}$ *definujeme podmíněnou pravděpodobnost jevu* A *vzhledem k* $\mathcal{B}$ *(při podmínce* $\mathcal{B}$*) jako*

$$\mathrm{P}(A \mid \mathcal{B}) = \mathrm{E}[\mathbb{I}_A \mid \mathcal{B}],$$

a množinu všech podmíněných pravděpodobností jako

$$\mathbb{P}(A \mid \mathcal{B}) = \mathbb{E}[\mathbb{I}_A \mid \mathcal{B}].$$

Věta 1. *Je-li* $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *a* $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ *je* σ*-algebra, pak existuje alespoň jedna podmíněná střední hodnota n.v.* X *za podmínky* $\mathcal{B}$ *a množina* $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}]$ *je třídou ekvivalence s.j. v* $L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P}|_{\mathcal{B}})$.

Věta 2. *Pro* X,$Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *a* $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ *σ-algebru platí*

i) Pro konstanty a,b,$c \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\mathrm{E}[aX + bY + c \mid \mathcal{B}] = a\mathrm{E}[X \mid \mathcal{B}] + b\mathrm{E}[Y \mid \mathcal{B}] + c \quad s.j.$$

ii) Když $X \leq Y$ *s.j., potom* $\mathrm{E}[X \mid \mathcal{B}] \leq \mathrm{E}[Y \mid \mathcal{B}]$ *s.j.*

iii) Vždy platí $\mathrm{E}[\mathrm{E}[X \mid \mathcal{B}]] = \mathrm{E}[X]$.

iv) Když X *je* $\mathcal{B}$*-měřitelná, pak* $\mathrm{E}[X \mid \mathcal{B}] = \mathrm{E}[X]$ *s.j.*

v) Když $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ *jsou σ-algebry, pak*

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[X \mid \mathcal{B}] \mid \mathcal{C}] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[X \mid \mathcal{C}] \mid \mathcal{B}] = \mathrm{E}[X \mid \mathcal{C}] \quad s.j.$$

vi) Když $\sigma(X)$ *a* $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ *jsou nezávislé σ-algebry, pak* $\mathrm{E}[X \mid \mathcal{B}] = \mathrm{E}[X]$ *s.j.*

Věta 3. *Když* $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A},)$, $Y \in L(\Omega, \mathcal{B})$ *a* $XY \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *a* $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ *je σ-algebra, potom*

$$\mathrm{E}[XY|\mathcal{B}] = Y\,\mathrm{E}[X|\mathcal{B}] \quad s.j.$$

Věta 4. *Pro n.v.* $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *a σ-algebru* $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ *platí*

i) $\mathrm{E}[X \mid \mathcal{B}] \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}|_{\mathcal{B}})$,

ii) pro každou n.v. $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}|_{\mathcal{B}})$ *je*

$$\mathrm{E}[Y(X - \mathrm{E}[X \mid \mathcal{B}])] = 0,$$

iii)

$$\min_{Y \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P}|_{\mathcal{B}})} \mathrm{E}[(X - Y)^2] = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X \mid \mathcal{B}])^2].$$

Poznámka. Předchozí věta vlastně říká, že za předpokladu konečnosti 2. momentu X můžeme podmíněnou střední hodnotu interpretovat jako ortogonální projekci X na prostor $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P}|_{\mathcal{B}})$.

Definice 6. *Nechť* X *je n.v. s hodnotami v* $(E,\mathcal{E})$ *definována na* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. *Pak σ-algebru* $\sigma(X) = \{[X \in B] : B \in \mathcal{E}\}$ *nazýváme σ-algebrou generovanou n.v.* X.

Definice 7. *Pro* $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *a* $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E,\mathcal{E})$ *budeme označovat*

$$\mathrm{E}[X \mid Y] = \mathrm{E}[X \mid \sigma(Y)],$$

a pro jev $A \in \mathcal{A}$

$$\mathrm{P}(A \mid Y) = \mathrm{P}(A \mid \sigma(Y)).$$

2 Markovovy procesy

2.1 Definice a základní vlastnosti

V této kapitole zavádíme pojem Markovova procesu a přechodové funkce, přičemž budeme primárně vycházet z definic uvedených v Ethier a Kurtz [1].

Definice 8. *Nechť* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *je pravděpodobnostní prostor a* $T \subset \mathbb{R}$ *je nespočetná množina. Budeme říkat, že zobrazení* $X : T \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *je náhodný proces definovaný na* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*, je-li* $X(t, \cdot) : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{B}(\mathbb{R}^n))$ *náhodná veličina pro všechny* $t \in T$*.*

Poznámka. Pro naše účely se v celé práci omezíme na případ, kdy $T = [0, \infty)$. Někdy budeme taktéž používat značení $X(t) = X(t, \cdot)$ a zobrazení $X(\cdot, \omega)$ budeme nazývat *trajektorií* procesu X.

Definice 9. *Pro náhodný proces* $X : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *definovaný na* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *a* $t \geq 0$ *definujeme* $\mathcal{F}_t^X$ *jako nejmenší sigma-algebru obsahující všechny jevy tvaru*

$$\{X(s) \in A\}, \quad 0 \leq s \leq t, \ A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n).$$

Definice 10. *Nechť* $X : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *je náhodný proces definovaný na* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*. Pak říkáme, že* X *je Markovův proces, pokud platí*

$$\mathrm{P}(X(t+s) \in A \mid \mathcal{F}_t^X) = \mathrm{P}(X(t+s) \in A \mid X(t)) \quad s.j. \tag{2.1}$$

pro všechny $s,t \geq 0$ *a* $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$*.*

Definice 11. *Budeme říkat, že Markovův proces* X *je časově homogenní, pokud*

$$\mathrm{P}(X(t+s) \in A \mid X(t)) = \mathrm{P}(X(s) \in A \mid X(0)) \quad s.j.$$

pro všechny $s,t \geq 0$ *a* $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$*.*

Definice 12. *Funkci* $P(t,x,A)$ *definovanou na* $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ *nazýváme časově homogenní přechodovou funkcí (nebo jen přechodovou funkcí), pokud platí*

$$P(t, x, \cdot) \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n), \quad \forall t \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2}$$

$$P(0, x, \cdot) = \delta_x \ \textit{(Diracova míra)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.3}$$

$$P(t, \cdot, A) \in B(\mathbb{R}^n), \quad \forall t \geq 0 \ \forall A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n), \tag{2.4}$$

a

$$P(t+s, x, A) = \int_{\mathbb{R}^n} P(t, x, dy) P(s, y, A)\,, \tag{2.5}$$

pro všechny $s,t \geq 0$, $x \in E$, $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$*.*

Poznámka. Pro přehlednost zapisujeme přechodovou funkci včetně argumentů. Požadavek (2.5) nazýváme Chapmanovou-Kolmogorovovou rovností.

Definice 13. *Nechť* $\mathrm{P}(t,x,A)$ *je časově homogenní přechodová funkce. Budeme říkat, že* $\mathrm{P}(t,x,A)$ *je přechodovou funkcí časově homogenního Markovova procesu* X*, pokud platí*

$$\mathrm{P}(X(t+s) \in A \mid \mathcal{F}_t^X) = P(s, X(t), A) \quad s.j. \tag{2.6}$$

pro všechny $s,t \geq 0$ *a* $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$*, nebo ekvivalentně, pokud*

$$\mathrm{E}[f(X(t+s)) \mid \mathcal{F}_t^X] = \int_{\mathbb{R}^n} P(s, X(t), dy) f(y) \quad s.j. \tag{2.7}$$

pro všechny $s,t \geq 0$ *a* $f \in B(\mathbb{R}^n)$ *omezené.*

Poznámka. Za předpokladu (2.6) platí

$$\begin{aligned} P(t+s, X(u), A) &= \mathrm{P}(X(u+t+s) \in A \mid \mathcal{F}_u^X) \quad \text{s.j.} \\ &= \mathrm{E}[\mathrm{P}(X(u+t+s) \in A \mid \mathcal{F}_{u+t}^X) \mid \mathcal{F}_u^X] \quad \text{s.j.} \\ &= \mathrm{E}[P(s, X(u+t), A) \mid \mathcal{F}_u^X] \quad \text{s.j.} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} P(t, X(u), dy) P(s, y, A) \quad \text{s.j.} \end{aligned}$$

pro všechny $s,t \geq 0$ a $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$, takže požadavek (2.5) je v určitém smyslu přirozený.

Definice 14. *Pravdepodobnostní míru* $\mathrm{P}_0 \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ *definovanou vztahem* $\mathrm{P}_0(A) = \mathrm{P}(X(0) \in A)$ *pro všechny* $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$*, nazýváme počátečním rozdělením náhodného procesu* X*.*

Poznámka. Máme-li přechodovou funkci časově homogenního Markovova procesu X a jeho počáteční rozdělení, pak umíme určit všechna konečně rozměrná rozdělení X pomocí (2.7) jako

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(X(0) \in A_0, X(t_1) \in A_1, \ldots, X(t_n) \in A_n) \\ &= \int_{A_0} P_0(dy_0) \int_{A_1} P(t_1 - t_0, y_0, dy_1) \cdots \int_{A_n} P(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, dy_n)\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Kde $t_0 := 0$ a předpokládáme, že $t_0 \leq \cdots \leq t_n$, $A_0, \ldots, A_n \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$.

Definice 15. *Budeme říkat, že přechodová funkce* $P(t,x,A)$ *je stochasticky spojitá, pokud platí*

$$\lim_{t \to 0+} P(t,x,\mathcal{U}_\varepsilon(x)) = 1,$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ *a* $\varepsilon > 0$*.*

Poznámka. Značením $\mathcal{U}_\varepsilon(x)$ rozumíme množinu $\{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < \varepsilon\}$.

Definice 16. *Nechť* $P(t,x,A)$ *je přechodová funkce časově homogenního Markovova procesu* X*. Pak pro* $t > 0$ *definujeme operátory* $U_t : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *a* T_t *vztahem*

$$\begin{aligned} U_t\mu(A) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mu(dx) P(t, x, A)\,, \\ T_t f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} P(t, x, dy) f(y) \end{aligned}$$

Přechodové funkce $P(t,x,A)$*, pro které operátor* T_t *zobrazuje spojité funkce* f *na spojité funkce pro každé* $t \geq 0$*, se nazývají Fellerovské přechodové funkce.*

Poznámka. Je-li navíc $P(t,x,A)$ stochasticky spojitá, pak $T_t f(x) \to f(x)$ pro $t \to 0+$ a pro všechna $\forall x \in \mathbb{R}^n$ a f spojité. Z (2.5) také dostáváme, že pro $s,t > 0$ platí $T_{t+s} = T_t T_s$.

2.2 Stacionární Markovovy procesy

Definice 17. *Nechť $X : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ je náhodný proces definovaný na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Říkáme, že X je (striktně) stacionární, pokud*

$$\mathrm{P}(X(t+h_1) \in A_1, \dots, X(t+h_n) \in A_n) = \mathrm{P}(X(h_1) \in A_1, \dots, X(h_n) \in A_n),$$

pro všechny t,$h_1, \dots$,$h_n \geq 0$ a $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$.

Budeme se zabývat otázkou, za jakých podmínek je Markovův proces X stacionární. Z předchozí definice dostáváme nutnou podmínku, že

$$\mathrm{P}(X(t) \in A) = \mathrm{P}(X(0) \in A), \quad \forall t > 0, \forall A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n). \tag{2.9}$$

Je-li $P(t,x,A)$ přechodovou funkcí X, pak (2.9) je ekvivalentní podmínce

$$P_0(A) = \int P_0(dx) P(t,x,A) \quad \forall t > 0, \forall A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n). \tag{2.10}$$

Máme-li časově homogenní Markovův proces X s přechodovou funkcí $P(t,x,A)$, tak je (2.10) zároveň postačující podmínkou toho, že X je stacionární, protože pro $0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_n$, $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ platí, že

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(X(t+h_1) \in A_1, \dots, X(t+h_n) \in A_n) \\ &= \int_{A_1} P_0(dy_1) \int_{A_2} P(h_2 - h_1, y_1, dy_2) \cdots \int_{A_n} P(h_n - h_{n-1}, y_{n-1}, dy_n)\,. \end{aligned}$$

Poznámka. Použili jsme (2.8) a předpoklad, že $X(0)$ a $X(t+h_1)$ mají stejné rozdělení.

Definice 18. *Mějme přechodovou funkcí $P(t,x,A)$. Budeme říkat, že míra $\mu \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ je (vzhledem k $P(t,x,A)$) invariantní, pokud platí*

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(dx) P(t,x,A) \quad \forall t > 0, \forall A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n).$$

Poznámka. Časově homogenní Markovův proces X s přechodovou funkcí $P(t,x,A)$ je stacionární právě tehdy, když je P_0 invariantní mírou.

Přirozenou otázkou je, zda lze ke každé časově homogenní přechodové funkci sestrojit odpovídající (časově homogenní) Markovův proces, který je zároveň stacionární. Ukazuje se, že tomu tak není. Máme-li přechodovou funkci jednorozměrného Wienerova procesu

$$P(t,x,A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_A \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) dy,$$

pak by za podmínky (2.10) muselo platit, že

$$P_0(A) = \int_{\mathbb{R}} P_0(dx) \, \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_A \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) dy \quad \forall t > 0.$$

Předpokládejme pro spor, že tato rovnost platí. Definujme $A_n = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq n\}$, pak

$$P_0(A_n) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} P_0(dx) \int_{A_n} 1 \, dy.$$

Limitním přechodem $t \to \infty$ dostáváme $P_0(A_n) = 0$. To ale znamená, že

$$P_0(\mathbb{R}) = P_0(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P_0(A_n) = 0$$

takže dostáváme spor s $P_0(\mathbb{R}) = 1$.

Wienerovým procesem se budeme později zabývat při definici stochastického integrálu, pomocí kterého můžeme popsat velkou třídu náhodných procesů. Ukážeme teď jednu z podmínek pro přechodovou funkci $P(t,x,A)$, za které existuje odpovídající stacionární Markovův proces.

Věta 5 (Chasminskij [5]). *Nutnou a postačující podmínkou pro existenci stacionárního Markovova procesu s danou stochasticky spojitou Fellerovskou funkcí přechodu $P(t,x,A)$ je, že existuje bod $x \in \mathbb{R}^n$ t.ž. platí*

$$\lim_{R\to\infty} \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T P(t, x, \mathcal{U}_R^c)\, dt = 0. \tag{2.11}$$

Důkaz. Důkaz této věty lze najít v Chasminskij [5, str. 65]. □

Ověření podmínky (2.11) je obecně obtížné. Z tohoto důvodu se dále omezíme na speciální třídu Markovových procesů, které jsou určeny stochastickými diferenciálními rovnicemi. Tyto procesy mají řadu aplikací v oborech, jako jsou například finanční matematika a molekulární fyzika. Uvidíme, že pro tyto procesy lze formulovat věty, jejichž předpoklady lze v praxi snadněji ověřit.

2.3 Wienerův proces

Věta 6 (Daniell-Kolmogorov). *Nechť $T \subset \mathbb{R}$ a $\mu_{t_1,\dots,t_k}$ je pravděpodobnostní míra na $\mathbb{R}^{nk}$ pro všechny $k \in \mathbb{N}$ a $t_1, \dots, t_k \in T$. Nechť pro všechny $k,m \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+m} \in T$, $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ a všechny permutace σ na $\{1, \dots, k\}$ platí*

$$\mu_{t_1,\dots,t_k}(A_1 \times \cdots \times A_k) = \mu_{t_{\sigma(1)},\dots,t_{\sigma(k)}}(A_{\sigma(1)} \times \cdots \times A_{\sigma(k)}),$$

a

$$\mu_{t_1,\dots,t_k}(A_1 \times \cdots \times A_k) = \mu_{t_1,\dots,t_k,t_{k+1},\dots,t_{k+m},}(A_1 \times \cdots \times A_k \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n).$$

Pak existuje pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ a náhodný proces $X : T \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ definovaný na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ takový, že platí

$$\mathrm{P}(X(t_1) \in A_1, \dots, X(t_k) \in A_k) = \mu_{t_1,\dots,t_k}(A_1 \times \cdots \times A_k),$$

pro všechny $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_k \in T$ a $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz. Důkaz této věty lze najít v Štepán [6, str. 84]. □

Definice 19. *Náhodný proces $\xi^{(x)} : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ budeme nazývat Wienerovým procesem (s počátečním stavem x) pokud platí*

$$\mathrm{P}(\xi^{(x)}(t_1) \in A_1, \dots, \xi^{(x)}(t_k) \in A_k),$$

$$= \int_{A_1} P(t_1, x, dy_1) \int_{A_2} P(t_2 - t_1, y_1, dy_2) \cdots \int_{A_k} P(t_k - t_{k-1}, y_{k-1}, dy_k)$$

pro všechny $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$ *a* $A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$*, kde*

$$P(t, x, A) = (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_A \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right) dy,$$

s úmluvou $P(0,x,\cdot) = \delta_x$.

Poznámka. Z předchozí věty plyne, že takovýto proces existuje. Lze ukázat, že Wienerův proces je časově homogenní Markovův proces s přechodovou funkcí $P(t,x,A)$.

Věta 7. *Nechť* $\xi^{(x)} : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *je Wienerův proces. Pak pro všechny* $k \in \mathbb{N}$ *a* $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$ *platí*

i) Náhodný vektor $(\xi^{(x)}(t_1), \ldots, \xi^{(x)}(t_k)) \in \mathbb{R}^{nk}$ *má normální rozdelení.*

ii) Přírustky $\xi^{(x)}(t_1), \xi^{(x)}(t_2) - \xi^{(x)}(t_1), \ldots, \xi^{(x)}(t_k) - \xi^{(x)}(t_{k-1})$ *jsou nezávislé.*

iii) $\xi^{(x)}(t) - \xi^{(x)}(s) \sim \mathcal{N}(0, (t-s)I_n)$*, pro* $0 \leq s < t$.

Důkaz. Důkaz této věty lze najít v Oksendal [7, str. 13]. □

Definice 20. *Nechť* $X : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$*,* $Y : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *jsou náhodné procesy definované na* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*. Pak říkáme, že* X *je verzí* Y*, pokud platí*

$$\mathrm{P}(X(t) = Y(t)) = 1 \quad \forall t \geq 0.$$

Poznámka. Je-li X verzí Y, pak mají nutně stejné konečně rozměrné rozdělení. Obecně ale neplatí, že mají stejné trajektorie.

Definice 21. *Nechť* $X : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *je náhodný proces definovaný na* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*. Pak budeme říkat, že* X *je spojitý, pokud jsou trajektorie* X *spojité skoro jistě.*

Věta 8 (Kolmogorov-Čencov)**.** *Nechť* $X : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *je náhodný proces definovaný na* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*. Pokud pro všechny* $T > 0$ *existují kladné konstanty* α, β, D *takové, že platí*

$$\mathrm{E}[|X(t) - X(s)|^\alpha] \leq D|t-s|^{1+\beta}, \quad \forall 0 \leq s, t \leq T$$

Pak existuje spojitá verze X.

Důkaz. Důkaz této věty lze najít v Štepán [6, str. 232]. □

Poznámka. Pro Wienerův proces platí $E[|\xi^{(x)}(t) - \xi^{(x)}(s)|^4] = n(n+2)|t-s|^2$, takže má spojitou verzi. Není-li řečeno jinak, budeme dále vždy předpokládat, že pracujeme se spojitou verzí Wienerova procesu a proces $\xi^{(0)}$ budeme značit jenom ξ.

2.4 Stochastické diferenciální rovnice

Cílem této podkapitoly je stručně zavést takzvaný Itôův integrál, který nám umožní definovat homogenní Markovovy procesy jako řešení stochastických diferenciálních rovnic tvaru.

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))d\xi(t).$$

V této kapitole budeme primárně vycházet ze zdrojů Karatzas a Shreve [8] a Seidler [2]. Tyto rovnice nacházejí široké využití ve finanční matematice a fyzice. Důležitým příkladem je například tzv. Ornsteinův–Uhlenbeckův proces, který je řešením rovnice

$$dX(t) = \theta(\mu - X(t))dt + \sigma\xi(t),$$

Tento proces se používá na modelování úrokových měr - μ reprezentuje hodnotu, ke které se míry vrací s "rychlostí" θ a $\sigma > 0$ reprezentuje volatilitu těchto měr.

Definice 22. *Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ je pravděpodobnostní prostor. Budeme říkat, že systém σ-algeber $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ je filtrace, pokud pro všechny $0 \leq s \leq t$ platí*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{A},$$

navíc $\mathcal{F}_\infty$ definujeme vztahem

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t).$$

Definice 23. *Nechť $X : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ je náhodný proces definovaný na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ je filtrace. Říkáme, že X je*

i) $(\mathcal{F}_t)$-adaptovaný, když $X(t)$ je $\mathcal{F}_t$ měřitelná náhodná veličina pro všechny $t \geq 0$,

ii) měřitelný, když X je $(\mathbb{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{A})/\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ měřitelná funkce,

iii) $(\mathcal{F}_t)$-progresivně měřitelný, když je restrikce $X : [0, T) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $(\mathbb{B}([0,T]) \times \mathcal{F}_T)/\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$-měřitelná pro všechny $T \geq 0$.

Poznámka. Je-li $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtrace definována na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, budeme vždy předpokládat, že splňuje podmínky

i) $\{N \in \mathcal{F}_\infty : \mathrm{P}(N) = 0\} \subset \mathcal{F}_0$.

ii) $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\alpha>t} \mathcal{F}_t$ pro všechna $t \geq 0$.

$(\mathcal{F}_t)$-progresivně měřitelné procesy budeme nazývat pouze progresivně měřitelnými, je-li zřejmé, s jakou filtrací pracujeme.

Definice 24. *Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ je pravděpodobnostní prostor, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ je filtrace. Budeme říkat, že Wienerův proces $\xi : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ je $(\mathcal{F}_t)$-Wienerovým procesem, pokud platí*

i) ξ je $(\mathcal{F}_t)$-adaptovaný,

ii) přírustky $\xi(t) - \xi(s)$ jsou nezávislé na $\mathcal{F}_t$ pro všechny $0 \leq s < t$.

Definice 25. *Nechť* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *je pravděpodobnostní prostor a* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *je filtrace. Budeme říkat, že náhodný proces* $X : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ *je jednoduchý, pokud existuje neomezená rostoucí posloupnost* $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$*, kde* $t_0 = 0$ *a posloupnost* $\mathcal{F}_{t_n}$*-měřitelných náhodných veličin* $\{\theta_n\}_{n=0}^{\infty}$ *se* $\sup_{n\geq 0} \theta_n(\omega) \leq C < \infty$ *pro všechny* $\omega \in \Omega$ *a platí*

$$X(t,\omega) = \theta_0(\omega)\mathbb{I}_{\{0\}}(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(\omega)\mathbb{I}_{(t_n,t_{n+1}]}(t)$$

pro všechna $0 \leq t < \infty$ *a* $\omega \in \Omega$*. Množinu všech jednoduchých procesů budeme značit* $\mathcal{M}_0$*.*

Definice 26. *Nechť* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *je pravděpodobnostní prostor a* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *je filtrace. Budeme říkat, že náhodný proces* $X : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ *je třídy* $\mathcal{M}$*, pokud je progresivně měřitelný a navíc*

$$\int_0^t |X(s)|^2 ds \; < \infty \quad s.j.$$

pro všechny $t > 0$*.*

Definice 27. *Nechť* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *je pravděpodobnostní prostor,* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *je filtrace a* $\xi : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ *je* $(\mathcal{F}_t)$*-Wienerův proces. Pro* $X \in \mathcal{M}_0$ *definujeme Itôův integrál* $I : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ *vztahem*

$$I^X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n[\xi(t \wedge t_{n+1}) - \xi(t \wedge t_n)]$$

pro všechny $0 \leq t < \infty$*. Budeme taktéž používat značení*

$$I^X(t) = \int_0^t X(s,\omega)\, d\xi(s),.$$

Itôův integrál obecného náhodného procesu $X : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ třídy $\mathcal{M}$ je definován pomocí jednoduchých procesů limitním přechodem popsaným v Karatzas a Shreve [8] a je určený P-jednoznačně. Lze ho dokonce zvolit tak, že je náhodný proces $I^X : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ spojitý. Ve zbytku práce budeme vždy předpokládat, že pracujeme se spojitou verzí Itôova integrálu.

Definice 28. *Nechť* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *je pravděpodobnostní prostor,* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *je filtrace,* $\xi : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *je* $(\mathcal{F}_t)$*-Wienerův proces a* $\sigma : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^{m\times n}$ *je maticová funkce, pro kterou navíc platí, že* $\sigma_{ij}(t,\omega) \in \mathcal{M}$ *pro* $i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n$*. Pak*

$$I(t) = \int_0^t \sigma(s,\omega)\, d\xi(s), \in \mathbb{R}^m,$$

definujeme vztahem

$$(I(t))_i = \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \sigma_{ij}(s,\omega)\, d\xi_j(s),$$

pro všechny $t > 0$ *a* $i = 1,\ldots,m$*, kde* $\xi_j(t)$ *značí j-tou komponentu Wienerova procesu* $\xi(t)$*.*

Dále budeme předpokládat, že máme pevně zvolený pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ s filtrací $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ a n-rozměrný $(\mathcal{F}_t)$-Wienerův proces $\xi : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$.

Definice 29. *Nechť* $b : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\sigma : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^{m\times n}$ *jsou progresivně měřitelné. Budeme říkat, že progresivně měřitelný náhodný proces* $X : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ *má stochastický diferenciál*

$$dX(t) = b(t,\omega)dt + \sigma(t,\omega)d\xi(t),$$

pokud pro všechny $t \geq 0$ *platí*

$$\int_0^t (|b(s,\omega)| + |\sigma(s,\omega)|^2)\, ds < \infty \quad s.j.$$

a

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s,\omega)dt \; + \int_0^t \sigma(s,\omega)\, d\xi(s).$$

Poznámka. Značením $|\sigma(s,\omega)|$ myslíme Frobeniovu normu matice $\sigma(s,\omega)$.

Definice 30. *Nechť* $b : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\sigma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m\times n}$ *jsou borelovsky měřitelné. Budeme říkat, že* $(\mathcal{F}_t)$*-progresivně měřitelný náhodný proces* $X : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ *je řešením stochastické diferenciální rovnice*

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))d\xi(t),$$

Pokud pro všechny $t \geq 0$ *platí*

$$\int_0^t (|b(X(s))| + |\sigma(X(s))|^2)\, ds < \infty \quad s.j.$$

a

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(X(s))\, ds + \int_0^t \sigma(X(s))\, d\xi(s) \quad s.j.$$

Poznámka. $X(0)$ budeme v tomto kontextu nazývat počáteční podmínkou stochastické diferenciální rovnice. Budeme říkat, že řešení stochastické diferenciální rovnice s počáteční podmínkou $X(0) = \varphi$ je jednoznačné, pokud

$$\mathrm{P}(X_1(t) = X_2(t)\ \forall t \geq 0) = 1,$$

pro libovolná dvě řešení X_1, X_2 s danou počáteční podmínkou. Řešení s deterministickou počáteční podmínkou $\varphi = x \in \mathbb{R}^m$ budeme značit X^x.

Věta 9. *Nechť,* $b : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *a* $\sigma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m\times n}$ *jsou funkce, které v celém definičním oboru navíc splňují*

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq B|x - y|, \tag{2.12}$$

Uvažujme stochastickou diferenciální rovnici

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))d\xi(t). \tag{2.13}$$

Pak:

i) Pro libovolnou $\mathcal{F}_0$*-měřitelnou počáteční podmínku* φ *existuje jednoznačné řešení rovnice* (2.13).

ii) Toto řešení je časově homogénní Markovův proces s přechodovou funkcí $P(t,x,A) = \mathrm{P}(X^x(t) \in A)$.

Důkaz. Důkaz prvního bodu lze najít v Seidler [2, str. 35-49]. Důkaz druhého bodu lze najít v Seidler [2, s. 158-169].

Poznámka. Budeme říkat, že rovnice (2.13) má invariantní míru, pokud existuje pravděpodobnostní míra μ, která je invariantní vzhledem k přechodové funkci $P(t,x,A) = \mathrm{P}(X^x(t) \in A)$.

Ve zbytku práce budeme vždy předpokládat, že koeficienty rovnice (2.13) splňují podmínku (2.12).

Lemma 10. *Nechť* $X^x : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ *je řešením* (2.13). *Pak pro náhodnou veličinu*

$$\tau_n(\omega) = \inf\{t \geq 0 : |X^x(t,\omega)| > n\},$$

platí

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty \quad s.j.$$

Důkaz. Z vlastností Itoova integrálu plyne, že existuje množina N pravděpodobnosti 0, taková, že trajektorie $X^x(\cdot,\omega)$ jsou spojité pro všechny $\omega \in (\Omega \setminus N)$. Mejme libovolné $\omega \in (\Omega \setminus N)$. Předpokládejme pro spor, že $\lim_{n\to\infty} \tau_n(\omega) \neq \infty$. Pak nutně $\lim_{n\to\infty} \tau_n(\omega) = K < \infty$, protože posloupnost $\tau_n(\omega)$ je monotónní. Označme $M = \max\{|X^x(t,\omega)| : 0 \leq t \leq K+1\}$. Volme $n_0 = \lceil M \rceil$, pak nutně $\tau_{n_0}(\omega) \geq K+1$ a tím dostáváme spor.

3 Invariantní míra

3.1 Základní teorie

Definice 31. *Máme-li stochastickou diferenciální rovnici* (2.13)*, pak definuje diferenciální operátor L vztahem*

$$L \equiv \sum_{i=1}^{m} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

kde $a_{ij}(x)$ značí prvky matice $A(x) = \sigma(x)\sigma(x)^T$.

Lemma 11 (Chasminskij [5])**.** *Nechť $X^x : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ je řešením rovnice* (2.13) *a $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je třídy $\mathbf{C}_2(\mathbb{R}^m)$. Nechť τ_n je náhodná veličina dána vztahem*

$$\tau_n(\omega) = \inf\{t \geq 0 : |X^x(t,\omega)| > n\}.$$

Pak pro všechny $t \geq 0$ platí

$$\mathrm{E}[V(X^x(t \wedge \tau_n))] = V(x) + \mathrm{E}[\int_0^{t\wedge\tau_n} LV(X^x(s))\, ds].$$

Důkaz. Důkaz obecnější verze této věty lze najít v Chasminskij [5, str. 73].

Věta 12 (Chasminskij [5])**.** *Uvažujme stochastickou diferenciální rovnici* (2.13)*. Nechť existuje funkce $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$, která je třídy $\mathbf{C}_2(\mathbb{R}^m)$ a platí*

$$\sup_{|x|\geq R} LV(x) = -A_R \to -\infty \quad \textit{pro} \quad R \to \infty. \tag{3.1}$$

Pak existuje invariantní míra této rovnice.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $A_R > 0$ pro všechny $R > 0$. Mějme $x \in \mathbb{R}^m$ libovolné, a uvažujme řešení $X^x(t)$. Nechť

$$\tau_n(\omega) = \inf\{t \geq 0 : |X^x(t,\omega)| > n\}.$$

Díky Lemmatu 11 platí

$$0 \leq \mathrm{E}[V(X^x(t))] = V(x) + \mathrm{E}[\int_0^{t\wedge\tau_n} LV(X^x(s))\, ds].$$

Volme konstantu $M > 0$ takovou, že platí $LV(x) \leq M$ pro všechny $x \in \mathbb{R}^m$. Dostáváme pak nerovnost

$$LV(X^x(s)) \leq -A_R \mathbb{I}_{\{|X^x(s)|\geq R\}}(\omega) + M.$$

Použitím této nerovnosti získame

$$A_R\, \mathrm{E}[\int_0^{t\wedge\tau_n} \mathbb{I}_{\{|X^x(s)|\geq R\}}(\omega)]\, ds \leq V(x) + Mt.$$

Zobrazení

$$n \mapsto \int_0^{t\wedge\tau_n} \mathbb{I}_{\{|X^x(s)|\geq R\}}(\omega),$$

je zřejmě monotónní pro všechna $\omega \in \Omega$ a $t \geq 0$ takže limitním přechodem $n \to \infty$ a následním použitím Fubiniovy věty dostáváme

$$0 \leq \frac{1}{t} \int_0^t P(x, s, \mathcal{U}_R^c)\, ds \leq \frac{V(x)}{tA_R} + \frac{M}{A_R}.$$

Speciálne tedy platí

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t P(x, s, \mathcal{U}_R^c)\, ds \leq \frac{M}{A_R},$$
$$\lim_{R\to\infty} \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t P(x, s, \mathcal{U}_R^c)\, ds \leq \lim_{R\to\infty} \frac{M}{A_R} = 0,$$

takže dle Věty 5 existuje invariantní míra procesu X. □

Poznámka. Jedná se o speciální případ originální Khasminského formulace, která pokrývá i případ, kdy jsou koeficienty rovnice (2.13) jen lokálně Lipschitzovské. Tuto formulaci spolu s důkazem lze najít v Chasminskij [5, str. 80] a nejedná se tedy o vlastní důkaz.

Táto věta je velice užitečná, protože v mnoha případech je možné uhádnout tvar funkce $V(x)$. Lze ale ukázat, že požadavek (3.1) je možné značně oslabit pro případ rovnice s globálně Lipschitzovskými koeficienty.

Věta 13 (Beneš [9])**.** *Uvažujme stochastickou diferenciální rovnici* (2.13)*. Nechť navíc pro všechny $t > 0$ platí, že operátor T_t*

$$T_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} P(t,x,dy) f(y)\,, \tag{3.2}$$

zobrazuje omezené spojité funkce $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ na omezené spojité funkce a

$$\lim_{|x|\to\infty} P(t, x, K) = 0, \tag{3.3}$$

pro všechny kompaktní množiny $K \subset \mathbb{R}^m$. Za těchto předpokladů má rovnice (2.13) *regulární invariantní míru právě tehdy, když existuje konečná regulární míra μ definovaná na $\mathbb{B}(\mathbb{R}^m)$ a kompaktní množina $K \subset \mathbb{R}^m$ taková, že platí*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t U_s\mu(K)\, ds > 0. \tag{3.4}$$

Důkaz. Věta je dokázána v Beneš [9]. □

V našem případě je podmínka (3.2) vždy splněna (Dynkin [10, Věta 11.4]). Lze ukázat, že $X(t)$ také splňuje podmínku (3.3).

Věta 14 (Zakai [3])**.** *Nechť $X : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ je řešením stochastické diferenciální rovnice* (2.13)*. Pak*

$$\lim_{|x|\to\infty} P(t, x, K) = 0,$$

pro všechny $t > 0$ a $K \subset \mathbb{R}^m$ kompaktní.

Důkaz. Věta je dokázaná v Zakai [3]. □

Věta 15 (Zakai [3]). *Uvažujme stochastickou diferenciální rovnici* (2.13). *Pak postačující podmínkou pro existenci invariantní míry této rovnice je existence konstanty* $0 < R < \infty$ *a funkce* $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$, *která je třídy* $\mathbf{C}_2(\mathbb{R}^m)$ *a navíc*

$$LV(x) \leq -1,$$

pro všechny x *splňující* $|x| > R$.

Důkaz. Mejme $a \in \mathbb{R}^m$ libovolné, uvažujme řešení $X^a(t)$ s počátečním rozdělením δ_a a náhodnou veličinou $\tau_n(\omega) = \inf\{t \geq 0 : |X^a(t,\omega)| > n\}$. Z Lemmatu 11 plyne

$$\mathrm{E}[V(X^a(t))] = V(a) + \mathrm{E}[\int_0^{t\wedge\tau_n} LV(X^a(s))ds\,] \quad \forall t \geq 0.$$

Zvolme $M > 0$ takové, že $LV(x) \leq M$ pro $|x| \leq R$. Zřejmě

$$LV(X^a(s)) \leq M\mathbb{I}_{\{|X^a(s)|\leq R\}}(\omega) - \mathbb{I}_{\{|X^a(s)|>R\}}(\omega) \quad \forall s \geq 0,$$

tedy dostáváme

$$0 \leq V(a) + E[\int_0^{t\wedge\tau_n} [M\mathbb{I}_{\{|X^a(s)|\leq R\}}(\omega) - \mathbb{I}_{\{|X^a(s)|>R\}}]ds\,].$$

Limitním přechodem $n \to \infty$ dostáváme

$$0 \leq V(a) + E[\int_0^t [M\mathbb{I}_{\{|X^a(s)|\leq R\}}(\omega) - \mathbb{I}_{\{|X^a(s)|>R\}}]ds\,],$$

díky majorantě $t[M+1]$ a tomu, že $\tau_n \to \infty$ skoro-jistě. Speciálně tedy

$$\begin{aligned} 0 &\leq V(a) + \int_0^t [M\mathrm{P}(|X^a(s)| \leq R) - \mathrm{P}(|X^a(s)| > R)]ds\,, \\ &= V(a) - t + (M+1)\int_0^t \mathrm{P}(|X^a(s)| \leq R)ds\,, \end{aligned}$$

Označme $K = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leq R\}$. Pak

$$\begin{aligned} -\frac{V(a)}{t(M+1)} + \frac{1}{(M+1)} &\leq \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{P}(|X^a(s)| \leq R)\,ds, \\ &= \frac{1}{t}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} \delta_a(dx)P(s,x,K)\,ds\,, \\ &= \frac{1}{t}\int_0^t U_s\delta_a(K)\,ds, \end{aligned}$$

a tedy

$$0 < \frac{1}{(M+1)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t U_s\delta_a(K)\,ds.$$

Míra δ_a je regulární a množina K je kompaktní, takže dle Věty 13 existuje invariantní míra této rovnice. □

Poznámka. Jedná se o zobecnění věty z článku Zakai [3]. Původní věta vyžadovala, aby funkce $V(x)$ splňovala další podmínky. Tento předpoklad se nám podařilo zeslabit využitím Lemmatu 11.

3.2 Jednorozměrný případ

Uvažujme jednorozměrnou rovnici (2.13) (případ $m = n = 1$). Budeme se zabývat otázkou, kdy existuje invariantní míra této rovnice, pokud víme, jak se $b(x), \sigma(x)$ chovají asymptoticky. Předpokládejme navíc, že $\sigma(x) > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Postačující podmínku $LV(x) \leq -1$ nahradíme podmínkou $LV(x) = -1$. Označme $u(x) = V'(x)$, podmínka $LV(x) = -1$ je zřejmě ekvivalentní s

$$u'(x) + \frac{2b(x)}{\sigma^2(x)} u(x) = -\frac{2}{\sigma^2(x)}. \tag{3.5}$$

Definujeme

$$A(x) = 2\int_0^x \frac{b(z)}{\sigma^2(z)}\, dz,$$
$$B(x) = -2\int_0^x \exp\left(A(z)\right) \frac{dz}{\sigma^2(z)}\,.$$

Tyto funkce jsou dobře definovány, protože předpokládáme, že koeficienty $b(x), \sigma(x)$ jsou spojité a $\sigma(x) > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Speciálně tedy platí, že $\sigma(x) \geq c_K > 0$ na každé kompaktní množině $K \subset \mathbb{R}$ (hodnota c_K závisí na množině K). Rovnice (3.5) je navíc ekvivalentní s

$$u'(x)\exp\left(A(x)\right) + \frac{2b(x)}{\sigma^2(x)} u(x)\exp\left(A(x)\right) = -\frac{2}{\sigma^2(x)}\exp\left(A(x)\right)$$

z čehož dostáváme

$$\left(u(x)\exp\left(A(x)\right)\right)' = \left(B(x)\right)',$$

takže

$$u(x) = \exp(-A(x))[B(x) + C],$$

kde $C \in \mathbb{R}$ libovolné. Funkci $V(x)$ pak definujeme vztahem

$$V(x) = \int_0^x \exp(-2\int_0^y \frac{b(z)}{\sigma^2(z)}\, dz)[c_1 - 2\int_0^y \exp(2\int_0^z \frac{b(w)}{\sigma^2(w)}\, dw)\frac{dz}{\sigma^2(z)}]dy \qquad x \geq 0,$$
$$V(x) = \int_0^x \exp(-2\int_0^y \frac{b(z)}{\sigma^2(z)}\, dz)[-c_2 - 2\int_0^y \exp(2\int_0^z \frac{b(w)}{\sigma^2(w)}\, dw)\frac{dz}{\sigma^2(z)}]dy \quad x < 0,$$

kde

$$c_1 = 2\int_0^\infty \exp(2\int_0^z \frac{b(w)}{\sigma^2(w)}\, dw)\frac{dz}{\sigma^2(z)},$$
$$c_2 = 2\int_{-\infty}^0 \exp(2\int_0^z \frac{b(w)}{\sigma^2(w)}\, dw)\frac{dz}{\sigma^2(z)},$$

v případě, že oba integrály na pravé straně jsou konečné. Naše volba konstant c_1, c_2 nám zaručuje nezápornost $V(x)$. Máme ale problém, že takto definovaná funkce $V(x)$ nemusí mít spojité derivace v nule. Lze to ale napravit tím, že restrikci $V : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \to \mathbb{R}$ na intervalu [−1,1] dodefinujeme vhodným polynomem a k takto definované funkci přičteme konstantu tak, aby byla nezáporná.

Zjistili jsme tedy, že postačující podmínkou pro existenci invariantní míry rovnice (2.13) za předpokladu $\sigma(x) > 0$ je, když současně platí

$$\int_0^\infty \exp(2\int_0^z \frac{b(w)}{\sigma^2(w)}\,dw)\frac{dz}{\sigma^2(z)} < \infty \tag{P1}$$

a

$$\int_{-\infty}^0 \exp(2\int_0^z \frac{b(w)}{\sigma^2(w)}\,dw)\frac{dz}{\sigma^2(z)} < \infty \tag{P2}$$

Poznámka. Za předpokladu, že invariantní míra rovnice (2.13) je určena jednoznačně, lze ukázat, že tato podmínka je zároveň nutnou podmínkou existence invariantní míry (Cherny [11]).

Budeme se nejprve zabývat podmínkou (P1). Uvažujme funkce $b(x), \sigma(x)$, které navíc splňují $b(x) \sim -|x|^p$, $\sigma(x) \sim |x|^q$ pro $x \to \infty$, kde $p,q \leq 1$ a $f(x) \sim g(x)$ pro $x \to x_0$ značí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c_0 > 0.$$

a toto c_0 je navíc konečné. Definujme funkci $h(x)$ vztahem

$$h(x) = \frac{b(x)}{\sigma^2(x)}$$

Nechť $C > 0$ je konstanta splňující

$$C = \lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{-|x|^{p-2q}},$$

pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $K = K(\varepsilon) > 0$ takové, že pro $x \geq K$ platí

$$C - \varepsilon \leq \frac{h(x)}{-|x|^{p-2q}} \leq C + \varepsilon,$$

a tedy

$$-(C+\varepsilon)|x|^{p-2q} \leq h(x) \leq -(C-\varepsilon)|x|^{p-2q}. \tag{3.6}$$

Pro $x \geq K$ zároveň platí, že

$$\begin{aligned}\exp(2\int_0^x \frac{b(w)}{\sigma^2(w)}\,dw)\frac{1}{\sigma^2(x)} &= \exp(2\int_0^K \frac{b(w)}{\sigma^2(w)}\,dw + \int_K^x \frac{2b(w)}{\sigma^2(w)}\,dw)\frac{1}{\sigma^2(x)} \\ &= C_K \exp(2\int_K^x \frac{b(w)}{\sigma^2(w)}\,dw)\frac{1}{\sigma^2(x)}\end{aligned}$$

Podmínka (P1) zřejmě platí právě tehdy, když

$$\int_K^\infty \exp(2\int_K^x \frac{b(w)}{\sigma^2(w)}\,dw)\frac{dx}{\sigma^2(x)} < \infty,$$

což je ekvivalentní podmínce

$$\int_K^\infty \exp(2\int_K^x \frac{b(w)}{\sigma^2(w)}dw\,)\frac{dx}{|x|^{2q}} < \infty,$$

protože $\sigma(x) \sim |x|^q$. Pomocí nerovnosti (3.6) dostáváme odhady

$$\exp(2\int_K^x \frac{b(w)}{\sigma^2(w)}\,dw)\frac{1}{x^{2q}} \le \exp(-2(C-\varepsilon)\int_K^x w^{p-2q}\,dw)\frac{1}{x^{2q}},$$
$$\exp(2\int_K^x \frac{b(w)}{\sigma^2(w)}\,dw)\frac{1}{x^{2q}} \ge \exp(-2(C+\varepsilon)\int_K^x w^{p-2q}\,dw)\frac{1}{x^{2q}},$$

pro $x \ge K$.

1. Nechť $p-2q=-1$. Pak

$$\exp(-2(C-\varepsilon)\int_K^x w^{p-2q}\,dw)\frac{1}{x^{2q}} = C_1 x^{-2(q+C-\varepsilon)},$$
$$\exp(-2(C+\varepsilon)\int_K^x w^{p-2q}\,dw)\frac{1}{x^{2q}} = C_2 x^{-2(q+C+\varepsilon)}.$$

   i) Je-li $q > \frac{1}{2} - C$, volíme $\varepsilon > 0$ takový, že platí $q + C - \varepsilon > \frac{1}{2}$. Táto volba nám zaručuje
   $$\int_K^\infty x^{-2(C-\varepsilon+q)}\,dx < \infty,$$
   takže podmínka (P1) platí.

   ii) Je-li $q < \frac{1}{2} - C$, volíme $\varepsilon > 0$ takový, že platí $q + C + \varepsilon < \frac{1}{2}$. Táto volba nám zaručuje
   $$\int_K^\infty x^{-2(C+\varepsilon+q)}\,dx = \infty,$$
   takže podmínka (P1) neplatí.

   iii) Je-li $q = \frac{1}{2} - C$, pak neumíme rozhodnout o platnosti podmínky (P1) jenom na základe výše formulovaných asymptotických vlastností koeficientú.

2. Nechť $p-2q \ne -1$. Pak

$$\exp(-2(C-\varepsilon)\int_K^x w^{p-2q}\,dw)\frac{1}{x^{2q}} = C_1 \exp(-\frac{2(C-\varepsilon)}{1+p-2q}x^{1+p-2q})\frac{1}{x^{2q}}$$
$$\exp(-2(C+\varepsilon)\int_K^x w^{p-2q}\,dw)\frac{1}{x^{2q}} = C_2 \exp(-\frac{2(C+\varepsilon)}{1+p-2q}x^{1+p-2q})\frac{1}{x^{2q}},$$

   i) Je-li $p-2q < -1$, pak $x^{1+p-2q} \to 0$ pro $x \to \infty$, takže záleží jenom na integrovatelnosti x^{-2q}. Podmínka (P1) je tedy splněna právě tehdy, když $2q > 1$.

   ii) Je-li $p-2q > -1$, pak
   $$\exp(-\frac{2(C+\varepsilon)}{1+p-2q}x^{1+p-2q})\frac{1}{x^{2q}} = \exp(-\alpha x^\beta)x^{-2q}$$
   kde $\alpha, \beta > 0$. Platnost podmínky (P1) plyne se známé limity
   $$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(-\alpha x^\beta)}{x^\gamma} = 0 \quad \forall \alpha, \beta > 0\ \forall \gamma \in \mathbb{R},$$
   Zvolme $\gamma = 2q-2$, pak existuje $K^* \ge K$ takové, že
   $$\exp(-\alpha x^\beta)x^{-2q} \le x^{-2}$$
   pro všechny $x \ge K^*$. Podmínka (P1) je tedy zřejmě splňena.

Uvažujme teď případ, kdy $b(x) \sim |x|^p$, $\sigma(x) \sim |x|^q$ pro $x \to \infty$. Nechť $C > 0$ splňuje

$$C = \lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{|x|^{p-2q}}.$$

Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $K = K(\varepsilon) > 0$ takové, že pro $x \geq K$ platí

$$(C-\varepsilon)|x|^{p-2q} \leq h(x) \leq (C+\varepsilon)|x|^{p-2q},$$

dostáváme tedy odhady

$$\exp(2\int_K^x \frac{b(w)}{\sigma^2(w)}\,dw)\frac{1}{x^{2q}} \leq \exp(2(C+\varepsilon)\int_K^x w^{p-2q}\,dw)\frac{1}{x^{2q}},$$
$$\exp(2\int_K^x \frac{b(w)}{\sigma^2(w)}\,dw)\frac{1}{x^{2q}} \geq \exp(2(C-\varepsilon)\int_K^x w^{p-2q}\,dw)\frac{1}{x^{2q}}.$$

1. Nechť $p - 2q = -1$. Pak

$$\exp(2(C+\varepsilon)\int_K^x w^{p-2q}\,dw)\frac{1}{x^{2q}} = C_1 x^{-2(q-C-\varepsilon)},$$
$$\exp(2(C-\varepsilon)\int_K^x w^{p-2q}\,dw)\frac{1}{x^{2q}} = C_2 x^{-2(q-C+\varepsilon)}.$$

   i) Je-li $q > \frac{1}{2} + C$, volíme $\varepsilon > 0$ takový, že platí $q - C - \varepsilon > \frac{1}{2}$. Tato volba nám zaručuje
   $$\int_K^\infty x^{-2(C-\varepsilon+q)}\,dx < \infty,$$
   takže podmínka (P1) platí.

   ii) Je-li $q < \frac{1}{2} + C$, volíme $\varepsilon > 0$ takový, že platí $q - C + \varepsilon < \frac{1}{2}$. Tato volba nám zaručuje
   $$\int_K^\infty x^{-2(C+\varepsilon+q)}\,dx = \infty,$$
   takže podmínka (P1) neplatí.

   iii) Je-li $q = \frac{1}{2} + C$, pak neumíme rozhodnout o platnosti podmínky (P1) jenom na základe výše formulovaných asymptotických vlastností koeficientú.

2. Nechť $p - 2q \neq -1$. Pak

$$\exp(2(C+\varepsilon)\int_K^x w^{p-2q}\,dw)\frac{1}{x^{2q}} = C_1 \exp(\frac{2(C+\varepsilon)}{1+p-2q}x^{1+p-2q})\frac{1}{x^{2q}}$$
$$\exp(2(C-\varepsilon)\int_K^x w^{p-2q}\,dw)\frac{1}{x^{2q}} = C_2 \exp(\frac{2(C-\varepsilon)}{1+p-2q}x^{1+p-2q})\frac{1}{x^{2q}},$$

   i) Je-li $p - 2q < -1$, pak $x^{1+p-2q} \to 0$ pro $x \to \infty$, takže záleží jenom na integrovatelnosti x^{-2q}. Podmínka (P1) je tedy splněna právě tehdy, když $2q > 1$.

   ii) Je-li $p - 2q > -1$, pak
   $$\exp(\frac{2(C+\varepsilon)}{1+p-2q}x^{1+p-2q})\frac{1}{x^{2q}} = \exp(\alpha x^\beta)x^{-2q}$$

kde $\alpha, \beta > 0$. Znovu použijeme známou limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(\alpha x^\beta)}{x^\gamma} = \infty,$$

pro všechny $\alpha, \beta > 0$ a $\gamma \in \mathbb{R}$. Podmínka (P1) tedy neplatí.

Zůstává nám vyšetřit platnost podmínky (P2). Ze symetrie této úlohy plyne, že když máme $b(x) \sim \pm|x|^p$, $\sigma(x) \sim |x|^q$ pro $x \to -\infty$, pak podmínka (P2) platí právě tehdy, když parametry p,q,C splňují podmínky, které jsme formulovaly pro platnost (P1), když $b(x) \sim \mp|x|^p$, $\sigma(x) \sim |x|^q$ pro $x \to \infty$. Ukážeme platnost tohoto tvrzení pro $b(x) \sim |x|^p$, $\sigma(x) \sim |x|^q$ pro $x \to -\infty$.

Nechť $C > 0$ splňuje

$$C = \lim_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{|x|^{p-2q}}.$$

Pro všechny $\varepsilon > 0$ existuje $K > 0$ takové, že pro $x \le -K$ platí

$$-(C+\varepsilon)|x|^{p-2q} \le -h(x) \le -(C-\varepsilon)|x|^{p-2q}.$$

Víme, že podmínka (P2) je splněna právě tehdy, když

$$\int_{-\infty}^{-K} \exp(2\int_{-K}^{x} \frac{b(w)}{\sigma^2(w)}\,dw)\,\frac{dx}{|x|^{2q}} < \infty.$$

Díky našemu odhadu a symetrii funkce $|\cdot|$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-K} \exp(2\int_{-K}^{x} \frac{b(w)}{\sigma^2(w)}\,dw)\,\frac{dx}{|x|^{2q}} &= \int_{-\infty}^{-K} \exp(2\int_{x}^{-K} \frac{-b(w)}{\sigma^2(w)}\,dw)\,\frac{dx}{|x|^{2q}},\\
&\le \int_{-\infty}^{-K} \exp(-2(C-\varepsilon)\int_{x}^{-K} |w|^{p-2q}\,dw)\,\frac{dx}{|x|^{2q}},\\
&= \int_{K}^{\infty} \exp(-2(C-\varepsilon)\int_{-x}^{-K} |w|^{p-2q}\,dw)\,\frac{dx}{x^{2q}},\\
&= \int_{K}^{\infty} \exp(-2(C-\varepsilon)\int_{K}^{x} w^{p-2q}\,dw)\,\frac{dx}{x^{2q}}.
\end{aligned}$$

Stejným postupem lze ukázat, že

$$\int_{-\infty}^{-K} \exp(2\int_{-K}^{x} \frac{b(w)}{\sigma^2(w)}\,dw)\,\frac{dx}{x^{2q}} \ge \int_{K}^{\infty} \exp(-2(C+\varepsilon)\int_{K}^{x} w^{p-2q}\,dw)\,\frac{dx}{x^{2q}}.$$

Podmínka (P2) tedy platí právě tehdy, když parametry p,q,C splňují podmínky, které jsme formulovali pro případ, kdy $b(x) \sim -|x|^p$, $\sigma(x) \sim |x|^q$ pro $x \to \infty$. Platnost tvrzení pro $b(x) \sim -|x|^p$, $\sigma(x) \sim |x|^q$ pro $x \to -\infty$, lze ukázat analogickým způsobem.

Naše výsledky teď zhrneme do následujících vět.

Věta 16. *Uvažujme jednorozměrnou rovnici* (2.13) *a nechť navíc platí* $\sigma(x) > 0$ *pro všechny* $x \in \mathbb{R}$. *Pak postačující podmínkou pro existenci invariantní míry této rovnice je, když současně platí*

$$\int_{0}^{\infty} \exp(2\int_{0}^{z} \frac{b(w)}{\sigma^2(w)}\,dw)\frac{dz}{\sigma^2(z)} < \infty, \tag{P1}$$

a

$$\int_{-\infty}^{0} \exp(2\int_{0}^{z} \frac{b(w)}{\sigma^2(w)}\,dw)\frac{dz}{\sigma^2(z)} < \infty. \tag{P2}$$

Věta 17. *Mějme jednorozměrnou rovnici* (2.13) *s koeficientem* $\sigma(x) > 0$ *pro všechny* $x \in \mathbb{R}$ *a nechť navíc platí*

$$b(x) \sim \delta_1 |x|^{p_1},$$
$$\sigma(x) \sim |x|^{q_1},$$

pro $x \to \infty$*, kde* $\delta_1 \in \{-1,1\}$ *a* $p_1, q_1 \leq 1$*. Nechť*

$$h(x) = \frac{b(x)}{\sigma^2(x)}.$$

Definujme konstantu $C_1 > 0$ *vztahem*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{\delta_1 |x|^{p_1 - 2q_1}} = C_1.$$

i) Je-li $p_1 - 2q_1 = -1$ *a navíc* $q_1 \neq \frac{1}{2} + \delta_1 C_1$ *pak podmínka* (P1) *platí právě tehdy když* $q_1 > \frac{1}{2} + \delta_1 C_1$*.*

ii) Je-li $p_1 - 2q_1 < -1$ *pak podmínka* (P1) *platí právě tehdy když* $2q_1 > 1$*.*

iii) Je-li $p_1 - 2q_1 > -1$ *pak podmínka* (P1) *platí právě tehdy když* $\delta_1 = -1$*.*

Věta 18. *Mějme jednorozměrnou rovnici* (2.13) *s koeficientem* $\sigma(x) > 0$ *pro všechny* $x \in \mathbb{R}$ *a nechť navíc platí*

$$b(x) \sim \delta_2 |x|^{p_2},$$
$$\sigma(x) \sim |x|^{q_2},$$

pro $x \to -\infty$*, kde* $\delta_2 \in \{-1,1\}$ *a* $p_2, q_2 \leq 1$*. Nechť*

$$h(x) = \frac{b(x)}{\sigma^2(x)}.$$

Definujme konstantu $C_2 > 0$ *vztahem*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{\delta_2 |x|^{p_2 - 2q_2}} = C_2.$$

i) Je-li $p_2 - 2q_2 = -1$ *a navíc* $q_2 \neq \frac{1}{2} - \delta_2 C_2$ *pak podmínka* (P2) *platí právě tehdy když* $q_2 > \frac{1}{2} - \delta_2 C_2$*.*

ii) Je-li $p_2 - 2q_2 < -1$ *pak podmínka* (P2) *platí právě tehdy když* $2q_2 > 1$*.*

iii) Je-li $p_2 - 2q_2 > -1$ *pak podmínka* (P2) *platí právě tehdy když* $\delta_2 = 1$*.*

Na závěr pomocí předchozích vět ukážeme, kdy máme zaručenou existenci invariantní míry ve dvou speciálních případech.

Poznámka. V následujících příkladech budeme používat konstanty $p_1, p_2, q_1, q_2, \delta_1, \delta_2, C_1, C_2$ tak, jak jsou definovány v předchozích dvou větách.

Příklad: Uvažujme jednorozměrnou rovnici (2.13) s $\sigma(x) = C > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Nechť navíc platí $\delta_1 = -1$. V tomto případě koeficient driftu $b(x)$ přitahuje proces zpět do okolí nuly, kdykoli se příliš přiblíží k nekonečnu. Přirozenou otázkou je, jak moc "malý" může být drift (t.j. jak moc malý může být koeficient p_1) bez toho, abychom ztratili platnost podmínky (P1).

Předpokládejme navíc, že $C_1 \neq \frac{1}{2}$. Pak dle Věty 17 podmínka (P1) platí právě tehdy, když je splněna jedna z podmínek

i) $p_1 > -1$.

ii) $p_1 = -1$ a zároveň $C_1 > \frac{1}{2}$.

Analogický výsledek lze také odvodit pro případ kdy $\delta_2 = 1$. Za předpokladu, že $C_2 \neq \frac{1}{2}$ podmínka (P2) platí právě tehdy, když je splněna jedna z podmínek

i) $p_2 > -1$.

ii) $p_2 = -1$ a zároveň $C_2 > \frac{1}{2}$.

Příklad: Uvažujme jednorozměrnou rovnici (2.13) s $p_1 \geq 0$ a $\sigma(x) > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Nechť navíc platí $\delta_1 = 1$. Koeficient driftu $b(x)$ v tomto případě naopak přitahuje proces k nekonečnu (když jsou hodnoty řešení $X(t)$ dostatečně velké). Ukážeme, jak moc "rychle" musí růst koeficient $\sigma(x)$ na to, aby platila podmínka (P1).

Předpokládejme navíc, že $q_1 \neq \frac{1}{2} + C_1$. Pak dle Věty 17 podmínka (P1) platí právě tehdy, když je splněna jedna z podmínek

i) $2q_1 > 1 + p_1$.

ii) $2q_1 = 1 + p_1$ a zároveň $q_1 > \frac{1}{2} + C_1$.

Je-li $p_2 \geq 0$, $\delta_2 = -1$ a navíc $q_2 \neq \frac{1}{2} + C_2$, pak dle Věty 18 podmínka (P2) platí právě tehdy, když je splněna jedna z podmínek

i) $2q_2 > 1 + p_2$.

ii) $2q_2 = 1 + p_2$ a zároveň $q_2 > \frac{1}{2} + C_2$.

Závěr

Představili jsme některé základní vlastnosti časově homogenních Markovových procesů a jejich přechodových funkcí. Sestrojili jsme Wienerův proces a pomocí tohoto procesu jsme definovali stochastické diferenciální rovnice tvaru

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))d\xi(t). \tag{1}$$

Je známo, že za určitých podmínek jsou řešení této rovnice časově homogenní Markovovy procesy. Zaměřili jsme se pak na otázku existence invariantní míry těchto rovnic, která je úzce propojena s existencí stacionárních řešení. Porovnali jsme známé věty, které se zabývají touto otázkou, a podařilo se nám zeslabit předpoklady věty formulované v článku Zakai [3].

Pomocí této věty jsme odvodili postačující podmínku pro existenci invariantní míry řešení jednorozměrné stochastické diferenciální rovnice s globálně Lipschitzovskými koeficienty a $\sigma(x) > 0$ pro všechny $x \in \mathbb{R}$. Poté jsme tuto větu použili pro formulaci podmínek, za kterých existuje invariantní míra, když známe určité asymptotické vlastnosti koeficientů dané stochastické diferenciální rovnice.

Literatura

1. Ethier, S. N.; Kurtz, T. G. *Markov Processes.* John Wiley 'I&' Sons, 1986. isbn 9780471081869.
2. Seidler, J. *Vybrané kapitoly ze stochastické analysy.* Praha: Matfyzpress, 2011. isbn 978-80-7378-145-3.
3. Zakai, M. A Lyapunov criterion for the existence of stationary probability distributions for systems perturbed by noise. *SIAM Journal on Control.* 1969, roč. 7, č. 3, s. 390–397.
4. Lachout, P. *Teorie pravděpodobnosti.* Praha: Karolinum, 2022. Třetí vydání. isbn 978-80-246-5399-0.
5. Chasminskij, R. Z. *Stochastic Stability of Differential Equations.* Springer-Verlag, 2012. Second Edition. isbn 978-3-642-23279-4.
6. Štepán, J. *Teorie pravděpodobnosti.* Academia, 1987.
7. Oksendal, B. *Stochastic Differential Equations.* Springer-Verlag, 2003. Sixth Edition. isbn 3-540-04758-1.
8. Karatzas, I.; Shreve, S. E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer-Verlag, 1991. Second Edition. isbn 0-387-97655-8.
9. Beneš, V.E. Finite Regular Invariant Measures for Feller Processes. *Journal of Applied Probability.* 1968, roč. 5, č. 1, s. 203–209.
10. Dynkin, E. B. *Markov Processes.* Springer-Verlag, 1965. isbn 978-3-662-00031-1.
11. Cherny, A. S. Invariant Distributions for Singular Stochastic Differential Equations. *Stochastics and Stochastic Reports.* 2004, roč. 76, č. 2, s. 101–112.