POSUDEK VEDOUCÍHO DIPLOMOVÉ PRÁCE

Autor práce: Bc. Ondřej Brichta

Název práce: Properties of algebraic stabilizations for convection-diffusion equations

Rovnice konvekce-difúze se vyskytují v řadě modelů různých fyzikálních jevů. Koeficient difúze je často velmi malý ve srovnání s konvekcí, což v mnoha případech vede ke vzniku nefyzikálních oscilací v jejich numerických řešeních. Dochází pak k tomu, že numerická řešení nabývají hodnot, které nejsou pro řešení aproximovaného spojitého problému přípustné. Pokud chceme takovéto situace vyloučit, je nutné používat metody splňující diskrétní princip maxima. Zajímavou třídou metod majících tuto vlastnost jsou algebraické stabilizace, které jsou založeny na modifikacích soustavy lineárních rovnic odpovídající Galerkinově diskretizaci uvažované konvektivně-difúzní úlohy získané metodou konečných prvků. Tyto algebraické stabilizace byly v uplynulých letech intenzivně studovány, přičemž byly získány výsledky o řešitelnosti příslušných nelineárních diskrétních problémů, o platnosti různých verzí diskrétního principu maxima i o konvergenci přibližných řešení. Analýza těchto metod je podstatně komplikována tím, že tyto metody jsou nelineární.

Předložená práce navazuje na zmíněné aktuální výsledky, dále je rozvíjí a obsahuje řadu původních výsledků. V první kapitole se jedná o vyšetřování platnosti diskrétního principu maxima při výpočtu matice a pravé strany diskrétního problému pomocí numerické integrace. Ačkoli numerická integrace je v praxi běžně používána, její vliv na platnost principu maxima je většinou opomíjen a autorovy výsledky jsou tedy z praktického hlediska velmi užitečné. V druhé kapitole autor pro řešení obecné algebraicky stabilizované diskertizace odvozuje odhad chyby v L^2 normě pomocí Aubinova–Nitscheho postupu. Tento postup je standardní pro lineární diskretizace, ale pro uvažovanou nelineární diskretizaci je netriviální a v literatuře dosud nebyl aplikován, a tudíž zmíněné odhady chyby v L^2 normě dosud nebyly k dispozici. Zajímavé nové výsledky jsou obsaženy i ve čtvrté kapitole věnované tzv. BBK metodě. Zde autor zobecnil existující analýzu na případ s obecnými vahami a podrobně se věnoval definici těchto vah tak, aby byla získána metoda zachovávající linearitu. Tato vlastnost je důležitá pro konvergenci diskrétních řešeních a je známo, že zejména v difuzivně dominantním případě metody mající tuto vlastnost jsou podstatně přesnější než metody, které linearitu nezachovávají. Pro BBK metodu byla dosud tato vlastnost splněna pouze na lokálně symetrických triangulací, případně za použití komplikovaného a výpočetně drahého určení vah založeném na řešení lokálních optimalizačních úloh. Autor navrhl velmi chytrý a elegantní výpočet zmíněných vah založený na použití vhodné testovací funkce. Tím byla získána metoda, která zachovává linearitu na obecných triangulacích. Navíc ve dvoudimenzionálním případě autor navrhl dva jednoduché způsoby, jak tyto váhy vypočítat. Teoretické výsledky odvozené v práci jsou ilustrovány pomocí numerických experimentů, přičemž všechny metody autor samostatně naprogramoval.

Práce je napsána pečlivě, přehledně a srozumitelně a má velmi dobrou grafickou i

jazykovou úroveň. Prezentace známých výsledků je omezena na minimum nutné k porozumění práci bez zbytečného opakování důkazů dostupných v literatuře. Místo toho se autor soustředí na prezentaci svých původních výsledků, které z velké části získal zcela samostatně a pro jejichž odvození nastudoval velké množství literatury.

Práci považuji za velmi kvalitní a zdařilou, a navrhuji ji proto uznat jako diplomovou.

Praha, 8. 5. 2025 prof. Mgr. Petr Knobloch, Dr., DSc.