

Posudek vedoucího na diplomovou práci
„Graph Covers“
Filipa Filipiho

Předložená práce se zabývá otázkou nakrývání grafů, což je pojem studovaný v topologické a algebraické teorii grafů, který má informatické aplikace v teorii lokálních výpočetních systémů.

V roce 1991 položili Abello, Fellows a Stilwel otázku úplné charakterizace výpočetní složitosti problému H -COVER parametrizovaného grafem H (tento problém se ptá, zda graf daný na vstupu nakrývá graf H). Přes snahu řady výzkumníků jsou dosud známy jen kusé výsledky a k úplné charakterizaci je daleko. Přesto se v poslední době tento problém studuje v obecnějším kontextu grafů s násobnými hranami, smyčkami a půlhranami. Je zajímavé, že již v prvním výše zmíněném článku autoři publikovali výsledky o (multi)grafech, tj. grafech se smyčkami a násobnými hranami. K tomu vedla motivace z topologie, když se vnoření grafu do prostoru chápe jako topologický prostor sám o sobě. Zohlednění půlhran přišlo až v posledních cca 5 letech, motivováno algebraickým popisem symetrií map (tj. nekřížící se nakreslení grafů na plochách). První výsledky o výpočetní složitosti nakrývání grafů s půlhranami byly publikovány v článku autorů Bok, Fiala, Hliněný, Jedličková, Kratochvíl na konferenci MFCS v roce 2021. Je až překvapivé, že uvažování půlhran v tomto kontextu na sebe dalo tak dlouho čekat, neboť nakrývání grafů s půlhranami má silnou vazbu na hranové barvení grafů – d -regulární graf je hranově d -obarvitelný právě tehdy, když nakrývá graf s jedním vrcholem a d půlhranami. Přítomnost půlhran tak činí problém H -COVER výpočetně ještě složitějším. Ve všech případech, kdy je známo, že H -COVER je NP-úplný problém, zůstává tento problém NP-úplný i pro jednoduché grafy na vstupu. A to i v případě, že H je nesouvislý graf [Bok et al., FCT 2021]. V této souvislosti autoři zavedli pojem „ A je silnější než B “ pro souvislé grafy A a B , který znamená, že každý jednoduchý graf nakrývající A musí též nakrývat B . Pokud A není silnější než B , musí existovat svědek – jednoduchý graf, který nakrývá A , ale nenakrývá B . Pro analogii s hranovou 3-barevností kubických grafů jsou takoví svědci nazýváni zobecněnými snarky (snark je jednoduchý 2-souvislý kubický graf, který není hranově 3-obarvitelný, tedy svědek toho, že jednovrcholový graf s jednou půlhranou a jednou smyčkou není silnější než jednovrcholový graf se třemi půlhranami). Protože nakrývání je tranzitivní, A je vždy silnější než B , pokud A nakrývá B . Následně byla vyslovena hypotéza akcentující význam půlhran, která říká, že pokud graf A nemá žádné půlhrany, pak A je silnější než B právě tehdy, když A nakrývá B . Ta byla dokázána pro případy, kdy graf B je kubický graf na jednom vrcholu (a A je libovolný graf), a když A je dipól (tj. dvouvrcholový graf bez smyček a půlhran) s libovolným počtem (paralelních) hran (a B je libovolný graf) [Kratochvíl, Nedela EUROCOMB 2023].

V předložené práci pan Filipi navazuje na výše uvedenou publikaci, studuje jedno- a dvouvrcholové grafy a podává mnoho výsledků, které nejen potvrzují vyslovenou hypotézu, ale v určitých situacích podávají přesný popis dvojic grafů A, B takových, že A je silnější než B . Například Věta 3.1 plně charakterizuje všechny případy, kdy jednovrcholový graf A je silnější než libovolný graf B . Již tento výsledek postihuje nekonečné množství dvojic A, B . V případě dipólu A (tj., když A má dva vrcholy) zůstávají ještě některé kombinace počtů hran a smyček otevřené. Nicméně autor ocharakterizoval nekonečně mnoho případů, a ve všech z těchto případů je hypotéza potvrzena. Konkrétně Věta 4.1 charakterizuje všechny případy, kdy neregulární dipól A je silnější než libovolný graf B , a Věta 5.1 dokazuje výše zmíněnou hypotézu pro všechny případy, kdy A je dipól bez půlhran a B je libovolný graf. Kromě výsledků per se hodnotím velmi pozitivně způsob, jakým se Filipovi několikrát podařilo

mnoho případů shrnout pod jeden argument a tím zredukovat důkazový materiál tak, aby mohl být předložen čtenáři ve stravitelném množství.

Výsledky v předložené práci považuji za velmi zajímavé, netriviální a publikovatelné v kvalitním mezinárodním časopisu. Navíc pan Filipi práci sepsal velmi erudovaně. Velmi rád potvrzuji, že pan Filipi pracoval zcela samostatně. Celou práci hodnotím jako mimořádně zdařilou.

V Praze 24.5.2025


Prof. RNDr. Jan Kratochvíl, CSc.
KAM MFF UK v Praze