

Oponentský posudok na dizertačnú prácu

Mgr. Pavla Nejedlého

STRUCTURAL AND ALGORITHMIC PROPERTIES OF GRAPH COLORING

Dizertačná práca Mgr. Pavla Nejedlého je venovaná niekoľkým aktuálnym problémom týkajúcim sa širšie chápaného pojmu farbenia grafu. Skladá sa zo štyroch viac-menej samostatných častí rozdelených spolu na jedenásť kapitol. Každá z častí má vlastnú úvodnú kapitolu, ktorá stručne sumarizuje stav problematiky skúmanej v danej časti. Hoci dizertačná práca obsahuje výsledky zhrnuté do siedmich vedeckých prác, nie je iba súborom týchto prác, ale osobitným dielom. Pokiaľ ide o práce, ktorých výsledky sa stali súčasťou dizertácie, s jednou výnimkou boli vytvorené v spoluautorstve, pričom medzi spoluautormi sú aj zvučné mená zo zahraničia ako Xuding Zhu a Riste Škrekovski, a keď už bola práca publikovaná, išlo o kvalitné medzinárodné médium.

Každá zo štyroch častí dizertačnej práce sa odvíja od nejakého dôležitého problému alebo významnej hypotézy a podstatným spôsobom prispieva k poznaniu v danej oblasti. Tak prvá časť je venovaná farbeniu vzdialenostných štvorcov planárnych grafov a vychádza z hypotézy Wanga a Liha (2003) o ohraničení chromatického čísla štvorcov planárnych grafov bez krátkych kružíc. V tejto časti sú dokázané dva výsledky. Prvý dopĺňa výsledok Borodina a ďalších (2004) o chromatickom čísle štvorcov planárnych grafov obvodu aspoň 7 najlepším možným odhadom pre obvod 6. Druhý výsledok sa zaoberá analogickou otázkou pre špeciálnejšie farbenia, ktoré sa zvyknú nazývať $L(2,1)$ -ohodnoteniami. V oboch prípadoch sú dôkazy založené na metóde vybíjania, ktorú autor používa veľmi zručne a s invenciou.

Téma druhej časti je podobná prvej, ibaže v nej sa skúma trieda trieda sériovo-paralelných grafov, teda grafov bez subdivízie kompletneho grafu K_4 . Keďže tieto grafy sú planárne, cieľom bolo získať silnejšie alebo všeobecnejšie výsledky. V prvej kapitole tejto časti sa zovšeobecňuje výsledok Liha, Wanga a Zhu (2003) o farbeniach grafov bez K_4 na $L(p,q)$ -ohodnotenia pre všeobecné p a q . V nasledujúcej kapitole je zase dokázaný výberový variant tohto tvrdenia. Rovnaký výsledok nezávisle získali aj Hetherington a Woodall a nedávno (28. 9. 2008) bol publikovaný v časopise *Discrete Mathematics*. Techniky v oboch kapitolách sú založené na hlbokéj a komplikovanej analýze štruktúry sériovo-paralelných grafov.

Tretia časť dizertačnej práce sa odvíja od problému C. Thomassena (1997) o rozšírení farbení triangulácií valcovej plochy (cylindra) z predfarbení jeho hranice. Tento problém úzko súvisí s charakterizáciou farebne k -kritických grafov vnorieľných do plochy daného rodu, ktorej história siaha až ku klasickým výsledkom Heawooda z konca 19. storočia o chromatickom čísle grafov vnorieľných do plochy kladného rodu. Thomassenov problém sa pýta, či je možné takéto farbenie rozšíriť na celú trianguláciu, ak vieme, že sa dá rozšíriť na 5-zafarbenie každého podgrafu triangulácie s počtom vrcholov najviac 14. Je známe, že hodnota 14 je najmenšia možná. Autor dizertácie dáva na túto otázku kladnú odpoveď, pričom na jej získanie používa umnú kombináciu matematických úvah a počítačovej verifikácie.

Záverečná časť dizertačnej práce sa venuje krátkym pokrytiam grafov cyklami. Výskum v tejto oblasti ovplyvňujú dve dôležité a hypotézy – *Hypotéza o dvojitém pokrytí cyklami* (Cycle Double Cover Conjecture) a silnejšia *Hypotéza o najkratšom pokrytí cyklami* (Shortest Cycle Cover Conjecture). Dizertácia tu prináša dva závažné výsledky týkajúce sa druhej z hypotéz. Prvý výsledok hovorí, že každý bezmostový kubický graf sa dá pokryť tromi

cyklami, ktorých celková dĺžka je najviac $34/21$ počtu hrán. Tým je prekonaný doteraz najlepší známy odhad $44/27$, ktorú dokázal G. Fan (1994). Druhý výsledok sa týka všeobecných bezmostových grafov a hovorí, že každý takýto graf má cyklové pokrytie, ktorého celková dĺžka je najviac $44/27$ počtu všetkých hrán. Tento výsledok rozširuje Fanov odhad z kubických grafov na všetky bezmostové grafy, a tým prekonáva doteraz najlepší známy odhad $5/3$ dokázaný Alonom, Bermondom a ďalšími (1983, 1985). Metódy sú založené na použití klasickej metódy odštiepenia dvoch hrán od vrchola stupňa aspoň 4, na tzv. dúhovej leme a jej váženom variante a na ďalších jemných úvahách využívajúcich nikde nulové toky.

Ako celok dizertačná práca prináša veľké množstvo hodnotných a inšpiratívnych výsledkov v oblasti, ktorú je možné považovať za jadro modernej teórie grafov, teda v oblasti, kde prebieha intenzívny medzinárodný výskum. Je napísaná dobrým, príjemne čitateľným štýlom na vysokej metodologickej aj jazykovej úrovni. Mám k nej len veľmi málo výhrad alebo kritických poznámok. Prvá z nich sa týka celkovej štruktúry dizertačnej práce, kde mi chýba krátka sumarizujúca úvodná kapitola, ktorá by prácu sceliila a zabránila by mierne fragmentárnemu dojmu, ktorý som z nej získal. Za istý nedostatok považujem aj dvojaké použitie pojmu „cycle“ v dizertačnej práci, čo je síce v súlade so zvyklosťami, ale deje sa to bez väčšieho upozornenia. Napokon si dovoľím vysloviť názor, že vo svojom základnom tvare na str.111 je dúhová lema vyslovená v zbytočne komplikovanom tvare, ktorý podľa mňa zatemňuje podstatu veci. Tou je totiž skutočnosť, že každý bezmostový kubický graf obsahuje 2-faktor, ktorého kontrakciou po komponentoch vzniká nepárne 5-hranovo súvislý graf (Veta 10.3), a ten podľa Jaegerovej vety (Veta 10.2) má nikde nulový $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -tok. Z posledného faktu vzniká dúhová lema už len priamym prekladom. Detailné rozobratie možností v Leme 10.4 však považujem už za plne na mieste.

Záverom konštatujem, že dizertačná práca Mgr. Pavla Nejedlého jednoznačne preukazuje schopnosť jej autora samostatne vedecky pracovať, a preto navrhujem, aby mu po úspešnej obhajobe bola udelená vedecká hodnosť *Philosophiae doctor* (Ph.D.).

V Bratislave 8. novembra 2008.



Prof. RNDr. Martin Škoviera, Ph.D.